**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI BẮC BỘ 2023**

**-----**

**Bài 1 (4,0 *điểm*).** Tìm tam thức bậc hai  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i)  có hai hệ số nguyên;

ii)  và 

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| Xét đa thức  Từ giả thiết suy ra  và  Do đó  với  là hằng số. | **2,0** |
| Thay lại ra được    Chọn  ta được  là đa thức có hệ số của  và  là nguyên, thỏa mãn bài toán. | **2,0** |

**Bài 2 (4,0 *điểm*).** Cho  là các số thực thỏa mãn  Chứng minh rằng



|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| Ta có thể coi  Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có | **1,0** |
| Hơn nữa,    Do đó ta có điều phải chứng minh. | **3,0** |

**Bài 3 (4,0 *điểm*).** Cho tam giác   có đường phân giác  Lấy điểm  trên nửa mặt phẳng bờ  không chứa  sao cho  Gọi  là giao điểm  với   là giao điểm của  với   là giao điểm của  với  Chứng minh rằng  song song với 

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| Áp dụng định lí Ceva cho ba đoạn thẳng  trong tam giác  ta được | **1,0** |
| Áp dụng định lí Ceva cho ba đoạn thẳng  trong tam giác  ta được    Mà  (phân giác),  (tam giác  cân) nên | **1,5** |
| Ta lại có    Suy ra  do đó | **1,5** |

**Bài 4 (4,0 *điểm*).** Cho  là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng mọi ước nguyên dương của  đều đồng dư với  theo modulo 

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| Giả sử  là một ước nguyên tố của  Vì  (1) nên  Ta cũng có    Gọi  là số nhỏ nhất thỏa mãn  khi đó tồn tại hai số  thỏa mãn    Suy ra  nhưng do tính nhỏ nhất của  nên  hay | **1,0** |
| *Trường hợp 1:*  Khi đó  suy ra  hay  vô lí vì  (vì  là số lẻ). | **1,0** |
| *Trường hợp 2:*    Vì  là số nguyên tố nên  hoặc  Kết hợp (1) thì  hoặc  đều vô lí vì | **1,0** |
| *Trường hợp 3:*  Theo định lí Fermat ta có  lập luận tương tự ở trên thì  hay  Vì tất cả các ước nguyên tố của  đều đồng dư với 1 modulo  nên các ước nguyên dương của nó cũng vậy. | **1,0** |

**Bài 5 (4,0 *điểm*).** Cho  là tập hợp tất cả các hoán vị của bộ  Hai hoán vị  được gọi là *giao nhau* nếu tồn tại giá trị  thỏa mãn  Có tồn tại hay không một tập con  của  gồm  phần tử thỏa mãn tất cả phần tử trong  đều *giao* với ít nhất một phần tử trong 

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| Câu trả lời là có. Xét tập hợp  gồm 1012 phần tử thỏa mãn  như sau        …    Ta thấy rằng, mọi giá trị từ 1 đến 1012 đều xuất hiện tại vị trí thứ  () ở đúng 1 phần tử trong tập hợp trên. | **2,0** |
| Giả sử  là một phần tử bất kì trong  Vì từ 1013 đến 2023 có tất cả 1011 vị trí nên với 1012 phần tử đầu tiên sẽ không thể đặt đủ vào các vị trí này, do đó tồn tại 1 phần tử trong 1012 phần tử đầu thuộc các vị trí từ 1 đến 1012. Nói cách khác, ta có    Hoán vị  trong  thỏa mãn  có  do đó  giao nhau.  Vậy tập  thỏa mãn bài toán. | **2,0** |

**-----Hết-----**