

MỤC LỤC

MỤC LỤC.....	1
Phần I. Mở Đầu.....	2
1.1. Lí do chọn đề tài.....	2
1.2. Mục đích nghiên cứu.....	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu.....	3
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	3
Phần II. Nội Dung.....	3
2.1. Cơ sở lí luận.....	3
2.2. Thực trạng vấn đề nghiên cứu.....	3
2.3. Quá trình thực hiện.....	3
2.3.1 Một số kiến thức cơ bản.....	3
* Định nghĩa 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.....	3
* Định nghĩa 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.....	4
* Định nghĩa 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.....	4
2.3.2 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách.....	5
2.3.2.1 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.....	5
2.3.2.2 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau.....	11
2.3.2.2.1. Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng cách dựng đoạn vuông góc chung.....	11
2.3.2.2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau khi không dựng đoạn vuông góc chung.....	15
Phần III. Kết luận.....	19
Qua thời gian nghiên cứu viết sáng kiến và vận dụng sáng kiến vào giảng dạy tôi rút ra một số kết luận sau:.....	19
Tài liệu tham khảo.....	20

Phần I. Mở Đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Nâng cao chất lượng giáo dục đang là một yêu cầu cấp bách đối với ngành giáo dục nước ta. Một trong những khâu then chốt để thực hiện yêu cầu này là đổi mới nội dung và phương pháp dạy học.

Trong giai đoạn hiện nay, khi bộ giáo dục đang từng bước cải cách thi tốt nghiệp THPT và thi đại học thì việc đổi mới phương pháp dạy học là rất cần thiết để phát huy tính chủ động sáng tạo, phát triển tư duy, tạo hứng thú học tập cho học sinh, giúp học sinh có kĩ năng vận dụng kiến thức vào tình huống mới, có khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề, có năng lực độc lập suy nghĩ sáng tạo trong tư duy và biết lựa chọn phương pháp tự học tối ưu để đạt kết quả cao nhất trong kì thi Quốc gia.

Thực tiễn dạy học cho thấy khi ôn tập cho học sinh lớp 12, với cấu trúc đề thi quốc gia hiện nay các em thường mất điểm phần HHKG (câu số 5 trong cấu trúc đề thi quốc gia năm 2016) đặc biệt là các em có lực học trung bình khá trở xuống. Để dành điểm phần này học sinh cần nắm vững kiến thức HHKG và chăm chỉ luyện tập ngay từ lớp 11 để rút ra kinh nghiệm tư duy HHKG. Vì vậy khi dạy phần quan hệ vuông góc chương trình hình học 11 giáo viên cần rèn luyện cho học sinh kĩ năng vẽ hình, hình thành cho các em hệ thống các kĩ năng và phương pháp tư duy, đồng thời phải lựa chọn hệ thống bài tập rèn luyện kĩ năng giúp các em có cơ hội làm quen với các dạng toán trong cấu trúc đề thi quốc gia để kích thích sự tò mò sáng tạo, tạo ra sự hưng phấn khám phá cái mới trong học tập của học sinh, giúp các em có một kiến thức vững vàng cho kì thi Quốc gia.

Thực tế thì đến nay có một số đề tài nghiên cứu theo một số góc độ khác nhau của Toán học, nhưng chưa có đề tài nào đề cập đến vấn đề cụ thể về việc tập hợp một cách có hệ thống các kĩ năng và hệ thống bài tập cần thiết rèn luyện cho học sinh khi dạy học phần “khoảng cách” trong không gian, chương trình Hình học 11. Với những lí do như trên tôi lựa chọn đề tài:

“Rèn luyện kĩ năng, giúp học sinh tiếp cận đề thi quốc gia qua bài toán tính khoảng cách chương trình hình học 11”.

1.2. Mục đích nghiên cứu

- +) Nghiên cứu cơ sở lý luận về kĩ năng giải toán.
- +) Nghiên cứu kĩ năng giải Toán phần khoảng cách.
- +) Tạo ra hệ thống bài tập nhằm rèn luyện kĩ năng giải toán phần tính khoảng cách chương trình hình học 11 THPT cho học sinh, giúp học sinh tiếp cận với đề thi, góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán ở trường phổ thông.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Đề tài chỉ tập trung nghiên cứu các kỹ năng cần thiết rèn luyện cho học sinh khi dạy phân tích khoảng cách- chương trình Hình học 11.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- +) Phương pháp nghiên cứu lí luận.
- +) Phương pháp điều tra quan sát.
- +) Phương pháp thực nghiệm sư phạm.

Phần II. Nội Dung

2.1.Cơ sở lí luận

- “Kỹ năng là năng lực hay khả năng của chủ thể thực hiện thuần thục một hay một chuỗi hành động trên cơ sở hiểu biết (kiến thức hoặc kinh nghiệm) nhằm tạo ra kết quả mong đợi

- “ Trong Toán học kỹ năng là khả năng giải các bài toán, thực hiện các chứng minh cũng như phân tích có phê phán các lời giải và chứng minh nhận được”.

Như vậy, dù phát biểu dưới góc độ nào, kỹ năng là khả năng vận dụng kiến thức (khái niệm, cách thức, phương pháp...) để giải quyết nhiệm vụ đặt ra. Nói đến kỹ năng là nói đến cách thức thủ thuật và trình tự thực hiện các thao tác hành động để đạt được mục đích đã định. Kỹ năng chính là kiến thức trong hành động.

2.2.Thực trạng vấn đề nghiên cứu

Khi dạy ôn tập cho kì thi Quốc gia học sinh lớp 12 thường gặp một số khó khăn khi giải phần HHKG (câu số 5 trong cấu trúc đề thi năm 2016) với nguyên nhân như là:

- +) Học sinh có trí tưởng tượng không gian chưa tốt.
- +) Do đặc thù môn học có tính trừu tượng cao nên việc tiếp thu và sử dụng các kiến thức HHKG là vấn đề khó đối với học sinh.
- +) Học sinh học sinh chưa được rèn luyện nhiều về kĩ năng giải các bài toán về khoảng cách và chưa được tiếp cận các dạng toán trong đề thi ngay từ lớp 11 .

2.3.Quá trình thực hiện

2.3.1 Một số kiến thức cơ bản

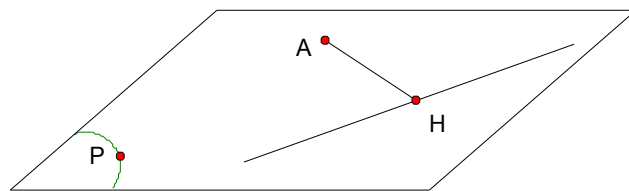
*** Định nghĩa 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

+) **Định nghĩa:** Trong không gian cho điểm A và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên d. Độ dài đoạn AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

+) Kí hiệu: $d(A, d)$.

+) Nhận xét: $d(A, d) \leq AM, \forall M \in d$.

Điểm H có thể được xác định như sau:



H là giao điểm của mặt phẳng qua A vuông góc với đường thẳng d với đường thẳng d. Hoặc là H là giao điểm của đường thẳng qua A, nằm trong mp(A, d) với đường thẳng d (khi A không nằm trên d, khi A nằm trên d thì H trùng với A).

Nếu $d' \parallel d$ thì $d(d, d') = d(A, d), \forall A \in d$, kí hiệu $d(d, d')$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song d và d'.

*. Định nghĩa 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

+) **Định nghĩa:** Trong không gian cho điểm A và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

+) Kí hiệu: $d(A, (P))$.

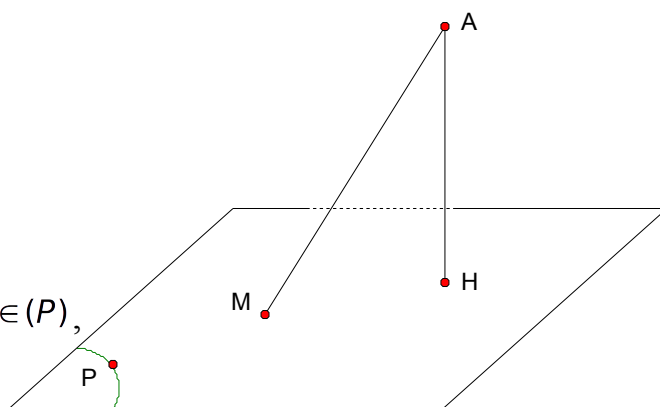
+) Nhận xét: $d(A, (P)) \leq AM, \forall M \in (P)$.

H là giao điểm của đường thẳng qua

A vuông góc với (P) với (P).

Nếu $a \parallel (P)$ thì $d(a, (P)) = d(A, (P)), \forall A \in (P)$,

trong đó kí hiệu $d(a, (P))$



để chỉ khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong trường hợp chúng song song với nhau.

Nếu $(P) \parallel (Q)$ thì $d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = d(B, (P)), \forall A \in (P), \forall B \in (Q)$, trong đó kí hiệu $d((P), (Q))$ để chỉ khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q).

*Định nghĩa 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

+) Định nghĩa: Trong không gian cho

hai đường thẳng chéo nhau a và b.

-) Đường thẳng Δ vuông góc với

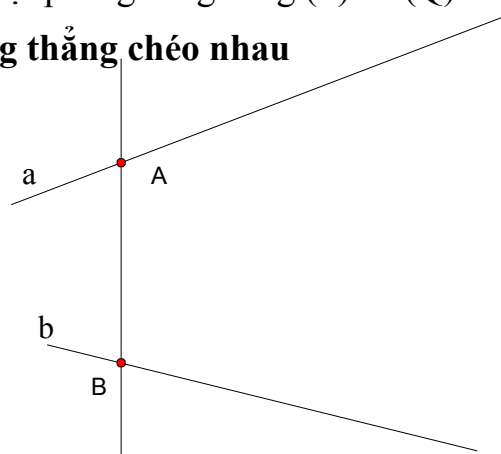
cả hai đường thẳng a và b đồng thời

cắt cả a và b gọi là đường vuông góc chung

của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

-) Gọi $A = a \cap \Delta, B = b \cap \Delta$. Đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

-) Độ dài đoạn AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



+) Kí hiệu: $d(a,b)$.

+) Nhận xét: $d(a,b) \leq MN, M \in a, N \in b$.

$d(a,b) = d(a,(P))$, trong đó (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a .

$d(a,b) = d((P),(Q)), (P) \parallel (Q), a \subset (P), b \subset (Q)$.

2.3.2 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách

2.3.2.1 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Để tính khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , Gv định hướng và rèn luyện cho học sinh thực hiện theo các bước sau:

B1. Xác định hình chiếu vuông góc H của M trên (P) .

B2. Tính độ dài MH . Khi đó $MH = d(M,(P))$.

Ngoài ra Gv cần lưu ý với học sinh một số kết quả sau:

- Nếu $MN \parallel (P)$ thì $d(M,(P)) = d(N,(P))$.

Nếu $a \parallel (P)$ thì $d(a,(P)) = d(A,(P)), A \in a$.

Nếu $(P) \parallel (Q)$ thì $d((P),(Q)) = d(A,(Q)) = d(B,(P)), A \in (P), B \in (Q)$.

- Nếu M là đỉnh của hình chóp và (P) chứa đáy của hình chóp thì H chính là chân đường cao của hình chóp, và $d(M,(P))$ bằng độ dài đường cao của hình chóp.

Đặc biệt: Nếu M là đỉnh của hình chóp đều và (P) chứa đáy của hình chóp thì H trùng với tâm đa giác đáy.

Nếu M là đỉnh O của tứ diện vuông $OABC$ thì H là trực tâm tam giác ABC và

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Nếu M là đỉnh của tứ diện trực tâm thì H là trực tâm của mặt đối diện.

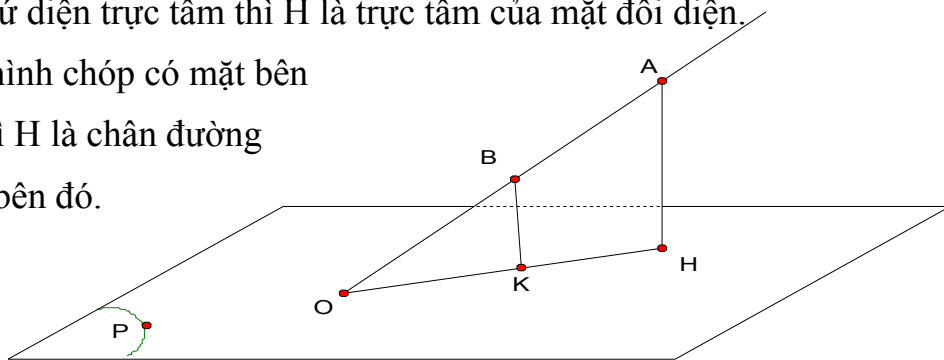
- Nếu M là đỉnh của hình chóp có mặt bên

vuông góc với đáy thì H là chân đường

cao kẻ từ M của mặt bên đó.

- Nếu $AB \cap (P) = O$

thì $\frac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \frac{OA}{OB}$.



Đặc biệt:

Nếu B là trung điểm của OA thì $d(A, (P)) = 2d(B, (P))$.

Hệ thống bài tập rèn luyện kỹ năng

Bài tập 1. (Trích đề KD- 2012)

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng có đáy là hình vuông nên

$$BC \perp (ABB'A') \Rightarrow (BCD') \perp (ABB'A').$$

Trong mp($ABB'A'$),

dựng AK vuông góc với BA' tại K thì

$$AK \perp (BCD') \Rightarrow d(A, (BCD')) = AK$$

$$\Delta ACA', A'C = a\sqrt{2} \text{ vuông cân tại A}$$

$$\Rightarrow AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ tứ giác } ABCD$$

$$\text{là hình vuông } AC = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow BA = \frac{a}{2}.$$

$\Delta ABA'$ vuông tại A có AK là đường

$$\text{cao} \Rightarrow AK = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Bài tập 2. (Trích đề KD- 2009)

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC

là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$,

I là giao điểm của AM và $A'C$.

Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mp(IBC).

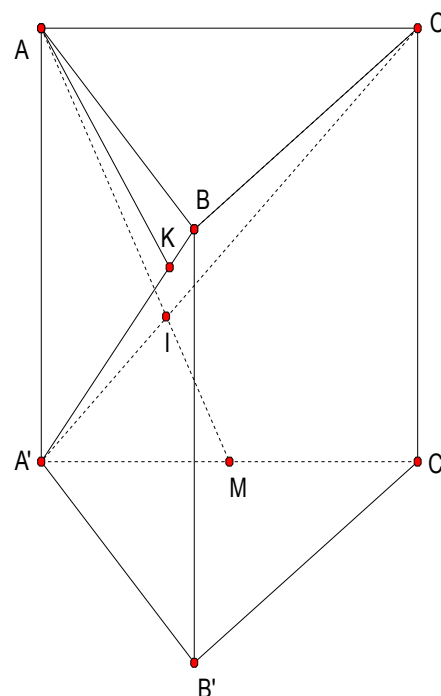
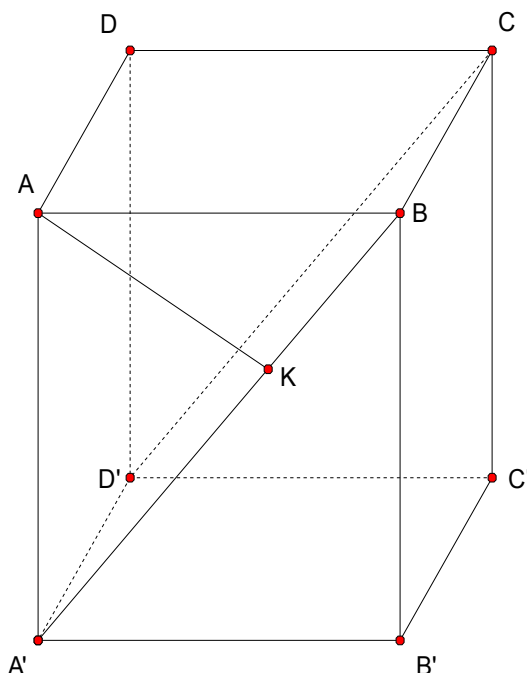
Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết về lăng trụ $\Rightarrow (IBC) \perp (ABB'A')$.

$$\Rightarrow BC \perp (ABB'A')$$

Trong mp($ABB'A'$) dựng $AK \perp A'B$ tại K.

$$\Rightarrow AK \perp (IBC) \Rightarrow d(A, (IBC)) = AK$$



$$\Delta ABA' \text{ vuông tại } A, \text{ có } AK \text{ là đường cao} \Rightarrow AK = \frac{AA' \cdot AB}{A'B} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (IBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$. M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên $mp(ABCD)$ trùng với giao điểm của AN và DM . Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SDN) .

Lời giải.

+) Gọi H là giao điểm của AN và DM .

Từ giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$. Ta có $\tan \angle ADM = \tan \angle BAN = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ADM = \angle BAN$

$$\Rightarrow \angle BMA + \angle BAN = \angle BMA + \angle ADM = 90^\circ \Rightarrow DM \perp AN.$$

ΔAMD vuông tại A có AH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot AD}{\sqrt{AM^2 + AD^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

ΔSAH vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{\frac{14}{5}}$. Ta có tứ diện $SHND$ là tứ diện

vuông vuông tại $H \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của H trên $mp(SND)$ trùng với trực tâm K của ΔSND . Vậy $d(H, (SND)) = HK$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HD^2}, \quad HN = AN - AH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$$

$$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{5}{14a^2} + \frac{20}{9a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{965}{252a^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{252}{965}}.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SND)) = a\sqrt{\frac{252}{965}} \text{ (đvdd)}.$$

Bài tập 1, 2 và 3 giúp học sinh rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng cách dựng hình chiếu vuông góc của điểm đó lên mặt phẳng rồi tính.

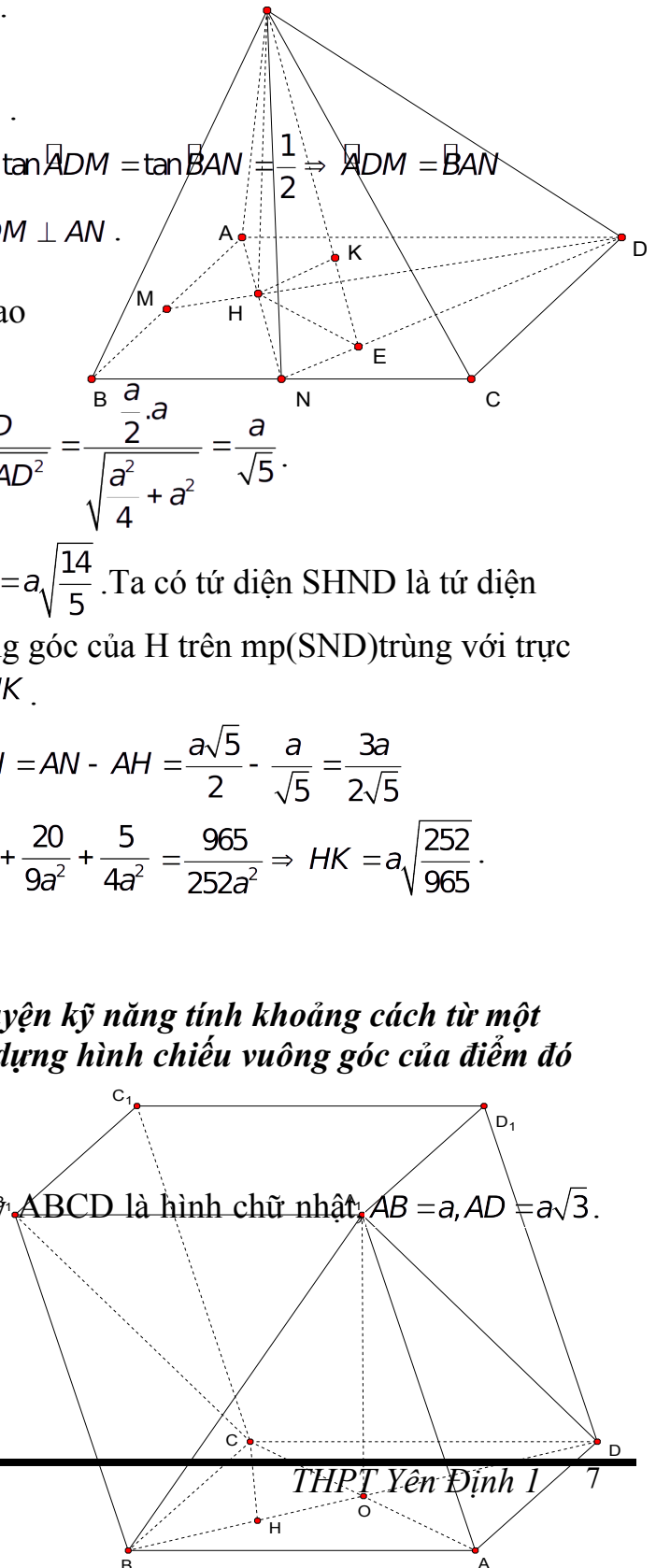
Bài tập 4. (Trích đề KB- 2011)

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A_1

trên $mp(ABCD)$ trùng với

giao điểm của AC và BD .



Góc giữa hai mặt phẳng
(ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60° .

Tính khoảng cách từ
điểm B_1 đến mp(A_1BD) theo a .

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD,
từ giả thiết suy ra $A_1O \perp (ABCD)$
 $\Rightarrow (A_1BD) \perp (ABCD)$.

Trong mp(ABCD) dựng CH vuông góc
với BD tại H $\Rightarrow CH \perp (A_1BD) \Rightarrow d(C, (A_1BD)) = CH$. $\triangle DBC$ vuông tại C có CH là

$$\text{đường cao} \Rightarrow CH = \frac{CD \cdot CB}{BD} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Mặt khác $B_1C \parallel A_1D$, $B_1C \notin (A_1BD) \Rightarrow B_1C \parallel (A_1BD)$

$$\Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 5. (Trích đề KB- 2013)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình
vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều
và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

Tính theo a khoảng cách từ điểm A
đến mp(SCD).

Hướng dẫn giải.

Lấy H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

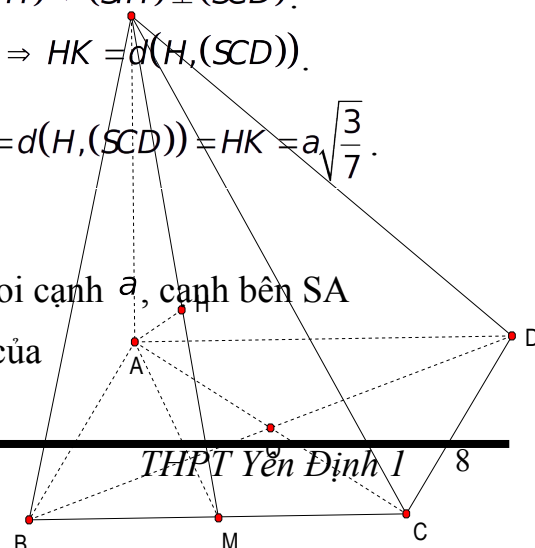
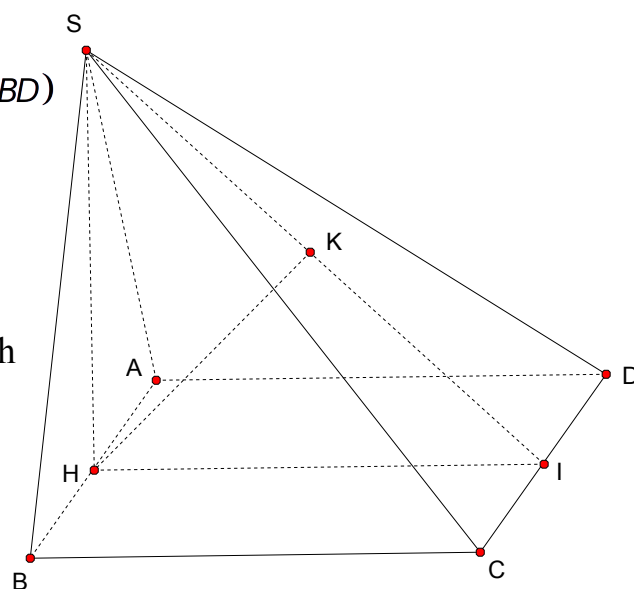
Lấy I là trung điểm của CD $\Rightarrow HI \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow (SHI) \perp (SCD)$.

Trong mp(SHI) dựng HK vuông góc với SI tại K $\Rightarrow HK = d(H, (SCD))$.

Tính được $HK = a\sqrt{\frac{3}{7}}$, $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Bài tập 6. (Trích đề KD- 2013)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , cạnh bên SA
vuông góc với đáy, $\angle BAD = 120^\circ$, M là trung điểm của



cạnh BC và $\angle MA = 45^\circ$.

Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mp(SBC).

Hướng dẫn giải.

Chứng minh $BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$.

Trong mp(SAM) dựng AH vuông góc với SM tại

$H \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = AH$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại A.

Tính được $AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Các bài tập 4,5 và 6 rèn luyện cho học sinh biết sử dụng kết quả quan trọng là: nếu $AB \parallel (P)$ thì $d(A, (P)) = d(B, (P))$ để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Bài tập 7. (Trích đề KA, A₁-2013)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\angle ABC = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a , mp(SBC) vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ C đến mp(SAB).

Lời giải.

Lấy H là trung điểm của BC. $\triangle SBC$ đều nên $SH \perp BC$.

$(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$. $\triangle ABC$ vuông tại A

$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow SA = SB = SC \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại S.

Lấy I là trung điểm của AB

$\Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SHI) \perp (SAB)$.

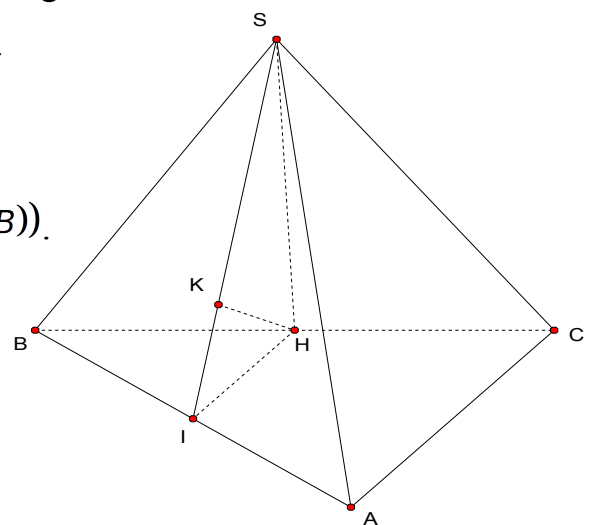
Kẻ $HK \perp SI$ tại K $\Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow HK = d(H, (SAB))$.

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $HI = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{4}$.

$\triangle SHI$ vuông tại H có HK là đường cao

$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{3}{52}}$

Mà $BC \cap (SAB) = B$



$$\Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài tập 8. (Trích đề KD- 2011)

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a, BC = 4a$, mp(SBC) và mp(ABC) vuông góc với nhau. $SB = 2a\sqrt{3}, \angle SBC = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ B đến mp(SAC) theo a.

Lời giải.

Kẻ đường cao SH của $\triangle SBC$, $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AC$

Kẻ $HK \perp AC$ tại K $AC \perp (SHK) \Rightarrow (SAC) \perp (SHK)$.

Trong mp(SHK) kẻ HI vuông góc với SK tại I

$\Rightarrow HI \perp (SAC) \Rightarrow HI = d(H, (SAC))$.

$\triangle SHK$ vuông tại H có HI là đường cao

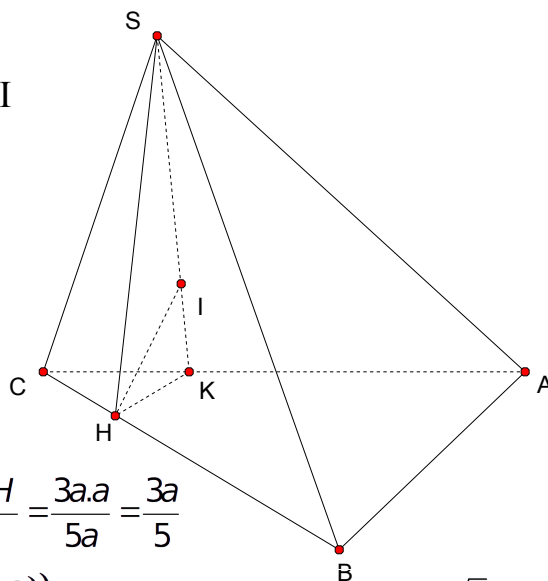
$$\Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2}.$$

$\triangle SHB$ vuông tại H nên $SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$,

$BH = SB \cos 30^\circ = 3a$.

$$\triangle CKH \sim \triangle CBA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{KH}{BA} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow HK = \frac{BA \cdot CH}{CA} = \frac{3a \cdot a}{5a} = \frac{3a}{5}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{3\sqrt{7}}{14}a. \text{ Do } BH \cap (SAC) = C \text{ nên } \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{4} \Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{6\sqrt{7}}{7}a.$$



.Các bài tập 7, 8 rèn luyện cho học sinh cách sử dụng hai tính chất:

- Nếu $AB \cap (P) = O$ thì $\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{OA}{OB}$.

- Nếu B là trung điểm của OA thì $d(A, (P)) = 2d(B, (P))$ để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

***Kết luận.** Trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, một kỹ năng rất quan trọng mà Gv phải rèn luyện được cho học sinh là kỹ năng dựng hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng. Chúng ta đã có kết quả là qua một điểm A cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước, trong thực hành giải toán việc dựng hình chiếu vuông góc của A lên (P) ta thực hành theo các bước sau:

B1. Xác định mp(Q) qua điểm A và vuông góc với (P).

B2. Xác định giao tuyến d của (P) và (Q).

B3. Trong (Q) qua điểm A dựng đường thẳng vuông góc với d tại H, khi đó H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mp(P).

2.3.2.2 Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

2.3.2.2.1. Rèn luyện kỹ năng tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng cách dựng đoạn vuông góc chung

Trong phần này Gv kết hợp để rèn luyện cho học sinh kỹ năng dựng đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

Giả sử có hai đường thẳng chéo nhau a, b .

+) Nếu $a \perp b$ để dựng đường vuông góc chung

của hai đường thẳng chéo nhau a, b

ta tiến hành theo quy trình sau:

B1. Dựng mp(α) chứa a và vuông góc

với b tại B.

B2. Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A.

Khi đó ta được BA là đường

vuông góc chung cần tìm, đồng thời $AB = d(a, b)$

+) Nếu a và b không vuông góc ta tiến hành dựng đường vuông góc chung theo một trong hai cách sau:

Cách 1. B1. Dựng mp(α) chứa

đường thẳng a và song song với

đường thẳng b .

B2. Lấy một điểm M tùy ý trên b

dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.

B3. Từ M' dựng đường thẳng

$b' \parallel b$ cắt đường thẳng

a tại A.

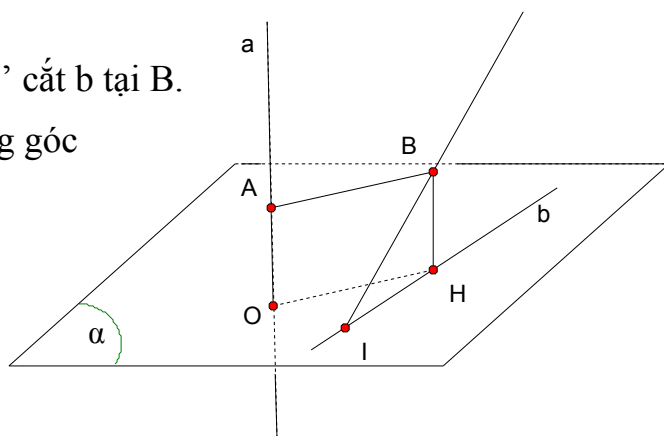
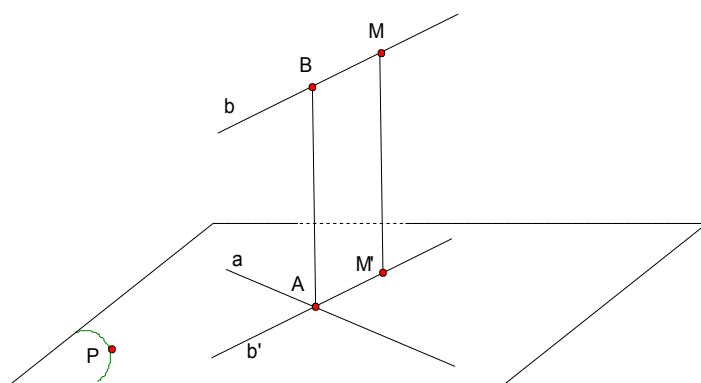
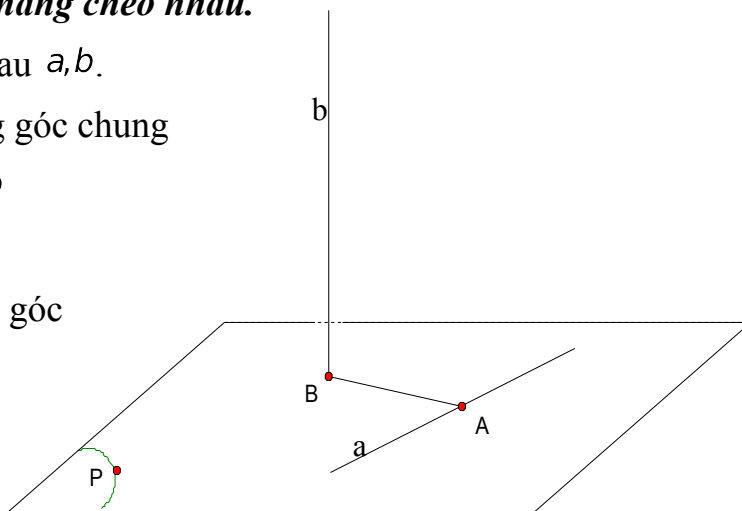
B4. Từ A dựng đường thẳng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B.

Khi đó đường thẳng AB là đường vuông góc

chung cần dựng. Khi đó $AB = d(a, b)$.

Cách 2.

B1. Dựng mp(α) $\perp a$ tại O.



B2. Dựng hình chiếu vuông góc của b trên (α) là b',

B3. Dựng OH vuông góc với b' tại H.

B4. Từ H dựng đường thẳng song song với đường thẳng a cắt đường thẳng b tại B

B5. Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A. Khi đó AB là đường vuông góc chung cần dựng và $d(a,b) = AB$.

Hệ thống bài tập rèn luyện kỹ năng

Bài tập 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, SA = h và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Dựng đường vuông góc chung của mỗi cặp đường thẳng chéo nhau dưới đây rồi tính khoảng cách giữa chúng:

a) SB và CD

b) SC và BD

c) SC và AB.

Lời giải.

a) Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Mặt khác tứ giác ABCD là hình vuông nên $BC \perp CD$.

Vậy BC là đường vuông góc chung của SB và CD.

Ta có $d(SB, CD) = BC = a$

b) Ta có $\left. \begin{array}{l} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Từ O hạ $OH \perp SC$ tại H ta có

$OH \perp SC, OH \perp BD$ nên OH là

đường vuông góc chung của SC và BD.

Ta có $d(BD, SC) = OH, \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} = \sin \angle ACS$

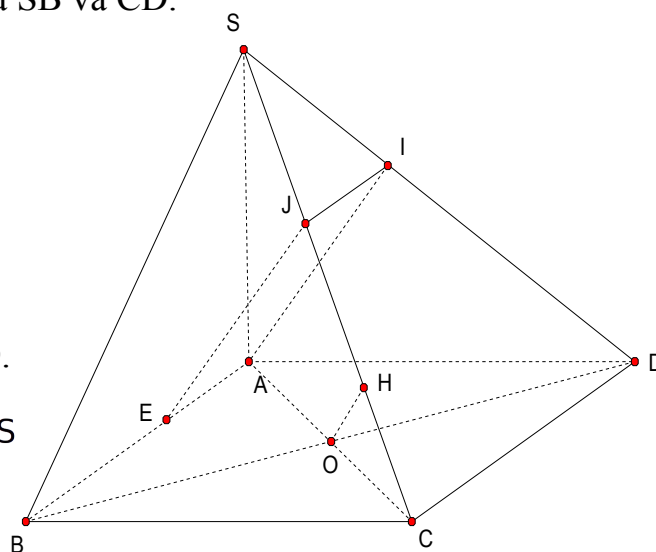
$$\Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$$

c) Cách 1. Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \not\subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.

Trong mp(SAD) dựng AI vuông góc với SD tại I. Do $(SAD) \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp (SCD)$, từ I kẻ đường thẳng song song với AB cắt SC tại J.

Từ J dựng đường thẳng song song với AI cắt AB tại E, khi đó JE là đường vuông góc chung của AB và SC.

Ta có tứ giác AIJE là hình chữ nhật nên $AI = EJ, d(AB, SC) = EJ = AI$.



ΔSAD vuông tại A có AK là đường cao $\Rightarrow AK = \frac{AS \cdot AD}{SD} = \frac{h \cdot a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Vậy $d(AB, SC) = \frac{h \cdot a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Cách 2. Ta có $\left. \begin{matrix} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Trong mp(SAD) có SD là hình chiếu vuông góc của SC, ta vẽ $AI \perp SD$ tại I.
Trong mp(SCD) vẽ $IJ \parallel AB$ cắt SC tại J.

Trong mp(IJ, AB) vẽ $JE \parallel AI$ cắt AB tại E.

Ta có AB và CD cùng vuông góc với (SAD) $\Rightarrow AB \perp AK, AK \perp CD$.

Ta có $\left. \begin{matrix} AI \perp SD \\ AI \perp CD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp SC$.

Vậy $AI \perp AB$ và $AI \perp SC$. Vì $EJ \parallel AI$ nên $EJ \perp AB$ và $EJ \perp SC$. Do đó EJ là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Ta có $EJ = AI = \frac{AS \cdot AD}{SD} = \frac{h \cdot a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. Vậy $d(AB, SC) = \frac{h \cdot a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Bài tập 2. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC

b) AI và OC.

Lời giải.

a) Ta có $\left. \begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. ΔOBC cân đỉnh O, có I là trung điểm của BC $OI \perp BC$.

Từ $\left. \begin{matrix} BC \perp OI \\ BC \perp OA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp OI$.

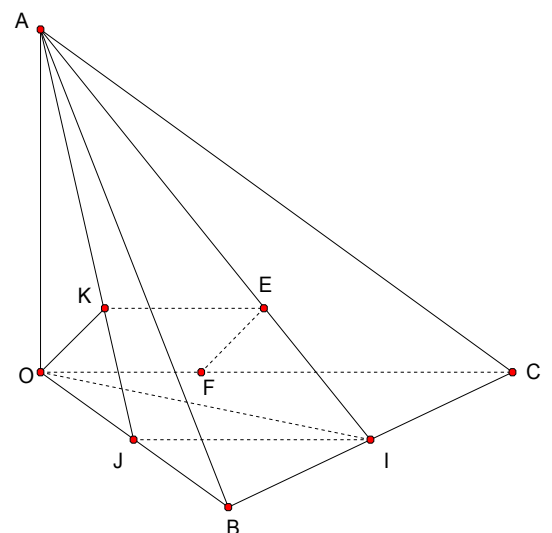
Từ $\left. \begin{matrix} OI \perp BC, \text{ vì } I \\ OI \perp OA, \text{ vì } O \end{matrix} \right\} \Rightarrow OI$ là

đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Ta có ΔOBC vuông tại O,

có OI là đường cao nên

$OI = \frac{OB \cdot OC}{\sqrt{OB^2 + OC^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Vậy $d(OA, BC) = OI = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



b) Cách 1. $\left. \begin{matrix} OC \perp OB \\ OC \perp OA \end{matrix} \right\} \Rightarrow OC \perp (OAB) \text{ tại } O.$

$A = AI \cap (OAB)$, từ I vẽ $IK \parallel OC$ thì IK vuông góc với mặt phẳng (OAB) tại trung điểm K của OB.

Ta có AK là hình chiếu vuông góc của AI trên $mp(OAB)$.

Trong $mp(OAB)$ vẽ $OH \perp AK$. Dựng $HE \parallel OC$ với $E \in AI$ và dựng $EF \parallel OH$ với $F \in OC$. Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC , đường thẳng EF là đường vuông góc chung của AI và OC .

Ta có $EF = OH$. Trong tam giác vuông OAK , ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } d(OC, AI) = EF = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 2. lấy J là trung điểm của OB thì $IJ \parallel OC$ do đó $OC \parallel (AIJ)$.

Vậy $mp(AIJ)$ chứa AI và song song với OC .

Do $IJ \parallel OC$, $OC \perp (OAB) \Rightarrow IJ \perp (OAB) \Rightarrow (AIJ) \perp (OAB)$.

Dựng OH vuông góc với AJ tại $H \Rightarrow OH \perp (AIJ)$.

Từ K kẻ đường thẳng song song với OC cắt AI tại E. Từ E dựng đường thẳng song song với OH cắt OC tại F.

Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC , đường thẳng EF là đường vuông góc chung của AI và OC . Ta có $d(OC, AI) = EF = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Bài tập 3. (Trích đề KA- 2010)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , H là giao điểm của CN với MD . Biết $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa DM và SC theo a .

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình vuông M, N lần lượt

là trung điểm của AB và AD

$$\Rightarrow \triangle CDN = \triangle DAM \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle DCN = \angle ADM$$

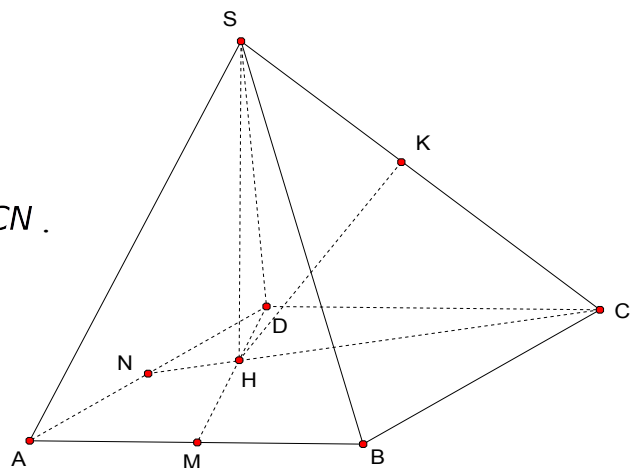
$$\Rightarrow \angle HDC + \angle HCD = \angle HDC + \angle HDN = 90^\circ \Rightarrow DM \perp CN.$$

Từ gt $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DM$

$$\Rightarrow DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp SC.$$

Kẻ HK vuông góc với SC tại $K \Rightarrow HK$

là đoạn vuông góc chung của DM và SC .



$$\Rightarrow d(DM, SC) = HK$$

$$\text{Ta có } SH = a\sqrt{3}, HC.NC = DC^2 \Rightarrow HC = \frac{DC^2}{NC} = \frac{DC^2}{\sqrt{DN^2 + DC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$\triangle SHK$ vuông tại H, có HK là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow HK = \frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{3a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

$$\text{Vậy } d(DM, SC) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

2.3.2.2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau khi không dựng đoạn vuông góc chung

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau mà không dựng đoạn vuông góc chung chúng ta dựa trên các kết quả sau:

+) Với hai đường thẳng chéo nhau a và b thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a mà (P) // b. Khi đó $d(a, b) = d(b, (P)) = d(B, (P)), B \in b$

Lúc đó ta có quy trình xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b như sau:

- Xác định mp(P) chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b.
- Lấy điểm B trên đường thẳng b. Tính $d(B, (P))$.
- Khi đó $d(a, b) = d(B, (P))$.

+) Với hai đường thẳng chéo nhau a và b thì tồn tại duy nhất cặp mặt phẳng (P), (Q) sao cho $a \subset (P), b \subset (Q), (P) // (Q)$.

Khi đó $d(a, b) = d((P), (Q)) = d(A, (P)) = d(B, (Q)), A \in (P), B \in (Q)$.

Từ đó ta có quy trình tính khoảng cách giữa a và b như sau:

- Dựng các mặt phẳng (P), (Q) sao cho $(P) \supset a, (Q) \supset b, (P) // (Q)$.
- Lấy A trên (P) hoặc B trên (Q).
- Tính $d(A, (Q))$ hoặc $d(B, (P))$, khi đó ta có khoảng cách cần tính.

Hệ thống bài tập rèn luyện kỹ năng

Bài tập 1. (Trích đề KA – 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, mp(SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mp(ABC). Gọi M là trung điểm của

AB, mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N. Biết $((SBC), (ABC)) = 60^\circ$.
 . Tính khoảng cách giữa AB và SN theo a.

Lời giải.

M là trung điểm của AB $\Rightarrow N$ trung điểm của AC. Kẻ đường thẳng Δ qua N, song song với AB.

Kẻ AD vuông góc với Δ tại D $\Rightarrow AB \parallel (SND)$

$$\Rightarrow d(AB, SN) = d(AB, (SND)) = d(A, (SND)).$$

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ \text{Từ } (SAC) \perp (ABC) \\ SA = (SAB) \cap (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp ND,$$

mà $DN \perp AD \Rightarrow DN \perp (SAD) \Rightarrow (SDN) \perp (SAD)$.

Trong mp(SAD) kẻ AH vuông góc với SD tại H

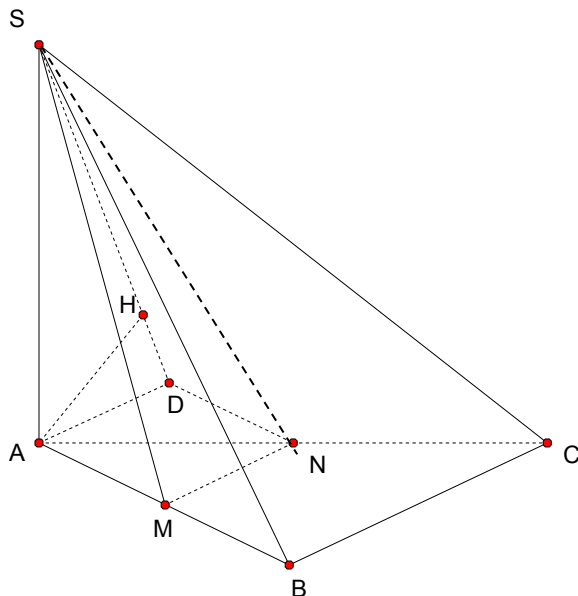
$$\Rightarrow AH \perp (SDN) \Rightarrow AH = d(A, (SDN)).$$

$\triangle SAB$ vuông tại A $\Rightarrow \angle SBA < 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB), \angle SBA < 90^\circ \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \angle SBA = 60^\circ$$

Ta có $AD = MN = a$, $AS = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$. $\triangle SAD$ vuông tại A có AH là đường cao nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

$$\text{Vậy } d(AB, SN) = d(A, (SDN)) = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

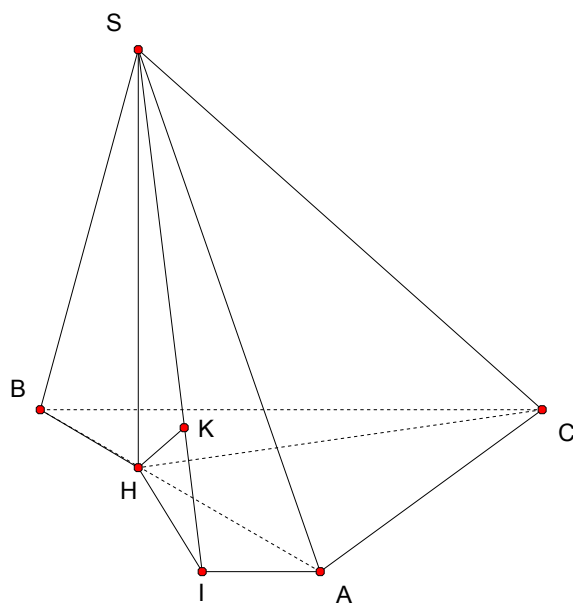


Bài tập 2. (Trích đề KA, A₁- 2012)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mp(ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Lời giải.

Qua điểm A dựng đường thẳng d



song song với $BC \Rightarrow (SA, d) // BC$. Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp d$. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với d tại I $\Rightarrow d \perp (SHI)$.

Trong mp(SHI) kẻ HK vuông góc với SI tại K $\Rightarrow HK = d(H, (SAI))$.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC)

$$\text{Ta có } HA = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a, HC = \frac{1}{3}a, HI = HA \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9}, SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\Delta SHI \text{ vuông tại H có HK là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{24}{7a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(B, (SAI))}{d(H, (SAI))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SAI)) = \frac{3}{2}d(H, (SAI)) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = d(B, (SAI)) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Bài tập 3: (Trích đề thi quốc gia 2015)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng ABCD, góc giữa SC với mặt phẳng ABCD bằng 45° . Tính khoảng cách giữa SB và AC theo a.

Hướng dẫn giải: Kẻ đường thẳng d qua B và

song song với AC. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên d, H là hình chiếu vuông góc của A trên SM. Ta có $SA \perp BM$,

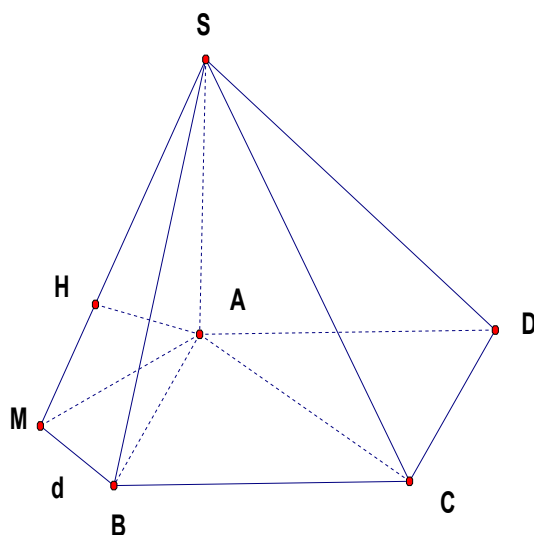
$MA \perp BM$ nên $AH \perp BM \Rightarrow AH \perp (SBM)$

Do đó $d(AC, SB) = d(A, (SBM)) = AH$

Trong tam giác SAM vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{2a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$



Kết luận: Trong phần 2 tôi đã hệ thống các kỹ năng cần thiết cần phải rèn luyện cho học sinh khi dạy học phần tính khoảng cách trong không gian,

chương trình Hình học 11. Việc rèn luyện các kỹ năng đó được thực hành thông qua một hệ thống các bài tập theo chủ đề, các bài tập được chọn lựa minh họa có thể giải bằng nhiều cách khác nhau mà mục đích của việc giải một bài tập theo nhiều cách khác nhau là để học sinh được rèn luyện khả năng vận dụng các kỹ năng chứng minh khác nhau cho một bài Toán từ đó rèn luyện khả năng linh hoạt trong tư duy và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

2.4.Kết quả thực hiện:

Sáng kiến kinh nghiệm đã được áp dụng năm học 2015-2016 tại trường THPT Yên Định 1

Bài kiểm tra trên hai đối tượng: lớp 11A4(ban tự nhiên) không áp dụng sang kiến và lớp 11A9(ban cơ bản định hướng khối D) áp dụng sang kiến ,kết quả như sau

Điểm	>9	9	8 → 9	7 → 8	6 → 7	5 → 6	<5
Lớp 11A4	0	4	9	7	15	5	1
Tỉ lệ %	0	9,76	21,95	17,07	36,58	12,20	2,44
Lớp 11A9	4	6	17	9	5	0	0
Tỉ lệ %	9,76	14,63	41,46	21,95	10,20	0	0

Từ kết quả kiểm tra trên tôi thấy:

- Tất cả với các em học sinh ở lớp thực nghiệm đều đã nắm được chuẩn kiến thức và kỹ năng của bài học.

- So với lớp đối chứng thì kết quả kiểm tra của các em ở lớp thực nghiệm vượt trội hơn hẳn , đồng thời khi làm bài các em đã biết vận dụng và trình bày lời giải chặt chẽ và logic hơn.

Từ việc dạy thực nghiệm tôi thấy:

-Việc đưa ra hệ thống bài tập Hình học rèn luyện kỹ năng giải Toán cho học sinh phần khoảng cách trong không gian trong tiết dạy bài tập, kết hợp các biện pháp sư phạm hợp lí để bồi dưỡng năng lực giải Toán cho học sinh là hoàn toàn có thể thực hiện được.

- Khi dạy học giải bài tập Hình học không gian nói chung và phần khoảng cách nói riêng Gv cần chú ý rèn luyện kỹ năng vẽ hình, kỹ năng giải Toán và tạo hứng thú học tập cho học sinh, nên cho học sinh được học tập trong hoạt động chủ động tích cực.

Phần III. Kết luận

Qua thời gian nghiên cứu viết sáng kiến và vận dụng sáng kiến vào giảng dạy tôi rút ra một số kết luận sau:

- Trong các nhiệm vụ của môn Toán ở trường THPT, cùng với truyền thụ tri thức, rèn luyện kỹ năng là một nhiệm vụ quan trọng để thực hiện các nhiệm vụ khác. Để rèn luyện kỹ năng giải Toán cho học sinh cần đưa ra một hệ thống các bài tập đa dạng, được sắp xếp một cách hợp lý từ dễ đến khó nhằm giúp học sinh củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng phát triển tư duy và biết áp dụng Toán học vào thực tiễn.
 - Người Gv phải là người dẫn đường tốt cho học sinh bằng cách định hướng cho học sinh. Trong khi dạy học Gv phải chú ý đến việc tạo tâm thế hứng thú học tập cho học sinh.
 - Đề tài đã xây dựng được một hệ thống bài tập rèn luyện kỹ năng cho học sinh khi dạy học phần khoảng cách trong không gian chương trình hình học 11.
 - Tôi thiết nghĩ đề tài có thể áp dụng để giảng dạy phù hợp cho nhiều đối tượng học sinh từ học sinh trung bình đến các em khá giỏi. Có thể vận dụng cho cả việc dạy chính khóa và ngoại khóa trong các tiết luyện tập, đề tài cũng có thể sử dụng để dạy và làm tài liệu tham khảo tốt cho học sinh ôn thi ĐH – CĐ, đó chính là tính ứng dụng thực tiễn của đề tài. Tuy nhiên cũng cần lưu ý rằng khi áp dụng vào giảng dạy tùy vào tiến độ chương trình chính khóa và đối tượng học sinh để Gv lựa chọn hệ thống bài tập và phương pháp giải cho phù hợp.
- Mặc dầu bản thân cũng đã cố gắng tìm tòi và đúc rút kinh nghiệm nhưng đề tài ngày càng hoàn thiện và vận dụng dạy học có hiệu quả hơn, rất mong được sự giúp đỡ đóng góp ý kiến của các quý thầy cô và bạn bè đồng nghiệp. Xin chân thành cảm ơn.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 25 tháng 5 năm 2016.</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. <i>Lê Thị Nhung</i>
--------------------------------	---

Tài liệu tham khảo

- [1]. Bài tập Hình học 11 nâng cao, Văn Như Cương (Chủ biên) – Phạm Khắc Ban - Tạ Mân, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [2]. Bài tập Hình học 11, Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên) – Khu Quốc Anh – Nguyễn Hà Thanh, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [3]. Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình học 11, Nguyễn Đức Tấn, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [4]. Các bài giảng luyện thi môn Toán, Tập 1, Phan Đức Chính - Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [5]. Đề thi tuyển sinh đại học cao đẳng từ năm 2002 đến 2013, Môn Toán.
- [6]. Polya G (1995), Giải một bài toán như thế nào. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
- [7]. SGK Hình học 11, Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) – Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên) – Khu Quốc Anh – Nguyễn Hà Thanh – Phan Văn Viện, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [8]. SGK Hình Học 11 Nâng cao, Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Văn Như Cương (Chủ biên) - Phạm Khắc Ban – Tạ Mân, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [9]. Tài liệu bồi dưỡng thường xuyên chu kì 3 (2004- 2007), Toán học, PGS.TS.Bùi Văn Nghị - PGS.TS.Vương Dương Minh – TS.Nguyễn Tuấn Anh, Hà Nội 2005.
- [10]. Đề thi quốc gia năm 2015, môn Toán