



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 6

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{y^2 + z^2} + \frac{z^4}{z^2 + x^2}$$

Bài 2. Trên bảng có ghi 3 hàm số

$$f_1(x) = x + 1/x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = (x - 1)^2.$$

Ta có thể cộng, trừ hoặc nhân các hàm số này (trong đó có thể bình phương, lập phương, ...), nhân cho một số bất kỳ, cộng với một số bất kỳ, và có thể thực hiện các phép toán này với các kết quả thu được. Hãy thu được bằng cách này hàm số $1/x$. Chứng minh rằng, nếu xoá đi trên bảng bất cứ một hàm số nào từ các hàm số f_1, f_2, f_3 , thì không thể thu được hàm số $1/x$.

Bài 3. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi L là giao điểm của AI và BC và X là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với BC. Gọi D là điểm đối xứng của L qua X trên đường thẳng BC và B', C' là điểm đối xứng của D qua BI và CI tương ứng. Chứng minh rằng tứ giác BCC'B' nội tiếp một đường tròn.

Bài 4. Chứng minh rằng hai số p và $p+2$ là các số nguyên tố sánh đôi khi và chỉ khi $4((p-1)!+1) + p$ chia hết cho $p(p+2)$.

Bài 5. Quanh một bàn tròn có 100 người đại diện cho 25 nước, mỗi nước có 4 đại diện. Chứng minh rằng có thể chia những người này thành 4 nhóm, sao cho trong mỗi nhóm có đủ đại diện của mỗi nước và không có thành viên nào cùng nhóm ngôn ngữ nhau.