ĐỀ THI VÀO 10 THPT NĂM HỌC 2025-2026 - MÔN TOÁN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM ***(3 điểm gồm 12 câu, mỗi câu 0,25 điểm)***

Câu 1. Hai số u, v có tổng và tích lần lượt là 32 và $231.$ Khi đó u và v là nghiệm của phương trình nào dưới đây ?

A. $x^2 - 32x + 231 = 0.$ **B.** $x^2 + 32x + 231 = 0.$ **C.** $x^2 - 231x - 32 = 0.$ **D.** $x^2 + 231x + 32 = 0.$

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(2; -1)$. **B.** $(1; -2)$. **C.** $(-2; 1)$. **D.** $(-1; 2)$.

Câu 3. Kết quả rút gọn của biểu thức $2\sqrt{5} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$ là

A. $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$. **B.** $3\sqrt{5} - 1$. **C.** $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$. **D.** $1 + \sqrt{5}$.

Câu 4. Rút gọn biểu thức $B = \dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ta được:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** -1. **D.** $-\sqrt{3}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình y = ax + b. Tìm a; b để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-2; 5) và song song với đường thẳng (d') có phương trình y = 2x + 3.

A. $a = 2, b = 8$. **B.** $a = -2, b = 9$. **C.** $a = 2, b = -9$ **D.** $a = 2, b = 9$.

Câu 6. Cho hàm số y = (3m + 2)x^2 với $m \neq -\dfrac{2}{3}.$ Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm (-1; 2)

A. $m = -\dfrac{2}{3}.$. **B.** m = 0. **C.** m =. -1 **D.** $m = 1$

Câu 7.Xét tam giác ABC vuông tại B. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\sin C = \dfrac{AB}{AC}$ **B.** $\sin C = \dfrac{AB}{BC}$ **C.** $\cos C = \dfrac{BC}{AC}$ **D.** $\tan C = \dfrac{BA}{BC}$

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB = 10cm$; $AC = 12cm$; $\hat{A} = 40^0$, góc C gần bằng góc nào sau nhất.

A. 50^0 **B.** 60^0 **C.** 70^0 **D.** 56^0

Câu 9. Kết luận nào sau đây sai?

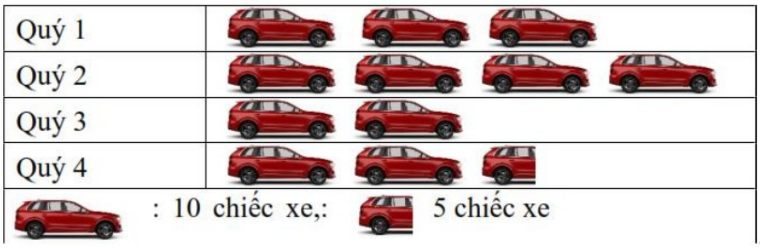
A.Trong hình nón, mọi đường sinh bằng nhau.

B.Trong hình nón, đường cao vuông góc với bán kính đường tròn đáy.

C.Trong hình nón, chỉ có một đường tròn đáy.

D.Trong hình nón có vô số đỉnh.

Câu 10. Một cửa hàng bán ô tô thống kê số lượng ô tô bán được trong bốn quý năm 2021 được kêt quả như sau:



Tổng số xe bán được trong bốn quý là:

A. 11 chiếc. **B.** 110 chiếc. **C.** 115 chiếc. **D.** 12 chiếc.

Câu 11: Khi gieo hai con xúc sắc, gọi T là tổng số chấm trên hai con xúc sắc thì kết quả nào sau đây không thể xảy ra :

A. T = 1. B. T = 3. C. T = 2. D. T = 4.

Câu 12: Tung đồng xu 32 lần liên tiếp, có 18 lần xuất hiện mặt sấp thì xác xuất thực nghiệm xuất hiện mặt ngửa là:

A. $\frac{18}{32}$ **B.** $\frac{7}{16}$ **C.** $\frac{12}{32}$ **D.** $\frac{3}{8}$

II. PHẦN TỰ LUẬN. (7 điểm)

Câu 13. (1,5 điểm) Cho biểu thức $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}+\frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}\right).\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 4$.

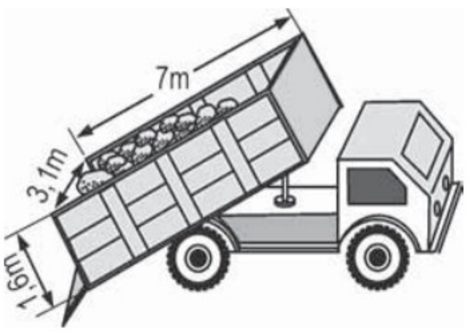
1. Rút gọn biểu thức B 2. Tìm giá trị của x biết $B<\frac{1}{2}$

Câu 14. (1,0 điểm) Giải phương trình $x^4-3x^2-4=0$.

Câu 15. (1,5 điểm) Cho phương trình :$x^2-(2m+1)x+m^2-6=0$ (1) với m là tham số .

1. Giải phương trình (1) khi m = 0
2. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2thoả mãn $x_1^2-6x_2^2+x_1=x_1x_2+3x_2$

Câu 16. (0,5 điểm) Thùng của một xe tải có dạng của một hình lăng trụ đứng (như hình vẽ) Các kích thước được cho trên hình. Nếu $1m^3$ cát nặng 1,6 tấn và xe chở đến $\frac{3}{4}$ tải trọng thì khối lượng của cát lúc đó là bao nhiêu kg?



Câu 17. **(2 điểm) .** Cho đường tròn $(O;R)$, vẽ dây AB cố định không đi qua tâm O. Lấy điểm S bất kì thuộc tia đối của tia AB. Kẻ hai tiếp tuyến SM, SN với (O), (M, N là các tiếp điểm, M thuộc cung nhỏ AB). Kẻ OH vuông góc AB tại H.

1) Chứng minh 5 điểm O, H, N, S, M cùng thuộc một đường tròn.

2) Phân giác của góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh ΔSMK cân.

3) Gọi I là trung điểm của NB. Kẻ $IF \perp AN (F \in AN)$. Giả sử góc AOB bằng 120^0. Chứng minh rằng điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán trình của đường tròn này theo R.

Câu 18. **(0,5 điểm)** Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

(HẾT)

ĐÁP ÁN ĐỀ THI MINH HỌA VÀO 10 THPT NĂM HỌC 2025-2026 - MÔN TOÁN

GVSB-07-Lê Thị Quang

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM ***(3 điểm gồm 12 câu, mỗi câu 0,25 điểm)***

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	B	C	B	B	B	D	D	C	A	B

Câu 1. Hai số u, v có tổng và tích lần lượt là 32 và $231.$ Khi đó u và v là nghiệm của phương trình nào dưới đây ?

A. $x^2 - 32x + 231 = 0.$ **B.** $x^2 + 32x + 231 = 0.$ **C.** $x^2 - 231x - 32 = 0.$ **D.** $x^2 + 231x + 32 = 0.$

Lời giải

Vì $u+v=32$ *và* $u.v=231$ *nên hai số u và u là nghiệm của phương trình*

$x^2 - 32x + 231 = 0.$ **Vậy chọn đáp án A**

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases}3x+2y=4\\2x-y=5\end{cases}$ có nghiệm là

A. $(2;-1)$. **B.** $(1;-2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-y=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+2y=4\\4x-2y=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+2y=4\\7x=14\end{cases}$$

$\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (x; y) = (2; -1). Vậy chọn đáp án A

Câu 3. Kết quả rút gọn của biểu thức $2\sqrt{5}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$ là

A. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $3\sqrt{5}-1$. **C.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Lời giải

B = $2\sqrt{5}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$ = $2\sqrt{5}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$ = $2\sqrt{5}+\sqrt{5}-1$ = $3\sqrt{5}-1$ .Vậy chọn đáp án B

Câu 4. Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ta được:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** -1. **D.** $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}-\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$B=\sqrt{5}-2+\sqrt{3}+1-\sqrt{5}-\sqrt{3}=-1$.

Vậy B = -1. Vậy chọn đáp án C

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình y = ax + b. Tìm a; b để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-2; 5) và song song với đường thẳng (d’) có phương trình y = 2x + 3.

A. $a=2, b=8$. **B.** $a=-2, b=9$. **C.** $a=2, b=-9$ **D.** $a=2, b=9$.

Lời giải

Đường thẳng (d): y=ax +b song song với đường thẳng (d’): y= 2x+3 nên $\begin{cases} a=2 \\ b\neq 3 \end{cases}$

Do (d) : y= 2x +b đi qua điểm A(-2;5) nên: 5 =2.(-2) +b$suy\, ra\, 5=-4+b$

$\Leftrightarrow b=9$ .Vậy a=2 , b= 9 .
vậy chọn đáp án D

Câu 6. Cho hàm số y = (3m + 2)x^2 với $m\neq -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của tham số m để đồ thì hàm số đã cho đi qua điểm (-1; 2)

A. $m=-\dfrac{2}{3}$. **B.** m = 0. **C.** m =. -1 **D.** $m=1$

Lời giải

Thay x = -1, y = 2 vào công thức hàm số : 2 = 3m+ 2 suy ra m= 0

Vậy chọn đáp án B

Câu 7 Xét tam giác ABC vuông tại B. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\sin C=\dfrac{AB}{AC}$ **B.** $\sin C=\dfrac{AB}{BC}$ **C.** $\cos C=\dfrac{BC}{AC}$ **D.** $\tan C=\dfrac{BA}{BC}$

Lời giải

Vì tam giác ABC vuông tại B, áp dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn ta có

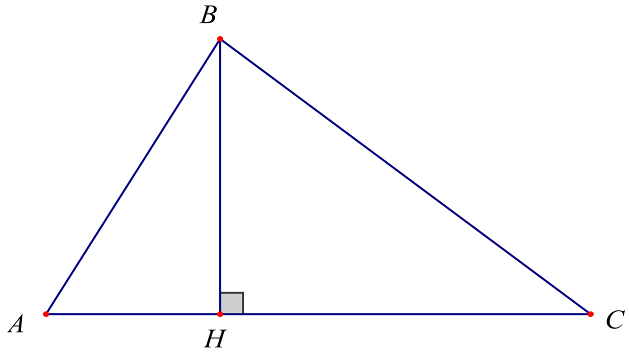
$$\sin C = \frac{AB}{BC}.$$

vậy chọn đáp án B

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB = 10cm$; $AC = 12cm$; $\hat{A} = 40^0$, góc C gần bằng góc nào sau nhất.

A. 50^0 **B.** 60^0 **C.** 70^0 **D.** 56^0

Lời giải



Hướng dẫn: Xét tam giác vuông ABH, ta có

$BH = AB.\sin A = 10.\sin 40^0 \approx 6,428cm$

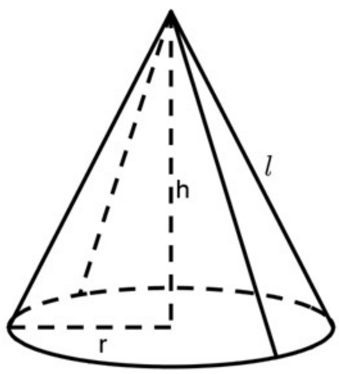
$AH = AB.\cos A = 10.\cos 40^0 \approx 7,66cm$

$\Rightarrow CH = AC - AH \approx 12 - 7,66 = 4,34cm$

Xét tam giác vuông BHC, ta có: $\tan C = \frac{BH}{CH} = \frac{6,428}{4,34} \approx 1,481 \Rightarrow \hat{C} \approx 56^0$

Vậy chọn đáp án D

Câu 9.
Kết luận nào sau đây sai?



A. Trong hình nón, mọi đường sinh bằng nhau.

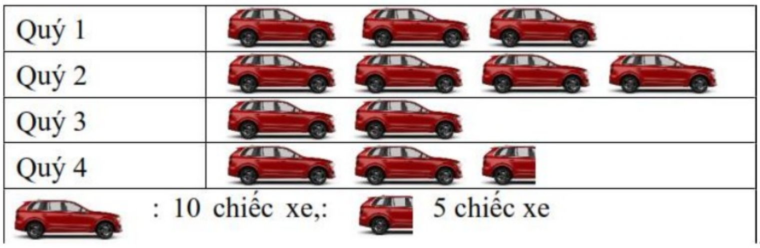
B. Trong hình nón, đường cao vuông góc với bán kính đường tròn đáy.

C. Trong hình nón, chỉ có một đường tròn đáy.

D. Trong hình nón có vô số đỉnh.

Chọn đáp án D

Câu 10. Một cửa hàng bán ô tô thống kê số lượng ô tô bán được trong bốn quý năm 2021 được kêt quả như sau:



Tổng số xe bán được trong bốn quý là:

A. 11 chiếc. **B.** 110 chiếc. **C.** 115 chiếc. **D.** 12 chiếc.

Lời giải

Ta có : 11.10 + 5 = 115 chiếc xe.

Vậy chọn đán án C

Câu 11: Khi gieo hai con xúc sắc, gọi T là tổng số chấm trên hai con xúc sắc thì kết quả nào sau đây không thể xảy ra :

A. T = 1. B. T = 3. C. T = 2. D. T = 4.

Lời giải

Do tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc nhỏ nhất là 2 và lớn nhất là 12 nên tổng 1 chấm ko xảy ra.

Vậy chọn đáp án A

Câu 12: Tung đồng xu 32 lần liên tiếp, có 18 lần xuất hiện mặt sấp thì xác xuất thực nghiệm xuất hiện mặt ngửa là:

A. $\frac{18}{32}$ **B** $\frac{7}{16}$ **C.** $\frac{12}{32}$ **D.** $\frac{3}{8}$

Lời giải

Số lần xuất hiện mặt ngửa là : $32 - 18 = 14$

Xác suất xuất hiện mặt ngửa là $14: 32 = \frac{7}{16}$. Vậy chọn đáp án B

II. PHẦN TỰ LUẬN. (7,5 điểm)

Câu 13. (1,5 điểm) Cho biểu thức B $= \left(\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}\right).\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức B

2. Tìm giá trị của x biết B $< \frac{1}{2}$

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức B.

với $x > 0;\ x \neq 4$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4} \right) \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \left[\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+2x-\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \right] \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2-x-2\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $B = \frac{x+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0;\ x \neq 4$

2. Tìm các giá trị của x biết $B < \frac{1}{2}$

Ta có: $B = \frac{x+1}{\sqrt{x}+2}\ (x > 0,\ x \neq 4)$

Để $B < \frac{1}{2}$ khi $\frac{x+1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$ $suy\ ra\ 2x+2 < \sqrt{x}+2$ vì $\sqrt{x}+2 > 0$

$suy\ ra\ 2x-\sqrt{x} < 0$ $suy\ ra\ \sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right) < 0$

$suy\ ra\ 2\sqrt{x}-1 < 0$vì $\sqrt{x} > 0\ \forall x > 0$ $suy\ ra\ \sqrt{x} < \frac{1}{2}$ $suy\ ra\ x < \frac{1}{4}$

Kết hợp với điều kiện $x > 0;\ x \neq 4 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$

Vậy $0 < x < \frac{1}{4}$ thì $B < \frac{1}{2}$

Câu 14. (1,0 điểm) Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Lời giải

. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(x^2-4\right) = 0$

Suy ra $x^2 - 4 = 0\left(vì\ x^2+1 \neq 0\right)$

$x^2 = 4\ suy\ ra\ x = \pm 2$

Vậy x ¿± 2

Câu 15.(1,5 điểm) Cho phương trình :x^2- (2m + 1)x + m^2- 6 = 0 (1) với m là tham số .

1.Giải phương trình (1) khi m = 0

2. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 = x_1x_2 + 3x_2$

Lời giải

1. Khi m = 0 phương trình (1) có dạng : $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = (-1)2 - 4.1.(-6) = 25 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x1 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2.1} = 3$; $x2 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2.1} = -2$

2. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì :

$\{ ¿\Delta > ¿ \wedge x_1.x_2 < 0$

$\begin{cases} -[(2m+1)]^2 - 4(m^2-6) > 0 \\ ¿ m^2 - 6 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} ¿ 4m+25>0 \\ ¿ |m| < \sqrt{6} \end{cases}$

$\begin{cases} ¿ 4m+25>0 \\ ¿ |m| < \sqrt{6} \end{cases}$

$\begin{cases} ¿ m > \dfrac{-25}{4} \\ ¿ -\sqrt{6} < m < \sqrt{6} \end{cases}$

$suy\, ra - \sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Vậy với m $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$ thì PT có hai nghiệm phân biệt trái dấu nhau.

Theo định lí Viets ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1.x_2 = m^2 - 6 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có :

$x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 = x_1x_2 + 3x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - x_1x_2 - 3x_2 = 0$

$x_1^2 - 3x_1x_2 - 6x_2^2 + x_1 + 2x_1x_2 - 3x_2 = 0$

$x_1(x_1 - 3x_2) + 2x_2(x_1 - 3x_2) + (x_1 - 3x_2) = 0$

$(x_1 - 3x_2)(x_1 + 2x_2 + 1) = 0$ suy ra $\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

+Khi $\begin{cases} ¿ x_1 = 3x_2 \\ ¿ x_1 + x_2 = 2m+1 \end{cases}$ $suy\, ra \begin{cases} ¿ x_1 = 3x_2 \\ ¿ x_2 = \dfrac{2m+1}{4} \end{cases}$

Ta có : $\frac{3(2m+1)^2}{16}=m^2-6\, suy\, ra\, 16m^2-96-12m^2-12m-3=0$

$4m^2 – 12m - 99 = 0$ (*)

Giải pt (*) ta có $m_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{432}}{4}$ (KTM)

(Cách khác : Do x_1 và x_2 trái dấu nhau nên $x_1- 3x_2 =0$ không xảy ra)

+Khi $\begin{cases} ¿x_1+2x_2=-1 \\ ¿x_1+x_2=2m+1 \end{cases}$

$\begin{cases} ¿x_2=-2m-2 \\ ¿x_1+x_2=2m+1 \end{cases}$

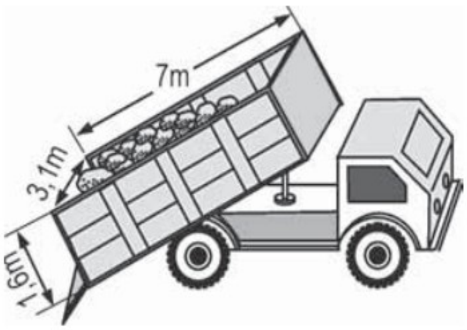
$\begin{cases} ¿x_2=-2m-2 \\ ¿x_1=4m+3 \end{cases}$

Ta có : $(-2m-2).(4m+3)= m^2-6$ suy ra $9m^2-14m = 0$

Suy ra : m = 0 (TM) ; m =-14/9 (TM)

Vậy m = 0 (TM) ; m =-14/9 (TM) thì phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu thoả mãn hệ thức : $x_1^2- 6x_2^2+x_1= x_1x_2+3x_2$

Câu 16. **(0,5 điểm)** Thùng của một xe tải có dạng của một hình lăng trụ đứng (như hình vẽ) Các kích thước được cho trên hình. Nếu $1m^3$ cát nặng 1,6 tấn và xe chở đến $\frac{3}{4}$ tải trọng thì khối lượng của cát lúc đó là bao nhiêu kg?



Lời giải

Thể tích thùng chứa: V = 1,6.3,1.7 = 34,72 m^3 0.5

Khối lượng cát khi xe chở $\frac{3}{4}$ tải trọng là : $\frac{3}{4}$.34,72.1,6 = 41,664 tấn = 41 664 kg

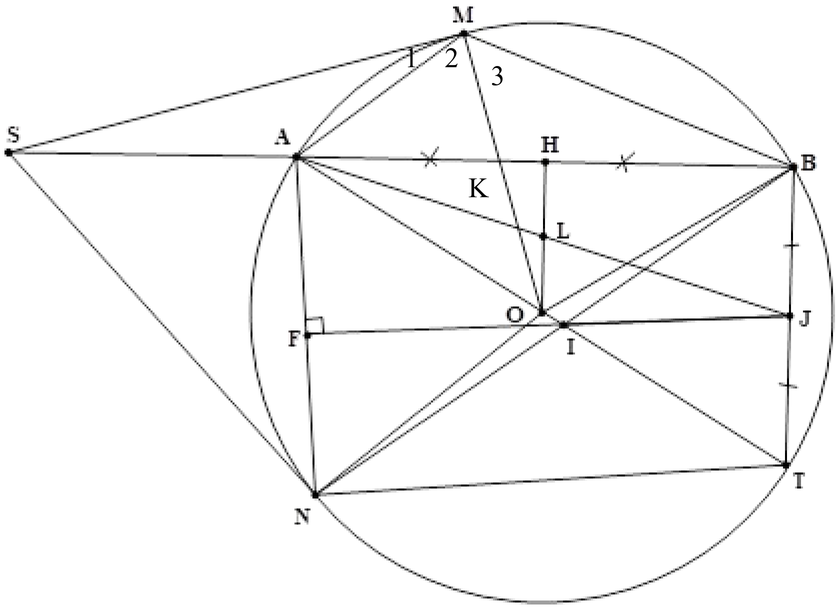
Câu 17.(2 điểm) . Cho đường tròn $(O;R)$, vẽ dây AB cố định không đi qua tâm O. Lấy điểm S bất kì thuộc tia đối của tia AB. Kẻ hai tiếp tuyến SM,SN với (O), (M,N là các tiếp điểm, M thuộc cung nhỏ AB). Kẻ OH vuông góc với AB tại H

1) Chứng minh 5 điểm O,H,N,S,M cùng thuộc một đường tròn.

2) Phân giác của góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh ΔSMK cân.

3) Gọi I là trung điểm của NB. Kẻ $IF \perp AN\,(F \in AN)$. Giả sử góc AOB bằng 120^0. Chứng minh rằng điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán trình của đường tròn này theo R.

Lời giải



1) Chứng minh 5 điểm O, H, N, S, M cùng thuộc một đường tròn.
Gọi P là trung điểm SO.

Ta có $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến).

Do vậy $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SHO} = 90^\circ$

Xét tam giác SMO vuông tại M , có MP là trung tuyến ứng cạnh huyền SO nên SP= PO= MP
Tương tự ta có SP= NP= HP= OP

nên 5 điểm O, H, N, S, M cùng thuộc một đường tròn đường kính SO.

2) Phân giác của góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh ΔSMK cân.

Ta có $\widehat{ABM} = \dfrac{\text{sd}\,\overset{\frown}{AM}}{2}$ (G óc nội tiếp chắn cung). (1)

Ta chứng minh được $\widehat{SMA} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$ mà $\widehat{AOM} = sd\,\overset{\frown}{AM}$ (góc ở tâm chắn cung AM)

Nên $\widehat{SMA} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{AM}}{2}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{SMA} = \widehat{ABM}$

Khi đó $\widehat{SMK} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{ABM} + \widehat{M}_2 = \widehat{ABM} + \widehat{M}_3 = \widehat{SKM}$ (Góc ngoài của tam giác KMB).

($\widehat{M}_1; \widehat{M}_2; \widehat{M}_3$ chưa tương ứng với hình vẽ)

Vậy tam giác SMK cân tại S.

3) Gọi I là trung điểm của NB. Kẻ $IF \perp AN (F \in AN)$. Giả sử góc AOB bằng 120^0. Chứng minh rằng điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán kính của đường tròn này theo R.

Gọi AT là bán kính của đường tròn tâm O. Vì A, O cố định nên T cố định.

Gọi J là trung điểm của BT. Vì B, T cố định nên J cố định.

Ta có $\widehat{ANT} = 90^\circ \Rightarrow AN \perp NT$.

Mặt khác, $IF \perp AN$ nên $IF // NT$.

Ta lại có $IJ // NT$ suy ra F, I, J thẳng hàng.

$\widehat{ABJ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABJ} = \widehat{AFJ} = 90^\circ$ nên A, B, J, F nội tiếp đường tròn đường kính AJ.

Vì AJ cố định nên trung điểm L của AJ cố định hay đường tròn tâm L bán kính LA cố định.

Vậy điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định tâm L bán kính LA.

Xét tam giác AOH vuông tại H có $\widehat{AOH} = 60^\circ; OA = R$.

$$\frac{AH}{AO} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow AH = AO.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$\frac{AH}{AO} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow AH = AO.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Suy ra $AB = 2AH = \sqrt{3}.R$.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ABT vuông tại B có $AT = 2R; AB = \sqrt{3}R$ ta có

$$BT = \sqrt{AT^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R \Rightarrow BJ = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{2}R.$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ABJ vuông tại B có $BJ = \frac{1}{2}R; AB = \sqrt{3}R$ ta có

$$AJ = \sqrt{AB^2 + BJ^2} = \sqrt{3R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{13}R}{2} \Rightarrow AL = \frac{1}{2}AJ = \frac{\sqrt{13}R}{4}.$$

Câu 18.(0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \le \frac{1}{4}(a+b+c)$$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ với x, y > 0.

Thậy vậy, với x, y > 0 thì:

$$\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \ge 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Do đó: $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ với x, y > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{a+b+2c}=\frac{1}{(a+c)+(b+c)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\Rightarrow\frac{ab}{a+b+2c}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Tương tự ta có:
$$\begin{cases}\dfrac{bc}{b+c+2a}\le\dfrac{bc}{4}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{c+a}\right)\\ \dfrac{ca}{c+a+2b}\le\dfrac{ca}{4}\left(\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{a+b}\right)\end{cases}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức với nhau ta được:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{c+b}+\frac{bc+ca}{b+a}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{c+b}+\frac{c(b+a)}{b+a}\right]=\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Do đó $VT\le\frac{1}{4}VP$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

---Hết ---