

Bài 1. (2 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5x^2 - 26x + 24$

b) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

c) $x^2 + 6x + 5$

d) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$(6x + 7)(2x - 3) - (4x + 1)\left(3x - \frac{7}{4}\right)$$

b) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x - y}{x + y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x + y \neq 0; y \neq 0$)

c) Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2015$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

Bài 3. (1,25 điểm) Cho biểu thức : $A = \frac{4xy}{y^2 - x^2} : \left(\frac{1}{y^2 - x^2} + \frac{1}{y^2 + 2xy + x^2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x, y để giá trị của A được xác định

b) Rút gọn A

c) Nếu x, y là các số thực làm cho A xác định và thỏa mãn: $3x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$, hãy tìm tất cả các giá trị nguyên dương của A.

Bài 4. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $|5 - 3x| = 3x - 5$

c) $\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$

d) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Bài 5. (2,75 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Qua A vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt BC tại P và R , cắt CD tại Q và S

- Chứng minh $\triangle AQR$ và $\triangle APS$ là các tam giác cân
- QR cắt PS tại H . M, N là trung điểm của QR và PS . Chứng minh tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật
- Chứng minh P là trực tâm $\triangle SQR$
- Chứng minh MN là đường trung trực của AC
- Chứng minh bốn điểm M, B, N, D thẳng hàng.

Bài 6. (0,5 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2015$

b) Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh : $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\text{a) } 5x^2 - 26x + 24 = 5x^2 - 6x - 20x + 24 = x(5x - 6) - 4(5x - 6) = (5x - 6)(x - 4)$$

$$\text{b) } \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 1^2 - 1^3 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$$

$$\text{c) } x^2 + 6x + 5 = x(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 5)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015 &= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x + 2015x^2 + 2015x + 2015 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 2015(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2015) \end{aligned}$$

Bài 2.

$$(6x + 7)(2x - 3) - (4x + 1)\left(3x - \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{a) } = 12x^2 - 18x + 14x - 21 - 12x^2 + 7x - 3x + \frac{7}{4} = \frac{-77}{4}$$

$$\text{b) } x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

Vì $x + y \neq 0$ nên $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. Khi đó $A = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{1}{3}$

$$\text{c) } P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2015 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2015$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t - 5)(t + 3) = t^2 - 2t + 2000$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2000.

Bài 3.

$$\text{a) } x \neq \pm y; y \neq 0$$

$$\text{b) } A = 2x(x + y)$$

c) Cần chỉ ra giá trị lớn nhất của A , từ đó tìm được tất cả các giá trị nguyên dương của A

Từ (gt): $3x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + x^2 - 2xy + y^2 + 2(x - y) = 1$

$$\Rightarrow 2x(x + y) + (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 = 2 \Rightarrow A + (x - y + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow A = 2 - (x - y + 1)^2 \leq 2 \text{ (do } (x - y + 1) \geq 0 \forall x, y) \Rightarrow A \leq 2$$

+) $A = 2$ khi
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x(x + y) = 2 \\ x \neq \pm y; y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

+) $A = 1$ khi
$$\begin{cases} (x - y + 1)^2 = 1 \\ 2x(x + y) = 1 \\ x \neq \pm y; y \neq 0 \end{cases}$$
 . Từ đó, chỉ cần chỉ ra được một cặp giá trị của x và y , chẳng

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \end{cases}$$

hạn: $y = \frac{\sqrt{2} + 3}{2}$

Vậy A chỉ có thể có 2 giá trị nguyên dương là: $A = 1; A = 2$

Bài 4.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

a)

b) $|5 - 3x| = 3x - 5 \Leftrightarrow |3x - 5| = 3x - 5 \Leftrightarrow 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

c) ĐKXD: $x \neq -1; -4; -6; 3$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{4}{3} + \frac{9}{(x-3)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{3(x+1)(x-3)} = \frac{4(x+1)(x-3)}{3(x+1)(x-3)} + \frac{3(x+1)}{3(x+1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=2(tm) \end{cases}$$

$$S = \{0; 2\}$$

$$d) \quad x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

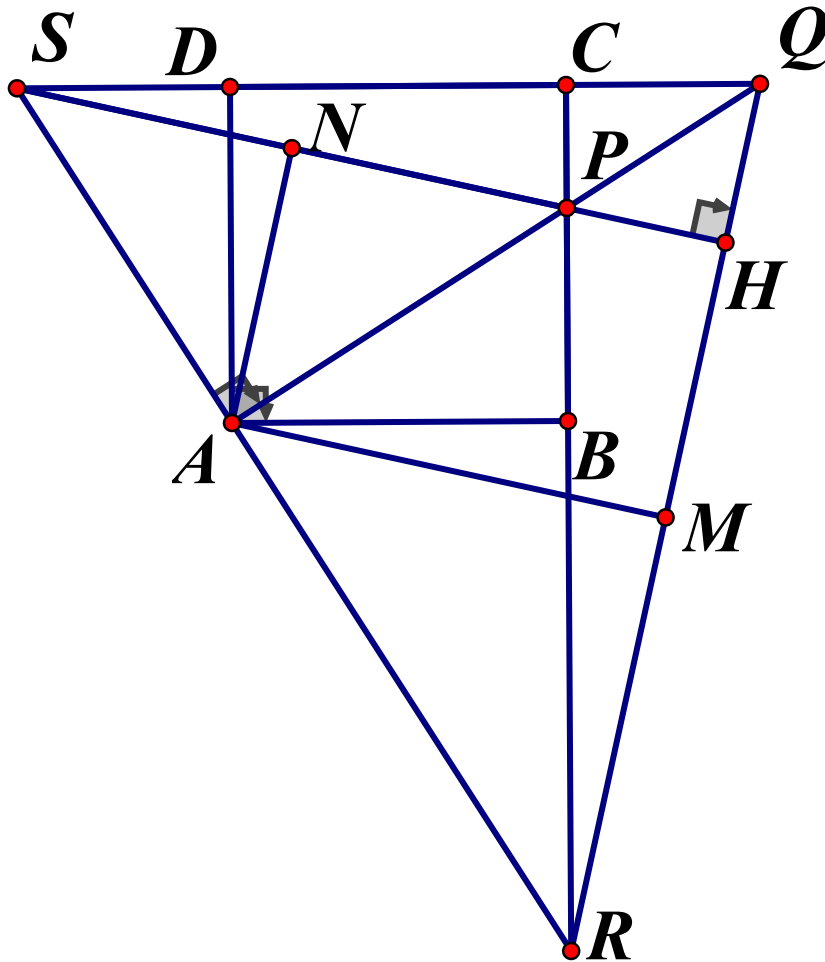
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

$$x+y+3 > x-y-1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+3=7 \\ x-y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vì x, y nguyên dương nên

$$\text{Vậy } (x; y) = (3; 1)$$

Bài 5.



- a) $\triangle ADQ = \triangle ABR$ vì chúng là hai tam giác vuông và $DA = BD$
 $\Rightarrow AQ = AR \Rightarrow \triangle AQR$ vuông cân. Chứng minh tương tự ta có: $\triangle ABP = \triangle ADS$

Do đó $AP = AS$ và $\triangle APS$ là tam giác cân tại A

- b) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân AQR và APS nên
 $AN \perp SP$ và $AM \perp RQ$

Mặt khác $\widehat{PAN} = \widehat{PAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ$. Vậy tứ giác $AHMN$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật

- c) Theo giả thiết: $QA \perp RS, RC \perp SQ$ nên QA và RC là hai đường cao của $\triangle SQR$
 Vậy P là trực tâm $\triangle SQR$

- d) Trong tam giác vuông cân AQR thì MA là trung điểm nên $AM = \frac{1}{2}QR$
 $\Rightarrow MA = MC$, nghĩa là M cách đều A và C.

Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân ASP và tam giác vuông SCP , ta có $NA = NC$, nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC

- e) Vì $ABCD$ là hình vuông nên B và D cũng cách đều A và C. Nói cách khác, bốn điểm M, N, B, D cùng cách đều A và C nên chúng phải nằm trên đường trung trực AC, nghĩa là chúng thẳng hàng

Bài 6.

- a) $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2015$
 $= y^2 + 4xy - 2y + 13x^2 - 16x + 2015$
 $= y^2 + 2y(2x - 1) + (2x - 1)^2 + 9x^2 - 12x + 2015$
 $= (y + 2x - 1)^2 + (3x - 2)^2 + 2010$

Chúng tỏ $A \geq 10$. dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{3}$

$$\min A = 2010 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy

- b) Ta có: $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + ab - \frac{1}{2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + ab - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \geq 0 \quad (\text{vì } a + b = 1)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2(1 - a)^2 - 1 \geq 0 \quad (\text{vì } b = 1 - a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2 - 4a + 2a^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) \geq 0 \quad \forall a \quad (2)$$

(2) đúng nên (1) đúng ta có đpcm.

