|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI**  **ĐỀ THI CHÍNH THỨC** | **ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**  **NĂM HỌC 2019-2020**  Môn thi chuyên : **TOÁN (vòng 2)**  Thời gian làm bài: 150 phút |

**Câu 1.**

1. Giải hệ phương trình: 
2. Giải phương trình: 

**Câu 2.**

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương ta luôn có:

chia hết cho 42.

1. Với là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện :



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Câu 3.** Cho tam giác cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm theo thứ tự thuộc các cạnh (E khác C và A, F khác B và A) sao cho tiếp xúc với đường tròn tại điểm P. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của trên BC. Giả sử cắt tại điểm J. Gọi là hình chiếu vuông góc của J lên BC.

1. Chứng minh rằng là phân giác của 
2. Ký hiệu lần lượt là diện tích của tứ giác . Chứng minh rằng 
3. Gọi là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm thẳng hàng.

**Câu 4.** Cho M là tập tất cả số nguyên liên tiếp từ đến 2019. Chứng minh rằng trong số đôi một phân biệt được chọn bất kỳ từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

1. Ta có: 

Do phương trình thứ nhất nên do đó kết hợp hai phương trình lại ta có:





Th2: thay vào phương trình thứ nhất ta có 

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm là 

1. Điều kiện:

Đặt và . Ta có:



Ta thấy, nếu thì và tức là mâu thuẫn . Tương tự với cũng mâu thuẫn. Do đó tức là phương trình ban đầu tương đương với



Vậy phương trình có hai nghiệm 

**Câu 2.**

1. Trước hết ta chứng minh rằng (\*)

Thật vậy, ta có 

Dễ thấy là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

Theo định lý Ơ – le thì tức là chia hết cho 7

Vậy chia hết cho Khẳng định (\*) được chứng minh.

Từ đó :



Nên ta có điều phải chứng minh.

1. Đặt Sử dụng bất đẳng thức ta có 

Hay 

Từ đó, ta có: , suy ra :



Dấu xảy ra khi và chỉ khi 

**Câu 3.**



1. Sử dụng định lý Talet trong tam giác với ,ta có:



Sử dụng định lý Talet trong tam giác với ta cũng có:

Hai tam giác và có nên



Mặt khác, ta lại có (so le trong) và (so le trong ) nên là phân giác của 

1. Vì nên 

Chứng minh tương tự, ta cũng có (2)

Theo chứng minh câu a, 

Hai tam giác và có nên đồng dạng với nhau suy ra 

Ta kết hợp (1) và (2) ta có:  , Điều phải chứng minh.

1. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử P nằm cùng phía với B so với AD như hình. Gọi M là giao điểm của và Áp dụng định lý Melenaus cho tam giác với cát tuyến ta có: 

Mà hai tam giác và đồng dạng với nhau nên là hai đường cao tương ứng nên (3)

Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh thẳng hàng. Theo định lý Melenaus đảo áp dụng cho điều này tương đương với ta phải chứng minh 

Lại có và 

Do đó, ta cần chứng minh: 

Kết hợp (3), (4) ta dẫn bài toán về chứng minh: 

Hay (5)

Gọi lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với . Đặt Ta sẽ chứng minh:



Thật vậy, sử dụng định lý cosin trong các tam giác , ta có:

. Suy ra:



Hay



Từ đây, ta có:

, hay:



Như thế, ta có: 

Do nên (6) được chứng minh. Sử dụng (6) vừa chứng minh ta có:



Đẳng thức (5) được chứng minh. Ta có điều phải chứng minh.

**Câu 4.**

Đặt Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: “Trong số phân biệt từ tập hợp luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0”

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho có thể chọn ra số phân bệt từ tập mà trong đó không có ba số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó (vì thì mệnh đề đúng). Vì n là số nhỏ nhất làm cho mệnh đề không đúng nên mệnh đề đúng với Nếu trong các số được chọn có ít nhất số thuộc thì do mệnh đề đúng với Nếu trong các số được chọn có ít nhất số thuộc thì do mệnh đề đúng với sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy có tối đa số được chọn thuộc Suy ra trong bốn số có ít nhất ba số được chọn. Nên số 0 không được chọn.

* Nếu cả hai số của cặp được chọn. Chia tập thành cặp ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa một số. Suy ra chỉ lấy được tối đa số. Mâu thuẫn.
* Nếu chỉ có một số của cặp được chọn thì theo lý luận ở trên. Cặp được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử được chọn còn không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành cặp

, một bộ ba số và một phần tử lẻ cặp là Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, từ bộ ba số ta cũng lấy được tối đa một số. Từ đó ta lấy được tối đa  số. mâu thuẫn

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn, tức điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng mnh. Áp dụng mệnh đề cho at có điều phải chứng mnh.