

# Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

## Chuyên đề 1. PHÉP NHÂN CÁC ĐA THỨC

### A. Kiến thức cần nhớ

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A.(B + C) = AB + AC$$

2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1:** Thực hiện phép tính :

$$a) A = -\frac{2x}{3}(15x - 6y)$$

$$b) B = (5x^2 - 3y)(4x^2 + 2y)$$

**Giải**

$$a) A = -\frac{2x}{3} \cdot 15x + \left(-\frac{2x}{3}\right)(-6y)$$

$$b) B = 20x^4 + 10x^2y - 12x^2y - 6y^2$$

$$A = -10x^2 + 4xy$$

$$B = 20x^4 - 2x^2y - 6y^2$$

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị biểu thức sau:

$$a) A = (5x - 7)(2x + 3) - (7x + 2) \text{ tại } x = \frac{1}{2}$$

$$b) B = (x - 2)(y - 2x) + (x + 2y)(y + 2x) \text{ tại } x = 2; y = -2$$

**Giải**

**Tìm cách giải.** Nếu thay giá trị của biến vào biểu thức thì ta được số rất phức tạp. Khi thực hiện sẽ gặp khó khăn, dễ dẫn tới sai lầm. Do vậy chúng ta cần thực hiện nhân đa thức với đa thức rồi thu gọn đa thức. Cuối cùng mới thay số.

**Trình bày lời giải**

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (5x - 7)(2x + 3) - (7x + 2)(x - 4) \\ &= (10x^2 + 15x - 14x - 21) - (7x^2 - 28x + 2x - 8) \\ &= 10x^2 + 15x - 14x - 21 - 7x^2 + 28x - 2x + 8 \\ &= 3x^2 + 27x - 13 \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{2} \text{ vào biểu thức, ta có: } A = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 27 \cdot \frac{1}{2} - 13 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{1}{2} \text{ thì giá trị biểu thức } A = \frac{5}{4}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= (x - 2y)(y - 2x) + (x + 2y)(y + 2x) \\ &= xy - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + xy + 2x^2 + 2y^2 + 4xy \\ &= 10xy \end{aligned}$$

Thay  $x = 2; y = -2$  vào biểu thức ta có:  $B = 10 \cdot 2 \cdot (-2) = -40$

Vậy với  $x = 2; y = -2$  thì giá trị biểu thức  $B = -40$

**Ví dụ 3:** Tìm  $x$ , biết:

$$a) 4x(x - 5) - (x - 1)(4x - 3) = 23$$

$$b) (x - 5)(x - 4) - (x + 1)(x - 2) = 7$$

**Giải**

**Tìm cách giải.** Để tìm  $x$ , trong vế trái có thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức. Vì vậy ta khai triển và rút gọn vế trái ấy, sau đó tìm  $x$ .

**Trình bày lời giải**

$$a) 4x(x - 5) - (x - 1)(4x - 3) = 23$$

$$4x^2 - 20x - 4x^2 + 3x + 4x - 3 = 23$$

$$-13x - 3 = 23$$

$$-13x = 23 + 3$$

$$x = -2$$

$$b) (x - 5)(x - 4) - (x + 1)(x - 2) = 7$$

$$x^2 - 4x - 5x + 20 - x^2 + 2x - x + 2 = 7$$

$$-8x + 22 = 7$$

$$-8x = -15$$

$$x = \frac{15}{8}$$

**Ví dụ 4:** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ :

$$a) A = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 5)$$

$$b) B = x(3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 3x - 16) - x(x^2 - x + 2)$$

**Giải**

**Tìm cách giải.** Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào biến  $x$ , tức là sau khi rút gọn kết quả thì biểu thức không chứa biến  $x$ . Do vậy để giải bài toán này, chúng ta thực hiện biến đổi nhân đơn thức với đơn thức, nhân đa thức với đa thức và thu gọn kết quả. Nếu kết quả không chứa biến  $x$ , suy ra điều phải chứng minh.

**Trình bày lời giải**

a) Biến đổi biểu thức  $A$ , ta có :

$$A = x(2x+1) - x^2(x+2) + (x^3 - x + 5)$$

$$A = 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 5$$

$$A = 6$$

Suy ra giá trị của A không phụ thuộc vào x

b) Biến đổi biểu thức B, ta có :

$$B = x(3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 3x - 16) - x(x^2 - x + 2)$$

$$B = 3x^3 - x^2 + 5x - 2x^3 - 3x + 16 - x^3 + x^2 - 2x$$

$$B = 3x^3 - 3x^3 + x^2 - x^2 + 5x - 5x + 16$$

$$B = 16$$

Suy ra giá trị của B không phụ thuộc vào x.

**Ví dụ 5:** Tính nhanh

$$a) A = 4 \frac{7}{5741} \cdot \frac{1}{3759} - \frac{4}{3741} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5741} + \frac{1}{3759} + \frac{1}{3759 \cdot 5741}$$

$$b) B = 2 \frac{1}{3150} \cdot \frac{3}{6547} - \frac{1}{1050} \cdot 3 \frac{6516}{6517} + \frac{4}{1050} - \frac{6}{3150 \cdot 6517}$$

**Giải**

**Tìm cách giải.** Quan sát kỹ biểu thức, nếu thực hiện trực tiếp các phép tính bài toán dễ dẫn đến sai lầm; ta nhận thấy nhiều số giống nhau, do vậy chúng ta nghĩ tới đặt phần giống nhau bởi một chữ. Sau đó biến đổi biểu thức chứa chữ đó. Cách giải như vậy gọi là phương pháp đại số

**Trình bày lời giải**

a) Đặt  $x = \frac{1}{5741}; y = \frac{1}{3749}$  khi đó biểu thức có dạng:

$$A = (4 + 7x)y - 4y(1 + 2x) + y + xy$$

$$A = 4y + 7xy - 4y - 8xy + y + xy$$

$$A = y$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3759}$$

b) Đặt  $x = \frac{1}{3150}; y = \frac{1}{6517}$  khi đó biểu thức có dạng:

$$B = (2 + x)3y - 3x(4 - y) + 12x - 6xy$$

$$B = 6y + 3xy - 12x + 2xy + 12x - 6xy$$

$$B = 6y$$

$$\Rightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{6517} = \frac{6}{6517}$$

**C. Bài tập vận dụng**

**1.1.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = (4x - 1)(3x + 1) - 5x(x - 3) - (x - 4)(x - 3)$$

$$b) B = (5x - 2)(x + 1) - 3x(x^2 - x - 3) - 2x(x - 5)(x - 4)$$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 12x^2 + 4x - 3x - 1 - 5x^2 + 15x - x^2 + 3x + 4x - 12 \\ &= 6x^2 + 23x - 13 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= (5x - 2)(x + 1) - 3x(x^2 - x - 3) - 2x(x - 5)(x - 4) \\ &= 5x^2 + 5x - 2x - 2 - 3x^3 + 3x^2 + 9x - 2x(x^2 - 5x - 4x + 20) \\ &= -3x^3 + 8x^2 + 12x - 2 - 2x^3 + 18x^2 - 40x \\ &= -5x^3 + 26x^2 - 28x - 2 \end{aligned}$$

**1.2.** Viết kết quả phép nhân sau dưới dạng lũy thừa giảm dần của biến x:

$$a) (x^2 + x + 1)(x - 3)$$

$$b) (x^2 - 3x + 1)(2 - 4x)$$

$$c) (x^2 + 3x - 2)(3 + x - 2x)$$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

$$a) (x^2 + x + 1)(x - 3)$$

$$= x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

$$b) (x^2 - 3x + 1)(2 - 4x)$$

$$= 2x^2 - 6x + 2 - 4x^3 + 12x^2 - 4x = -4x^3 + 14x^2 - 10x + 2$$

$$c) (x^2 + 3x - 2)(3 + x - 2x)$$

$$= (x^2 + 3x - 2)(3 - x) = 3x^2 + 9x - 6 - x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$= 3x^2 + 9x - 6 - x^3 - 3x^2 + 2x = -x^3 + 11x - 6$$

**1.3.** Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x:

$$a) C = (5x - 2)(x + 1) - (x - 3)(5x + 1) - 17(x + 3)$$

$$b) D = (6x - 5)(x + 8) - (3x - 1)(2x + 3) - 9(4x - 3)$$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

a) Ta có :

$$C = 5x^2 + 5x - 2x - 2 - 5x^2 - x + 15x + 3 - 17x - 51$$

$$\Rightarrow C = -50$$

Vậy biểu thức  $C = -50$  không phụ thuộc vào x.

$$b) D = 6x^2 + 48x - 5x - 40 - 6x^2 - 9x + 2x + 3 - 36x + 27$$

$$\Rightarrow D = -13$$

Vậy giá trị biểu thức  $D = -13$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$ .

**1.4. Tìm  $x$ , biết :**

$$a) 5(x-3)(x-7) - (5x+1)(x-2) = 25$$

$$b) 3(x-7)(x+5) - (x-1)(3x+2) = -13$$

#### Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) 5x^2 - 35x - 15x + 105 - 5x^2 + 10x - x + 2 = 25$$

$$-41x + 107 = 25$$

$$-41x = -82$$

$$x = 2$$

$$b) 3x^2 + 15x - 21x - 105 - 3x^2 + 3x + 2 = -13$$

$$-5x - 103 = -13$$

$$-5x = 90$$

$$x = -18$$

**1.5. Rút gọn và tính giá trị biểu thức:**

$$a) A = (4-5x)(3x-2) + (3-2x)(x-2) \text{ tại } x = -2$$

$$b) B = 5x(x-4y) - 4y(y-5x) \text{ tại } x = -\frac{1}{5}; y = -\frac{1}{2}$$

#### Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$$A = 12x - 8 - 15x^2 + 10x + 3x - 6 - 2x^2 + 4x$$

$$= -17x^2 + 29x - 14$$

Với  $x = -2$ , thay vào biểu thức ta có :

$$A = -17(-2)^2 + 29(-2) - 14$$

$$= -68 - 58 - 14$$

$$= -140$$

b) Ta có :

$$B = 5x(x-4y) - 4y(y-5x)$$

$$= 5x^2 - 20xy - 4y^2 + 20xy$$

$$= 5x^2 - 4y^2$$

Thay  $x = -\frac{1}{5}; y = -\frac{1}{2}$  vào biểu thức ta có ;

$$B = 5\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 5 \cdot \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{5}$$

**1.6. Tính giá trị biểu thức:**

a)  $A = x^6 - 2021x^5 + 2021x^4 - 2021x^3 + 2021x^2 - 2021x + 2021$  tại  $x = 2020$

b)  $B = x^{10} + 20x^9 + 20x^8 + \dots + 20x^2 + 20x + 20$  với  $x = -19$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

a) Với  $x = 2020$  nên ta thay  $2021 = x + 1$  vào biểu thức, ta có:

$$A = x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + x + 1$$

$$= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$$

b) Với  $x = -19$  nên ta thay  $20 = -x + 1$  vào biểu thức, ta có:

$$B = x^{10} + (-x+1)x^9 + (-x+1)x^8 + \dots + (-x+1)x^2 + (-x+1)x + (-x+1)$$

$$= x^{10} - x^{10} + x^9 - x^9 + x^8 - x^8 + \dots + x^2 - x^2 + x - x + 1$$

$$= 1$$

**1.7. Tìm các hệ số a, b, c biết:**

a)  $2x^2(ax^2 + 2bx + 4c) = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2$  đúng với mọi x;

b)  $(ax + b)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2$  đúng với mọi x.

**Hướng dẫn giải – đáp số**

a)  $2x^2(ax^2 + 2bx + 4c) = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2$

$$\Leftrightarrow 2ax^4 + 4bx^3 + 8cx^2 = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2 \quad (1)$$

(1) đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ 4b = -20 \\ 8c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

b)  $(ax + b)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2$

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 - acx^2 - bcx + 2b + 2ax = x^3 + x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (b - ac)x^2 + (2a - bc)x + 2b = x^3 + x^2 - 2 \quad (2)$$

(2) đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = -2 \\ b - ac = 1 \\ 2a - bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ -1 - 1 \cdot c = 1 \\ 2 - (-1)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

**1.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:**

$$A = (2 - n)(n^2 - 3n + 1) + n(n^2 + 12) + 8 \text{ chia hết cho } 5$$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

Biến đổi đa thức, ta có :

$$\begin{aligned} A &= (2 - n)(n^2 - 3n + 1) + n(n^2 + 12) + 8 \\ &= 2n^2 - n^3 - 6n + 3n^2 - n + 2 + n^3 + 12n + 8 \\ &= 5n^2 + 5n + 10 : 5 \end{aligned}$$

**1.9.** Đặt  $2x = a + b + c$ . Chứng minh rằng:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = ab + bc + ca - x^2$$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

Xét vế trái:

$$\begin{aligned} &(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) \\ &= x^2 - ax - bx + ab + x^2 - bx - cx + bc + x^2 - ax - cx + ca \\ &= ab + bc + ca + 3x^2 - 2x(a + b + c) \\ &= ab + bc + ca + 3x^2 - 2x \cdot 2x \\ &= ab + bc + ca - x^2 \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải suy ra điều chứng minh.

**1.10.** Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn  $ab + bc + ca = abc$  và  $a + b + c = 1$

Chứng minh rằng :  $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$

**Hướng dẫn giải – đáp số**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } &(a - 1)(b - 1)(c - 1) = (a - 1)(bc - b - c + 1) \\ &= abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1 \\ &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \\ &= abc - abc + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$