**ĐỀ 74**

**HSG TOÁN 9 QUẢNG NAM 2023-2024**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức A = $\frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}$ $-$ $\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0$ và x $\ne $ 1.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để A x = − 3 .

1. Tìm giá trị của tham số m để phương trình

$$x^{2}+2(m+2)x+m^{2}+1=0$$

có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$, $x\_{2}$ thỏa mãn $\left|x\_{1}\right|$+ $\left|x\_{2}\right|$ = $x\_{1}.x\_{2}$

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}+2\sqrt{\left(2-x\right)\left(3+x\right)}-7=0$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\left(2x+y\right)\left(x+y\right)+y=2\\4x^{2}+y^{2}-2x-2y+4xy=-2\end{array}\right.$

**Câu 3. (3,0 điểm)** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , AB = 4cm . Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho AM = 4AD

1. Tính diện tích tam giác DMN.
2. Chứng minh tam giác DIN vuông cân

**Câu 4. (4,0 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), nội tiếp trong đường tròn (O) . Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N ( M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB và AC ). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE .

1. Chứng minh EB là tia phân giác của $\hat{DEM}$
2. Chứng minh AM = AN
3. Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

**Câu 5. (5,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.
2. Cho ba số thực dương x, y, x thỏa mãn xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biếu thức

H = $\frac{x^{3}-1}{x^{2}+y+x}$ $+\frac{y^{3}-1}{y^{2}+z+x}$ $+\frac{z^{3}-1}{z^{2}+x+y}$

**------HẾT------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức A = $\frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}$ $-$ $\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0$ và x $\ne $ 1.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để A x = − 3 .

1. Tìm giá trị của tham số m để phương trình

$$x^{2}+2(m+2)x+m^{2}+1=0$$

có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$, $x\_{2}$ thỏa mãn $\left|x\_{1}\right|$+ $\left|x\_{2}\right|$ = $x\_{1}.x\_{2}$

**Lời giải**

**a)** Ta có A = $\frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}$ $-$ $\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$

= $\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $-$ $\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}$

= $\frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ $-$ $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

= $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

= $\sqrt{x}-1$

A = $x-3⇒\sqrt{x}-1=x-3$

$$⇔x-\sqrt{x}-2=0⇔\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$$

$⇔$ $\sqrt{x}-2=0⇒x=4$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=4$

b) Ta có: $∆'=\left(m+2\right)^{2}-1.\left(m^{2}+1\right)=4m+3$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $∆'$ > 0$ $

$⇔4m+3>0⇔m>-$ $\frac{3}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x\_{1}$+ $x\_{2}$ = $-2\left(m+2\right);$ $x\_{1}.x\_{2}$ = $m^{2}+1$ (1)

Ta có $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}.x\_{2} = m^{2}+1>0 ∀m\\x\_{1}+ x\_{2} = -2\left(m+2\right)<0\left(m>- \frac{3}{4}\right)\end{array}\right.$ $⇒\left\{\begin{array}{c}x\_{1}<0\\ x\_{2} <0\end{array}\right.$

Khi đó $\left|x\_{1}\right|$+ $\left|x\_{2}\right|$ = $x\_{1}.x\_{2}$ $⇔-x\_{1}-x\_{2}=x\_{1}.x\_{2}⇔x\_{1}.x\_{2}+x\_{1}+x\_{2}=0$ (2)

Thay (1) và (2) ta có: $m^{2}+1-2(m+2)=0⇔m^{2}-2m-3=0$

$$⇔\left(m+1\right)\left(m-3\right)=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}m=-1\\m=3\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được m = 3

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}+2\sqrt{\left(2-x\right)\left(3+x\right)}-7=0$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\left(2x+y\right)\left(x+y\right)+y=2\\4x^{2}+y^{2}-2x-2y+4xy=-2\end{array}\right.$

**Lời giải**

a) Ta có ĐK: $-3\leq x\leq 2$

Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=t$ (t $\geq $ 0) $⇒2\sqrt{\left(2-x\right)\left(3+x\right)}=t^{2}-5$

Phương trình đã cho trở thành: $t^{2}+t-12=0⇔\left(t-3\right)\left(t+4\right)=0$

$⇔$ $t=3$ (vì $t\geq 0)$

Khi đó ta có: $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=3⇒\sqrt{\left(2-x\right)\left(3+x\right)}=2$

$⇒$ $x^{2}+x-2=0⇔\left(x+2\right)\left(x-1\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=-2$; $x=1$

b) Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\left(2x+y\right)\left(x+y\right)+y=2 (1)\\4x^{2}+y^{2}-2x-2y+4xy=-2 (2)\end{array}\right.$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(2x+y\right)\left(x+y\right)+4x^{2}+y^{2}-2x-y+4xy=0$$

$⇔$ $\left(2x+y\right)\left(x+y\right)+\left(2x+y\right)^{2}-\left(2x+y\right)=0$

$⇔$ $\left(2x+y\right)\left(3x+2y-1\right)=0$

$⇔\left[\begin{array}{c}y=-2x\\y=\frac{1-3x}{2}\end{array}\right.$

\* Thay $y=-2x$ vào phương trình (1) ta được: $y=2$ $⇒x=-1$

 \* Thay $y=\frac{1-3x}{2}$ vào phương trình (1) ta được: $x^{2}+6x+5=0$

$⇔\left(x+1\right)\left(x+5\right)=0$ $⇔\left[\begin{array}{c}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$

+) Nếu $x=-1⇒y=2$

+) Nếu $x=-5⇒y=8$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\left(-1;2\right), \left(-5;8\right)$

**Câu 3. (3,0 điểm)** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , AB = 4cm . Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho AM = 4AD

1. Tính diện tích tam giác DMN.
2. Chứng minh tam giác DIN vuông cân

**Lời giải**

****

**a)** Ta có BC = $4\sqrt{2}$(cm); AM$=\frac{1}{2}.$BC = $2\sqrt{2}$(cm); DM = $\frac{3}{4}$.AM = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$(cm)

Gọi H là trung điểm của AM $⇒$ HN $⊥$ AM và HN = $\frac{1}{2}$.MC = $\sqrt{2}$(cm)

Suy ra $S\_{DMN}$ = $\frac{DM.HN}{2}$ = $\frac{3\sqrt{2}.\sqrt{2}}{4}$ = $1,5$($cm^{2}$)

b) Gọi K là trung điểm của AN.

Ta có IM//KN, IK $⊥$ KN và IM = KN nên tứ giác MNKI là hình chữ nhật.

Lại có $\frac{AD}{AM}$ = $\frac{AK}{AC}$ = $\frac{1}{4}$ $⇒$ KD//CM.

Mà CM $⊥$ AM $⇒$ CM$ ⊥$ KD

Suy ra M, N, K, D, I cùng thuộc đường tròn đường kính KM cũng là đường tròn đường kính IN.

$⇒$ $\hat{NDI}=90$° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mặt khác $\hat{NID}$ $=$ $\hat{NMD}=45$°

Do đó tam giác DIN vuông cân tại D

**Câu 4. (4,0 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), nội tiếp trong đường tròn (O) . Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N ( M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB và AC ). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE .

1. Chứng minh EB là tia phân giác của $\hat{DEM}$
2. Chứng minh AM = AN
3. Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

**Lời giải**

****

**a)** Chứng minh EB là tia phân giác của $\hat{DEM}$

Xét tứ giác ABDE có: $\hat{AEB}$ $=$ $\hat{ADB}=90$° (BE và AD là đường cao của $△ABC$)

Hai đỉnh E và D kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới cùng góc $90$° nên tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn

$⇒$ $\hat{BAD}$ = $\hat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\hat{BD}$)

Gọi H là trực tâm của $△ABC$

Xét tứ giác AEHF có: $\hat{AEH}$ + $\hat{AFH}$ $=90$° + $90$° $=180$° (BE và CF là đường cao của $△ABC$) nên tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn

$⇒$ $\hat{BAD}$ = $\hat{FEH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\hat{FH}$)

Vậy EB là tia phân giác của $\hat{DEM}$

b) Chứng minh AM = AN

Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O)

Ta có: $\hat{xAB}$ = $\hat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\hat{AB}$)

Xét tứ giác AFEC có: $\hat{BEC}$ $=$ $\hat{BFC}=90$° (BE và CF là đường cao của $△ABC$)

Hai đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới cùng góc $90$° nên tứ giác BEFC nội tiếp được đường tròn

Mà $\hat{AFE}$ + $\hat{BFE}$ $=180$° (hai góc kề bù) tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn

$⇒$ $\hat{ACB}$ + $\hat{BFE}$ $=180$°

Do đó: $\hat{xAB}$ = $\hat{AFE}$

Do hai góc này so le trong nên Ax//MN

Ta lại có Ax$⊥$MN $⇒$ AO$⊥$MN

$⇒$ A là điểm chính giữa của $\hat{MN}$

$⇒$ $\hat{AN}$ = $\hat{AM}$

 $⇒$ AM = AN (cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau)

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Xét tứ giác AFDC có: $\hat{AFC}$ $=$ $\hat{ADC}=90$° (AD và CF là đường cao của $△ABC$)

Hai đỉnh F và D kề nhau cùng nhìn cạnh AD dưới cùng góc $90$° nên tứ giác AFDC nội tiếp đường tròn

$⇒$ $\hat{AFD}$ + $\hat{ACB}$ $=180$° (hai góc nội tiếp cùng chắn $⇒$ $\hat{BD}$)

Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn $⇒$ $\hat{ACB}$ + $\hat{BFE}$ $=180$°

Suy ra $\hat{AFD}=$ $\hat{IFB}$ (hai góc đối đỉnh)

 $⇒$ $\hat{BFI}$ + $\hat{BFE}$

Xét $△$BFI và $△$BFN có:

BF là cạnh chung

$\hat{MBA}=$ $\hat{NBA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau là $\hat{AN}=$ $\hat{AM}$)

$\hat{BFI}=$ $\hat{BFE}$ (Cmt)

Do đó: $△$BFI = $△$BFN (g.c.g)

$⇒$ BI = BN; FI = FN

$⇒$ BF là đường trung trực của IN hay BA là đường trung trực của IN

$⇒$ AN = AI

Chứng minh tương tự, ta được AJ = AM

Khi đó: AN = AM = AI = AJ

Vậy tứ giác MNJI nội tiếp đường tròn

**Câu 5. (5,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.
2. Cho ba số thực dương x, y, x thỏa mãn xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biếu thức

H = $\frac{x^{3}-1}{x^{2}+y+x}$ $+\frac{y^{3}-1}{y^{2}+z+x}$ $+\frac{z^{3}-1}{z^{2}+x+y}$

**Lời giải**

**a)** Gọi n là số tự nhiên cần tìm, S(n) là tổng các chữ số của nó

Theo đề bài, ta có $n+S(n)=2023⇒S(n)=2023-n$

Ta có 0 < n < 2023 $⇒$ S(n) $\leq 28$

(Khi $n=1999⇒S(n)=1+9+9+9=28$)

$⇒$ 2023$-n\leq 28⇔n\geq 1995$

Hay 1995$\leq n=\overbar{abcd}<2023$ nên a = 1 hoặc a = 2

* Xét a = 1, ta có n = $\overbar{1bcd}$

Mà n + S(n) = 2023

$⇔$ $\overbar{1bcd}+1+b+c+d=2023$

$⇔$ $1000+\overbar{bcd}+1+b+c+d=2023$

$⇔$ $\overbar{bcd}+1+b+c+d=2023$

$⇔$ $100b+10c+d+1+b+c+d=2023$

$⇔$ $101b+10c+2d+1=2023$

Do 0 $\leq b;c;d\leq 9$ nên b = 9, 11c + 2d = 1133 $⇒$ c = 9; d = 7

Ta được n = 1997

* Xét a = 2, ta có n = $\overbar{2bcd}$

Mà n + S(n) = 2023

$⇔$ $\overbar{2bcd}+2+b+c+d=2023$

$⇔$ $2000+\overbar{bcd}+2+b+c+d=2023$

$⇔$ $\overbar{bcd}+b+c+d=$21

$⇔$ $100b+10c+d+b+c+d=21$

$⇔$ $101b+11c+2d=21$

Do 0 $\leq b;c;d\leq 9$ nên b = 0, 11c + 2d = 21 $⇒$ c = 1; d = 5

Ta được n = 2015

Vậy có hai số thỏa mãn đề bài là 1997; 2015

b)

$\frac{1}{x^{2}+y+z}$ $-$ $\frac{1}{x\left(x+y+z\right)}$ = $\frac{x(x+y+z)-x^{2}-y-z}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$ = $\frac{x^{2}+xy+xz-x^{2}-y-z}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$

= $\frac{xy+xz-y-z}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$ = $\frac{xy-y+xz-z}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$

= $\frac{y(x-1)+z(x-1)}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$ = $\frac{(x-1)(y+z)}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$

$⇒$ $\frac{x^{3}-1}{x^{2}+y+z}$ $-$ $\frac{x^{3}-1}{x\left(x+y+z\right)}$ = $\frac{\left(x^{3}-1\right)(x-1)(y+z)}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$

= $\frac{(x-1)(x^{2}+x+x)(x-1)(y+z)}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$ = $\frac{\left(x-1\right)^{2}(x^{2}+x+x)(y+z)}{x(x^{2}+y+z)(x+y+z)}$ $\geq 0$

$⇒$ $\frac{x^{3}-1}{x^{2}+y+z}$ $\geq $ $\frac{x^{3}-1}{x\left(x+y+z\right)}$

Tương tự: $\frac{y^{3}-1}{y^{2}+z+x}$ $\geq $ $\frac{y^{3}-1}{y\left(x+y+z\right)}$; $\frac{z^{3}-1}{z^{2}+x+y}$ $\geq $ $\frac{z^{3}-1}{z\left(x+y+z\right)}$

Khi đó

H $\geq $ $\frac{x^{3}-1}{x\left(x+y+z\right)}$ $+$ $\frac{y^{3}-1}{y\left(x+y+z\right)}$ $+$ $\frac{z^{3}-1}{z\left(x+y+z\right)}$

$⇒$ H $\geq $ $\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{x^{3}-1}{x}+\frac{y^{3}-1}{y}+\frac{z^{3}-1}{z}\right)$

$⇒$ H $\geq $ $\frac{1}{x+y+z}$ $\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$

Ta lại có: $xyz$ $\geq 1$ $⇒$ $\frac{1}{x}$ $\leq yz$; $\frac{1}{y}$ $\leq xz$; $\frac{1}{x}$ $\leq xy$

$⇒$ H $\geq $ $\frac{1}{x+y+z}$ $\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-yz-xz\right)$

$⇒$ H $\geq $ $\frac{1}{x+y+z}$ $\left[\left(x-y\right)^{2}+\left(y-z\right)^{2}+\left(x-z\right)^{2}\right]\geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy H đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x=y=z=1$

**------HẾT------**