

Bài 1. (4 điểm)

- a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$
- b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Bài 2. (5 điểm)

- a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $2^x = 5^y - 624$
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:
 $10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$

Bài 3. (4 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.
- b) Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A có AM là phân giác ($M \in BC$). Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng $MN = MC$

Bài 5. (4 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $20cm$. Trên cạnh CD lấy điểm M . Đường thẳng vuông góc với BM tại M cắt AD tại N.

- a) Cho $MC = 15cm$. Tính diện tích tam giác BMN
- b) Xác định vị trí của M trên cạnh CD để ND có độ dài lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Từ $a^2 + a + 1 = 0$ với $a \neq 1$ ta có: $(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = 1$

Ta lại có $a^{2013} = (a^3)^{671}$

$$P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}} = (a^3)^{671} + \frac{1}{(a^3)^{671}} = 1 + 1 = 2$$

Do đó:

b) Từ $x^2 + x^2 y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ (1)

$$x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 - 2(y - 1)^2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$$
 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$$

Vậy $Q = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$

Bài 2.

a) Ta có: $2^x = 5^y - 624 \Leftrightarrow 2^x + 624 = 5^y$ (*)

+ Xét $x = 0$, ta có: $5^y = 625 \Leftrightarrow y = 4$

+ Xét $x \in \mathbb{N}$ và $x > 0$ ta có VT(*) là số chẵn còn vế phải (*) là số lẻ, Vô lý

Vậy $(x; y) = (0; 4)$

b) Ta có:

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 42xy + 49y^2) + (x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 6y + 9) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 < 1$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (3x+7y)^2 \geq 0 \\ (x+7)^2 \geq 0 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ và } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } (3x+7y)^2 + (x+7)^2 + (y-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x+7y)^2 = (x+7)^2 = (y-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 3.

a) Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$n^2 + n + 6 = k^2 \Leftrightarrow 4(n^2 + n + 6) = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2k)^2 - (2n+1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1) = 23 \quad (*)$$

Do $k, n \in \mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k - n - 1$ và $2k + 2n + 1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23 > 0$ và $2k + 2n + 1 \geq 1; 2k - 2n - 1 < 2k + 2n + 1$

Suy ra $1 \leq 2k - 2n - 1 < 2k + 2n + 1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} 2k - 2n - 1 = 1 \\ 2k + 2n + 1 = 23 \end{cases} \Rightarrow 4n + 2 = 22 \Leftrightarrow n = 5$$

Với $n = 5$ thì $A = 36 = 6^2$ là số chính phương

Vậy $n = 5$ là số tự nhiên cần tìm

b) Gọi x là số câu trả lời đúng (x nguyên và $0 \leq x \leq 10$)

Số câu trả lời sai là $10 - x$

Số điểm được cộng là $5x$

Số điểm bị trừ là $2 \cdot (10 - x)$

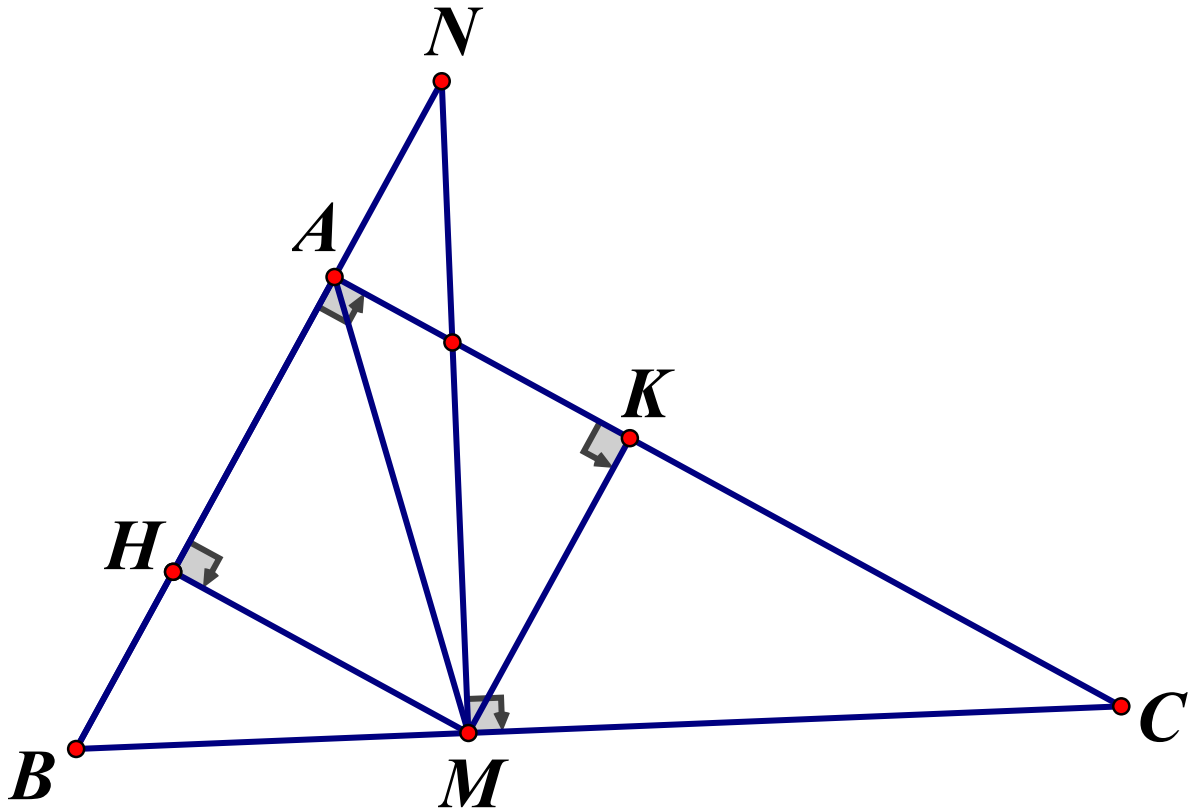
Nếu được thưởng thì phải đạt từ 30 điểm trở lên. Nên ta có:

$$5x - 2(10 - x) \geq 30$$

Giải bất phương trình trên ta được: $x \geq 8$ (tm)

Vậy để được thưởng học sinh phải trả lời đúng ít nhất 8 câu hỏi.

Bài 4.

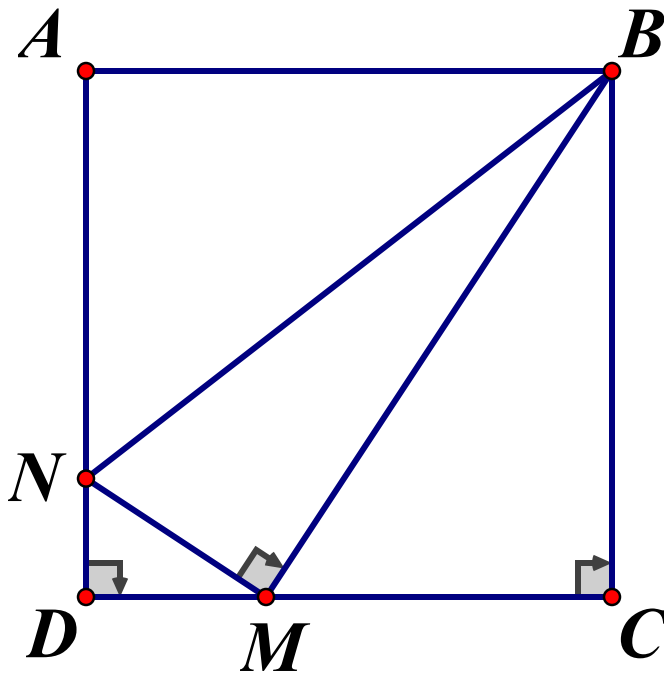


Kẻ $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp AC$ tại K $\Rightarrow AHMK$ là hình vuông $\Rightarrow MH = MK$ (1)

Ta có: $\widehat{MCA} = \widehat{MNA}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MHN = \Delta MKC (ch - cgv) \Rightarrow MN = MC$

Bài 5



a) Hai tam giác vuông BCM và MDN có:

$$\widehat{CBM} = \widehat{DMN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BMC})$$

$$\Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle MDN \Rightarrow \frac{ND}{MC} = \frac{MD}{BC} \quad (*)$$

$$\Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{15 \cdot (20 - 15)}{20} = 3,75 (cm)$$

$$\Rightarrow AN = AD - ND = 20 - 3,75 = 16,25 (cm)$$

Ta có: $S_{\triangle BMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCM} - S_{\triangle DMN} - S_{\triangle ABN}$

$$= 20^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,75 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16,25 = 78,125 (cm^2)$$

b) Đặt $MC = x (0 \leq x \leq 20)$

$$(*) \Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{x \cdot (20 - x)}{20} = \frac{20x - x^2}{20} = 5 - \frac{(x - 10)^2}{20} \leq 5$$

Từ

$\Rightarrow$ Độ dài ND lớn nhất là $ND = 5\text{cm}$ khi $x = 10$ hay M là trung điểm của CD

Vậy để độ dài ND lớn nhất thì vị trí của M là trung điểm của CD .