

$$A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$$

Câu 1. (4 điểm) Cho biểu thức

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .

Câu 2. (5 điểm)

- 1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 12x - 8y + 15 = 0$
- 2) Chứng minh: Tổng lập phương của ba số nguyên dương liên tiếp chia hết cho 9.
- 3) Tìm đa thức $H(x)$ có bậc 3 thỏa mãn: $H(1) = H(2) = H(3) = 0$ và với mọi x luôn có $H(x) = x.f(x) + 24$, trong đó $f(x)$ là đa thức bậc 2.

Câu 3. (4 điểm)

- 1) Giải phương trình: $(3x - 5)^3 + (x - 6)^3 - (4x - 11)^3 = 0$
- 2) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Quãng đường từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động dài $80km$. Lúc 7 giờ 10

$\frac{3}{4}$ phút một xe máy đi từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại 32 phút để sửa, rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu $5km/h$. Biết xe máy đến huyện Sơn Động lúc 10 giờ 30 phút cùng ngày. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H

- a) Chứng minh rằng: $\triangle AMC \sim \triangle BNC$ và $\sphericalangle CAB = \sphericalangle NMC$
- b) Chứng minh rằng: Tia MA là tia phân giác của $\sphericalangle NMP$
- c) Gọi I là giao điểm của BN và MP . Chứng minh $HN.BI = HI.BN$

Câu 5. (1 điểm)

Cho $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng $A > 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$1) A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$$

ĐKXD: $x \neq -1; x \neq 0; x \neq 2$

$$A = \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x}{x-2} + \frac{x^2+4x+6}{(x+1)(x-2)} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$$

$$A = \frac{4x}{x^2+1}$$

$$2) A = \frac{4x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+4x-2}{x^2+1} = 2 - \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$\text{Mà } \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 2 \text{ hay } A \leq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy GTLN của biểu thức A là 2, đạt được khi $x = 1$

Câu 2.

1) Học sinh biến đổi về phương trình $(x+y+10)(x-y+2) = 5$

Do x, y nguyên nên $x+y+10; x-y+2$ nguyên

$$\text{Mà } 5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -1 \cdot (-5) = -5 \cdot (-1)$$

Tìm được $(x; y) \in \{(-3; -6); (-9; -2); (-3; -2); (-9; -6)\}$

2) Gọi ba số là $a, a+1$ và $a+2$ (a nguyên dương)

$$\text{Ta có: } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 3a^3 + 15a^2 + 9a + 8$$

$$\text{Xét } 3a^3 + 15a = 3a(a^2 + 5)$$

Nếu $a \vdots 3$ thì $3a^2 + 15a \vdots 9$ khi đó $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \vdots 9$ (1)

Nếu a không chia hết cho 3 thì a^2 chia 3 dư 1 $\Rightarrow a^2 + 5 \vdots 3$

$\Rightarrow 3a^2 + 15a \vdots 9$ khi đó $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \vdots 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \vdots 9$ với mọi a nguyên dương.

3) Do đa thức $H(x)$ có bậc là 3 thỏa mãn : $H(1)=H(2)=H(3)=0$

Nên $H(x)=a(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow H(0)=-6a$

Lại có $H(x)=x.f(x)+24$ đúng với mọi x

Chọn $x=0$ ta có: $H(0)=24$

Nên $-6a=24 \Rightarrow a=-4$

Vậy $H(x)=-4.(x-1)(x-2)(x-3)$

Câu 3.

1) Học sinh chứng minh được: Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=abc$ (*)

$$(3x-5)^3+(x-6)^3-(4x-11)^3=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)^3+(x-6)^3+(11-4x)^3=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-5)(11-4x)=0 \text{ theo (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ x=6 \\ x=\frac{11}{4} \end{cases}$$

2) Gọi vận tốc xe máy đi trong $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là $x(\text{km/h})$ ($x > 5$)

\Rightarrow vận tốc xe máy đi trong $\frac{1}{4}$ quãng đường cuối là $x-5(\text{km/h})$

Ta có $\frac{3}{4}$ quãng đường từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động dài 60km

Thời gian xe máy đi đến huyện Sơn Động (kể cả thời gian dừng là)

$$10 \text{ giờ } 30 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 10 \text{ phút} = 3 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = \frac{10}{3} \text{ h}$$

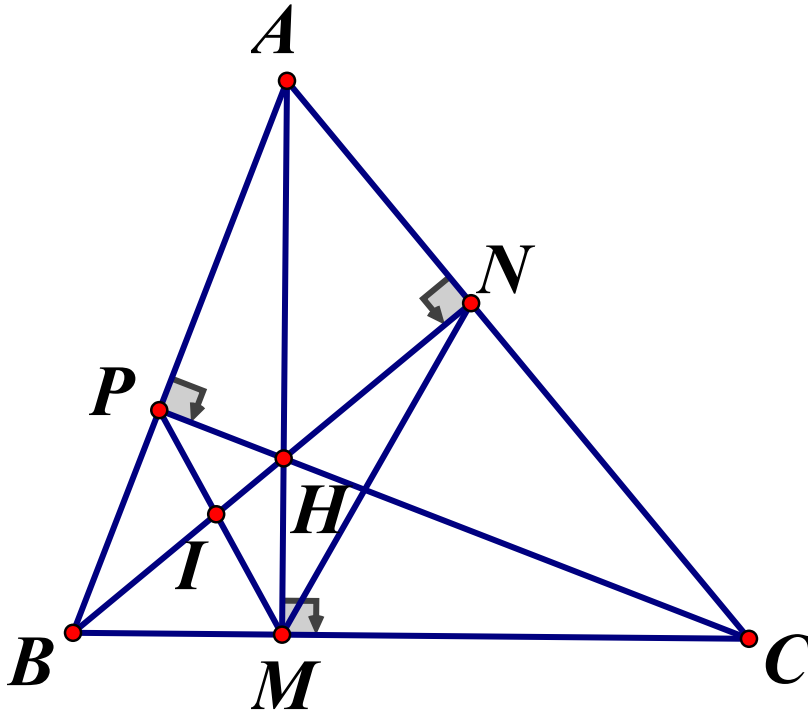
Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{60}{x} + \frac{20}{x-5} + \frac{32}{60} = \frac{10}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=30 & (tm) \\ x=\frac{25}{7} & (ktm) \end{cases}$$

Thời gian xe máy đi đến lúc hỏng xe là : $60:30=2\text{h}$

Vậy xe máy bị hỏng lúc 9 giờ 10 phút

Câu 4.



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BNC$ có: góc C chung; $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle BNC \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle MNC$ có: $\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$; $\sphericalangle C$ chung

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC (c.g.c) \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle M$$

b) Ta có: $\sphericalangle A = \sphericalangle M$

Chứng minh tương tự: $\sphericalangle A = \sphericalangle M$

Chỉ ra được: $\sphericalangle AMC = \sphericalangle AMB = 90^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle AMP \Rightarrow$ Tia MA là tia phân giác của $\sphericalangle NMP$

c) Ta có: MH là đường phân giác trong của tam giác MNI

Mà $MB \perp MH$ nên MB là đường phân giác ngoài của tam giác MNI

$$\Rightarrow \frac{MN}{MI} = \frac{HN}{HI} = \frac{BN}{BI}$$

(tính chất đường phân giác trong, ngoài tam giác)

$$\Rightarrow HN \cdot BI = HI \cdot BN (dfcm)$$

Câu 5.

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với mọi $a, b > 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$$

Ta có A có $2n+1$ hạng tử

Áp dụng BĐT trên với các cặp số đôi một khác nhau ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} > \frac{2}{2n+1}$$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} > \frac{2}{2n+1}$$

.....

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2A > (2n+1) \frac{2}{2n+1} \Leftrightarrow A > 1 \text{ (đpcm)}$$