

CHỦ ĐỀ 6

CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN $f'(x), f'(u)$

DẠNG 1

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x) = f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x) = f(u(x))$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

Ta có $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \leq -1 \\ 1 \leq 3 - x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x - 2028)(x - 2023)^2$. Khi đó hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = g(x) = f(x^2 + 2019) \Rightarrow y' = g'(x) = (x^2 + 2019)' f'(x^2 + 2019) = 2x \cdot f'(x^2 + 2019)$

Mặt khác $f'(x) = x^2(x - 2028)(x - 2023)^2$. Nên suy ra:

$$\begin{aligned} y' = g'(x) &= 2x \cdot f'(x^2 + 2019) = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 + 2019 - 2028)(x^2 + 2019 - 2023)^2 \\ &= 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x - 3)(x + 3)(x - 2)^2 (x + 2)^2 \end{aligned}$$

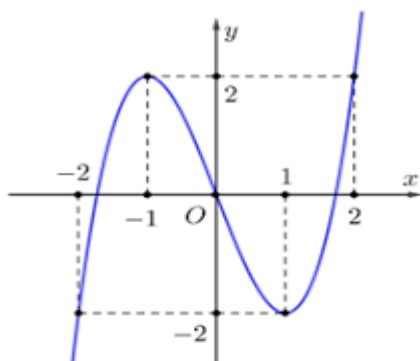
$$y' = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x - 3)(x + 3)(x - 2)^2 (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = -3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiem bội 2)} \\ x = -2 \text{ (nghiem bội 2)} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x + 2022)$ có mấy cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

$$y' = [f(x+2022)]' = (x+2022)' f'(x+2022) = f'(x+2022)$$

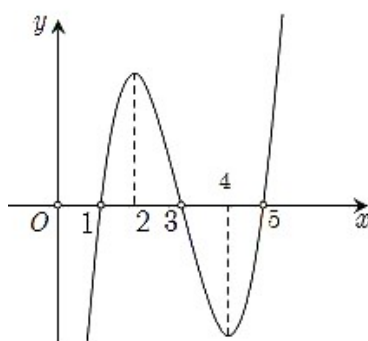
Đồ thị $f'(x+2022)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Ox qua bên trái 2022 đơn vị nên

đồ thị $f'(x+2022)$ vẫn cắt trục Ox 3 điểm bằng số giao điểm mà đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox

$\Rightarrow$ 3 cực trị

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x-1)-2021$ đạt **cực đại** tại điểm nào dưới đây?



A. $x=2$

B. $x=4$

C. $x=1$

D. $x=3$

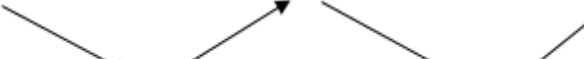
Lời giải

Chọn B.

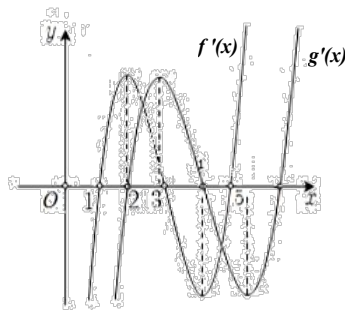
Cách 1 :

$$g'(x)=f'(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=3 \\ x-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \\ x=6 \end{cases}$$

$$g'(x)=f'(x-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x-1<3 \\ x-1>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<4 \\ x>6 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	6	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y							

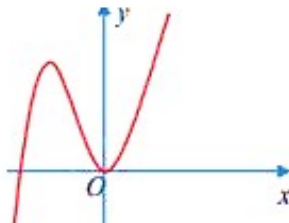
Cách 2 : đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x-1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang phải 1 đơn vị.



Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x-1)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=2; x=4; x=6$ và giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=4$.

Câu 5. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K , biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ.

Tìm số cực trị của hàm số $g(x)=f(x+1)$ trên K ?



A. 0.

B. 1.

C. 2.

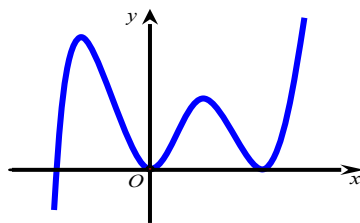
D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = f'(x+1)$ có đồ thị là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x+1)$ vẫn cắt trục hoành tại 1 điểm.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ.



Khi đó trên K , hàm số $y=f(x-2021)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

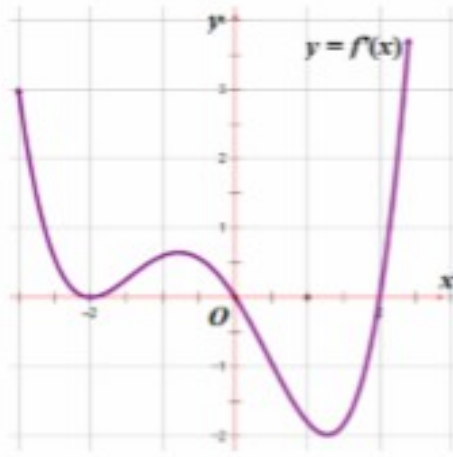
D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ vẫn cắt trục hoành 1 điểm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(1 - x) - \frac{2022}{2021}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

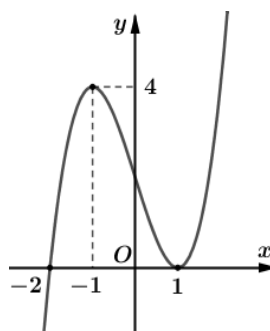
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt hay 2 nghiệm $x = 0, x = 2$ là $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm hoặc từ âm sang dương, như vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

$$(f(1 - x))' = -f'(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = -2 \\ 1 - x = 0 \\ 1 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu, như vậy hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x) - 3$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x) = (-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3=0 \\ f'(-x^2+3x)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	$1,5$	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau:

$$x=4 \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty \right)$$

Ví dụ chọn

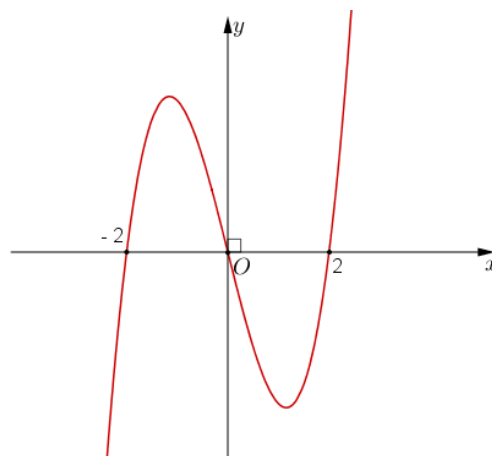
$$-2x+3=-5<0. \quad (1)$$

$$-x^2+3x=-4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0 \quad (\text{vì } f \text{ đang tăng}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x) = (-2x+3)f'(-x^2+3x) < 0$ trên khoảng $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty \right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y=f(x^2-x)-5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y = f(x^2 - x)$

Ta có $y' = (2x - 1)f'(x^2 - x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -2 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

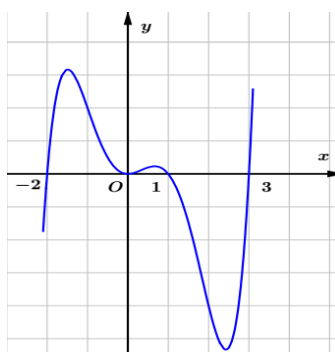
$$f'(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2 - x < 0 \\ x^2 - x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 - x)$ là:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2 - x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Vậy hàm số $y = f(x^2 - x) - 5$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x) = f(x^2) - \sqrt{2021}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases};$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}.$$

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có

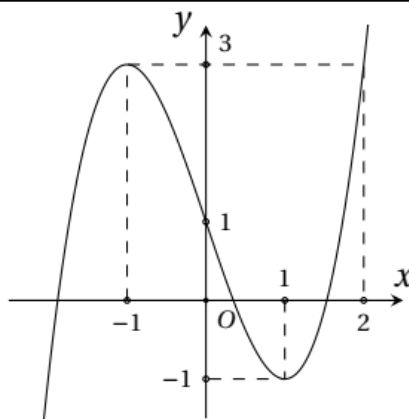
$$f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2)$	+	0	-	0	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2) - \sqrt{2021}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.

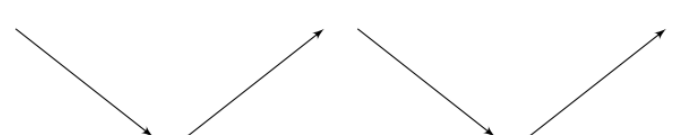
Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có

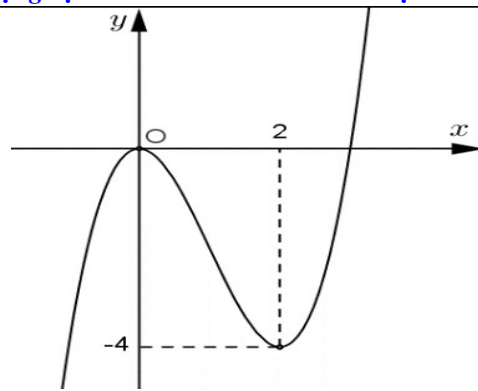
$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 1 > 1 \\ x^2 - 2x + 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2021$ có 3 cực trị. Chọn phương án B.

Câu 12. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2; +\infty) \\ x = b \in (a; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Với } x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$$

$$\text{Với } x \in (0; 2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$$

$$\text{Với } x \in (2; a) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$$

$$\text{Với } x \in (a; b) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$$

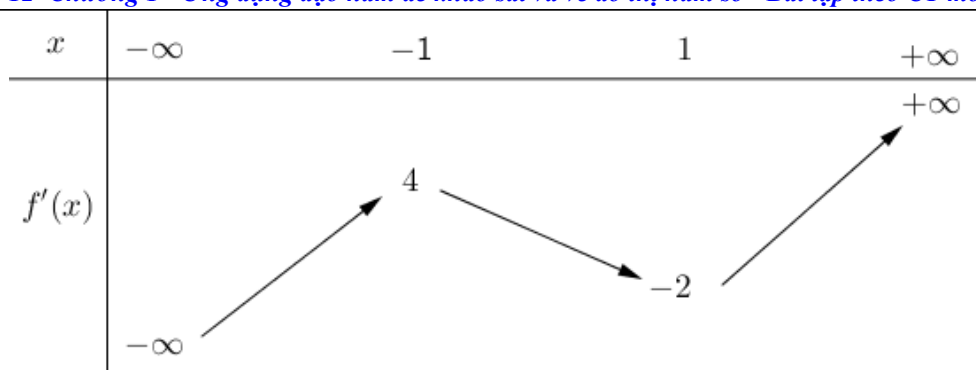
$$\text{Với } x \in (b; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	a	b	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y							

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 4.

B. 5.

C. 1.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

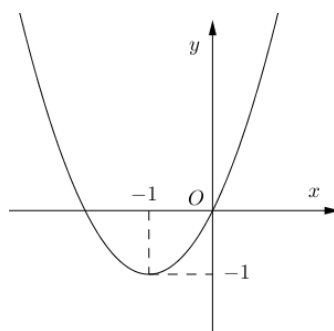
$$y' = (2x+2)f'(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2+2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{cases}$$

Từ BBT ta thấy phương trình

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases}.$$

Xét

$$\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{4}.$$

$$\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{9}{4}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f'(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Do $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} > \frac{x + |x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$

nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 3 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên $y = g(x)$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$						

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là 2.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		3	$-\infty$
		-1		

Đặt $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C.

+ Đặt $g'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) f' \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) = 0 \\ f' \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} = a \ (a < -2) \\ \frac{x^2 + 1}{x} = b \ (-2 < b < 2) \\ \frac{x^2 + 1}{x} = c \ (c > 2) \end{cases}$$

+

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

+ Xét hàm số

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	+	0	-	-	0	+	
$h(x)$	$y=c \ (c>2)$			$+\infty$	x_3	x_4	$+\infty$
					2		
	$y=b \ (-2<b<2)$						
	x_1	-2	x_2	$y=a \ (a<-2)$			
	$-\infty$		$-\infty$				

+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x) = a, h(x) = c$, mỗi phương trình có hai nghiệm

phân biệt khác ± 1 , mà $a \neq c \Rightarrow f' \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x) = b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x) = f \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)$ có 6 cực trị.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x) = f(u(x))$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

Câu 17. (Đề tham khảo của BGD năm 2022)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 15.

D. 10.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$

Khi đó $y' = (4x^3 - 16x)f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x^4 - 8x^2 + m = 0 \\ x^4 - 8x^2 + m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ m = -x^4 + 8x^2 \quad (1) \\ m + 10 = -x^4 + 8x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$

Ta có $g'(x) = -4x^3 + 16x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 16$	$\searrow 0$	$\nearrow 16$	$\searrow$	$y=m+10$ $y=m$ $-\infty$		

Hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị khi ⁽¹⁾ có hai nghiệm hoặc ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng 0 và ⁽²⁾ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$ ta có

$$\begin{cases} 0 < m + 10 < 16 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 6 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m \leq 0. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}.$$

Vậy có 10 giá trị nguyên m .

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

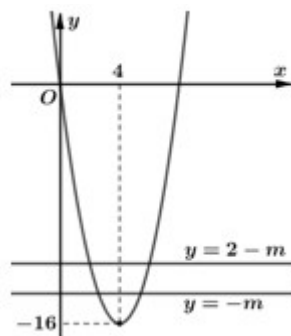
Xét

$$\text{Ta có } g'(x) = 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m);$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình ⁽¹⁾, ⁽²⁾ đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. ^(*)

Xét đồ thị ^(C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -m$, $d_2: y = -m + 2$ (như hình vẽ).



Khi đó ^(*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt ^(C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Cách 2: Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$. Ta có $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 & (3) \end{cases} \text{ . Các phương trình } (1), (2), (3) \text{ không có nghiệm chung từng}$$

đôi một và $(x^2 - 8x + m - 2)^2 \geq 0$ với $\forall m \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (1) và (2) có hai

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m - 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Vậy m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7 .

B. 0 .

C. 6 .

D. 5 .

Lời giải

Chọn C.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; x=-1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0(*) \end{cases}$$

Ta có

Vì $f'(x)$ không đổi dấu qua nghiệm $x = 0$ nên hàm số không đạt cực trị tại $x = 0$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị trong các trường hợp sau:

1. Phương trình (*) vô nghiệm. Khi đó $\Delta' = m^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$.

2. Phương trình (*) có nghiệm kép bằng -1. Khi đó $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 = 0 \\ 1^2 - 2m + 5 = 0 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

3. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng -1.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ 1^2 - 2m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5 > 0 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

$$m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy giá trị nguyên

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4
-----	-----------	------	-----	-----

	+∞						
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10.

B. 15.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x - m = -1 \\ x^2 - 2x - m = 1 \\ x^2 - 2x - m = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x - m + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 - 2x - m - 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ \Delta'_{(3)} > 0 \\ VT_{(1)} \neq 0 \\ VT_{(3)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m+5 > 0 \\ -m \neq 0 \\ -m-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

Vậy có 10 giá trị của tham số m .

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x) = f(x) + h(x)$

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x) = f(x) + h(x)$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - x + 3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y = g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g'(x) &= 2f'(x) - 2(x+1) = 2\left[f'(x) - (x+1)\right] \\ &= 2\left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - x + 3 - (x+1)\right] \\ &= 2\left(\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - 2x + 2\right)\end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

ta có:

Bảng xét dấu của hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có đáp án đúng là hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 9)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Có } g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 6x - 9 = (x+1)(2x^2 - 3x - 9) + 3(x+1)(x-3) = (x+1)(x-3)(2x+6)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3(x^2 - 1)(x - 2)$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + 3x$ đạt cực đại tại

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

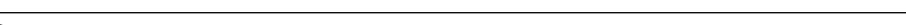
Chọn A.

Ta có:

$$g(x) = f(x) - 3x^2 + 3 = 3(x^2 - 1)(x - 2) - 3(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)(x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

$f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1 - x) + 2019x + 2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0 = 1$.

B. $x_0 = 2$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $h(x) = f(1 - x) + 2019x + 2020$

Ta có: $h'(x) = -f'(1 - x) + 2019 = -[1 - (1 - x)][(1 - x) + 2]g(1 - x) - 2019 + 2019$

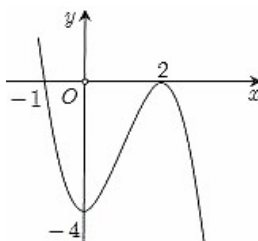
$$= -x(3 - x)g(1 - x); \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$							

Vậy hàm số đạt cực đại $x_0 = 3$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

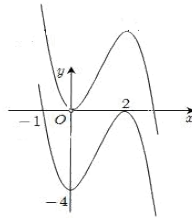
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: $y' = g'(x) = f'(x) + 4$ có đồ thị là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương Oy lên trên 4 đơn vị.

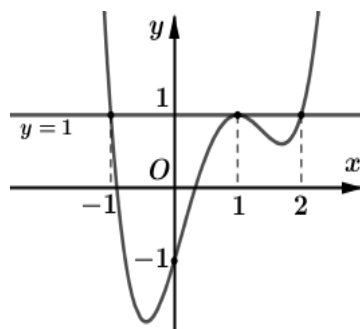


Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm, ta chọn đáp án A

Cách 2: Số cực trị của hàm $g(x)$ bằng số nghiệm bội lẻ của phương trình
 $g'(x) = f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -4$

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta thấy phương trình trên có một nghiệm đơn.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



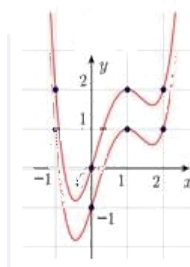
Đặt $g(x) = f(x) + x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?

- A. 1. **B. 2.** C. 3. D. 4.

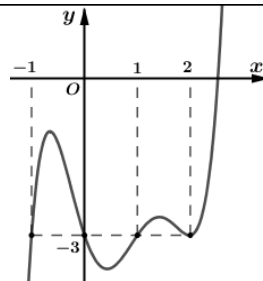
Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

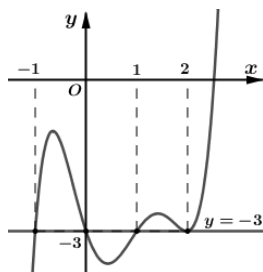
C. 4.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -3$.

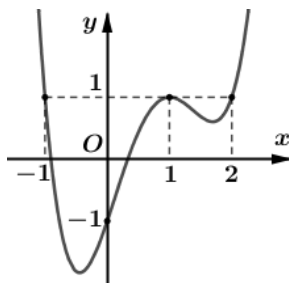


$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra

Ta thấy $x = -1, x = 0, x = 1$ là các nghiệm đơn và $x = 2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có 3 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

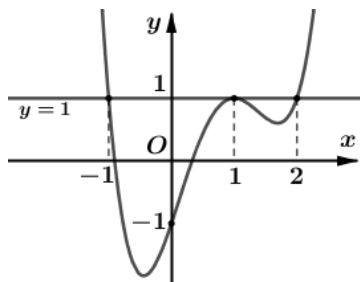
C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1 Ta có $g(x) = f(x) - 1$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.



x	$-\infty$	-1		1	2	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
g						

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

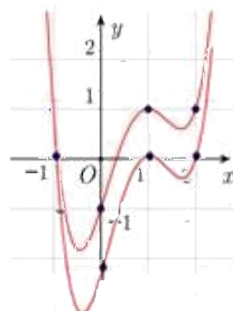
Dựa vào đồ thị ta suy ra

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$. Chọn A

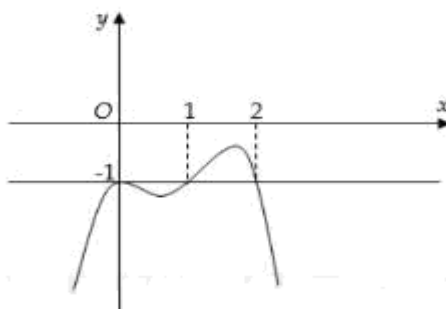
Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy đồ thị hàm $f(x)$ nằm phía trên đường $y = 1$ nên $g(x)$ mang dấu $+$.

Cách 2 : Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 1 đơn vị.



Ta thấy giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

A. Không có cực tiểu.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

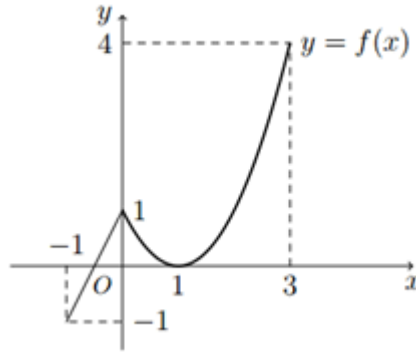
D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C.

$g'(x) = f'(x) + 1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ “-” sang “+” qua điểm $x = 1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x) - \frac{2020x - 1}{2021}$ có mấy cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

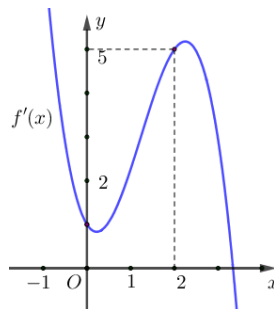
Chọn C.

$$y' = \left[f(x) - \frac{2020x - 1}{2021} \right]' = f'(x) - \frac{2020}{2021}$$

Đồ thị $y' = f'(x) - \frac{2020}{2021}$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Oy xuống dưới $\frac{2020}{2021}$ đơn

vị. Đồ thị $y' = f'(x) - \frac{2020}{2021}$ cắt trục Ox 3 điểm $\Rightarrow$ 3 cực trị

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

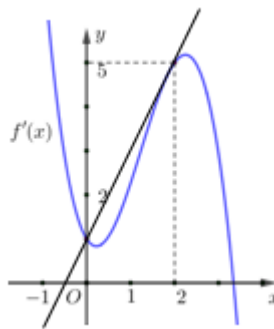
Chọn A.

Ta có:

$$y' = f'(x) - 2x - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \quad (1)$$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 2x + 1$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ có $x \in [0, 2]$ là các nghiệm của phương trình (1)

$$y'(-1) = f'(-1) - 2 - 1 > 0$$

$$y'(1) = f'(1) - 2 - 1 < 0$$

$$y'(3) = f'(3) - 6 - 1 < 0$$

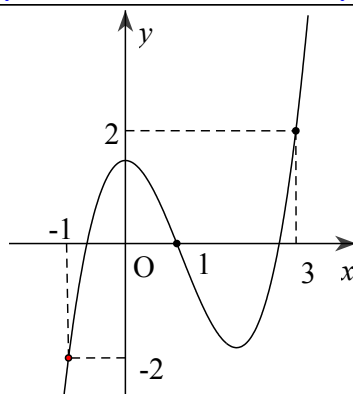
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		+	-	-

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các

khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2021$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 3)$.

B. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị đại.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.

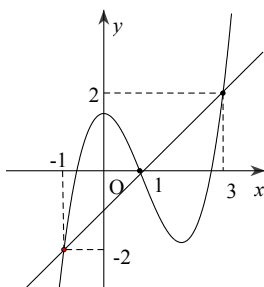
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x - 1)]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm: $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.



Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 3 < x \end{cases}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy $f'(x) = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 3x^2 + 6x - 9 = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1} + 3(x+3)(x-1)$

$$g'(x) = (x+3)(x-1) \left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3 \right]$$

Do $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

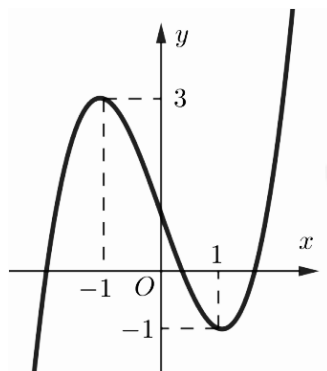
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Do $g'(x) = 0$ tại $x = -3$ và $x = 1$, đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm đó nên hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x) = f(x) + h(x)$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12; 12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5.

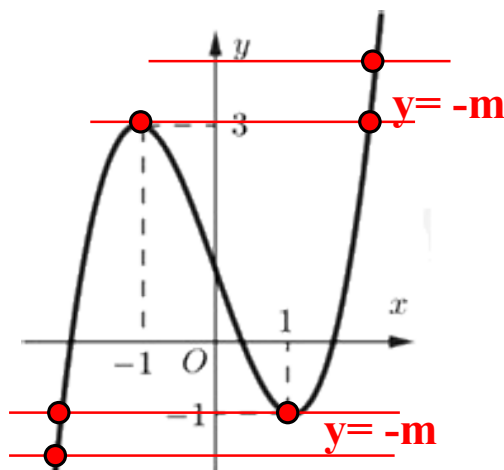
B. 18.

C. 20.

D. 12.

Lời giải

Chọn C.



Đạo hàm $y' = f'(x) + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -m$

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ (có 1 nghiệm đơn)

hoặc (có 1 nghiệm đơn và nghiệm kép)

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 1 điểm có hoành độ là nghiệm đơn (bội lẻ) hoặc

tại hai điểm trong đó có điểm có hoành độ bội chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 3 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}$

Kết hợp với $m \in (-12; 12)$ ta được $m \in (-12; -3] \cup [1; 12)$ và m là số nguyên nên có tất cả $9 + 11 = 20$ giá trị nguyên.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = m$

YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; BBT