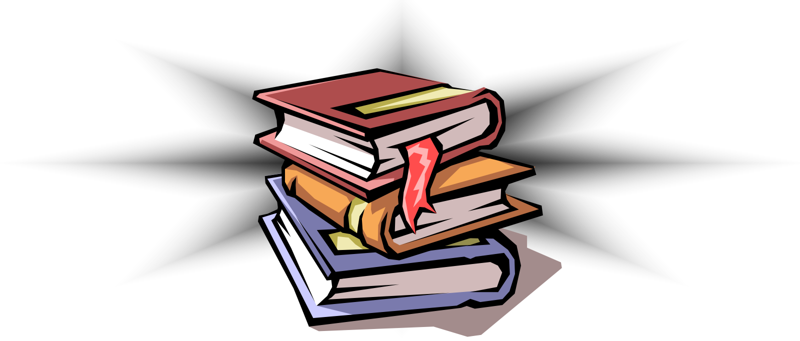
Tailieumontoan.com

SƯU TẦM



TUYỂN TẬP ĐỀ THI
HSG LỚP 9 CẤP TỈNH NĂM 2019

Tài liệu sưu tầm

ĐỀ HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 CÁC TỈNH NĂM HỌC 2018-2019

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 của các tỉnh trên cả nước có hướng dẫn giải cụ thể. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập đề thi học sinh giỏi lớp 9 cấp tỉnh năm 2018-2019 này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 ở các tỉnh trên cả nước.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

Phần 1. Đề thi

ĐỀ SỐ	TỈNH THÀNH
1.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Điện Biên năm học 2018-2019
2.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Lạng Sơn năm học 2018-2019
3.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Nghệ An năm học 2018-2019
4.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Quảng Bình năm học 2018-2019
5.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Đồng Nai năm học 2018-2019
6.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2018-2019
7.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Bình Phước năm học 2018-2019
8.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Sơn La năm học 2018-2019
9.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Ninh Bình năm học 2018-2019
10.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Nam Định năm học 2018-2019
11.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Bắc Ninh năm học 2018-2019
12.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Bình Định năm học 2018-2019
13.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Đà Nẵng năm học 2018-2019
14.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Đắk Lắk năm học 2018-2019
15.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Đồng Nai năm học 2018-2019
16.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Gia Lai năm học 2018-2019
17.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hà Nội năm học 2018-2019
18.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2018-2019
19.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Phòng năm học 2018-2019
20.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 2018-2019
21.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2018-2019
22.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hưng Yên năm học 2018-2019
23.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Lai Châu năm học 2018-2019
24.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Lâm Đồng năm học 2018-2019
25.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Long An năm học 2018-2019
26.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Phú Yên năm học 2018-2019
27.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Quảng Trị năm học 2018-2019
28.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2018-2019
29.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Sóc Trăng năm học 2018-2019
30.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Thái Bình năm học 2018-2019
31.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2018-2019

32.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Tiền Giang năm học 2018-2019
33.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Quảng Nam năm học 2018-2019
34.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Trà Vinh năm học 2018-2019

Phần 2. Đáp án

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐIỆN BIÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 09/4/2019
Thời gian làm bài 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q=\sqrt{x}-P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1$. Tính giá trị biểu thức x^3+8y^3+2019.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-\dfrac{6}{y}=2 \\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2. \end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho ΔABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ các đường cao BE, CF của ΔABC $(E\in AC; F\in AB)$. Các đường cao BE, CF cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng MN song song với EF; OA vuông góc với EF.

b) Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chứng minh rằng: $CH.CF+BH.BE=BC^2$.

2. Cho điểm O thuộc miền trong của ΔABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của BC, AC, AB lần lượt tại G, E, F. Chứng minh tổng $\frac{OA}{AG}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng $P=x^3-3x^2-3x+3$ là một số chính phương khi $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

2. Tìm $x,y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn: $x^2-2y^2=5$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỈNH LẠNG SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 23/3/2019

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Câu 2. *(4 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(m+4)x+m^2+8m-9=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b) Tìm m nguyên dương để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho

$P=\dfrac{x_1^2+x_2^2-60}{x_1+x_2}$ đạt giá trị nguyên.

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Giải phương trình $x-4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+5=0$.

b) Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn $x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$.

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O), các đường cao BE,CF cắt nhau tại H $(E\in AC,F\in AB)$.

a) Gọi $K=EF\cap BC$, $L=AK\cap(O)$ với $L\ne A$. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $HL\perp AK$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng HL đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi T là điểm trên đoạn thẳng FC sao cho $\widehat{ATB}=90^0$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KLT và CET tiếp xúc với nhau.

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho đa giác đều 30 đỉnh. Chứng minh rằng trong các đỉnh đó, bất kì một bộ gồm có 9 đỉnh nào đều chứa 4 đỉnh tạo nên một hình thang cân.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3
(Đề thi có một trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi: TOÁN - BẢNG A
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$.

b. Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n*.

Câu 2. *(6,5 điểm)*

a. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \dfrac{8x^3 + 4x}{2x+5}$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) - x - y = -3. \end{cases}$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^4.$$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ nhất M (M khác phía với O so với đường thẳng AB), đường thẳng BM cắt đường thẳng DF tại N. Chứng minh rằng:

a. EF $\perp$ OA.

b. AM = AN.

2. Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm trong tam giác đó sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0$ và AC.BD = AD.BC. Chứng minh $\dfrac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\dfrac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 14/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2.5 điểm)*

a. Cho biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3}{x\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0$. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của *A*.

b. Không dùng máy tính cầm tay, hãy rút gọn biểu thức

$$B=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Câu 2. *(2.0 điểm)*

a. Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của một đa thức.

b. Giải phương trình: $\sqrt{3-4x}+\sqrt{4x+1}=-16x^2-8x+1$ (1).

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho đường tròn (O) và dây cung $BC=a$ không đổi ($O\notin BC$). *A* là một điểm di động trên cung lớn *BC* sao cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn. Các đường cao *AD, BE, CK* cắt nhau tại *H* ($D\in BC, E\in AC, K\in AB$).

a. Trong trường hợp $\widehat{BHC}=\widehat{BOC}$, tính *AH* theo *a*.

b. Trong trường hợp bất kì, tìm vị trí của *A* để tích *DH.DA* nhận giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(1.0 điểm)*

Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho $C=2019^n+2020$ là số chính phương.

Câu 5. *(1.0 điểm).*

Cho ba số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z+2=xyz$. Chứng minh rằng:

$$x+y+z+6\geq 2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right).$$

Câu 6. *(1.0 điểm)*

Cho tam giác vuông *ABC* có $AB=3, AC=4, BC=5$. Xét các hình chữ nhật *MNPQ* sao cho *M, N* thuộc cạnh *BC, P* thuộc cạnh *AC, Q* thuộc cạnh *AB*. Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật *MNPQ* để nó có diện tích lớn nhất.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 29/3/2019

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1) Cho (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=m+1 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases}$ (với m là tham số thực).

Tìm m để biểu thức $P=x^2+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3-y^3=-1 \end{cases}$ (với x, y thuộc R).

Câu 2. *(4,5 điểm)*

1) Giải phương trình $x^4-9x^3+24x^2-27x+9=0$ $(x\in R)$

2) Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\geq 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1) Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

2) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999.

Câu 4. *(2 điểm)*

Cho $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ là tổng của 99 số hạng và

$B=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$ là tổng của 99 số hạng.

Tính A + B

Câu 5. *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E lần lượt là hai tiếp điểm của AB, AC với đường tròn (I). Biết ba góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, đều là góc nhọn. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC và AC.

1) Chứng minh: 2AD = AB + AC – BC

2) Chứng minh rằng ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 22/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$, với $x>0, x\neq 4$.

2. Cho $a=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, $b=\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức $M=a+b$ và $N=a^7+b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2kx+4=0$ (k là tham số). Tìm tất cả các giá trị của k sao cho : $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\leq 3$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2(x+y)+x=2+y(x-1)$

2. Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn (O,R) và một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn, $OA=2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt ở E, F. Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại các điểm P, Q

1. Chứng minh $\widehat{ABI}=60^0$ và tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Chứng minh $EF=2PQ$.

3. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y-z+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH PHƯỚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 06/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5.0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\frac{x+8}{\left(3-\sqrt{x-1}\right)\left(3+\sqrt{x-1}\right)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-1-3\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$.

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x^4+x^3\left(2y-1\right)+y^3\left(2x-1\right)+2y^4$.

Câu 2. *(5.0 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{2x-3}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ \left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=8 \end{cases}$

3. Cho hàm số $\left(P\right): y=x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $\left(d\right): y=2x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ thỏa mãn $y_1.y_2-x_1.x_2=12$.

Câu 3. *(5.0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, D là một điểm trên cạnh AB, $\left(D\neq A, B\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CA. Đường thẳng MN cắt $\left(O\right)$ tại hai điểm P, Q (P, Q lần lượt thuộc cung CB và CA). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt BC tại I $\left(I\neq B\right)$. Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $PK.QC=QB.PD$.

c) Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G $\left(G\neq P\right)$. Đường thẳng IG cắt BA tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên BA thì $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu 4. *(2.0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=a, AD=b$. Trên các cạnh AD, AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho luôn tạo thành tứ giác $EFGH$. Gọi c là chu vi của tứ giác $EFGH$. Chứng minh $c\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Câu 5. *(3.0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $4y^4+6y^2-1=x$.

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH SƠN LA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 8
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 18/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8}-\frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}$

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức *A* nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+3m-3=0 \quad (1)$

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn biểu thức $M={x_1}^2+{x_2}^2+5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD và 2019 đường thẳng phân biệt thỏa mãn: mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và chia hình vuông thành 2 phần có tỷ số diện tích là $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng: trong 2019 đường thẳng trên có ít nhất 505 đường thẳng đồng qui.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 13/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$.

2. Rút gọn biểu thức $A = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}\right) : \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}\right)$ với $x \ge 0$, $x \ne 4$, $x \ne 9$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y - 2x)(1 - y - x) = 2x^2 - x \\ x(y - 1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2 \end{cases}$.

2. Giải phương trình $x^2 + x + 24 - 2x\sqrt{2x + 3} = 6\sqrt{12 - x}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - x^2 + 5y^2 - 22x - 121 = 0$.

2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{3}{4xy} + \frac{3}{4yz} + \frac{3}{4zx}$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Qua điểm M nằm trong tam giác ABC kẻ $DK // AB$, $EF // AC$, $PQ // BC$ ($E, P \in AB$; $K, F \in BC$; $D, Q \in CA$). Biết diện tích các tam giác MPE, MQD, MKF lần lượt là x^2, y^2, z^2 với x, y, z là các số thực dương. Tính diện tích tam giác ABC theo x, y, z.

2. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. M là điểm bất kỳ trên dây BC (M khác B, M khác C). Vẽ đường tròn tâm D đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn tâm E đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (D) và (E).

a) Chứng minh rằng tứ giác ABNC là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng minh điểm N thuộc đường tròn (O) và ba điểm A, M, N thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng DE luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm M di động trên dây BC.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p; q; r)$ sao cho $pqr = p + q + r + 160$.

2. Cho 8 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 210. Chứng minh rằng trong 8 đoạn thẳng đó luôn tìm được 3 đoạn thẳng để ghép thành một tam giác.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NAM ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10

(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*3,0 điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\dfrac{1-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7-\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$.

2. Xét ba số thực dương x,y,z thoả mãn $\dfrac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{y}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=1.$$

Câu 2. (*5,0 điểm*)

1. Giải phương trình $x^3+x^2+2x=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{(x-y)^2-1}{xy}-\dfrac{2(x+y-1)}{x+y}=-4\\ 4x^2+5y+\sqrt{x+y-1}+6\sqrt{x}=13\end{cases}$.

Câu 3. (*3,0 điểm*)

1. Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thoả mãn $P(x)=\dfrac{1}{2}\big(Q(x)+Q(1-x)\big)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng các hệ số của $P(x)$ là các số nguyên không âm và $P(0)=0$. Tính $P\big(3P(3)-P(2)\big)$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\,y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1).$$

Câu 4. (*7,0 điểm*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, vẽ đường tròn $(O';R')$ $(R'<R)$ tiếp xúc với cạnh AD tại H, tiếp xúc với cạnh BC tại G và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại M (điểm M thuộc cung CD không chứa điểm A). Vẽ đường thẳng tt' là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn (O) và (O') (tia Mt nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MA chứa điểm D).

1. Chứng minh $\widehat{DHM}=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}$ và MH, MG lần lượt là tia phân giác của các góc AMD và góc BMC.

2. Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại E (E khác M). Hai đường thẳng HG và CE cắt nhau tại I. Chứng minh $\widehat{EHI} = \widehat{EIM}$.

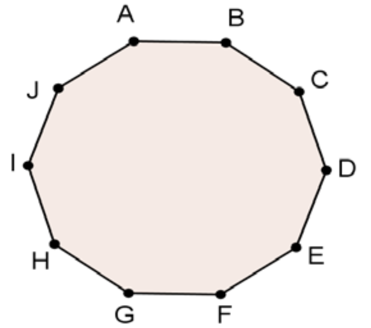
3. Chứng minh đường thẳng HG đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

1. Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c(c+a+3b)+c^2}+\frac{1}{a(a+b+3c)+a^2}+\frac{1}{b(b+c+3a)+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

2. Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc … hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tuỳ ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.



Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BẮC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11
(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*4,0 điểm*)

1) Rút gọn biểu thức:

$$P=\left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}\right).\left(\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}\right) \text{ với } a\ge 0, b>0, a\ne 2b.$$

2) Cho hàm số $y=\left(m^2-4m-4\right)x+3m-2$ có đồ thị là d. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là $1\ \text{cm}^2$ (O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục là cm).

Câu 2. (*4,0 điểm*)

1) Cho phương trình $x^2-\left(3m-2\right)x+2m^2-5m-3=0$, x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ x^3-3x+2=2y^3-y^2\end{cases}$

Câu 3. (*4,0 điểm*)

1) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn các điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{a+3c}+\dfrac{ab}{bc+ca}$.

2) Tìm số nguyên tố p thỏa mãn p^3-4p+9 là số chính phương.

Câu 4. (*7,0 điểm*)

1) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) $(AB<AC)$ và đường cao AD. Vẽ đường kính AE của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $AD.AE=AB.AC$.

b) Vẽ dây AF của đường tròn (O) song song với BC, EF cắt AC tại Q, BF cắt AD tại P. Chứng minh rằng PQ song song với BC.

c) Gọi K là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng:

$$AB.AC-AD.AK=\sqrt{BD.BK.CD.CK}$$

2) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=90^\circ$, $\widehat{ABC}=20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE}=10^\circ$ và $\widehat{ACF}=30^\circ$. Tính $\widehat{CFE}$.

Câu 5. (*1,0 điểm*)

Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi môn Toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi toán có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018– 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 12
(Đề thi có một trang)

Câu 1: *(5,0 điểm).*

1.Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x+y)$, biết rằng

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\ ;\ y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

2. Cho hai số thức m,n khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $\left(x^2 + mx + n\right)\left(x^2 + nx + m\right) = 0$ luôn có nghiệm

Câu 2: *(5,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

1. Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \le 5$$

Câu 4: *(7,0 điểm).*

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N,P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD.

a) Chứng minh rằng AH vuông góc với BH

b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I. Chứng minh ba điểm H,N,I thẳng hàng.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{HB}{HC} + \dfrac{MB}{MC} \ge 2\dfrac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐÀ NẴNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(1,0 điểm)*

Tính $A=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{3-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)* Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $B(6;0)$, $C(0;3)$ và đường thẳng d_m có phương trình $y=mx-2m+2$, với m là tham số, $m\neq 0, m=-\dfrac{1}{2}$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_m và BC.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d_m chia tam giác OBC thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ).

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Tìm x biết: $\sqrt{24+8\sqrt{9-x^2}}=x+2\sqrt{3-x}+4$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{12}{x-1}+\dfrac{7}{y+3}=19\\ \dfrac{2x+6}{x-1}+\dfrac{3y+14}{y+3}=18\end{cases}$

Câu 4: *(1,0 điểm)* Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bằng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Câu 5: *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của AB. Lấy hai điểm D, E lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $DB<DA<AB$, $EA<EC$ và $OD=OE$.

a) Chứng minh rằng: $MA^2-MD^2=DA.DB$.

b) Chứng minh rằng: $OA^2-OD^2=DA.DB$ và $DA.DB=EA.EC$.

c) Gọi G,H,K lần lượt là trung điểm của đoạn BE, CD và ED. Chứng minh rằng đường thẳng ED là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK.

Câu 6: *(1,0 điểm)* Cho ba số x,y,z thỏa các hệ thức $(z-1)x-y=1$ và $x+zy=2$. Chứng minh rằng $(2x-y)(z^2-z+1)=7$ và tìm tất cả các số nguyên x,y,z thỏa hệ thức trên.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**
TỈNH ĐĂK LẮC	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	MÔN THI: TOÁN
	Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

Câu 7: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{5-\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}}}$.

b) Giải phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-8=y\sqrt{y} \\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{y}. \end{cases}$

Câu 8: *(4,0 điểm)*

a) Cho phương trình $x^2-4x=2\left|x-2\right|-m-5$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một đường thẳng d có hệ số góc k đi qua điểm $M\left(0;3\right)$ và cắt Parabol $\left(P\right): y=x^2$ tại hai điểm A, B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục Ox. Viết phương trình đường thẳng d, biết hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 20.

Câu 9: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $2x^2+y^2+2xy+6x+4y=20$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Câu 10: *(4,0 điểm)* Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và một cát tuyến ADE của (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO và AB (D, E thuộc (O)). Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P, Q.

a) Gọi H là giao điểm của BC với OA. Chứng minh rằng tứ giác $OEDH$ nội tiếp.

b) Gọi K là điểm đối xứng của B qua E. Chứng minh rằng A, P, K thẳng hàng.

Câu 11: *(2,0 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh CB, CD lần lượt lấy các điểm M, N (M khác B và C, N khác C và D) sao cho $\widehat{MAN}=45°$. Chứng minh rằng đường chéo BD chia tam giác AMN thành phần có diện tích bằng nhau.

Câu 12: *(2,0 điểm)*

Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge 3.$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(4,5 điểm)*

1) Cho $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=m+1 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases}$ (với m là tham số thực).

Tìm m để biểu thức $P=x^2+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3-y^3=-1 \end{cases}$ (với $x,y\in\mathbb{R}$).

Câu 2: *(4,5 điểm)*

1) Giải phương trình $x^4-9x^3+24x^2-27x+9=0$ $(x\in\mathbb{R})$

2) Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$

Câu 3: *(4,5 điểm)*

1) Cho a,b,c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

2) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999.

Câu 4: *(2 điểm)*

Cho $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ là tổng của 99 số hạng.

$B=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$ là tổng của 99 số hạng.

Tính $A+B$.

Câu 5: *(4,5 điểm)* Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E lần lượt là hai tiếp điểm của AB,AC với đường tròn (I). Biết ba góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, đều là góc nhọn. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC,AC.

1) Chứng minh: $2AD=AB+AC-BC$

2) Chứng minh rằng ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH GIA LAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16

(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 7/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (3,0 điểm)

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lớn hơn 2019

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $A = 3n^3 + 15n$ chia hết cho 18.

2) Một đoàn học sinh đi tham quan quảng trường Đại Đoàn Kết tỉnh Gia Lai. Nếu mỗi ô tô chở 12 người thì thừa 1 người. Nếu bớt đi 1 ô tô thì số học sinh của đoàn được chia đều cho các ô tô còn lại. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi tham quan và có bao nhiêu ô tô? Biết rằng mỗi ô tô chở không quá 12 người.

Câu 3. (6,0 điểm)

1) Một cây nến hình lăng trụ đứng đáy lục giác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 20 cm và 1 cm . Người ta xếp cây nến trên vào trong một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Tính thể tích cái hộp.

2) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I cố định nằm bên trong đường tròn (I khác O), qua I dựng hai dây cung bất kì AB và CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC, ID.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, P, N, Q cùng thuộc một đường tròn.

b)Giả sử các dây cung AB và CD thay đổi nhưng luôn luôn vuông góc với nhau tại I . Xác định vị trí các dây cung AB và CD sao cho tứ giác $MPNQ$ có diện tích lớn nhất.

Câu 4. (4,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{4-2y} + \sqrt{5+2y-(x-1)^2} = 5 \\ 5x^4 + (x-y)^2 = (10x^3 + y)y \end{cases}$

2) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi THCS cấp Tỉnh, đoàn học sinh huyện A có 17 học sinh dự thi. Mỗi thí sinh có số báo danh là một số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 907. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh trong đoàn có tổng các số báo danh chia hết cho 9.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

b) Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của k $\left(k\in\mathbb{N},k\ge 2\right)$ số tự nhiên liên tiếp.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Cho $x;y;z$ là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$.

Câu 3: *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AB<AC\right)$. Đường tròn $\left(I\right)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K,O,S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM=AN$.

Câu 4: *(1,0 điểm)* Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 13: *(2,0 điểm)*

1) a) Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\dfrac{3\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+3\sqrt{z}+3}$ và $xyz=9$. Tính $\sqrt{10P-1}$.

b) Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}=8+\sqrt{xyz}$.

Câu 14: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}+3=3x^2-6x$.

2) b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=2x \\ x(x+y)^2+x-2=2y^2 \end{cases}$.

Câu 15: *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3$.

b) Chứng minh rằng $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3, biết $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ là các chữ số của 2019^{2018}.

Câu 16: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác MNP có 3 góc $\widehat{M},\widehat{N},\widehat{P}$ nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi Q là trung điểm của NP và các đường cao MD,NE,PF của tam giác MNP cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

a) $MH=2OQ$.

b) Nếu $MN+MP=2NP$ thì $\sin N+\sin P=2\sin M$.

c) $ME.FH+MF.HE=\sqrt{2}R^2$ biết $NP=R\sqrt{2}$.

Câu 17: *(1,0 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{ab^2}{a+b}+\dfrac{bc^2}{b+c}+\dfrac{ca^2}{c+a}$ biết a,b,c là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=3$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI PHÒNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 19
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$ với $x,y\ge 0$ và $x\ne y$.
Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc giá trị của biến.

b) Chứng minh rằng $x_0=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ là một nghiệm của phương trình sau $\left(x^3-3x-17\right)^{2019}-1=0$.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2mx+2m-3=0$ (1) (với m là tham số). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\dfrac{2x_1x_2+7}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y^3+1=19x^3\\ xy^2+y=-6x^2\end{cases}$.

Bài 3. (2,0 điểm) a) Cho biểu thức $P=a_1+a_2+a_3+...+a_{2019}$ với $a_1;a_2;a_3;...;a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge 1.$$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc trong với (O_1) và (O_2) lần lượt tại B và C. Từ điểm I vẽ đường thẳng d vuông góc với O_1O_2, d cắt cung lớn và cung nhỏ BC của (O) lần lượt tại điểm A,Q. Cho AB cắt (O_1) tại điểm thứ hai là E, AC cắt (O_2) tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCDE$ nội tiếp ;

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với DE ;

c) Vẽ đường kính MN của (O) vuông góc với AI (điểm M nằm trên $\overset\frown{AB}$ không chứa điểm C). Chứng minh rằng ba đường thẳng AQ,BM,CN đồng quy.

Bài 5. (1,0 điểm)

Bên trong đường tròn có đường kính $AB=19$ cho 38 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng vuông góc hoặc song song với AB và giao ít nhất hai đoạn trong 38 đoạn đã cho.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 20
(Đề thi có một trang)

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

3) Cho a,b,c là ba số thực sao cho $a+b=c-2$ và $ab=2c^2-3c+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km; $CD=6$ km; vận tốc của An bằng $1,5$ vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt AC tại D và cắt (O) tại E (E khác B). Cho biết $AB=8$ cm và $BC=4$ cm, tính độ dài các đoạn thẳng DE, OA và OD.

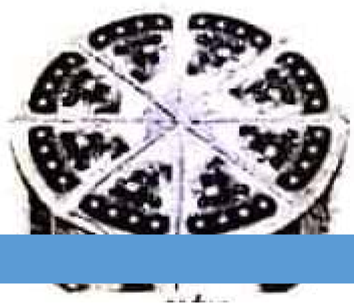
Câu 5: *(4,0 điểm)*

Hộp phô mai có dạng hình trụ, đường kính đáy $12,2$ cm và chiều cao $2,4$ cm.

a) Biết rằng 8 miếng phô mai được xếp nằm sát bên trong hộp và độ dày của giấy gói từng miếng không đáng kể. Hỏi thể tích của mỗi miếng phô mai là bao nhiêu ?

b) Tính diện tích giấy gói được sử dụng cho một miếng phô mai.

(Ghi kết quả gần đúng chính xác đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy)



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(3,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\dfrac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right).\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}+1\right)$.

2) Tính tổng : $B=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{2018^2}+\dfrac{1}{2019^2}}$

Câu 2: *(3,0 điểm)* giải phương trình và hệ phương trình sau

1) $\sqrt{4+5x+x^2}-5x=x^2+2$;

2) $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4 \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n+296.13^n$ chia hết cho 1947

2) Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số thỏa mãn nếu ta cộng thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B cũng gồm 4 chữ số . Tìm hai số A và B.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

1) Cho hai đường thẳng $(d_1): mx+(m-2)y+m+2=0$ và $(d_2): (2-m)x+my-m-2=0$

a) Tìm điểm cố định mà (d_1) luôn đi qua và điểm cố định mà (d_2) luôn đi qua với mọi m

b) Chứng minh hai đường thẳng (d_1), (d_2) luôn cắt nhau tại một điểm I và khi m thay đổi thì điểm I luôn thuộc một đường tròn cố định.

2) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a>1, b>1, c>1, d>1$. Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{c-1}+\dfrac{c^2}{d-1}+\dfrac{d^2}{a-1}\geq 16$

Câu 5: *(5, 0 điểm).*

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. Gọi C là một điểm di động trên (O) sao cho C khác A, C khác B và C không nằm chính giữa cung AB . Vẽ đường kính

CD của (O). Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A . Hai đường thẳng BC, BD cắt d tại E, F.

1) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn

2) Gọi M là trung điểm của EF và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$. Chứng minh : $AB = 2.IM$

3) Gọi H là trực tâm ΔDEF . Chứng minh khi điểm C di động trên (O) thì điểm H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 6: *(2, 0 điểm).*

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;r)$ tiếp xúc ngoài tại $A(R>r)$. Vẽ dây AB của $(O;R)$ và dây AC của $(I;r)$ sao cho $AC \perp AB$. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn với $M \in (O)$, $N \in (I)$

1) Chứng minh ba đường thẳng BC, OI và MN đồng quy.

2) Xác định số đo $\widehat{AOB}$ để diện tích ΔABC lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 22

(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Câu 2: *a)* Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}+1\right)=2(x+1)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=\dfrac{2}{x}-1 \\ x^2-\dfrac{4}{x^2}+1=4y(x-y) \end{cases}$.

Câu 3: *a)* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d_1): y=\left(m^2-5m\right)x+2m$ (m *là tham số*) và đường thẳng $(d_2): y=-6x+m+3$. Tìm m để hai đường thẳng đó song song với nhau.

b) Một robot chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $5m$ thì dừng 1 giây, rồi đi tiếp $10m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $15m$ thì dừng lại 3 giây,…Cứ như vậy, robot đi từ A đến B kể cả nghỉ hết 551 giây. Tính quãng đường robot chuyển động từ A đến B. Biết rằng khi đi, robot chuyển động với vận tốc $2{,}5m$ /giây.

Câu 4: Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B và C. Vẽ các tiếp tuyến AD và AE với đường tròn (O), D và E là các tiếp điểm.

a) Chứng minh rằng $AD=\sqrt{AB.AC}$, từ đó suy ra D thuộc một đường tròn cố định.

b) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với BC. Gọi K là giao điểm của AM với đường tròn (O). Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, DE và NK đồng quy.

Câu 5: *a)* Cho tam giác ABC có góc A là góc tù. Chứng minh rằng:

$$\sin(B+C)=\sin B.\cos C+\cos B.\sin C.$$

b) Trên mặt phẳng có 25 điểm phân biệt, biết rằng trong 3 điểm bất kỳ đã cho bao giờ cũng tìm được 2 điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong 25 điểm nói trên.

Câu 6: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2018}\right)^2 \le 2019a^2b^2c^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LAI CHÂU

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 23
(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P=\dfrac{2}{7}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+4x=19-3y^2$.

b) Tìm dư trong phép chia: $x^{200}-2x^{91}+1$ cho x^2-1.

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho phương trình: $x-(2m+3)x+m=0$. (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho: $x_1^2+x_2^2$ đạt GTNN (min).

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2y^2-xy+2y-x=0 \\ x^2-y^2+6x+12=0 \end{cases}$

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho nửa đường tròn *(O)*, đường kính *AB* = 2*R* và *C* là một điểm cố định nằm giữa *A* và *B*. Lấy điểm *D* thuộc *(O)* (*D* khác *A, B*). Qua *D* vẽ một đường thẳng vuông góc với *CD* cắt tiếp tuyến *Ax, By* tại *M, N*. Gọi *P* là giao điểm của *AD* và *CM, Q* là giao điểm của *BD* và *CN*. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác *CQDP* nội tiếp.

b) *AM.BN* = *AC.BC*.

c) Qua *D* kẻ tiếp tuyến của *(O)* cắt *Ax, By* lần lượt tại *E, F*. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_{AED}+S_{BFD}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn *xyz* = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^2+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^2+x^2}}{zx}\ge 3\sqrt{3}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LÂM ĐỒNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 24

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho $A=\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, chứng minh A là một số nguyên.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Chứng minh rằng $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BH và đường phân giác AE cắt nhau tại M. Chứng minh rằng EH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AM.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x+5y-3xy=1$.

Câu 5: *(1,5 điểm)*

Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^4+b^4+c^4$.

Câu 6: *(1,5 điểm)*

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $B=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

Câu 7: *(1,5 điểm)*

Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30 km/h. Một người đi từ A đến B rồi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết vận tốc lên dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 10 km/h, vận tốc xuống dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 20 km/h, vận tốc trên đoạn đường nằm ngang là 15 km/h.

Câu 8: *(2,0 điểm)* Trên các cạnh BC, CD của hình vuông lấy lần lượt hai điểm N, E sao cho $\widehat{EAN}=45°$. Đường thẳng BD cắt AN và AE lần lượt tại H và K. Chứng minh rằng các điểm H, N, C, E, K nằm trên cùng một đường tròn.

Câu 9: *(2,0 điểm)*

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}.$$

Câu 10: *(1,5 điểm)*

Giải phương trình $\sqrt{4x^2-15x+20}=4x-10+7\sqrt{x-1}$.

Câu 11: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Chứng minh

$$HA+HB+HC\le\frac{2}{3}(AB+BC+CA).$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LONG AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 25
(Đề thi có 1 trang)

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

b) Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện: $xy+yz+zx=673$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{x^2-yz+2019}+\dfrac{y}{y^2-zx+2019}+\dfrac{z}{z^2-xy+2019}\ge\dfrac{1}{x+y+z}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Do bị bệnh bại não nên tay chân của Cảnh (11 tuổi, bản Tà Ọt, xã Châu Hạnh, huyện Quỳnh Châu, tỉnh Nghệ An) bị co quắp, không đi lại được từ lúc mới chào đời. Lên 6 tuổi, nhìn bạn bè cắp sách đến trường em cũng muốn mẹ cho đi học. Thương con ham học, những ngày đầu Cảnh được người thân cõng đến trường. Ít ngày sau, chứng kiến cảnh người thân của bạn phải vất vả bỏ bê công việc, Khanh đã quyết định cõng bạn vượt qua con đường dài 1,8 km nhiều sỏi đá để tới trường.

Lúc về, trên quãng đường dài 1,8 km, trời nắng, Khanh cõng bạn với vận tốc ít hơn lúc đi 0,2 m/s. Do đó, thời gian cõng bạn lúc về của Khanh chậm hơn lúc đi là 12 phút 30 giây. Tính vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3=2x+y\\ y^3=2y+x\end{cases}$

Câu 3: *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ đường tròn tâm K đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm F, E. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh OA vuông góc EF.

b) Từ A dựng các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (K) (M, N là các tiếp điểm và N thuộc cung nhỏ EC). Chứng minh rằng: M, H, N thẳng hàng.

Câu 4: *(3,0 điểm)* Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, điểm M di động trên cung nhỏ BC. Xác định vị trí của M để $S=MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất và khi đó tính S.

Câu 5: *(3,0 điểm)* Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc AB (C khác A và B; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 26

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1:

Cho biểu thức: $A=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Xác định x để $A\le -1$.

Câu 2:

Giải phương trình sau: $2x^2-6x-5(x-2)\sqrt{x+1}+10=0$.

Câu 3:

a) Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho $8q+1=p^2$.

b) Chứng minh rằng n^5-n chia hết cho 30 với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Với a,b,c là 3 số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca-6abc=0$.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

Câu 4:

Cho đường tròn (O) bán kính R và M là một điểm cố định nằm bên trong đường tròn. Qua điểm M, vẽ hai dây lưu động AB và CD vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ và AD^2+BC^2 không đổi.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $OI^2+IM^2=R^2$. Suy ra quỹ tích trung điểm I.

Câu 5:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB\ //\ CD$). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi G là giao điểm của đường thẳng đi qua E vuông góc với AD với đường thẳng đi qua F vuông góc với BC. So sánh GA và GB.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 27
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

a) Chứng minh a là nghiệm phương trình $a^2-2a-4=0$.

b) Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x+y+2xy=2 \end{cases}$

b) Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC<AB)$; Gọi H là hình chiếu của A trên BC, D là điểm nằm trên đoạn thẳng AH ($D\ne A, D\ne H$). Đường thẳng BD cắt đường tròn tâm C bán kính CA tại E và F (F nằm giữa B và D); M là điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $\widehat{ACF}=2\widehat{BFM}$; MF cắt AH tại N.

a) Chứng minh $BH.BC=BE.BF$ và tứ giác $EFHC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh HD là phân giác góc $\widehat{EHF}$

c) Chứng minh F là trung điểm MN

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{a^2+c^2}=\dfrac{2c}{b+c}$. Chứng minh bc là một số chính phương

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NGÃI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: a) Cho $a,\ b,\ c$ là các số nguyên thỏa mãn $a+b=c^3-2018c$. Chứng minh rằng $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

b) Tìm các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $4^x=1+3^y$.

c) Cho $B=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n.(n-1).(n-2)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

Câu 2: a) Giải phương trình $3x^2-4x-11=(2x-5)\sqrt{3x+7}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+x=y^2+y+5\\x^3+y^3=x^2y+xy^2+6\end{cases}$.

Câu 3: a) Rút gọn biểu thức $C=\sqrt{1+x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}+\dfrac{x}{x+1}$ với $x>0$.

b) Cho các số thực $a,b,c,$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $D=ab+ac$.

c) Với $x,\ y,\ z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\le xyz$.

Câu 4: Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$, đường phân giác AD (D thuộc BC). Các điểm E và F lần lượt chuyển động trên các cạnh AB và AC sao cho $BE=CF$. Trên cạnh BC lấy các điểm P và Q sao cho EP và FQ cùng song song với AD.

a) So sánh BP và CQ.

b) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác AEF thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5: Cho nữa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Gọi C là trung điểm của AO, vẽ tia Cx vuông góc với AB cắt nữa đường tròn tại I. Lấy K là điểm bất kỳ trên đoạn CI (K khác C và I). Tia AK cắt nữa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia Cx tại D. Vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt tia Cx tại N.

a) Chứng minh rằng ΔKMN cân.

b) Tính diện tích ΔABD theo R khi K là trung điểm của CI.

c) Khi K di động trên CI. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAKD đi qua điểm cố định thứ hai khác A.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH SÓC TRĂNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 29

(Đề thi có một trang)

Câu 1: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\sqrt{x-1}$ với $x\ge 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P^2=2+\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}$.

Câu 2: a) Chứng minh rằng tổng các chữ số của một số chính phương bất kỳ không thể bằng 2019.

b) Nhà bạn An có một cái bể chứa nước hình trụ có chiều cao $\text{h}=1(\text{m})$ và đường kính mặt đáy (không kể bề dày thành bể) là $\text{d}=\sqrt{\dfrac{40}{\pi}}(\text{dm})$. Ban đầu bể không có nước, An đã sử dụng 2 cái thùng để xách nước đổ vào bể, một thùng loại 7 lít và một thùng loại 4 lít. Sau nhiều lượt đổ nước vào bể, nhưng An không nhớ mình đã xách mỗi loại thùng trên bao nhiêu lần. Em hãy tính giúp xem An đã xách mỗi loại bao nhiêu lần? Biết rằng thùng luôn được đong đầy nước trước khi đổ vào bể chứa.

Câu 3: a) Tìm m để phương trình $2x^2-(m+1)x-18=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 sao cho biểu thức $Q=\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+25\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy^2+x=2y^2\\ x^4y+x^2y=3x^3-y\end{cases}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD}=15^\circ$. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt AD tại E. Tia phân giác trong của B cắt AD ở K. Chứng minh rằng $AK=ED$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AH là đường cao. Trên đoạn HC lấy điểm M (M khác H và C). Gọi $I;J$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến các cạnh AC và AB, N là điểm đối xứng của M qua IJ.

a) Chứng minh rằng $ABCN$ nội tiếp đường tròn (T).

b) Kéo dài AM cắt đường tròn (T) tại (P) (P khác A). Chứng minh rằng $\dfrac{1}{PM}<\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PC}$

c) Gọi D là trung điểm của AH, kẻ HK vuông góc với CD tại K.

Chứng minh rằng $\widehat{BAK}=\widehat{KHC}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 30
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$

với $x\ge 0$, $y\ge 0$ và $xy\ne 1$.

a. Rút gọn P.

b. Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}$ và $y=x^2+6$.

Câu 2. *(3,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $(m-1)x+y=3m-4$

và $(d'):x+(m-1)y=m$. Tìm m để (d) cắt (d') tại điểm M sao cho $\widehat{MOx}=30^0$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-2x^2+2x+2y+x^2y-4=0 \\ x^2-xy-4x-1=\sqrt{3x-y+7} \end{cases}$.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2+3b^2+3c^2+4abc\ge 13$.

Câu 5. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BE và AD. Gọi H là trực tâm và G là trọng tâm tam giác ABC.

a. Chứng minh: nếu $HG//BC$ thì $\tan B.\tan C=3$.

b. Chứng minh: $\tan A.\tan B.\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$.

Câu 6. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, gọi I, J, K lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Gọi giao điểm của các đường thẳng AJ, AK với cạnh BC lần lượt là E và F.

a. Chứng minh: I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

b. Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 7. *(2,0 điểm)* Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 31

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (3,0 *điểm*)

a) Cho $P=\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{1-x}\right):\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\ (x\ge 0; x\ne 1)$

Rút gọn P và chứng minh $P>1$.

b) Không dùng máy tính chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}-\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$.

Bài 2. (2,0 *điểm*)

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+8+6\sqrt{3x-1}}+\sqrt{3x+8-6\sqrt{3x-1}}=3x+4$.

b) Tìm a,b,c biết $a=\dfrac{2b^2}{1+b^2};\ b=\dfrac{2c^2}{1+c^2};\ c=\dfrac{2a^2}{1+a^2}$

Bài 3. (2,0 *điểm*)

Để liên hoan cuối năm,lớp 9A đã mua 22 gói kẹo gồm 3 loại :chuối ,chocola và dừa hết 445000đ. Biết 4 gói kẹo chuối giá 11000đ; 3 gói kẹo chocola giá 50000đ và mỗi gói kẹo dừa giá 15000đ. Hỏi lớp 9A đã mua bao nhiêu gói kẹo mỗi loại?

Bài 4. (3,0 *điểm*)

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết HC - HA = 4cm, $\tan\widehat{ACB}=\dfrac{3}{4}$. Tính độ dài AB,AC.

b) Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC; M là trung điểm của BC. Chứng minh EF ⊥ AM.

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh $2S=\dfrac{AH^4}{HE.HF}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH TIỀN GIANG	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN** *Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề*
Đề số 32 *(Đề thi có một trang)*	

Câu 1: *(4,5 điểm)*

1. Cho $a \ge 0$, $a \ne 1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)} - 1\right] + 2019$$

2. Với mỗi số thực x, ta định nghĩa phần nguyên của x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Hãy tìm phần nguyên của:

$B = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}}}$ trong đó x là số nguyên dương.

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ 9xy(3x-y) + 6 = 26x^3 - 2y^3 \end{cases}$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Một xe tải có chiều rộng là $2,4$ m và chiều cao là $2,5$ m muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $4m$ và khoảng từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi parabol $(P): y = ax^2$ (với $a < 0$) là hình chiếu biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Tìm a.

b) Hỏi xe tải có thể đi qua cổng được không? Tại sao?

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6\left(x^2+5\right)} + \sqrt{6\left(y^2+5\right)} + \sqrt{z^2+5}}$$

2. Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện $6a^2 + 20a + 15 = 0$, $15b^2 + 20b + 6 = 0$, $ab \ne 1$. Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{b^3}{ab^2 - 9(ab+1)^3}$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

1. Tìm số tự nhiên n biết rằng khi bỏ đi ba chữ số tận cùng bên phải của nó thì được một số mới có giá trị bằng $\sqrt[3]{n}$.

2. Tìm năm số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng bốn số còn lại.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36°$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{BC}$.

Câu 6: *(3,5 điểm)*

1. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh $BC = 2R.\sin A$ (Xét cả 3 trường hợp: tam giác vuông, tam giác nhọn, tam giác tù). Chú ý: Nếu α và β là hai góc bù nhau thì $\sin\alpha = \sin\beta$.

2. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$ cắt nhau tại 2 điểm A và B. Một đường thẳng (d) bất kì qua A cắt 2 đường tròn $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$ lần lượt tại M, N. Tiếp tuyến tại M của $(O_1;R_1)$ và tiếp tuyến tại N của $(O_2;R_2)$ cắt nhau tại I. Tìm giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN khi (d) quay quanh A.

___________________**Hết**_________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 33
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x+8}{x\sqrt{x}+8}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}}{x-4}$ với $0\le x<4$.

Rút gọn biểu thức A. Tìm các số nguyên x để A là số nguyên.

b) Cho ba số thực a,b,c thỏa $1\le a,b,c\le 2$. Chứng minh :

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\le 7$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho phương trình $x^2-2x+3-2m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

b) Giải phương trình $2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}=3-x$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ thì $(n+2)(n+1)(n+8)$ không thể là lập phương của một số tự nhiên.

b) Cho số nguyên tố p $(p>3)$ và hai số nguyên dương a,b sao cho $p^2+a^2=b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4 cm. E là điểm nằm trên cạnh BC (E khác B và C). Một đường thẳng qua B, vuông góc với đường thẳng DE tại H và cắt đường thẳng CD tại F. Gọi K là giao điểm của AH và BD.

a) Chứng minh tứ giác $KDCE$ nội tiếp đường tròn và ba điểm K, E, F thẳng hàng.

b) Khi E là trung điểm cạnh BC, tính diện tích tứ giác $BKEH$.

Câu 5. *(3,5 điểm)*

Cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại hai điểm A,B. Tiếp tuyến tại A của (C_2) cắt (C_1) tại M (M khác A). Tiếp tuyến tại A của (C_1) cắt (C_2) tại điểm N (N khác A). Đường thẳng MB cắt (C_2) tại P (P khác B). Đường thẳng NB cắt (C_1) tại Q (Q khác B).

a) Chứng minh các tam giác AMP, ANQ đồng dạng.

b) Chứng minh $MB.NA^2=NB.MA^2$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH TRÀ VINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 34
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1.(4.0 điểm). Giải các phương trình

1/ $x=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

2/ $\sqrt{4x+20}+\sqrt{x+5}-\frac{1}{5}\sqrt{9x+45}=4$

Bài 2.(4.0 điểm). Giải các hệ phương trình

1/ $\begin{cases} x+xy+y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=1 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y-1}=1 \end{cases}$

Bài 3.(3.0 điểm). Cho phương trình: $2x^2-2mx+m^2-2=0$ (1) (m là tham số). Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm không âm ($0\le x_1\le x_2$)Tìm giá trị của m để nghiệm lớn nhất của phương trình đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4.(3.0 điểm). Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của tam giác *ABC*. Giả sử phương trình: $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ có nghiệm kép. Tính số đo các góc của tam giác *ABC*.

Bài 5.(2.0 điểm). Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên *x, y, z* thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=x+y+z+2017$

Bài 6.(4.0 điểm). Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A, CM* là đường trung tuyến. Từ *A* vẽ đường thẳng vuông góc với *CM* cắt *BC* ở *H*. Tính tỉ số $\frac{BH}{HC}$.

__________________**Hết**__________________

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1.

1. a) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 1$

$$P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{x-1}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right).\left(\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

$$Q=\sqrt{x}-P=\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Để $Q\in\mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}+1$ là ước của 1

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+1=1\\ \sqrt{x}+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (\text{thỏa mãn ĐK})\\ \sqrt{x}=-2\ \ (\text{VN}_0)\end{array}\right.$$

Vậy $x=0$ thì $Q\in\mathbb{Z}$

2. Ta có:

$$\left(x^2-x^2-1\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}\Rightarrow -2y-\sqrt{4y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

$$x+2y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4y^2+1}\quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\left(4y^2-4y^2-1\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=2y-\sqrt{4y^2+1}\Rightarrow -x-\sqrt{x^2+1}=2y-\sqrt{4y^2+1}$$

$$x+2y=\sqrt{4y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) với (2) ta được $2(x+2y)=0\Leftrightarrow x+2y=0$

Mặt khác $x^3+8y^3+2019=(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)+2019=2019$ (vì $x+2y=0$)

Câu 2.

1. Đặt $x=a;\ \sqrt{x+3}=b\ge 0$

Ta có PT: $2a^2+b^2-3ab=0\ \Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0$

TH1: $a=b\Rightarrow x=\sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

TH2: $2a = b \Rightarrow 2x = \sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm TH1: $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$; $x = 1$

2. $\begin{cases} x^3 - \dfrac{6}{y} = 2 \ \ (1) \\ 3x - \dfrac{8}{y^3} = -2 \ \ (2) \end{cases}$ ĐK: $y \ne 0$

Cộng PT (1) với PT (2) ta được

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{8}{y^3}\right) + \left(3x - \frac{6}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{y}\right)\left(x^2 + \frac{2x}{y} + \frac{4}{y^2} + 3\right) = 0$$

TH1: $x = \dfrac{2}{y}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{8}{y^3} - \frac{6}{y} = 2 \Rightarrow 2y^3 + 6y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+2)^2 = 0$$

$y = 1 \Rightarrow x = 2$; $y = -2 \Rightarrow x = -1$

TH2: $\Leftrightarrow \left(x^2 + \dfrac{2x}{y} + \dfrac{4}{y^2} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \dfrac{2x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right) + \dfrac{1}{y^2} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 + \dfrac{1}{y^2} + 3 = 0$ (PT vô nghiệm)

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm (x;y) = (2;1), (-1;-2)

Câu 3.

1. Ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) > 0 (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + (n+1)\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2. Ta có:

$$A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$$

$$A=\left[9y^2-12y(x-4)+4(x-4)^2\right]-4(x-4)^2+5x^2-24x+82$$

$$A=\left[3y-2(x+3)\right]^2+x^2-8x+18$$

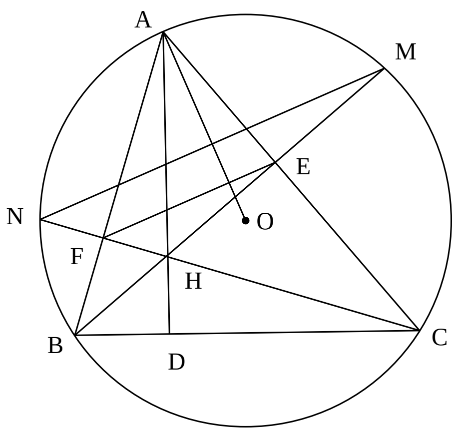
$$A=\left[3y-2(x+4)\right]^2+\left(x-4\right)^2+2$$

$$A=\left[3y-2x-8\right]^2+\left(x-4\right)^2+2\geq 2$$

$A\geq 2$. Dấu bằng sảy ra khi: $\begin{cases}3y-2x-8=0\\x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{16}{3}\\x=4\end{cases}$

GTNN của $A=2$ khi $x=4; y=\dfrac{16}{3}$

Câu 4.



1.a) Ta có: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$\widehat{BCF}=\widehat{FEB}$ (cùng chắn cung BF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$)

$\widehat{BCF}=\widehat{BMN}$ (cùng chắn cung BN của đường tròn (O)

$\widehat{BMN}=\widehat{FEB}\Rightarrow MN\,//\,FE$ (đpcm) (*)

Ta có: $OM=ON=R$ (1)

Mặt khác: $\widehat{ECF}=\widehat{FBE}$ (cùng chắn cung EF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$)

$\widehat{ECF}=\widehat{FBE}\Rightarrow\ \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}\Rightarrow AM=AN$ (2)

Từ (1) và (2) OA là đường trung trực của MN (**)

Từ (*) và (**) $OA\perp$ EF

1.b) Gọi D là giao của AH với BC. Ta có $AD\perp BC$

$\Delta CDH\sim\Delta CFB$ ($\widehat{C}$ chung, $\widehat{D}=\widehat{F}=90^0$)

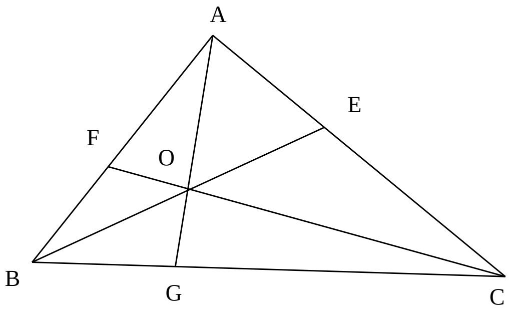
$$\Rightarrow\frac{CH}{CB}=\frac{CD}{CF}\Rightarrow CH.CF=CB.CD\ \ (3)$$

$\Delta BDH \sim \Delta BEC$ ($\widehat{B}$ chung, $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BH.\text{BE} = BC.\text{BD}$ (4) .Cộng vế với vế (3) và (4) ta được:

$CH.CF + BH.BE = CB.CD + BD.BC$

$CH.CF + BH.BE = BC(CD + BD) = BC^2$



Đặt $S_{AOB} = S_1; S_{AOC} = S_2; S_{BOC} = S_3$

Ta có: $\dfrac{S_1}{S_{ABE}} = \dfrac{BO}{BE}; \dfrac{S_3}{S_{BEC}} = \dfrac{BO}{BE} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_{ABE}} = \dfrac{S_3}{S_{BEC}} = \dfrac{S_1 + S_3}{S_{ABC}} = \dfrac{BO}{BE}$ (1)

$\dfrac{S_3}{S_{BCF}} = \dfrac{CO}{CF}; \dfrac{S_2}{S_{ACF}} = \dfrac{CO}{CF} \Rightarrow \dfrac{S_3}{S_{BCF}} = \dfrac{S_2}{S_{ACF}} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_{ABC}} = \dfrac{CO}{CF}$ (2)

$\dfrac{S_1}{S_{ABG}} = \dfrac{AO}{AG}; \dfrac{S_2}{S_{AGC}} = \dfrac{AO}{AG} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_{ABG}} = \dfrac{S_2}{S_{AGC}} = \dfrac{S_2 + S_1}{S_{ABC}} = \dfrac{AO}{AG}$ (3)

Cộng vế với vế $\dfrac{AO}{AG} + \dfrac{BO}{BE} + \dfrac{CO}{CF} = \dfrac{2\left(S_1 + S_2 + S_3\right)}{S_{ABC}}$ =2

Vậy tổng $\dfrac{AO}{AG} + \dfrac{BO}{BE} + \dfrac{CO}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Câu 5.

1. $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = = \dfrac{\left(1 - \sqrt[3]{2}\right)\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)}{1 - \sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)x = 1 \Leftrightarrow 2x^3 = \left(x + 1\right)^3$

$\Leftrightarrow 2x^3 - \left(x + 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 4$

$P = 4 = 2^2$ là một số chính phương

2. $x^2 - 2y^2 = 5$ (5). Từ Pt (5) $\Rightarrow x$ lẻ $x = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$)

Thay vào PT (5) ta được: $(2m + 1)^2 - 2y^2 = 5 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 2y^2 = 4 \Leftrightarrow 2m\left(m + 1\right) - y^2 = 2$ (6)

Từ PT (6) $\Rightarrow y$ chẵn $y = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Thay vào (6): $2m\left(m + 1\right) - (2k)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m\left(m + 1\right) - 4k^2 = 2$

$\Leftrightarrow m\left(m + 1\right) = 2k^2 + 1$ (7)

Ta thấy VT phương trình (7) chẵn; VP phương trình (7) lẻ.
Vậy PT đã cho không có nghiệm nguyên.

Đề số 2

Câu 1.

a. Ta có:

$$A=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x+8}{(\sqrt{x}+1)}$$

b. Ta có: $A=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2$

Vì $\sqrt{x}+1>0,\forall x\geq 0; x\neq 9$ nên áp dụng BĐT Cô – Si ta có:

$$A\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{9}{\sqrt{x}+1}}-2=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=4$. Vậy $A_{\min}=4$ khi $x=4$.

Câu 2.

a. Ta có: $\Delta'=(m+4)^2-\left(m^2+8m-9\right)=25>0$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b. Áp dụng định lí Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+4)=2m+8 \\ x_1x_2=m^2+8m-9 \end{cases}$

$$P=\frac{x_1^2+x_2^2-60}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-60}{x_1+x_2}$$

$$P=\frac{(2m+8)^2-2\left(m^2+8m-9\right)-60}{2m+8}=\frac{m^2+8m+11}{m+4}=m+4-\frac{5}{m+4}$$

P nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{5}{m+4}$ nguyên $\Rightarrow m+4$ là ước của 5

$\Rightarrow m+4 \in \{\pm 1;\pm 5\}$. Mà m nguyên dương $\Rightarrow m = 1$.

Câu 3.

a. Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2-2$ đi đến phương trình: $t^2-4t+3=0$

Giải phương trình này được nghiệm: $t=1$ (loại), $t=3$

Do đó $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=3 \Rightarrow x-3\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \sqrt{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, phương trình cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2};x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$

b. Ta có:

$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$

$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2-4x+4+4y^2-8y+4-2x^2y-4xy^2+8xy=5$

$\Leftrightarrow \left(x^2y^2-4xy^2+4y^2\right)+\left(x^2-4x+4\right)+\left(-2x^2y+8xy-8y\right)=5-4$

$\Leftrightarrow y^2\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-4x+4\right)-2y\left(x^2-4x+4\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)\left(y^2+1-2y\right)=1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2=1$

$TH1:(x-2)=(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=2$

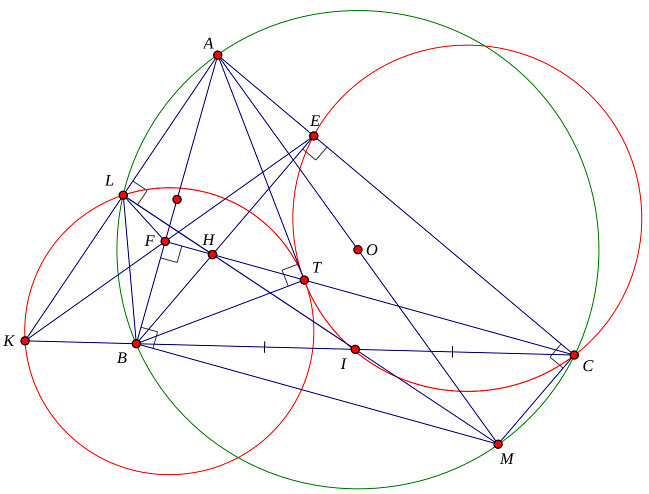
$TH2:(x-2)=(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=0$

$TH3:(x-2)=-(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=0$

$TH4:(x-2)=-(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=2$

Vậy phương trình có các cặp $(x;y)$ nguyên là: $(3;2);(1;0);(3;0);(1;2)$.

Câu 4.



a.Ta có $\widehat{AFH}=\widehat{AEH}=90^0$ suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Ta có tứ giác $ALBC$ nội tiếp $\Rightarrow KB.KC=KL.KA$ (1).

Vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow KB.KC=KF.KE$ (2).

Từ (1), $(2)\Rightarrow$ tứ giác $ALFE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Do đó, $LH\perp AK$.

b. Gọi $M=HL\cap(O)$. Vì $LH\perp AK\Rightarrow AM$ là đường kính.

Ta có $\begin{cases} MC\perp AC \\ BH\perp AC \end{cases}\Rightarrow MC//BH$ (3)

Ta có $\begin{cases} CH\perp AB \\ MB\perp AB \end{cases}\Rightarrow CH//\text{MB}$ (4)

Từ (3) và (4)$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow HL$ đi qua trung điểm của BC.

c. Áp dụng hệ thức lượng tam giác vuông ABT thì $AT^2=AF.AB$ và chú ý $BFEC$ nội tiếp nên $AF.AB=AE.AC$.

Do đó, $AT^2=AE.AC$ nên AT là tiếp tuyến của đường tròn (CET).

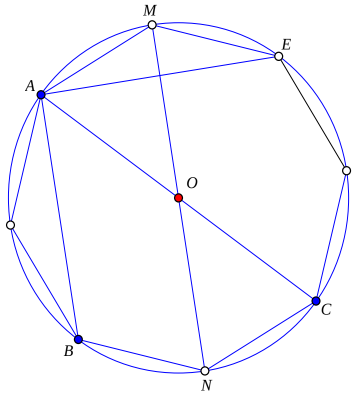
Hơn nữa, $\widehat{KFB}=\widehat{ACB}=\widehat{KLB}$ nên suy ra $KLFB$ nội tiếp, do đó $AF.AB=AL.AK$ nên $AT^2=AL.AK$ tức là AT là tiếp tuyến của (KLT).

Vậy (CET) tiếp xúc với (KLT) vì có AT là tiếp tuyến chung.

Câu 5.

Ta gọi các cạnh song song với nhau là cùng một hướng. Chú ý rằng hai cạnh hoặc hai đường chéo song song với nhau tạo thành một hình thang cân.

Ta thấy rằng một đa giác đều n cạnh gồm có n hướng (cụ thể như trên hình vẽ thì AB, MN, CE cùng một hướng, trong khi đó AB, AC khác hướng).



Với mỗi bộ gồm có k đỉnh sẽ sinh ra $\dfrac{k(k-1)}{2}$ đoạn thẳng, nếu số đoạn thẳng này lớn hơn n thì sẽ có ít nhất hai cạnh có cùng một hướng nên chúng tạo thành hình thang cân.

Do đó, điều kiện để k điểm có thể chứa bốn điểm tạo thành hình thang cân nếu

$$\frac{k(k-1)}{2}>n \Leftrightarrow k^2-k>2n \Leftrightarrow \left(k-\frac{1}{2}\right)^2>2n+\frac{1}{4} \Leftrightarrow k>\sqrt{2n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}.$$

Bây giờ áp dụng bài toán cho $n=30$ ta suy ra $k>\sqrt{60+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} \Rightarrow k=9,$ suy ra cứ 9 đỉnh thì sẽ có 4 đỉnh tạo thành hình thang cân.

Đề số 3

Câu 1.

a. Ta có: $2y^2-xy+x-2y+5=0 \Leftrightarrow x(y-1)=2y^2-2y+5$

$$\Leftrightarrow x=2y+\frac{5}{y-1}$$

($y=1$ không thỏa mãn PT)

Vì x, y là các số nguyên nên $y-1$ là ước của 5.

$TH1: y-1=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=9.$

$TH2: y-1=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=-5.$

$TH3: y-1=5 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x=13.$

$TH4: y-1=-5 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=-9.$

Vậy PT có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là: (9;2), (-5;0), (13;6), (-9;-4).

b. Ta có $A=2^{2^n}+4^n+16=\left(2^{2^n}-1\right)+\left(4^n-1\right)+18$

Đặt $2^{2^n}=2^{2k}\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ suy ra $2^{2^n}-1=2^{2k}-1=4^k-1 \vdots 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n}-1 \vdots 3;\ 4^n-1 \vdots 3;\ 18 \vdots 3$

$$\Rightarrow A=2^{2^n}+4^n+16 \vdots 3$$

Câu 2.

a. Điều kiện: $x\ge\frac{-3}{2}$

$$\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5} \Leftrightarrow (2x+5)\sqrt{2x+3}=8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3})^3+2\sqrt{2x+3}=(2x)^3+2(2x)$$

Đặt $a=\sqrt{2x+3}\ge 0,\ b=2x$

Ta có:

$$a^3+2a=b^3+2b \Leftrightarrow (a-b)\left[(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}+2\right]=0 \Leftrightarrow a=b$$

Suy ra: $\sqrt{2x+3}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ge 0 \\ 2x+3=4x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$

b. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=1\\(x-1)(y-3)=(x-1)+(y-3)+1\end{cases}$$

Đặt $a=x-1; b=y-3\cdot$ Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab=a+b+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)^2-2ab=1\\ab=a+b+1\end{cases}$$

Đặt $S=a+b;P=ab,$ điều kiện $S^2\ge 4P$. Hệ trên trở thành

$$\begin{cases}S^2-2P=1\\P=S+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases}(\textit{thỏa mãn}) \text{ hoặc } \begin{cases}S=3\\P=4\end{cases}(\textit{loại})$$

$$\begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=-1\\ab=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

+) $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-1\\y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$

+) $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\y-3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là (0;3), (1;2)

Câu 3.

Ta có: $P=\dfrac{1}{(1+\frac{b}{a})^4}+\dfrac{1}{(1+\frac{c}{b})^4}+\dfrac{1}{(1+\frac{a}{c})^4}$

Đặt: $x=\dfrac{b}{a}, y=\dfrac{c}{b}, z=\dfrac{a}{c} \Rightarrow x,y,z>0,\ xyz=1.$

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{(1+x)^4}+\dfrac{1}{(1+y)^4}+\dfrac{1}{(1+z)^4}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$P\ge\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right]^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$\left[1+\left(\sqrt{xy}\right)^2\right]\left[1+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2\right]\ge(1+x)^2\Rightarrow\frac{1}{(1+x)^2}\ge\frac{y}{(1+xy)(x+y)}$$

Tương tự: $\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{x}{(1+xy)(x+y)}$

Từ 2 BĐT trên ta có: $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

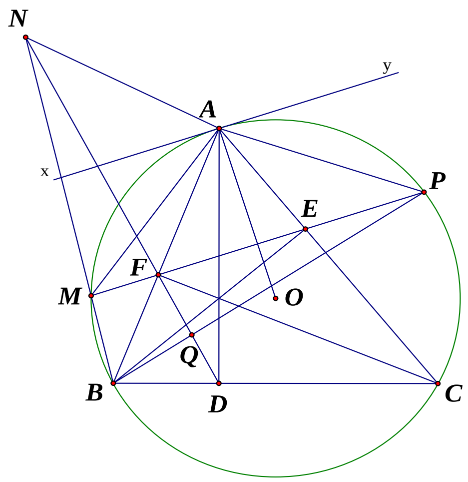
Tương tự: $\dfrac{1}{(1+z)^2}+\dfrac{1}{(1+1)^2}\ge\dfrac{1}{1+z}\Rightarrow\dfrac{1}{(1+z)^2}\ge\dfrac{1}{1+z}-\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}=\frac{z}{1+z}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Ta có: $P\ge\dfrac{3}{16}$, $P=\dfrac{3}{16}\Leftrightarrow x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $\dfrac{3}{16}$.

Câu 4.



1.

a) Qua điểm A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O) suy ra $OA\perp xy$

Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BEC}=90^0$ (GT); $\widehat{BFC}=90^0$ (GT) do đó tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}$ (1)

Mặt khác $\widehat{BAx}=\dfrac{1}{2}Sd\,\overset{\frown}{AB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}Sd\,\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp) do đó $\widehat{BAx}=\widehat{ACB}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AFE}=\widehat{BAx}$ ở vị trí so le trong nên $EF\,//\,xy$ hay $EF\perp OA$.

b) Đường thẳng EF cắt (O) tại điểm thứ 2 là P, BP cắt DF tại Q.

AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $BCEF$, $ACDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{ACB} = \widehat{AFP}$

Mặt khác $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} Sd\,\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} Sd\left(\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{MA}\right)$

$\widehat{AFP} = \frac{1}{2} Sd\left(\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{AP}\right)$

Do đó $Sd\,\overset{\frown}{AM} = Sd\,\overset{\frown}{AP}$ suy ra BA là tia phân giác của $\widehat{MBQ}$ và $\Rightarrow AM = AP$ (1)

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{BFM}$, tứ giác $ACDF$ nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{BFQ}$

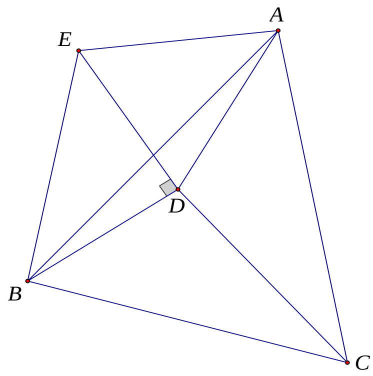
do đó $\widehat{BFQ} = \widehat{BFM} = \widehat{ACB}$, suy ra FB là tia phân giác của $\widehat{MFQ}$

$\Delta MFB = \Delta QFB \Rightarrow MB = QB \Rightarrow \Delta BMP = \Delta BQN \Rightarrow BP = BN$.

Do đó $\Delta ABN = \Delta ABP$ nên $AN = AP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$.

2.



Dựng tam giác vuông cân BDE tại D sao cho E thuộc nửa mặt phẳng có bờ BD không chứa C.

Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ và DE = DB

Từ giả thiết AC.BD = AD.BC

Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ACB$, từ đó $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$, suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{BAE}$. Do đó $\Delta CAD \sim \Delta BAE$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{BD\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$$

Câu 5.

Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$.

Gọi $(C_1), (C_2),..., (C_{2025})$ là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ ở trên, chúng có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{90}$.

Gọi $(C_1^{'}), (C_2^{'}),..., (C_{2025}^{'})$ lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn ở trên có bán kính là: $\frac{1}{91}$. Khi đó các hình tròn này nằm trong hình vuông và đôi một không có điểm chung (rời nhau).

Trong hình vuông đã cho có các hình tròn rời nhau $(C_1^{'}), (C_2^{'}),..., (C_{2025}^{'})$ và có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong các hình tròn này không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Đề số 4

Câu 1. a) Với $x \geq 0$ ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

Ta có $\begin{cases} x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0 \end{cases}$

và $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0, \forall x \geq 0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1 \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1 \geq \sqrt{x}, \forall x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \leq 1, \forall x \geq 0 \Leftrightarrow A \leq 1, \forall x \geq 0$

$A = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 1 khi $x = 1$.

b) Ta có:

$$B^2 = 4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$$

$$= 8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)} = 8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$= 8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = 8+2\left(\sqrt{5}-1\right) = 6+2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow B = \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ $\left(\text{do } B \geq 0\right)$

$= \sqrt{5}+1$

Câu 2.

a) Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì:

$$P(x) = \left(x^2+cx+d\right)^2 = x^4+2cx^3+\left(c^2+2d\right)x^2+2cdx+d^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mà: $P(x) = x^4-2x^3+3x^2+ax+b$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2c=-2\\ c^2+2d=3\\ 2cd=a\\ d^2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\ d=1\\ a=-2\\ b=1\end{cases}$$

Vậy: $a=-2, b=1$.

b) ĐK: $-\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{3}{4}$ (*)

Ta có $\left(\sqrt{3-4x}+\sqrt{4x+1}\right)^2=3-4x+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}+1+4x$

$=4+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}\ge 4\Rightarrow\sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}\ge 2$ (2)

Lại có : $-16x^2-8x+1=2-(4x+1)^2\le 2$ (3)

Từ (2) và (3) ta có:

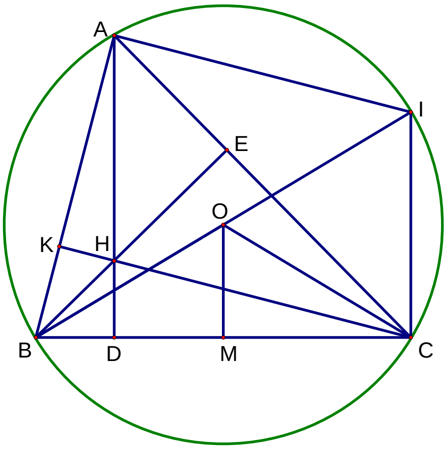
$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}=2\\ -16x^2-8x+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-4x+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}+1+4x=4\\ 16x^2+8x+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(3-4x)(1+4x)}=0\\ x=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{4}\\ x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\\ x=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}\ \text{(thỏa mãn(*))}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\dfrac{1}{4}$

Câu 3.



a. Xét tứ giác *AKHE* có $\widehat{K}=\widehat{E}=90^0 \Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{BHC}=180^0$

mà $\widehat{BHC}=\widehat{BOC}$ và $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC} \Rightarrow 3\widehat{BAC}=180^0 \Rightarrow \widehat{BAC}=60^0$

Kẻ đường kính *BI*, suy ra tứ giác *AICH* là hình bình hành $\Rightarrow AH = CI$ (1).

Gọi *M* là trung điểm của *BC* $\Rightarrow IC = 2OM$ (2) (*Đường trung bình*).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH = 2OM$.

Do *M* là trung điểm của *BC* $\Rightarrow OM \perp BC$ và *OM* là tia phân giác của $\widehat{BOC} \Rightarrow$ $\widehat{MOC}=60^0$.

$$\Rightarrow OM = MC.\cot 60^0 = \frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

b. Ta có $\Delta DBH \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{DB}{DA}=\frac{DH}{DC} \Leftrightarrow DA.DH = DB.DC$

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ (Dấu "=" xảy ra khi $x = y$)

ta có: $DA.DH = DB.DC \le \frac{(DB+DC)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ (*Không đổi*).

(Dấu "=" xảy ra khi $DB = DC$ hay *D* là trung điểm của *BC*)

$\Rightarrow DA.DH$ nhận giá trị lớn nhất là $\frac{a^2}{4}$ khi *D* là trung điểm của *BC*. $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại *A* $\Leftrightarrow$ *A* là điểm chính giữa của cung *BC*.

Câu 4.

Với mọi số tự nhiên *a* thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.

Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4.

Suy ra $2019^n \equiv 3^n \pmod 8$

- Nếu n chẵn thì $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 5 \pmod 8$

$\Rightarrow$ *C* không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n=2k+1, k\in\mathbb{N} \Rightarrow\ 2019^n \equiv 3^{2k+1} \equiv 3.3^{2k} \equiv 3\ (\text{mod } 8)$

$\Rightarrow\ C \equiv 7\ (\text{mod } 8)$

$\Rightarrow$ C không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5.

Đặt $a=\dfrac{1}{1+x},\ b=\dfrac{1}{1+y},\ c=\dfrac{1}{1+z}$ khi đó $x+y+z+2=xyz \Leftrightarrow a+b+c=1$

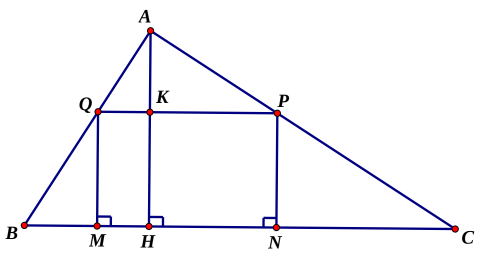
và $x=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{b+c}{a},\ y=\dfrac{c+a}{b}, z=\dfrac{a+b}{c}$.

Vậy $x+y+z+6=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+6=\sum_{cyc}\left(\dfrac{c+a}{c}+\dfrac{a+b}{b}\right)$

$\geq 2\sum_{cyc}\sqrt{\dfrac{(c+a)(a+b)}{bc}}=2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hay $x=y=z=2$.

Câu 6.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và PQ.

Tam giác ABC vuông tại A nên $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$

Đặt $PN=x,\ PQ=y$

Vì $\Delta APQ \sim \Delta ACB$ suy ra $\dfrac{PQ}{CB}=\dfrac{AK}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{y}{5}=1-\dfrac{5}{12}x \Leftrightarrow y=5-\dfrac{25}{12}x$

$S_{MNPQ}=x.y=5x-\dfrac{25}{12}x^2=3-\dfrac{25}{12}\left(x-\dfrac{6}{5}\right)^2 \leq 3$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{MNPQ} bằng 3 khi $x=\dfrac{6}{5}$ và $y=\dfrac{5}{2}$.

Đề số 5

Câu 1.

1) Ta có:

$\begin{cases} x-y=m+1 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=3m+3 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m \\ y=x-m-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2m \\ y=m-1 \end{cases} \quad (\forall m\in R)$

Ta có:

$P = x^2 + 8y = 4m^2 + 8(m-1) = 4m^2 + 8m - 8$

$= (2m+2)^2 - 12 \ge -12$

Dấu "=" xẩy ra khi $2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Giá trị nhỏ nhất của P là -12 khi m = -1

2) Giải: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 2xy = 1 \\ (x-y)^3 - 3xy(x-y) = -1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x - y = S \\ xy = P \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} S^2 + 2P = 1 \\ S^3 - 3SP = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ S^3 - 3S.\dfrac{1-S^2}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ 2S^3 + 3S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ 5S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ \left[\begin{array}{l} (S+1) = 0 \\ 5S^2 - 5S + 2 = 0 \ \ (vn) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 2.

1. Giải: $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 27x + 9 = 0 \quad (*)$

Với $x = 0$, $(*) \Leftrightarrow 0x + 9 = 0$ (phương trình vô nghiệm.

Với $x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (*) cho x^2 :

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 24 - \dfrac{27}{x} + \dfrac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{x}\right)^2 - 9\left(x + \dfrac{3}{x}\right) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{x} - 3\right)\left(x + \dfrac{3}{x} - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{3}{x} - 3 = 0 \\ x + \dfrac{3}{x} - 6 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 3 = 0 \ (VN) \\ x^2 - 6x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{6} \\ x = 3 - \sqrt{6} \end{array}\right.$

2. Ta có:

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + 3 \ge 4\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b} + 1\right) + \left(\dfrac{b}{c} + 1\right) + \left(\dfrac{c}{a} + 1\right) \ge 4\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}-\frac{4a}{a+b}+\frac{b+c}{c}-\frac{4b}{b+c}+\frac{c+a}{a}-\frac{4c}{c+a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{c(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{a(c+a)}\ge 0$$

Luôn đúng vì a, b, c là các số dương. Dấu bằng xẩy ra khi a = b = c.

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1) Ta có: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c)\ \vdots 2$, theo (1)Suy ra: $b.c\ \vdots 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c\vdots 2\Rightarrow a(b+c)\vdots 2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b + c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách khác: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)\ \Leftrightarrow abc=a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vậy thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn. Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

2. Dùng hàm Ơle:

Phân tích số m ra thừa số nguyên tố: $m=p_1^{\,x}.p_2^{\,y}.p_3^{\,z}...$

Số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m là

$$\varphi(m)=m.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)....$$

Ta có: $999=3^3.37\Rightarrow \varphi(999)=999.\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{37}\right)=648$

Có 648 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 999.

Vậy có 649 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 1000.

Cách khác:

Gọi A là số các số nguyên dương không vượt quá 1000. Suy ra A = 1000

B là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không nguyên tố cùng nhau với 999.

C là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Ta có: $999=3^3.37$

B = (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3) – (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3)

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{3}+1=333$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 là: $\frac{999-37}{37}+1=27$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho cả 37 và 3 (chia hết cho 111) là: $\frac{999-111}{111}+1=9$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3 là: $27-9=18$

Suy ra B = 333+ 18 = 351. Vậy C= A – B = 1000 – 351 = 649

Câu 4.

Ta có: $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

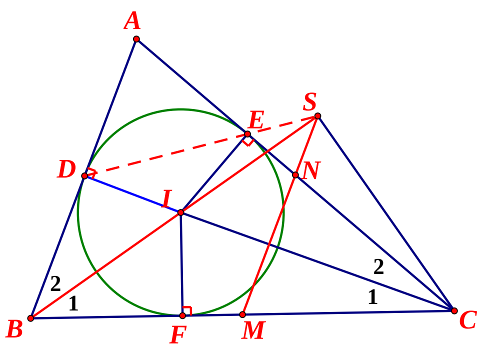
$=\left(\sqrt{2}-1\right)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+3\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+....+98\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)+99\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)$ và

$=-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{4}-...-\sqrt{99}+99\sqrt{100}$

$B=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$

$\Rightarrow A+B=100\sqrt{100}-1=999$

Câu 5.



a) Gọi F là tiếp điểm của BC với đường tròn (I)

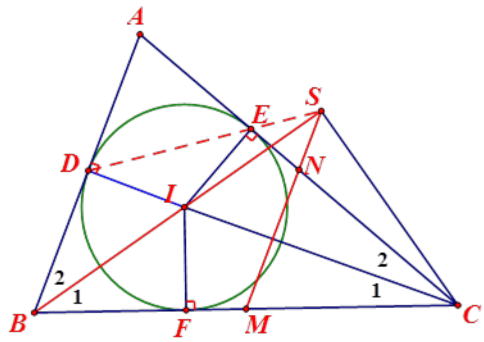
Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có:

AD = AE; BD = BF; CE = CF

Suy ra: AB + AC – BC = (AD + DB) + (AE+ CE) – (BF + CF)

= AD + AE = 2AD.

b)



Gọi S là giao điểm của BI và MN. Ta cần chứng minh: D, E, S thẳng hàng.
Thật vậy:
Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN//AB
$\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{BSM}$ (hai goc so le trong);$\widehat{B_2} = \widehat{B_1}$
$\Rightarrow \widehat{BSM} = \widehat{B_1}$
Suy ra tam giác MBS cân tại M nên MB = MS = MC.
Tam giác BSC có đường trung tuyến SM=1/2BC nên tam giác BSC vuông tại S.
Ta có:
Tứ giác IECF và IESC là các tứ giác nội tiếp (đường tròn đường kính IC)
Nên 5 điểm I, E, S, C, F cùng thuộc đường tròn đường kính IC
Ta có:
$\Rightarrow \widehat{SEC} = \widehat{SIC}$; $\widehat{SIC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (góc ngoài của tam giác)
$\Rightarrow \widehat{SEC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (1)
Lại có tam giác ADE cân tại A
nên: $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SEC} = \widehat{AED}$ mà A, E, C thẳng hàng nên D, E, S thẳng hàng.
Vậy ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.
Cách khác: Gọi P là giao điểm của DE và BI. Đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Đề số 6

Câu 1. 1) Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x - 5}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)} \right)$$

$$= \frac{x-\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} : \frac{(x-4)-(x-5)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 4)$

2) - Chứng minh M là số chẵn

$$a = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = 1+\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3} = 1-\sqrt{2})$$

$$M = a+b = \left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right) = 2$$

- Chứng minh N là số chẵn

$$a+b=2\,;\, a.b = \left(1+\sqrt{2}\right).\left(1-\sqrt{2}\right) = -1\,;\, a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6$$

$$N = a^7+b^7 = \left(a^7+a^4b^3\right)+\left(b^7+a^3b^4\right)-\left(a^4b^3+a^3b^4\right)$$

$$= a^4\left(a^3+b^3\right)+b^4\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3(a+b)$$

$$= \left(a^3+b^3\right).\left(a^4+b^4\right)+2$$

$$= (a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2\right]+2 = 2(7.34+1) \vdots 2$$

Vậy M, N là các số chẵn.

Chú ý :

- Học sinh có thể tính M bằng cách đưa về phương trình bậc 3: $M^3+3M-14=0$ *, giải ra được nghiệm M = 2. Mỗi ý dưới đây cho 0,5 điểm.*

$$M^3 = \left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^3 = 14+3.\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\,.\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)$$

$$M^3 = 14-3M \Leftrightarrow (M-2)\left(M^2+2M+7\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow M = 2 \text{ vì } M^2+2M+7 = (M+1)^2+6 > 0$$

- Học sinh có thể chứng minh N là số chẵn bằng cách đặt :

$S_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ *rồi xây dựng công thức* $S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1}$ *để chỉ ra* S_7 *là số chẵn hoặc có thể khai triển* $\left(1+\sqrt{2}\right)^7 + \left(1-\sqrt{2}\right)^7$ *để tính N thì đều cho 0,5đ.*

Câu 2.

1) Vì Phương trình $x^2+2kx+4=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 nên $\Delta' \geq 0.$

$\Leftrightarrow k^2-4\geq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq 4$ (1); Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=-2k \\ x_1.x_2=4 \end{cases}$.

Do đó :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{x_1^2x_2^2} \leq 5 \Leftrightarrow \left(\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\right)^2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4k^2-8}{4}\right)^2 \leq 5 \Leftrightarrow \left(k^2-2\right)^2 \leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq k^2-2 \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 0 \leq k^2 \leq 2+\sqrt{5} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $4 \leq k^2 \leq 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{2+\sqrt{5}} \leq k \leq -2$

Hoặc $2 \leq k \leq \sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy tất cả các giá trị của k cần tìm là : $-\sqrt{2+\sqrt{5}} \leq k \leq -2$ và $2 \leq k \leq \sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

2) Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ hoặc $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$ (*)

Trường hợp 1: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$. Thay $y=x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=(x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x=0 \Rightarrow x=y=0$.

Trường hợp 2: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$.

Xét $A=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=\dfrac{\left(3\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(3\sqrt{y^2+1}+y\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$.

Ta có: $3\sqrt{x^2+1}+x>3\sqrt{x^2}+x=3|x|+x=2|x|+\left(|x|+x\right)\geq 0$.

Tương tự: $3\sqrt{y^2+1}+y>0$

Suy ra: $A>0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y-x+1 \\ \sqrt{y^2+1}=2x-y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-x+1\ge 1 \quad (1) \\ 2x-y+1\ge 1 \quad (2) \\ x^2+1=4y^2+4y+1-4xy-2x+x^2 \quad (3) \\ y^2+1=4x^2+4x+1-4xy-2y+y^2 \quad (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$(x-y)\left[4(x+y)+6\right]=0 \Leftrightarrow x=y$ hoặc $4(x+y)+6=0$:

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x+y\ge 0$, suy ra trường hợp $4(x+y)+6=0$ không xảy ra.

Trường hợp $x=y$, thay vào (3) ta được: $x=y=0$.

Câu 3.

1. Đặt $a=xy, b=x+y \Rightarrow a\in Z, b\in Z, b^2\ge 4a$ (*)

Phương trình (1) trở thành: $a^2b+b=a+2$.

$$\Leftrightarrow b=\frac{a+2}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow a+2 \vdots a^2+1 \Rightarrow a^2-4 \vdots a^2+1 \Rightarrow (a^2+1)-5 \vdots a^2+1 \Rightarrow 5 \vdots a^2+1$$

$$\Rightarrow a^2+1\in\{1;5\} \Rightarrow a^2\in\{0;4\} \Rightarrow a\in\{0;-2;2\}$$

Nếu $a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(0;2),(2;0)\}$

Nếu $a=-2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn $x, y\in Z$)

Nếu $a=2 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$, loại vì không thỏa mãn $b\in Z$.

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

Cách khác: Đưa phương trình về dạng : $(x+y)(xy)^2-xy+(x+y-2)=0$

Đặt $t=xy, t\in Z$ ta được phương trình ẩn t: $(x+y)t^2-t+(x+y-2)=0$ (1)

Nếu $x+y=0 \Rightarrow xy=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ (Loại)

*) Nếu $x+y\ne 0$, ta có phương trình bậc 2 ẩn t:

$$(x+y)t^2-t+(x+y-2)=0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(x+y)(x+y-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 \in \{0;1\} \Leftrightarrow (x+y-1) \in \{-1;0;1\} \Leftrightarrow x+y \in \{1;2\}$

*) Nếu $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ xy = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (loại)

*) Nếu $x+y=2 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0;2),(2;0)\}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

2. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2$ $\left(m,k \in N^*\right)$ $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và (3, 8) = 1 nên

Từ $3n+1=k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

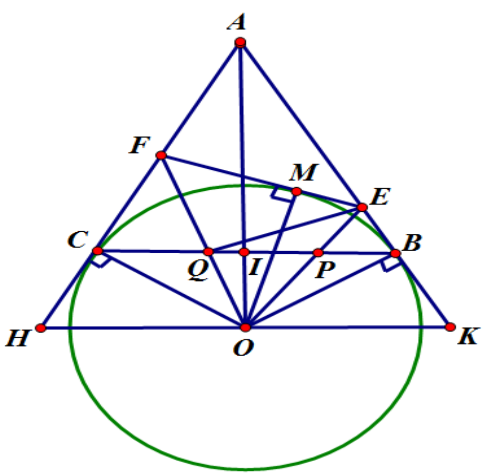
Nếu n chia cho 5 dư 3 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vì (5, 8) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Vậy $n \vdots 5$ (2)

Câu 4.



1. Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, suy ra : $OI \perp BC$.

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{BOI}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAO}$).

$\Rightarrow \cos\widehat{ABI} = \cos\widehat{BOI} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{BOI} = 60^0$ (1)

Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra OF, OE lần lượt là các tia phân giác của các góc COM và MOB. Suy ra:

$$\widehat{FOM} = \frac{\widehat{COM}}{2}; \widehat{MOE} = \frac{\widehat{MOB}}{2} \Rightarrow \mathrm{EOF} = \widehat{FOM} + \widehat{MOE} = \frac{\widehat{COM} + \widehat{MOB}}{2} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \widehat{BOI} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{ABI} = \widehat{EOF} = 60^0$ hay $\widehat{QBE} = \widehat{QOE} \Rightarrow$ Tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{OQB} = \widehat{OEB}$ (cùng chắn cung OB của đường tròn $(OBEQ)$).

$\widehat{OEF} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{OQB} = \widehat{OEF}$ hay $\widehat{OQP} = \widehat{OEF}$

$\Rightarrow \Delta OQP \sim \Delta OEF$ $(g.g)$ (vì có $\widehat{OQP} = \widehat{OEF}, \widehat{QOP}$ là góc chung) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{OQ}{OE}$ (3)

Vì tứ giác $OBEQ$ nội tiếp và $\widehat{OBE} = 90^0, \widehat{QBE} = 60^0$ nên:

$\widehat{OQE} = 180^0 - \widehat{OBE} = 90^0$; $\widehat{OEQ} = \widehat{OBQ} = \widehat{OBE} - \widehat{QBE} = 30^0$

$\Rightarrow \Delta OQE$ vuông tại Q và $\widehat{OEQ} = 30^0$.

$\Rightarrow \dfrac{OQ}{OE} = \sin\widehat{OEQ} = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow EF = 2PQ$.

3. Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\dfrac{EF}{PQ} = 2$ nên

$\dfrac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow S_{OPQ} = \dfrac{S_{OEF}}{4} = \dfrac{OM.EF}{8} = \dfrac{R.EF}{8}$ (5).

Kẻ qua O một đường thẳng vuông góc với OA, cắt AC, AB theo thứ tự tại H, K. Ta có:

$\widehat{BKO} = \widehat{BOI} = 60^0$ (Vì cùng phụ với $\widehat{BAO}$)

$HC = KB = OB.\cot\widehat{BKO} = OB.\cot 60^0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

$EF = FM + EM = FC + EB = (HF - HC) + (KE - KB) = (HF + KE) - (HC + KB)$

$= (HF + KE) - 2HC \geq 2\sqrt{HF.KE} - \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ (6)

Mặt khác , $\widehat{FHO} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{EKO} = \widehat{AOB} = 60^0$ nên dễ chứng minh được

$\Delta HFO \sim \Delta KOE$ (vì cùng đồng dạng với tam giác OFE)

$\Rightarrow \dfrac{HF}{OK} = \dfrac{HO}{KE} \Leftrightarrow HF.KE = OK.OH = OK^2 = \left(\dfrac{R}{\sin 60^0}\right) = \left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra : $S_{OPQ}=\frac{R.EF}{8}\ge\frac{R\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}-\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)}{8}=\frac{R^2}{4\sqrt{3}}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $KE=HF=OH=OK\Leftrightarrow FM=EM\Leftrightarrow \overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MB}\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

Vậy để tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất thì M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{R^2}{4\sqrt{3}}$.

Cách khác: Vì $\Delta OQP\sim\Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\frac{EF}{PQ}=2$ nên

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OEF}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow S_{OPQ}=\frac{S_{OEF}}{4}=\frac{1}{8}\left(S_{ABOC}-S_{AEF}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}OA.BC-S_{AEF}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-S_{AEF}\right)$$

Sử dụng công thức : Hê-Rông. Tính diện tích S của tam giác có độ dài ba cạnh a, b, c.

$$\Rightarrow S^2=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{16}$$

$$\le\frac{(a+b+c)\left[(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)\right]^3}{16.27}=\left(\frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)^2\Leftrightarrow S\le\frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}$$

$$S_{OPQ}=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-S_{AEF}\right)\ge\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{(AE+EF+FA)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AE+(EM+MF)+AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AE+(EB+FC)+AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[(AE+EB)+(AF+FC)\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AB+AC\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{(2AB)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left(2.2R.\sin\widehat{AOB}\right)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$

Câu 5. Ta có $x+y+1=z\Leftrightarrow z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1)$

$$x+yz=x+y(x+y+1)=x+xy+y^2+y=(x+y)(y+1)$$

$$y+xz=y+x(x+y+1)=(x+y)(x+1)$$

$$\Rightarrow P=\frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}.$$

Vì $\begin{cases}(x+y)^2\ge 4xy\\ x>0\\ y>0\end{cases}\Rightarrow P\le\frac{x^3y^3}{4xy(x+1)^3(y+1)^3}=\frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương, ta có:

$$x+1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow (x+1)^3\ge\frac{27x^2}{4}\Leftrightarrow 0<\frac{x^2}{(x+1)^3}\le\frac{4}{27}.$$

Tương tự: $0<\dfrac{y^2}{(y+1)^3}\le\dfrac{4}{27}$.

$$P=\frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}\le\frac{1}{4}.\frac{4}{27}.\frac{4}{27}=\frac{4}{729}.\text{Dấu “ = ” xảy ra}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=1\\ z=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$$

Vậy MaxP=$\dfrac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$.

Cách khác :

$$\frac{1}{P}=\frac{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}{x^3y^3}=\frac{x+yz}{y}.\frac{y+xz}{x}.\frac{(z+xy)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{y}{x}+z\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

$$\frac{1}{P}=\left(1+\frac{zy}{x}+\frac{zx}{y}+z^2\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2=\left[1+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)z+z^2\right]\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

Vì $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\ge 2;\quad \dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2};\quad x+y=z-1$ nên:

$$\frac{1}{P}\ge(1+2z+z^2)\left(\frac{4z}{(x+y)^2}+1\right)^2=(1+z)^2\left(\frac{4z}{(z-1)^2}+1\right)^2=\left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2}+z+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{P}\ge\left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2}+z+1\right)^2=\left[6+\frac{12}{z-1}+\frac{8}{(z-1)^2}+(z-1)\right]^2$$

Đặt $t=z-1$,

$$\Rightarrow\frac{1}{P}\ge\left(6+\frac{12}{t}+\frac{8}{t^2}+t\right)^2=\left[6+\left(\frac{12}{t}+\frac{3t}{4}\right)+\left(\frac{8}{t^2}+\frac{t}{8}+\frac{t}{8}\right)\right]^2$$

$$\ge\left(6+2\sqrt{\frac{12}{t}.\frac{3t}{4}}+3\sqrt[3]{\frac{8}{t^2}.\frac{t}{8}.\frac{t}{8}}\right)^2=\frac{729}{4}\Leftrightarrow P\le\frac{4}{729}$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow t=4, x=y\Leftrightarrow x=y=2, z=5$.

Vậy MaxP $=\dfrac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$.

Đề số 7

Câu 1.

1. a) Điều kiện xác định: $1<x\ne 10$

Đặt $a=\sqrt{x-1};0<a\ne 3$

Khi đó

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{(3-a)(3+a)}\right):\left(\frac{3a+1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{a(3-a)+a^2+9}{(3-a)(3+a)}\right):\left(\frac{3a+1}{a(a-3)}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{3a+9}{(3-a)(3+a)}:\frac{3a+1-a+3}{a(a-3)}=\frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)}:\frac{2a+4}{a(a-3)}$$

$$=\frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)}.\frac{a(a-3)}{2a+4}=\frac{-3a}{2a+4}=\frac{-3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}+4}$$

b) Ta có:

$$x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{5}+1\right)\left|1-\sqrt{2}\right|+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$=\sqrt{2}+1-\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|-\left|1-\sqrt{2}\right|+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2.$$

Vậy $P=\dfrac{-3\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2-1}+4}=-\dfrac{1}{2}$.

2. Ta có

$$P=2x^4+x^3(2y-1)+y^3(2x-1)+2y^4$$

$$=2x^4+2x^3y-x^3+2xy^3-y^3+2y^4$$

$$=x^3(2x+2y)+y^3(2x+2y)-\left(x^3+y^3\right)$$

$$=(2x+2y)\left(x^3+y^3\right)-\left(x^3+y^3\right)$$

$$=(2x+2y-1)\left(x^3+y^3\right)=x^3+y^3$$

Do $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=x^2-xy+y^2=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow P\geq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

Mà

$$x+y=1\Rightarrow x^2+y^2+2xy=1\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)-(x-y)^2=1$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\geq 1\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)\geq\frac{1}{2}\Rightarrow P\geq\frac{1}{4}$$

Dấu "$=$" xẩy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

1. Điều kiện: $x \ge \dfrac{3}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+5} + \sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow 4x + x + 2 + 2\sqrt{4x(x+2)} = 3x + 5 + 2x - 3 + 2\sqrt{(3x+5)(2x-3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x(x+2)} = \sqrt{(3x+5)(2x-3)} \Leftrightarrow 4x(x+2) = (3x+5)(2x-3)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 5 & (n) \\ x = \dfrac{-3}{2} & (l) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 5$.

2. Ta có $\begin{cases} xy - 2x + y = 6 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-2) + y - 2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2) = 4 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases}$ $(*)$

Đặt $a = x+1; b = y-2$ ta có hệ phương trình.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 4 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 4 \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 4 \\ (a+b)^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b = 4 \\ a+b = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a.b = 4 \\ a+b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a.b = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 = 2 \\ y-2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = -2 \\ y-2 = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Nghiệm của hệ phương trình $S = \{(1;4);(-3;0)\}$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 2x + m - 1$ hay

$x^2 - 2x - m + 1 = 0$ (1)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (-m+1) > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Do A, B thuộc (P) nên $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$. Theo đề bài ta có

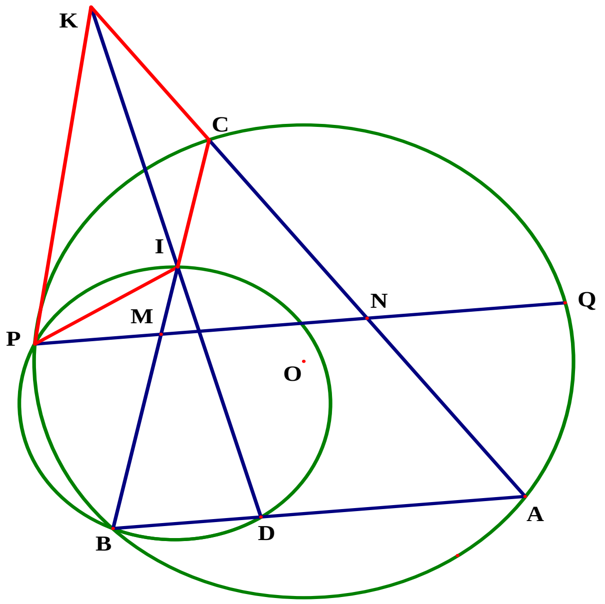
$y_1.y_2 - x_1.x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1.x_2)^2 - x_1.x_2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1.x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = -3 \end{array}\right.$

Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = -m + 1 \end{cases}$

Nếu $x_1.x_2 = 4$ thì $-m + 1 = 4 \Rightarrow m = -3$ (loại).

Nếu $x_1.x_2 = -3$ thì $-m + 1 = -3 \Rightarrow m = 4$ (nhận). Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.



a) Tứ giác $BDIP$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PIK}=180^0-\widehat{PID}=\widehat{PBA}$

Mà tứ giác $CPBA$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PCK}=180^0-\widehat{PCA}=\widehat{PBA}$ $\Rightarrow \widehat{PIK}=\widehat{PCK}$. Suy ra tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Tứ giác $CIPK$ nội tiếp và tứ giác $PBDI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PKI}=\widehat{PCI}$ và

$\widehat{PDI}=\widehat{PBI}\Rightarrow \Delta PKD\sim\Delta PCB\ \ (g-g)\Rightarrow \dfrac{PK}{PC}=\dfrac{PD}{PB}\Rightarrow \dfrac{PK}{PD}=\dfrac{PC}{PB}\ \ (1)$

Mà tứ giác $CPBQ$ nội tiếp suy ra $\widehat{QPB}=\widehat{BCQ}$ hay $\widehat{MPB}=\widehat{MCQ}$ mặt khác $\widehat{PMB}=\widehat{CMQ}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MPB\sim\Delta MCQ\ \ (g-g)\Rightarrow \dfrac{PB}{QC}=\dfrac{MP}{MC}\ \ (2)$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \Delta MCP\sim\Delta MQB\ \ (g-g)\Rightarrow \dfrac{PC}{QB}=\dfrac{MP}{MB}\ \ (3)$

Từ (2) và (3) kết hợp $MB=MC\Rightarrow \dfrac{PB}{QC}=\dfrac{PC}{QB}\Rightarrow \dfrac{PC}{PB}=\dfrac{QB}{QC}\ \ (4)$

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \dfrac{PK}{PD}=\dfrac{QB}{QC}\Rightarrow\ PK.QC=QB.PD$

c) Do tứ giác $BDGI$ và tứ giác $CPBA$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PGI}=\widehat{PBI}$ và

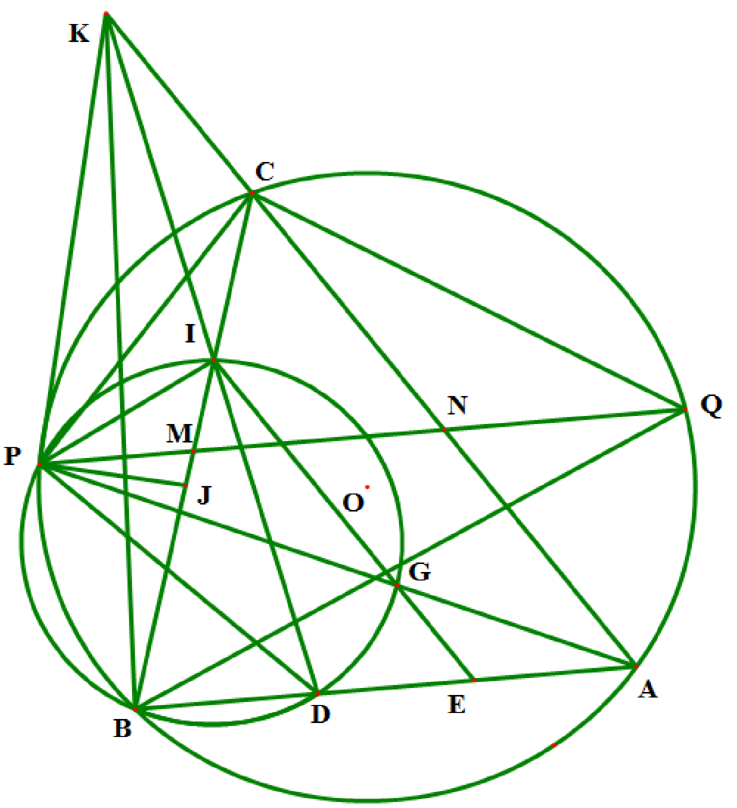
$\widehat{PBC}=\widehat{PAC}\Rightarrow \widehat{PGI}=\widehat{PAC}\Rightarrow IG//CA\Rightarrow \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{KD}{KI}\ \ (5)$

Trên BC lấy J sao cho $\widehat{KPI}=\widehat{CPJ}$. Tứ giác $CIPK$ nội tiếp, có $\widehat{IPK}=180^0-\widehat{KCI}=\widehat{BCA}$ không đổi.

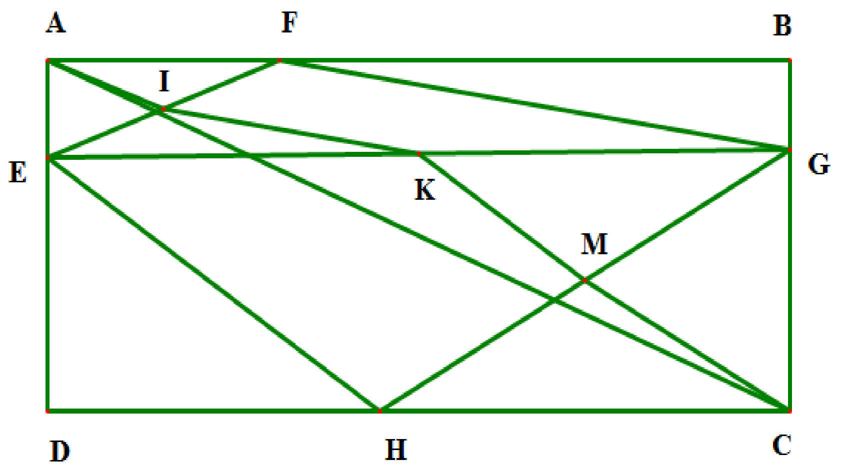
Suy ra J là điểm cố định $\Rightarrow \dfrac{CB}{CJ}$ không đổi (6).

Lại có $\Rightarrow \Delta PKI\sim\Delta PCJ\ \ (g-g)$ và $\Delta PKD\sim\Delta PCB\ \ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KI}{CJ}=\dfrac{PK}{PC}=\dfrac{KD}{CB}\Rightarrow \dfrac{KD}{KI}=\dfrac{CB}{CJ}\ \ (7)$. Từ (5), (6) và (7) suy ra $\dfrac{AD}{AE}$ không đổi.



Câu 4.



Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, GH. ΔAEF vuông tại A và có AI là đường trung tuyến nên $AI = \frac{1}{2}EF$.

Tương tự $MC = \frac{1}{2}GH$. IK là đường trung bình của ΔAFG nên $IK = \frac{1}{2}FG$. Tương tự $KM = \frac{1}{2}EH$

$c = EF + FG + GH + HE = 2(AI + IK + KM + MC)$.

Ta có $AI + IK + KM + MC \geq AC$ (vì đường gấp khúc $AIKMC \geq AC$). Suy ra $c \geq 2AC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Câu 5.

1. Đặt $\sqrt{x}=a,a>0$, $y^2=b,b>0$.

$4y^4+6y^2-1=x$

$\Leftrightarrow 4b^2+6b-1=a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b-4=4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b+9-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a)=13$

Lập bảng

$4b+3-2a$	1	13
$4b+3+2a$	13	1
a	3	-3
b	1	1
	Nhận	Loại
x	9	
y	1	

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)$ là $(9;1)$.

2. Ta có n chẵn $\Rightarrow n=2k,k\in Z$. Suy ra

$$n^3+20n+96=(2k)^3+40k+96=8\left(k^3+5k\right)+96=8\left[\left(k^3-k\right)+6k\right]+96=8\left(k^3-k\right)+48k+48.2$$

Do $k-1;k;k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$$\Rightarrow k^3-k=(k-1).k.(k+1)\vdots 6\Rightarrow 8\left(k^3-k\right)\vdots 48,\forall k\in Z.$$

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

Đề số 8

Câu 1.

Ta có: $3x+2\sqrt{3x}+4=\left(\sqrt{3x}+1\right)^2+3>0;\ \forall x\geq 0$

nên điều kiện để A có nghĩa là $\left(\sqrt{3x}\right)^3-8=\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)\neq 0;\ \forall x\geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{3x}-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\neq \frac{4}{3}$$

$$A=\frac{6x+4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3-8}-\frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}$$

$$A=\frac{6x+4-\left(\sqrt{3x}-2\right)\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}$$

$$A=\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt{3x}-2}\text{ Với } 0\le x\ne\frac{4}{3}$$

+ Với x nguyên dương, để biểu thức A *nhận giá trị nguyên.*

thì $\frac{1}{\sqrt{3x}-2}$ nguyên. Khi đó:

$$\sqrt{3x}-2=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x}=3\\ \sqrt{3x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=9\\ 3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vì x nguyên dương nên $x=3$ khi đó $A=1$.

Vậy $x=3$

Câu 2.

a) PT (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'=m^2-5m+4>0$ (*) $\left(hay\, m<1\vee m>4\right)$

Với ĐK (*) PT có hai nghiệm x_1,x_2.

Ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\ x_1.x_2=3m-3\end{cases}$

$$M=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+5x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2+3x_1.x_2=4(m-1)^2+3(3m-3)$$

$$\Rightarrow M=4m^2+m-5=\left(2m+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\ge-\frac{81}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m=-\frac{1}{8}$ (thỏa mãn ĐK (*)).

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=-\frac{1}{8}$.

b) ĐK: $\Delta'=m^2-5m+4>0$ (*)

Đặt $x-1=t\Rightarrow x=t+1$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$(t+1)^2-2(m-1)(t+1)+3m-3=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+2(2-m)t+m=0\qquad(2)$$

PT (1) có hai nghiệm phân biệt x lớn hơn 1 khi PT (2) có hai nghiệm phân biệt t lớn hơn 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-5m+4>0\\ m>0\\ 2m-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)(m-4)>0\\ m>0\\ 2m-4>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \vee m>4 \\ m>0 \\ m>2 \end{cases} \Leftrightarrow m>4 \text{ thỏa mãn ĐK (*).}$$

Vậy $m>4$.

Câu 3.

a) Với x = 0, phương trình (1) có dạng: 0 = 6 (vô lý).

Vậy x = 0 không là nghiệm của PT (1).

$x \neq 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\dfrac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$

Đặt $2x+\dfrac{3}{x}=t$, PT (1) trở thành $\dfrac{2}{t-5}+\dfrac{13}{t+1}=6$

$$\Leftrightarrow 6t^2-39t+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$$

+) Với $t=1$ ta có PT $2x+\dfrac{3}{x}=1 \Leftrightarrow 2x^2-x+3=0$

Có $\Delta<0$ nên PT vô nghiệm.

+) Với $t=\dfrac{11}{2}$ ta có PT $2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{11}{2} \Leftrightarrow 4x^2-11x+6=0$

PT có 2 nghiệm $x=2; x=\dfrac{3}{4}$ thỏa mãn bài toán.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 & (1) \\ 8y^2+x^2=12 & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào PT(1) ta được $x^3+x^2y+2xy^2+8y^3=0$

Nếu $y=0$ thì từ (1) suy ra $x=0$ không thỏa mãn PT (2).

Xét $y \neq 0$ PT $(3) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2.\dfrac{x}{y}+8=0$

Đặt $\dfrac{x}{y}=t$ ta được $t^3+t^2+2t+8=0$

$$\Leftrightarrow (t+2)\left(t^2-t+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+2=0 \\ t^2-t+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=-2$$

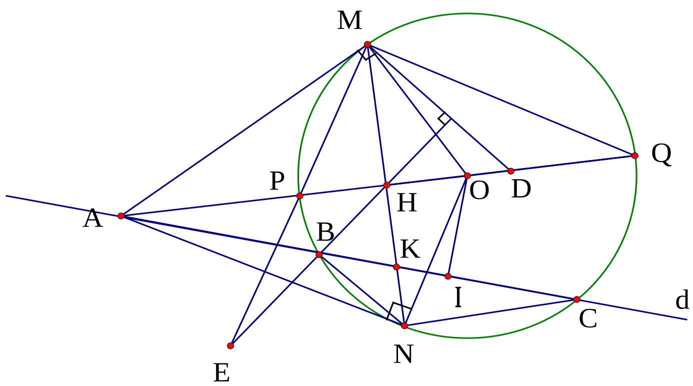
Với $t=-2 \Rightarrow x=-2y$, thay vào (2) được $y^2=1 \Leftrightarrow y=1 \vee y=-1$

Với $y=1 \Rightarrow x=-2$

$y=-1 \Rightarrow x=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(-2;1);(2;-1)$.

Câu 4.



a) *Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.*

I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA}=90^0$. Ta có $\widehat{AMO}=90^0$ (do AM là tiếp tuyến (O))

$\widehat{ANO}=90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O))

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA

b) *Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.*

Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác $\widehat{MON}$ mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$.

+) $\Delta ABN \sim \Delta ANC$ (vì $\widehat{ANB}=\widehat{ACN}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB}$ và $\widehat{CAN}$ chung) =>

$\frac{AB}{AN}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC=AN^2$ (1)

+) ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có AH.AO = AN^2 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AB.AC = AH.AO (3)

+) $\Delta AHK \sim \Delta AIO$ (vì $\widehat{AHK}=\widehat{AIO}=90^0$ và $\widehat{OAI}$ chung)

$\Rightarrow \frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK=AH.AO.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: AI.AK = AB.AC $\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$

Mà A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB suy ra K cố định.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Ta có $\widehat{PMQ}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔMHE và ΔQDM có $\widehat{MEH}=\widehat{DMQ}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$), $\widehat{EMH}=\widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$)

Suy ra: $\Delta MHE \sim \Delta QDM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ}=\dfrac{MH}{DQ}$ (*)

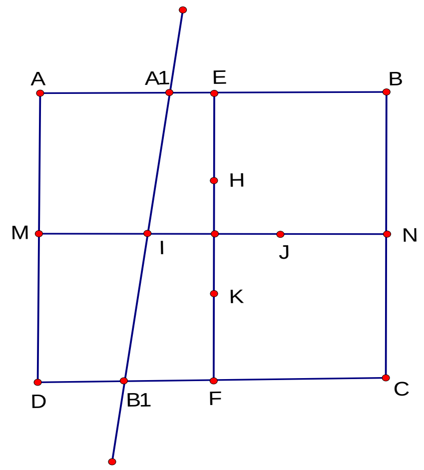
$\Delta PMH \sim \Delta MQH$ (vì $\widehat{MHP}=\widehat{QHM}=90^0$, $\widehat{PMH}=\widehat{MQH}$)

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{MH}{HQ}=\dfrac{MH}{2DQ}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{1}{2}\dfrac{ME}{MQ} \Rightarrow ME=2\,MP$

$\Rightarrow$ P là trung điểm ME.

Câu 5.



Gọi MN; EF là đường nối trung điểm hai cạnh đối của hình vuông (hình vẽ)

Giả sử đường thẳng d1 cắt cạnh AB tại A_1 cắt MN tại I và cắt cạnh CD tại B_1. Ta có các tứ giác AA_1B_1D và BCB_1A_1 là hình thang và có MI, NI lần lượt là các đường trung bình của hai hình thang đó.

Khi đó

$$\frac{S_{AA_1B_1D}}{S_{A_1BCB_1}}=\frac{\frac{1}{2}AD\left(AA_1+DB_1\right)}{\frac{1}{2}BC\left(A_1B+B_1C\right)}=\frac{2IM}{2IN}=\frac{IM}{IN}=\frac{1}{2}$$

Suy ra $\dfrac{MI}{MN}=\dfrac{1}{3}$ nên $MI=\dfrac{1}{3}MN$ vậy điểm I cố định.

Lập luận tương tự ta tìm được các điểm H; J; K cố định.

(I, J, H, K chia các đoạn thẳng cố định MN, NM, EF, FE theo tỉ số 1:2)

Có 4 điểm cố định mà có 2019 đường thẳng đi qua nên theo nguyên lý Đirichle ít nhất phải có 505 đường thẳng đồng qui.

Đề số 9

Câu 1.

1) $x^3-5x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1=0\ (*) \\ x=1 \end{array}\right..$$

Phương trình (*) có $\Delta'=3>0$ nên có 2 nghiệm phân biệt.

Không mất tổng quát coi $x_3=1$ thì $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của (*).

Ta có $S=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}+\dfrac{1}{x_3^2}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$.

Thay số: $x_1^2+x_2^2=14$.

Thay số: $S=15$.

2) $$A=\left(1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right):\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}+\frac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right)$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}-2)^2+x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{9-x+x-4\sqrt{x}+4+x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}+3}:\frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}+3}:\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}+3}:\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}+3}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}-2}.$$

Câu 2.

1. Ta có:

$$\begin{cases}(y-2x)(1-y-x)=2x^2-x & (1)\\ x(y-1)+\sqrt[3]{x^2-y}=2 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow(y-2x)(1-y)-x(y-2x)-x(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow(y-2x)(1-y)-x(y-1)=0\Leftrightarrow(1-y)(y-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=x\end{array}\right.$.

Với $y=1$, thay vào (2) được: $\sqrt[3]{x^2-1}=2\Leftrightarrow x^2-1=8\Leftrightarrow x=\pm3$.

Với $y=x$, thay vào (2) được: $x(x-1)+\sqrt[3]{x^2-x}=2\Leftrightarrow x^2-x+\sqrt[3]{x^2-x}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2-x}$, phương trình trở thành:

$t^3+t-2=0\Leftrightarrow(t-1)(t^2+t+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t^2+t+2=0\quad(3)\end{array}\right.$.

Phương trình (3) có $\Delta=-7<0$ nên vô nghiệm.

Do đó $t=1\Rightarrow x^2-x=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

Với $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Với $x=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$(x;y)\in\left\{(-3;1),(3;1),\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2};\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2};\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)\right\}$

2. Phương trình xác định khi $-\dfrac{3}{2}\le x\le12$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\left(x^2-2x\sqrt{2x+3}+2x+3\right)+\left(9-6\sqrt{12-x}+12-x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x+3}\right)^2+\left(3-\sqrt{12-x}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{2x+3}=0 & (1)\\3-\sqrt{12-x}=0 & (2)\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow x=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x=-1\vee x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{12-x}=3\Leftrightarrow12-x=9\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $\begin{cases}x-\sqrt{2x+3}=0\\3-\sqrt{12-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ (tmđk).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Câu 3.

1. Ta có:

$$x^2y^2 - x^2 + 5y^2 - 22x - 121 = 0 \Leftrightarrow y^2(x^2+5) = x^2 + 22x + 121$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^2+5) = (x+11)^2.$$

Vì $y^2;(x+11)^2$ là các số chính phương nên x^2+5 cũng là số chính phương.

Do đó đặt $x^2+5 = z^2 \Leftrightarrow x^2 - z^2 = -5 \Leftrightarrow (|x|-|z|)(|x|+|z|) = -5$

Ta có $|x|+|z|;|x|-|z|$ là các ước số của -5; $|x|+|z|$ không âm nên $|x|-|z|$ là số âm.

Suy ra $\begin{cases}|x|+|z|=5\\|x|-|z|=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}|x|+|z|=1\\|x|-|z|=-5\end{cases}$.

TH1: $\begin{cases}|x|+|z|=5\\|x|-|z|=-1\end{cases} \Rightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $x = 2 \Rightarrow y^2 \times 9 = 13^2 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{169}{9}$ (loại).

Với $x = -2 \Rightarrow y^2 \times 9 = 9^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

TH2: $\begin{cases}|x|+|z|=1\\|x|-|z|=-5\end{cases} \Rightarrow |x| = -2$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(-2;3);(-2;-3)\}$.

2. Ta có: $P = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} + \dfrac{1}{3xy} + \dfrac{1}{3yz} + \dfrac{1}{3zx} + \dfrac{5}{12}\left(\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}\right)$

$$\geq \frac{16}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)} + \frac{5}{12}\cdot\frac{9}{xy+yz+zx}$$

$$= \frac{16}{(x+y+z)^2 + xy+yz+zx} + \frac{15}{4(xy+yz+zx)}.$$

Học sinh chứng minh với $\forall x,y,z: (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$.

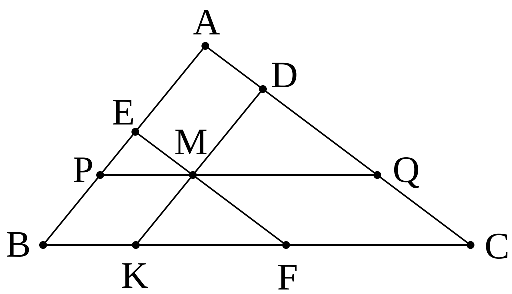
Suy ra $xy+yz+zx \leq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$.

$$\Rightarrow P \geq \frac{16}{(x+y+z)^2 + \frac{(x+y+z)^2}{3}} + \frac{15}{4\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{16}{2019^2 + \frac{2019^2}{3}} + \frac{15}{4\cdot\frac{2019^2}{3}}$$

$\Rightarrow P \geq \dfrac{31}{5435148}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{2019}{3} = 673$.

Vậy $P_{min} = \dfrac{31}{5435148}$ khi $x = y = z = 673$.

Câu 4.



1. Đặt $S_{ABC} = a^2$.

Tứ giác MQCF có MQ//FC; MF//QC (giả thiết) $\Rightarrow$ MQCF là hình bình hành $\Rightarrow MQ = FC$. Chứng minh tương tự ta có $PM = BK$.

Ta có ΔEPM đồng dạng với ΔABC nên $\dfrac{S_{EPM}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{PM}{BC}\right)^2$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = \left(\dfrac{PM}{BC}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{PM}{BC} = \dfrac{x}{a}$.

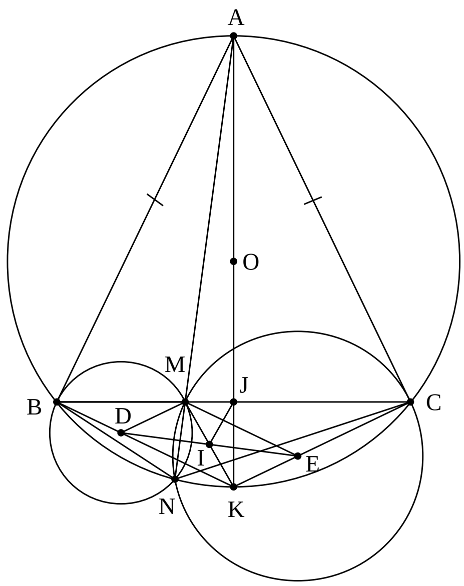
Chứng minh tương tự, ta có: + ΔDMQ đồng dạng với ΔABC nên $\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{y}{a}$;

+ ΔMKF đồng dạng với ΔABC nên $\dfrac{KF}{BC} = \dfrac{z}{a}$.

$\Rightarrow \dfrac{x+y+z}{a} = \dfrac{PM+KF+MQ}{BC} = \dfrac{BK+KF+FC}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1.$

$\Rightarrow x+y+z = a \Rightarrow S_{ABC} = (x+y+z)^2$.

2.



a) Trong (E) có $\widehat{MCA}=\widehat{MNC}$ (1) (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$).

Trong (D) có $\widehat{MBA}=\widehat{BNM}$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$).

$\Rightarrow \widehat{MBA}+\widehat{MCA}=\widehat{BNM}+\widehat{MNC}=\widehat{BNC}.$

Do đó $\widehat{BNC}+\widehat{BAC}=\widehat{MBA}+\widehat{MCA}+\widehat{BAC}$

$=180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABNC$ nội tiếp (O).

$\Rightarrow$ N thuộc đường tròn (O) do ΔABC nội tiếp đường tròn (O).

Tứ giác $ABNC$ nội tiếp (O) nên $\widehat{ANC}=\widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Mà $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ (do ΔABC cân tại A)

nên $\widehat{ANC}=\widehat{ACB}$ hay $\widehat{ANC}=\widehat{ACM}$ (2).

Từ $(1);(2)$ suy ra $\widehat{MNC}=\widehat{ANC}$

$\Rightarrow$ Ba điểm A,M,N thẳng hàng.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn tâm O. Gọi J là giao điểm của AK và BC.

$\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), $\widehat{ABD}=90^\circ$ (vì đường tròn tâm D tiếp xúc với AB tại B) $\Rightarrow B,D,K$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự: C,E,K thẳng hàng.

Ta có: $AB=AC;OB=OC\Rightarrow A,O$ thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow AO\perp BC\Rightarrow \overset{\frown}{BK}=\overset{\frown}{CK}\Rightarrow BK=CK\Rightarrow \Delta KBC$ cân tại K $\Rightarrow \widehat{KBC}=\widehat{KCB}$

ΔDBM cân tại D (vì $DB=DM$) $\Rightarrow \widehat{DBM}=\widehat{DMB}$

ΔEMC cân tại E (vì $EC=EM$) $\Rightarrow \widehat{ECM}=\widehat{EMC}$

$\Rightarrow \widehat{KBC}=\widehat{EMC};\ \widehat{KCB}=\widehat{DMB}\Rightarrow KB//EM;\ KC//DM$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $DMEK$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của DE nên I là trung điểm của MK.

ΔJMK vuông tại J có JI là đường trung tuyến $\Rightarrow JI=KI$.

JK cố định nên I thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của đoạn JK.

Câu 5.

1. Không mất tổng quát giả sử $p\le q\le r$.

Với $p=2$: $2qr=q+r+162\Leftrightarrow 4qr-2q-2r=324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1)-(2r-1)=325\Leftrightarrow (2q-1)(2r-1)=325=5^2\cdot 13.$

$3\le 2q-1\le 2r-1\Rightarrow 9\le (2q-1)^2\le (2r-1)(2q-1)\Leftrightarrow 9\le (2q-1)^2\le 325\Leftrightarrow 3\le 2q-1\le 18.$

Do $2q-1$ là ước của $5^2\cdot 13$ nên $2q-1\in\{5;13\}$.

Nếu $2q-1=5 \Leftrightarrow q=3 \Rightarrow r=33$ (loại).

Nếu $2q-1=13 \Leftrightarrow q=7 \Rightarrow r=13$ (thỏa mãn).

$pqr=p+q+r+160 \Leftrightarrow p(qr-1)-q-r=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+qr-1-q-r=160 \Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+q(r-1)-(r-1)-2=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)=162.$

Nếu p lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)\,\vdots\,4$ mà 162 không chia hết cho $4 \Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

2. Ta xếp các đoạn thẳng theo thứ tự có độ dài tăng dần $a_1 \le a_2 \le .... \le a_8$.

Nếu tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k;a_{k+1};a_{k+2}$ thoả mãn $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$ thì ba đoạn thẳng này có thể ghép thành tam giác.

Giả sử ngược lại

$$a_1+a_2 \le a_3$$
$$a_2+a_3 \le a_4$$
$$a_3+a_4 \le a_5$$
$$a_4+a_5 \le a_6$$
$$a_5+a_6 \le a_7$$
$$a_6+a_7 \le a_8$$

Khi đó, theo giả thiết:

$a_1>10; a_2>10 \Rightarrow a_3>20 \Rightarrow a_4>30 \Rightarrow a_5>50 \Rightarrow a_6>80 \Rightarrow a_7>130 \Rightarrow a_8>210$

, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k;a_{k+1};a_{k+2}$ mà $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$.

Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác.

Đề số 10

Câu 1.

1. Ta có $7-2\sqrt{10}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$; $\quad 9+4\sqrt{2}=\left(1+2\sqrt{2}\right)^2$

và $89-28\sqrt{10}=\left(7-2\sqrt{10}\right)^2$

Do đó $P=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}-\dfrac{1-\sqrt{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}}{7-\sqrt{\left(7-2\sqrt{10}\right)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\dfrac{1-\left(1+2\sqrt{2}\right)}{7-\left(7-2\sqrt{10}\right)}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$ Vậy $P=\sqrt{5}.$

2. Ta có:

$$\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}\Leftrightarrow\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}=\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{y}\Leftrightarrow xyz=\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)\Leftrightarrow xyz=1.$$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}=\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}\sqrt{xyz}+1}=\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xyz}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}$$

Và $\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1\right)}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2yz}+\sqrt{xyz}+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+1+\sqrt{xy}}$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+1+\sqrt{xy}}=1$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=1$ khi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}$.

Câu 2.

1. Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

+) Nhận xét $x^2+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+4}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó từ (1) suy ra $x>0$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x+1+\frac{2}{x}=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$

$$\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4}$$

Đặt $a=x+\frac{2}{x}$ (điều kiện $a\geq 2\sqrt{2}$)

Khi đó ta có phương trình $\Leftrightarrow 15(a+1)=4\sqrt{5}a\sqrt{a^2-4}\Leftrightarrow 45(a+1)^2=16a^2\left(a^2-4\right)$

$\Leftrightarrow 16a^4-109a^2-90a-45=0\Leftrightarrow(a-3)\left(16a^3+48a^2+35a+15\right)=0$

$\Leftrightarrow a=3$ (vì $16a^3+48a^2+35a+15>0\quad\forall a\geq 2\sqrt{2}$)

+) Với $a=3$ ta có $x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn đk).

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=1;\ x=2$.

2. Điều kiện: $\begin{cases}xy\neq 0\\x+y\geq 1\\x\geq 0\end{cases}(*)$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2-1}{xy}+4-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2-1}{xy}-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{xy}-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0 \Leftrightarrow (x+y-1)\frac{(x^2+y^2+x+y)}{xy(x+y)}=0$$

$\Leftrightarrow x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ (vì với x, y thỏa mãn đk (*) ta có $x^2+y^2+x+y>0$)

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ (2) của hệ pt ta thu được pt

$$4x^2+5(1-x)-13+6\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 4x^2-5x-8+6\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x-6\sqrt{x}+9 \Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=\sqrt{x}-3\\2x-1=3-\sqrt{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=\sqrt{x}\\4-2x=\sqrt{x}\end{array}\right.$$

+) $2x+2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x+\frac{7}{4}+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2=0$ **(**phương trình vô nghiệm vì $x\ge 0$**).**

+) $4-2x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases}4-2x\ge 0\\(4-2x)^2=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\4x^2-17x+16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{17+\sqrt{33}}{8}\\x=\frac{17-\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{17-\sqrt{33}}{8}$.

Với $x=\frac{17-\sqrt{33}}{8} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}-9}{8}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\frac{17-\sqrt{33}}{8};\frac{\sqrt{33}-9}{8}\right)$.

Câu 3.

1. Từ giả thiết ta có $P(0)=\frac{1}{2}(Q(0)+Q(1))=0$ (1) và $P(1)=\frac{1}{2}(Q(1)+Q(0))$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $P(1)=0$.

Giả sử $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, trong đó $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm.

Ta có $P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n=0$ vì $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm suy ra $a_0=a_1=a_2=...=a_n=0$ do đó $P(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $P(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow P(2)=0, P(3)=0$ do đó $3P(3)-P(2)=0 \Rightarrow P(3P(3)-P(2))=0.$

2. Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2(x+y+xy+1) \Leftrightarrow (x+y)^2-y^2(x+y-2)=2(x+y)+3$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-2)-y^2(x+y-2)=3 \Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2)=3$

Vì $x, y\in\mathbb{Z}$ nên $x+y-2;\ x+y-y^2$ là các ước của 3

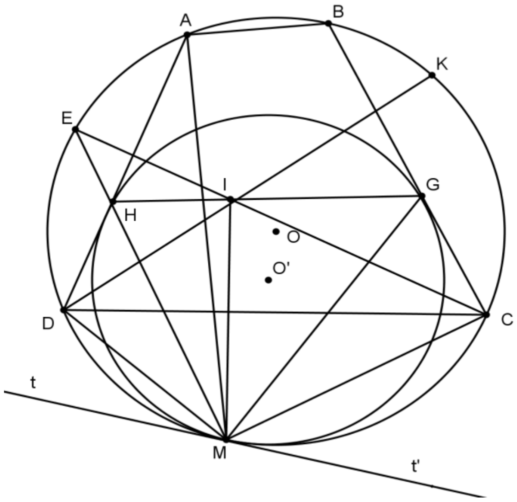
+) $\begin{cases}x+y-2=1\\x+y-y^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=0\\x+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.   +) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;\, y)$ là $(3;0);\ (3;-2);\ (-1;2);\ (7;-2);\ (3;2);\ (-1;0)$.

Câu 4.



1. Xét ΔHAM ta có $\widehat{DHM}=\widehat{DAM}+\widehat{AMH}$ (1).

Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{DAM}=\widehat{DMt}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DHM}=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}$.

Vì Mt và DH là các tiếp tuyến của (O') nên $\widehat{DHM}=\widehat{HMt}$ (3) .

và $\widehat{HMt}=\widehat{HMD}+\widehat{DMt}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\widehat{AMH}=\widehat{HMD}$ suy ra MH là phân giác của góc $\widehat{AMD}$

Chứng minh tương tự ta có MG là phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

2. Xét (O') có $\widehat{HGM}=\widehat{HMt}\left(=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{HM}\right)$.

Xét (O) có $\widehat{ECM}=\widehat{EMt}\left(=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{EM}\right)$.

Suy ra $\widehat{HGM}=\widehat{ECM}$ hay $\widehat{IGM}=\widehat{ICM}\Rightarrow$ tứ giác $IMCG$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{EHI}=\widehat{EHA}+\widehat{AHG}$ (4).

và $\widehat{EIM}=180^0-\widehat{MIC}=180^0-\widehat{MGC}=\widehat{MGB}=\widehat{MGH}+\widehat{BGH}$ (5).

Lại có $\widehat{AHG}=\widehat{BGH}$ (6) (vì AH và BG đều là tiếp tuyến của (O'))

và $\widehat{EHA}=\widehat{DHM}=\widehat{MGH}$ (7).

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra $\widehat{EIM}=\widehat{MGH}+\widehat{BGH}=\widehat{EHA}+\widehat{AHG}\Rightarrow\widehat{EHI}=\widehat{EIM}$.

3. Ta có CE là tia phân giác của góc ACD $(*)$ (vì EM là tia phân giác trong của góc $\widehat{AMD}$ $\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{EA} = sd\,\overset{\frown}{ED}$)

Ta có $\widehat{EHI} = \widehat{EIM}$ (chứng minh ở câu 4.2); ΔEHI và ΔEIM có $\widehat{HEI} = \widehat{MEI}$ và $\widehat{EHI} = \widehat{EIM}$

$$\Rightarrow \Delta EHI \sim \Delta EIM\,(g-g) \Rightarrow \frac{EI}{EM} = \frac{EH}{EI} \Rightarrow EI^2 = EH.EM \ (8)$$

Lại có $\widehat{EDH} = \widehat{DMH}$ (vì EM là tia phân giác của góc $AMD \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{EA} = sd\,\overset{\frown}{ED}$);

ΔEHD và ΔEDM có $\widehat{HED} = \widehat{MED}$ và $\widehat{EDH} = \widehat{DMH}$ $\Rightarrow \Delta EHD \sim \Delta EDM\,(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{ED}{EM} = \frac{EH}{ED} \Rightarrow ED^2 = EH.EM \ (9)$$

Từ (8), (9) suy ra $EI = ED$ nên tam giác EID cân tại E $\Rightarrow \widehat{EDI} = \widehat{EID}$ (10)

DI cắt (O) tại K, ta có $\widehat{EDI} = \frac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{EA} + sd\,\overset{\frown}{AK})$ (11)

và $\widehat{EID} = \frac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{ED} + sd\,\overset{\frown}{KC})$ (12)

Từ (10), (11), (12) và do $sd\,\overset{\frown}{EA} = sd\,\overset{\frown}{ED}$ suy ra $sd\,\overset{\frown}{AK} = sd\,\overset{\frown}{KC} \Rightarrow DK$ là tia phân giác góc ADC $(**)$.

Từ $(*)$ $(**)$ suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Rõ ràng, HG đi qua I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Câu 5.

1. Áp dụng BĐT $(x+y+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ $x,y,z>0.$

Và $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \ge \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}$ $x,y,z>0.$

Vì $a,b,c>0$ ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$, bất đẳng thức (1) đúng ta cần chứng minh

$$\frac{1}{ac+3bc+2c^2}+\frac{1}{ab+3ac+2a^2}+\frac{1}{bc+3ab+2b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right) \ (2).$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{ac+3bc+2c^2}+\frac{1}{ab+3ac+2a^2}+\frac{1}{bc+3ab+2b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ac}{c+3a+2b} \le \frac{a+b+c}{6}.$$

Ta có $\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \le \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)$

Vậy $\frac{ab}{a+3b+2c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)$ (3)

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{b+3c+2a} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{bc}{b+a}+\dfrac{bc}{c+a}+\dfrac{b}{2}\right)$ (4);

$\dfrac{ac}{c+3a+2b} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{ac}{c+b}+\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{c}{2}\right)$ (5)

Cộng theo vế (3), (4) và (5) ta có

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ac}{c+3a+2b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ac}{c+b}+\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{a+b+c}{6}.$$

Vậy BĐT (2) đúng do đó BĐT (1) đúng.

2. Gọi $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ là các số phân biệt được đánh liên tiếp cho 10 điểm phân biệt thuộc đường tròn (O), $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10} \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Giả sử ngược lại là không tìm được 4 đỉnh nào thoả mãn khẳng định của bài toán. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \le 21 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 \le 21 \\ x_3+x_4+x_5+x_6 \le 21 \\ \text{..............................} \\ x_{10}+x_1+x_2+x_3 \le 21 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $4(x_1+x_2+x_3+...+x_{10}) \le 10.21 = 210$

Mặt khác ta lại có $x_1+x_2+x_3+...+x_{10} = 1+2+3+...+10 = \dfrac{10.11}{2} = 55$

Suy ra: $4.55 < 210 \Leftrightarrow 220 < 210$ (vô lý), do đó điều giả là sai.

Vậy ta luôn tìm được 4 điểm liên tiếp được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.

Đề số 11

Câu 1.

1. Ta có $\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{2b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)$.

Suy ra

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}=\frac{2(a+b)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab}+2b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.$$

$$\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right)}{\sqrt{2b}\left(\sqrt{2b}+\sqrt{a}\right)}-\sqrt{a}$$

$$=\frac{a-\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}-\sqrt{a}=\frac{a-2\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}.$$

Từ đó suy ra $P=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$.

Cách 2: Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{2b}$ ta được

$P=\left(\frac{2x^2+y^2}{x^3-y^3}-\frac{x}{x^2+xy+y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3+y^3}{y^2+xy}-x\right)$ với $x\ge 0;y>0,x\ne y$.

2. Vì ba điểm O,A,B tạo thành một tam giác nên $m^2-4m-4\ne 0$ và $3m-2\ne 0$.

Tọa độ giao điểm A của d và Ox là $A\left(\frac{2-3m}{m^2-4m-4};0\right)\Rightarrow OA=\left|\frac{2-3m}{m^2-4m-4}\right|$.

Tọa độ giao điểm B của d và Oy là $B(0;3m-2)\Rightarrow OB=|3m-2|$.

Do tam giác ABO vuông tại O nên $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{2-3m}{m^2-4m-4}\right||3m-2|=1$

Do đó, $\frac{(3m-2)^2}{|m^2-4m-4|}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9m^2-12m+4=2(m^2-4m-4)\\9m^2-12m+4=-2(m^2-4m-4)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7m^2-4m+12=0\\11m^2-20m-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\frac{2}{11}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 2.

1. $\Delta=(3m-2)^2-4(2m^2-5m-3)=m^2+8m+16=(m+4)^2\ge 0,\forall m$. Do đó, phương trình luôn có nghiệm, các nghiệm là $x_1=2m+1;x_2=m-3$.

Phương trình có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}x_1>0\\x_2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1>0\\m-3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$.

Cách 2: Do $\Delta\ge 0,\forall m$ nên PT luôn có hai nghiệm. Ta có thể giải bài toán ngược: "Tìm m để PT có hai nghiệm không dương" ĐK này tương đương với $\begin{cases}S\le 0\\P\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow m\le-\frac{1}{2}$.

Cách 3: Do $\Delta\ge 0,\forall m$ nên PT luôn có hai nghiệm. Yêu cầu bài toán tương đương

với PT có nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}x_2\ge x_1>0\\x_2>x_1\ge 0\\x_2>0\ge x_1\end{array}\right.$

2. $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\x^3-3x+2=2y^3-y^2\ (*)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} 2x-y-1\ge 0 \\ x+2y\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Nhận xét:

$\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$. Không thỏa mãn điều kiện.

$\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Không thỏa mãn phương trình $(*)$.

Do đó, ta có $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x}+\sqrt{3y+1}-\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{x-y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y} \end{array}\right.$$

Với $y=x-1$ thay vào phương trình $(*)$ ta có

$$(x-1)^2(x+2)=2(x-1)^3-(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

$x=1 \Rightarrow y=0; x=5 \Rightarrow y=4$

Với $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y} \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được $\sqrt{x}=\sqrt{3y+1} \Leftrightarrow y=\dfrac{x-1}{3}$

Thay vào $(*)$ ta được $(x-1)^2(x+2)=\dfrac{2}{27}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59)=0 \Leftrightarrow x=1$ do $(x\ge 0)$.

Vậy hệ có các nghiệm $(x;y)=(1;0);(5;4)$.

Cách 2: Bình phương hai vế PT thứ nhất

PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{(2x-y-1)(3y+1)}=\sqrt{x(x+2y)}$

$$\Leftrightarrow x^2-4xy+3y^2-2x+4y+1=0 \Leftrightarrow (x-y-1)(x-3y-1)=0.$$

Câu 3.

1. Đặt $a=x.c, b=y.c, (x,y>0)$. Từ điều kiện suy ra $(x+1)(y+1)=4$.

Khi đó, $P=\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3}+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}+\dfrac{xy}{x+y}$

$=\dfrac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}+\dfrac{xy}{x+y}$

Do $(x+1)(y+1)=4 \Rightarrow xy=3-(x+y)$.

Đặt $t=x+y, (0<t<3) \Rightarrow xy=3-t$ và

$3-t=xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{t^2}{4} \Leftrightarrow t^2+4t-12\ge 0 \Rightarrow t\ge 2$ (do $t>0$)

Khi đó, $P=\dfrac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9}+\dfrac{3-t}{t}=\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{t}-\dfrac{3}{2}$ với $2\le t<3$.

Ta có $P\ge 2\sqrt{\dfrac{t}{2}.\dfrac{3}{t}}-\dfrac{3}{2}=\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}$.

Do đó, $P_{min}=\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}$ đạt được khi $t=\sqrt{6}$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=\sqrt{6}\\ xy=3-\sqrt{6}\end{cases}$.

Ta lại có $P=\dfrac{t^2-3t+6}{2t}=\dfrac{t^2-5t+6+2t}{2t}=\dfrac{(t-2)(t-3)}{2t}+1\le 1$ (do $2\le t<3$).

Do đó, $P_{max}=1$ đạt được khi $t=2$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

2. Đặt $p^3-4p+9=t^2 (t\in N)$

Biến đổi thành $p(p^2-4)=(t-3)(t+3)$ (1) $\Rightarrow p\mid(t-3)\vee p\mid(t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p\mid t-3$

Đặt $t-3=pk (k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p(p^2-4)=pk(pk+6)\Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4(6k+4)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $(k^2)^2<k^4+24k+16<(k^2+4)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=(k^2+1)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$

Đặt $t+3=pk (k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6) \Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

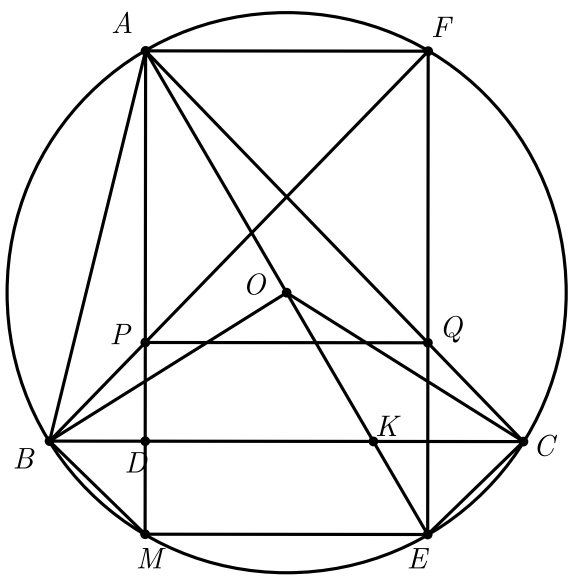
$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Câu 4.



1.

a. Xét hai tam giác ADB và ACE có $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn) nên

$\widehat{ACE} = \widehat{ADB} = 90^\circ$.

Hơn nữa $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$). Suy ra $\Delta ADB \backsim \Delta ACE$

Từ đây ta có tỉ lệ thức $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AB.AC$.

b. Ta có $\widehat{PFQ} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Mặt khác $\widehat{BAE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAE}$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$ vì $\Delta ABD \backsim \Delta AEC$

Nên $\widehat{BAE} = \widehat{BAD} + \widehat{EAC} = \widehat{DAC}$.

Do đó $\widehat{PAQ} = \widehat{PFQ}$.

Suy ra tứ giác $APQF$ nội tiếp$\Rightarrow \widehat{FAQ} = \widehat{FPQ}$

Vì $\widehat{FAQ} = \widehat{FBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$) nên $\widehat{FPQ} = \widehat{FBC}$ suy ra $PQ//BC$.

c. Ta có $AB.AC = AD.AE$.

Suy ra $AB.AC - AD.AK = AD.AE - AD.AK = AD.KE$.

Kéo dài AD cắt (O) tại M.

Xét ΔAKB và ΔCKE $\Rightarrow \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{KB}{KE} \Rightarrow AK.KE = KB.KC$

$\Delta ADC \backsim \Delta BDM$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{MD} \Rightarrow AD.MD = BD.CD$.

Mặt khác $\widehat{AME} = 90^\circ$ (chắn $\frac{1}{2}$đường tròn)

Suy ra $ME \perp AD$ mà $DK \perp AD$ nên $DK // ME$.

Áp dụng định lý Talet trong ΔAME ta được $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{AK}{KE}$.

Do đó $AK.DM = AD.KE$.

$\Rightarrow BD.BK.CD.CK = (BD.CD).(CK.BK)$.

$$= (AD.MD).(AK.KE) = (AD.KE).(AK.MD) = AD^2.KE^2$$

$\Rightarrow \sqrt{BD.BK.CD.CK} = AD.KE$

Vậy $AB.AC - AD.AK = \sqrt{BD.BK.CD.CK}$.

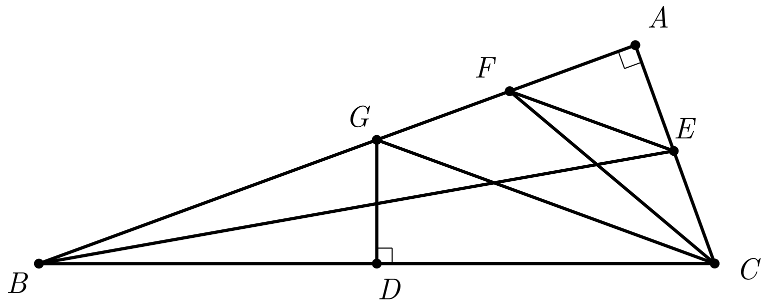
2. Xét ΔABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 70^\circ$

ΔACF có $\widehat{CAF} = 90^\circ$, $\widehat{ACF} = 30^\circ \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

Khi đó, $\Delta ABC \backsim \Delta DBG \Rightarrow \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC}$

$\widehat{GCB} = \widehat{GBC} = 20^o \Rightarrow \widehat{GCF} = 20^o$.



Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên

$\dfrac{FC}{FG} = \dfrac{BC}{BG}; \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC}$

Do đó, $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \dfrac{AF}{FG} = \dfrac{AE}{EC}$

Từ đó suy ra $CG // EF$ (ĐL Talet đảo)$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{GCF} = 20^\circ$.

Câu 5.

Với 5 số tự nhiên đôi một khác nhau tùy ý thì có hai trường hợp xảy ra:

+ TH1: Có ít nhất 3 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Tổng ba số tương ứng chia hết cho 3.

+ TH2: Có nhiều nhất 2 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Có ít nhất 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1, 1 số chia cho 3 dư 2. Suy ra luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Do đó ta chia 17 số là số báo danh của 17 học sinh thành 3 tập có lần lượt $5,5,7$ phần tử.

Trong mỗi tập, chọn được 3 số có tổng lần lượt là $3a_1, 3a_2, 3a_3\left(a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}\right)$.

Còn lại $17-9=8$ số, trong 8 số còn lại, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$.

Còn lại 5 số chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_5$.

Trong 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có 3 số a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} có tổng chia hết cho 3.

Nên 9 học sinh tương ứng có tổng các số báo danh là $3\left(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}\right) \vdots 9$

Đề số 12

Câu 1:

1. Đặt $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}=a+b$ khi đó

$x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}.x$

$\Rightarrow\ x^3=6+3x \Leftrightarrow x^3-3x=6\ (1)$

Đặt $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}=c+d$ khi đó

$y^3=(c+d)^3=c^3+d^3+3cd(c+d)=17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}.y$

$\Rightarrow y^3=34+3y \Leftrightarrow y^3-3y=34\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A=x^3+y^3-3(x+y)=x^3+y^3-3x-3y=6+34=40$

2. Ta có $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m+n)}{2mn}=\frac{mn}{2mn} \Leftrightarrow 2(m+n)=mn$

Ta có $\left(x^2+mx+n\right)\left(x^2+nx+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+mx+n=0\ (1) \\ x^2+nx+m=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) là PT bậc hai có $\Delta_1=m^2-4n$

Phương trình (2) là PT bậc hai có $\Delta_2=n^2-4m$

Do đó $\Delta_1+\Delta_2=m^2-4n+n^2-4m=m^2+n^2-4(m+n)=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2\geq 0$

Suy ra trong Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 0.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

Câu 2:

1. $\begin{cases} x^2+xy+y=1 & (1) \\ \sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+4x=5 & (2) \end{cases}$. Điều kiện $x\geq 0$

Cách 1:

PT (1) $\Leftrightarrow x^2+xy+y-1=0\ (3)$

PT (3) là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta=y^2-4y+4=(y-2)^2\geq 0$

Do đó PT (3) có hai nghiệm $x=-1$ (loại vì $x\ge 0$), $x=-\frac{c}{a}=1-y$ (điều kiện y ≤ 1 vì x ≥ 0)

$\Rightarrow$ y = -x + 1. Thay y = -x + 1 vào PT (2) ta có

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{-x+1}+4x=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1+\sqrt[3]{x-1}+4x-4=0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\sqrt[3]{x-1}+4(x-1)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}\left[\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1}+1+4\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x-1}=0\\ \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1}+1+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=0\end{array}\right. \Rightarrow x=1$ (TMĐK) suy ra $y=0$ (TMĐK)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(1\,;\,0)$

Cách 2: đặt điều kiện như cách 1

PT (1) $\Leftrightarrow x^2+xy+y-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)+y(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1+y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1(loai)\\ y=1-x\end{array}\right.$

Thay $y=1-x$ vào (2) ta được

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{1-x}+4x=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}+4x=5 \quad (3)$

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của pt (3) khi đó $y=0$

Nếu x>1 thì vế trái lớn hơn 5 nên pt (3) không có nghiệm lớn hơn 1.

Nếu 0≤x<1 thì vế trái bé hơn 5 do đó pt (3) không có nghiệm 0≤x<1.

2. $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy \Leftrightarrow x^2-x(2y^2-y+1)+2y^2-y-1=0$ (1)

Cách 1:

Đặt $2y^2-y+1=$ a, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2-ax+a-2=0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Δ là số chính phương

Đặt $(a-2)^2+4=k^2$ $(k\in N)$ $\Leftrightarrow k^2-(a-2)^2=4 \Leftrightarrow (k+a-2)(k-a+2)=4$

Vì $(k+a-2)+(k-a+2)=2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k+a-2)$ và $(k-a+2)$ là số chẵn.

Do đó $\begin{cases}k+a-2=2\\ k-a+2=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k+a-2=-2\\ k-a+2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\ a=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=-2\\ a=2\end{cases}$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+\sqrt{k^2}}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2 \\ x=\dfrac{a-\sqrt{k^2}}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0 \end{array}\right.$

Ta có $2y^2-y-1=a=2 \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0 \Leftrightarrow 2y^2-2y+y-1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta chọn $y=1$ (vì y $\in$ Z)

Vậy nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ của phương trình là $(2\,;\,1)$ và $(0\,;\,1)$

Cách 2: Có thể phân tích đưa về phương trình ước số (các bạn tự giải)

Câu 3:

1. Gọi A_iA_j là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 8073 điểm đã cho.

Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng A_iA_j nhất. Khi đó

Tam giác $A_iA_j\,A_k$ là tam giác lớn nhất và có diện tích không lớn hơn 1

Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_iA_jA_k$

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ

Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 8073 điểm đã cho

Ta có 8073 chia cho 4 được 2018 và dư là 1 nên theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác chứa 2019 trong 8073 điểm đã cho.

2. Đặt $P=a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}$ suy ra

$2P=2a\sqrt{b^3+1}+2b\sqrt{c^3+1}+2c\sqrt{a^3+1}=$

$2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}+2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)}+2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}$

$\le a(b^2+2)+b(c^2+2)+c(a^2+2)=ab^2+bc^2+ca^2+6=Q+6$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b\le c\le a$ ta có

$b(a-c)(c-b)\ge 0 \Leftrightarrow abc+b^2c\ge ab^2+bc^2 \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le abc+b^2c+ca^2$

Do đó $Q\le abc+b^2c+ca^2\le 2abc+b^2c+ca^2=c(a+b)^2=4c\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a+b}{2}$

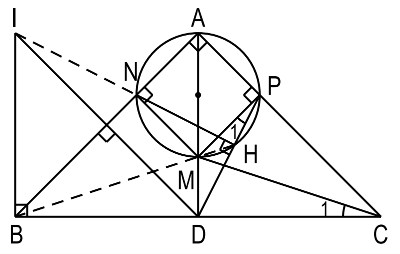
$\le \dfrac{4}{27}\left(c+\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a+b}{2}\right)^3=\dfrac{4(a+b+c)^2}{27}=\dfrac{4.3^3}{27}=4$

Do đó $2P\le 10 \Leftrightarrow P\le 5$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b+c=3,\; b\le c\le a,\; 2c=a+b,\; abc=2abc$

$\Leftrightarrow b=0,\; c=1,\; a=2.$

Câu 4:

a) Ta có $AD\perp BC$ tại D (vì ΔABC vuông cân tại A)



$\widehat{ANM} = \widehat{APM} = 90°$ nên $AMNP$ là tứ giác nội tiếp (1)

$\widehat{NAP} = \widehat{NHP} = 90°$ nên $NAPH$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra N, A, P, H, M cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{APH} = 180°$ và $\widehat{ANM} = \widehat{APM} = 90°$ nên

$AMNP$ là tứ giác nội tiếp (1)

Ta có $\widehat{APC} = \widehat{MDC} = 90°$ nên $AMNP$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{P_1} = \widehat{C_1}$ mà $\widehat{C_1} = \widehat{MBD}$ (vì AD là trung trực của BC)

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{P_1}$

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ADB} + \widehat{MBD} = 90° + \widehat{MBD}$ mà $\widehat{MBD} = \widehat{P_1}$

Suy ra $\widehat{AMB} = 90° + \widehat{P_1} = \widehat{APM} + \widehat{P_1} = \widehat{APH} \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AMH} = \widehat{APH} + \widehat{AMH} = 180°$

Do đó B, M, H thẳng hàng $\Rightarrow AH \perp BH$

b) Ta có $\widehat{IBA} = \widehat{BAD} = 45°$ (vì $BI \,//\, AD$)

Tam giác ADB vuông tại D có DI là trung trực nên DI là phân giác góc ADB

$\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{BDI} = 45°$. Do đó $\widehat{IBA} = \widehat{IDA} \left(= 45°\right) \Rightarrow$ A, I, B, D cùng thuộc một đường tròn (3)

Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{ADB} = 90°$ nên A, H, D, B cùng thuộc một đường tròn (4)

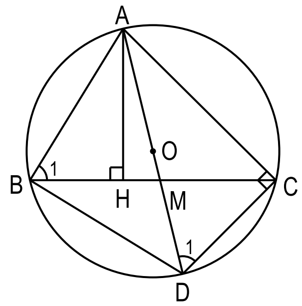
Từ (3) và (4) suy ra A, H, D, B, I cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{IHD} + \widehat{IBD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{IHD} = 90°$ (vì $\widehat{IBD} = 90^0$) lại có $\widehat{NHD} = 90°$

Do đó H, N, I thẳng hàng.

2.

✓ **Cách 1:**



Kẻ AD là đường kính của đường tròn (O)

Xét 2 tam giác vuông ΔHBA và ΔCDA

có $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (vì nội tiếp cùng chắn $\overparen{AC}$)

nên $\Delta HBA \backsim \Delta CDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HB}{CD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow HB.AD = AB.CD$

Tương tự $\Delta HCA \backsim \Delta BDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HC}{BD} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow HC.AD = AC.BD$

Do đó $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{DC}{DB}$ (1)

Ta có $\Delta AMB \backsim \Delta CMD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NB}{MD} = \dfrac{AB}{CD} \Rightarrow MB.CD = MD.AB$

Tương tự $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{AC}{BD} \Rightarrow MC.BD = AC.MD$

Do đó $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{DB}{DC}$ (2)

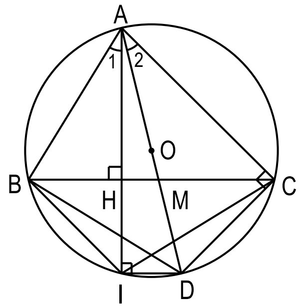
Ta có $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}\left(\frac{DC}{DB}+\frac{DB}{DC}\right)\geq\frac{AB}{AC}.2.\sqrt{\frac{DC}{DB}.\frac{DB}{DC}}=2.\frac{AB}{AC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DB=DC\Leftrightarrow AB=AC\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

✔ **Cách 2: (Cách này ai không thích thì xóa đi nha. Do mình copy nên để nguyên trạng)**

Gọi I là giao điểm của AH với đường tròn (O). Kẻ đường kính AD.

Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=\widehat{AID}=90°$. Do đó BC // DI $\Rightarrow \overset{\frown}{BI}=\overset{\frown}{CD}$



$\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{A_2}$

Ta có DIBC là hình thang cân nên CD = BI, CI = BD

Xét ΔAHB và ΔACD có $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$, $\widehat{AHB}=\widehat{ACD}\ (=90°)$

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HB}{CD}=\frac{AB}{AD}$ (1)

Xét ΔABD và ΔAHC có $\widehat{BAD}=\widehat{HAC}$, $\widehat{ABD}=\widehat{AHC}\ (=90°)$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{HC}=\frac{AD}{AC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{HB}{CD}.\frac{BD}{HC}=\frac{AB}{AD}.\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{HB}{HC}=\frac{AB}{AC}.\frac{CD}{BD}$ (3)

Xét ΔABI và ΔAMC có $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$, $\widehat{AIB}=\widehat{ACB}\left(=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABI \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BI}{MC}=\frac{AB}{AM}$ (4)

Xét ΔABM và ΔAIC có $\widehat{BAM}=\widehat{IAC}$, $\widehat{ABC}=\widehat{AIC}\left(=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta AIC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MB}{CI}=\frac{AM}{AC}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $\frac{BI}{MC}.\frac{MB}{CI}=\frac{AB}{AM}.\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}.\frac{CI}{BI}$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $\frac{HB}{HC}.\frac{MB}{MC}=\frac{AB^2}{AC^2}.\frac{CD}{BD}.\frac{CI}{BI}=\frac{AB^2}{AC^2}.\frac{CD}{BI}.\frac{CI}{BD}=\frac{AB^2}{AC^2}$ (vì CD = BI, CI = BD)

Ta có $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}\geq 2\sqrt{\frac{HB}{HC}.\frac{MB}{MC}}=2\sqrt{\frac{AB^2}{AC^2}}=2.\frac{AB}{AC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{HB}{HC}=\frac{MB}{MC}\Leftrightarrow\frac{HB}{HB+HC}=\frac{MB}{MB+MC}\Leftrightarrow\frac{HB}{BC}=\frac{MB}{BC}\Leftrightarrow$ H $\equiv$ M

$\Leftrightarrow \Delta$ABC cân tại A.

Đề số 13

Câu 1:

Ta có:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}}=\frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\quad A=2+\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+\sqrt{3}-1-\frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\ A=1$$

Câu 2:

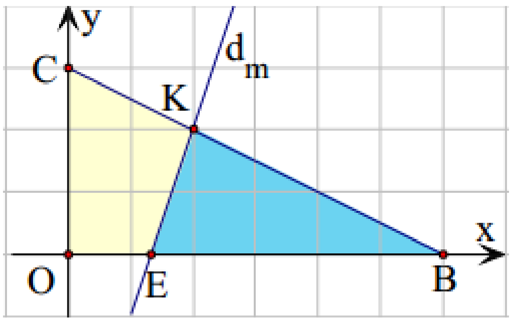
a) Phương trình BC có dạng $y=ax+b$ đi qua B và C nên có hệ phương trình

$$\begin{cases}3=b\\0=6a+b\end{cases}$$

$\Rightarrow\ a=-\dfrac{1}{2}$ và $b=3\Rightarrow$phương trình đường thẳng BC là $y=-\dfrac{1}{2}x+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và BC là: $mx-2m+2=-\dfrac{1}{2}x+3$

$\Leftrightarrow(2m+1)x=2(2m+1)\Leftrightarrow x=2$ do $m\neq-\dfrac{1}{2}$ nên giao điểm là $K(2;2)$.



b) Ta có $S_{OBC}=\dfrac{1}{2}OC.OB=\dfrac{1}{2}.3.6=9$ (đvdt)

Nếu d_m cắt cạnh OC tại D thì d_m chia thành hai phần đó là tam giác CDK và tứ giác $DOBK$ mà: $S_{CDK}\le S_{COK}=\dfrac{1}{2}|x_K|.OC=3<\dfrac{S_{OBC}}{2}$ nên không thể nhận được.

Khi d_m cắt cạnh OB tại E thì ta có: $y_E=0$ và $x_E=2-\dfrac{2}{m}$ đồng thời thỏa:

$$0<2-\frac{2}{m}<6$$

$$\Rightarrow S_{KEB}=\frac{1}{2}|y_K|.EB=\frac{1}{2}.2.|x_B-x_E|$$

d_m chia tam giác OBC thành hai phần có dện tích bằng nhau khi và chỉ khi:

$S_{KEB}=4+\dfrac{2}{m}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow m=4$ (thỏa điều kiện).

Câu 3: a) Điều kiện: $9-x^2\ge0$ và $3-x\ge0\Leftrightarrow|x|\le3\Leftrightarrow-3\le x\le3$

Ta có

$$24+8\sqrt{9-x^2}=4\left(3-x+2\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}+3+x\right)=4\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)^2$$

Nên phương trình trở thành: $2\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)=x+2\sqrt{3-x}+4$

Hay $2\sqrt{3-x}=x+4$

$\Leftrightarrow 3+x-2\sqrt{3+x}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow3+x=1\Leftrightarrow x=-2$ (thỏa)

b) Điều kiện: $x \neq 1; y \neq -3$, biến đổi phương trình thứ hai thành: $\frac{8}{x-1}+\frac{5}{y+3}=13$

Đặt $X=\frac{1}{x-1}; Y=\frac{1}{y+3}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}12X+7Y=19\\8X+5Y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=1\\Y=1\end{cases}$

Vậy $\begin{cases}\frac{1}{x-1}=1\\\frac{1}{y+3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases} \Rightarrow$ hệ có 1 nghiệm $(2;-2)$

Câu 4: Tổng các số tại các ô bị mờ số là $100-(40+9+7)=44$

Tổng số điểm trong 100 lần bắn là $8,35.100=835$

Tổng số điểm tại các vị trí ô không bị mất số là $9.40+6.9+5.3=449$

Suy ra tổng số điểm bắn được tại vị trí các ô bị mất là $835-449=386$, đây là số chẵn

Suy ra tại ô 7 điểm số lần bắn chỉ có thể là số chẵn, vì vậy chỉ có 3 khả năng là 10, 12, 14.

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn được 10 điểm và 8 điểm

Điều kiện: $x, y \in N; 20 \leq x < 30; 10 \leq x < 20$

Trường hợp 1: Ô 7 điểm nhận giá trị 10, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình.

$\begin{cases}x+y=34\\449+10x+8y+70=835\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=34\\10x+8y=316\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=22\\y=12\end{cases}$ thỏa điều kiện

Trường hợp 2: Ô 7 điểm nhận giá trị 12, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình

$\begin{cases}x+y=32\\449+10x+8y+84=835\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=32\\10x+8y=316\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=23\\y=9\end{cases}$ loại

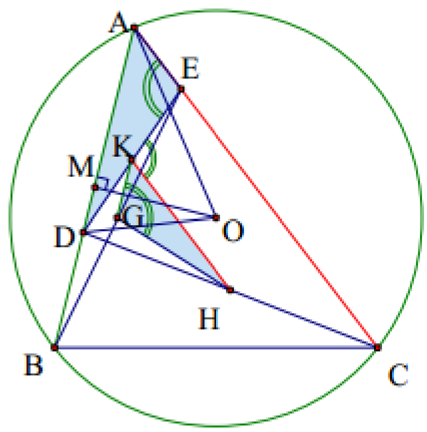
Trường hợp 3: Ô 7 điểm nhận giá trị 14, khi đó x = 20 và y = 10 suy ra

Tổng số điểm bắn được là:

$20.10+9.40+8.10+7.14+6.9+5.7=827$ không phù hợp

Vậy chữ số hàng đơn vị tại các ô 10 điểm, 8 điểm, 7 điểm lần lượt là 2, 2, 0

Câu 5:



a) Ta có $MA^2-MD^2=(MA+MD)(MA-MD)$

Mà $MA+MD=DA; MA-MD=MB-MD=DB$ nên

$MA^2-MD^2=DA.DB$

b) Do M là trung điểm AB nên $OM \perp AB$

$\Rightarrow OD^2=OM^2+MD^2$ và $OM^2=OA^2-MA^2$

$\Rightarrow OD^2=OA^2-(MA^2-MD^2)=OA^2-DA.DB$ (1)

$\Rightarrow OA^2-OD^2=DA.DB$

Tương tự ta cũng có $OA^2 - OE^2 = EA.EC$ (2)

Mà theo giả thiết ta có $OD = OE$ nên từ (1) và (2) cho ta: $DA.DB = EA.EC$

c) Do G, H, K lần lượt là trung điểm của các đoạn BE, CD và ED nên

$KG // AB$ và $KH // AC \Rightarrow \widehat{GKH} = \widehat{DAE}$ (3)

Mặc khác theo tính chất đường trung bình ta có:

$\frac{KG}{DB} = \frac{1}{2}$ và $\frac{KH}{EC} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{KG}{DB} = \frac{DB}{EC}$ (3)

Theo câu b: $DA.DB = EA.EC \Rightarrow \frac{DB}{EC} = \frac{EA}{DA} \Rightarrow \frac{KG}{KH} = \frac{AE}{AD}$ (4)

Từ (3) và (4) cho ta hai tam giác AED và KGH đồng dạng nên $\widehat{KGH} = \widehat{AED}$.

Mà $KH // AC$ nên $\widehat{EKH} = \widehat{AED}$.

Suy ra $\widehat{KGH} = \widehat{EKH}$ nên ED là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK

Câu 6:

Từ hai hệ thức đã cho, xem z là tham số giải hệ phương trình 2 ẩn x, y theo z ta được

$x = \frac{z+2}{z^2 - z + 1}$ và $y = \frac{2z - 3}{z^2 - z + 1}$.

$\Rightarrow 2x - y = \frac{2z+4}{z^2 - z + 1} - \frac{2z-3}{z^2 - z + 1} = \frac{7}{z^2 - z + 1} \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Do $z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên từ hệ thức $(2x - y)(z^2 - z + 1) = 7$ cho ta $2x - y > 0$.

Mà $x, y, z \in \mathbb{Z}$ suy ra $z^2 - z + 1 = 7$ hoặc $z^2 - z + 1 = 1$.

Trường hợp 1: $z^2 - z + 1 = 7$

Ta có $z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z+2) = 0 \Rightarrow z = 3; z = -2$.

Với $z = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (loại).

Với $z = -2 \Rightarrow x = 0$ và $y = -1$ (nhận).

Trường hợp 2: $z^2 - z + 1 = 1 \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = 0; z = 1$.

Với $z = 0 \Rightarrow x = 2$ và $y = -3$ (nhận).

Với $z = 1 \Rightarrow x = 3$ và $y = -1$ (nhận).

Đề số 14

a) Ta có $A = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{33 - 12\sqrt{5 - \sqrt[3]{\left(1 - 2\sqrt{3}\right)^3}}} = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{33 - 12\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$

$= \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{33 - 12\sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}} = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(3 - 2\sqrt{3}\right)^2}$

$=\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)=3.$

b) ĐKXĐ: $x,\, y\geq 0.$ Ta có $x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-8=y\sqrt{y}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^3=\left(\sqrt{y}\right)^3\Leftrightarrow\sqrt{y}=\sqrt{x}-2$

Thế vào phương trình thứ hai ta được $x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{x}-4\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=9\end{array}\right.$

Với $x=1$ thì $\sqrt{y}=-1$ (loại). Với $x=9$ thì $\sqrt{y}=1\Leftrightarrow y=1$. Hệ có nghiệm $(x;y)=(9;1)$.

Câu 1: a) Ta có phương trình tương đương $(x-2)^2-2|x-2|+m+1=0$. Đặt $|x-2|=t\geq 0$.

1) Ta có phương trình $t^2-2t+m+1=0\,(*)$. Để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases}\Delta'>0\\2>0\\m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m>0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0.$$

2) b) Gọi phương trình đường thẳng $(d): y=ax+b$. Vì (d) đi qua $M(0;3)$ nên $(d): y=ax+3$. Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình $x^2-ax-3=0$, do $1.(-3)<0$ nên phương trình $x^2-ax-3=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_A và x_B.

3) Theo Vi-ét thì $\begin{cases}x_A+x_B=a\\x_Ax_B=-3\end{cases}$. Khi đó tọa độ $A\left(x_A;x_A^2\right)$, $B\left(x_B;x_B^2\right)$, $C\left(x_A;0\right)$, $D\left(x_B;0\right)$.

4) Ta có $S_{ABCD}=\dfrac{(AC+BD)CD}{2}=\dfrac{\left(x_A^2+x_B^2\right)\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2}}{2}=20$

5) $\Rightarrow\left[\left(x_A+x_B\right)^2-2x_Ax_B\right]\sqrt{\left(x_A+x_B\right)^2-4x_Ax_B}=40\Rightarrow\left(a^2+6\right)\sqrt{a^2+12}=40.$

6) Đặt $\sqrt{a^2+12}=t$ ta có $t^3-6t-40=0\Leftrightarrow(t-4)\left(t^2+4t+10\right)=0$

7) $\Leftrightarrow(t-4)\left[(t+2)^2+6\right]=0\Leftrightarrow t=4\Rightarrow\sqrt{a^2+12}=4\Leftrightarrow a=\pm 2.$

8) Phương trình đường thẳng $(d): y=-2x+3; (d): 2x+3.$

Câu 2: a) Ta có phương trình tương đương $(x+1)^2+(x+y+2)^2=25.$

9) $\Leftrightarrow\left(|x+1|\right)^2+\left(|x+y+2|\right)^2=25=0^2+5^2=3^2+4^2.$

10) Xét các trường hợp sau

11) TH1: $\begin{cases}|x+1|=0\\|x+y+2|=5\end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(-1;-6),(-1;4)\}.$

12) TH2: $\begin{cases}|x+1|=5\\|x+y+2|=0\end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(-6;4),(4;-6)\}.$

13) TH3: $\begin{cases}|x+1|=3\\|x+y+2|=4\end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(2;-8),(2;0),(-4;6),(-4;-2)\}.$

14) TH2: $\begin{cases}|x+1|=4\\|x+y+2|=3\end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(3;-8),(3;-2),(-5;-6),(-5;0)\}.$

15) b) Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abcd}=(a+b+c+d)^3$ theo bài ra $1000\le\overline{abcd}\le 9999.$

16) Đặt $a+b+c+d=n\Rightarrow 1000\le n^3\le 9999\Leftrightarrow 10\le n\le 21.$

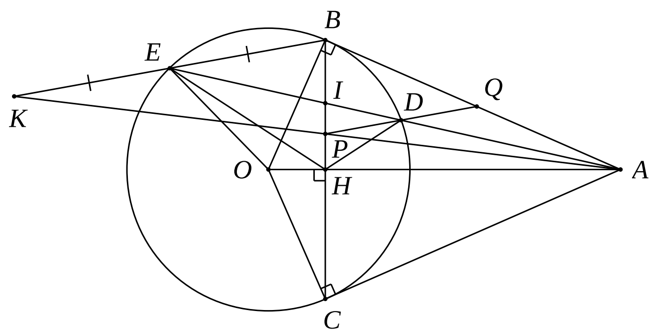
17) Mặt khác $\overline{abcd}=999a+99c+9c+n=n^3\Rightarrow (n^3-n)\vdots 9\Leftrightarrow (n-1)n(n+1)\vdots 9$. Do đó, trong ba số $n-1, n, n+1$ phải có 1 số chia hết cho 9, kết hợp với $10\le n\le 21\Rightarrow n\in\{10;17;18;19\}.$

18) Với $n=10\Rightarrow a+b+c+d=10\Rightarrow \overline{abcd}=1000$ (loại).

19) Với $n=17\Rightarrow a+b+c+d=17\Rightarrow \overline{abcd}=4913$ (thỏa mãn).

20) Với $n=18\Rightarrow a+b+c+d=18\Rightarrow \overline{abcd}=5832$ (thỏa mãn).

21) Với $n=19\Rightarrow a+b+c+d=19\Rightarrow \overline{abcd}=6859$ (loại).



Câu 3: a) Áp dụng phương tích đường tròn ta có $AB^2=AD.AE$. Áp dụng hệ thức trong tam giác ABO vuông tại B, AH là đường cao có $AB^2=AH.AO$

$\Rightarrow AH.AO=AD.AE$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AE}=\dfrac{AD}{AO}\Rightarrow \Delta AHD\# \ \Delta AEO$

$\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{AEO}$ nên tứ giác $OEDH$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của AE và BC. Ta có $\widehat{AHD}=\widehat{DEO}=\widehat{ODE}=\widehat{OHE}\Rightarrow \widehat{BHD}=\widehat{BHE}.$

Suy ra HI là phân giác ngoài của ΔDHE mà $HI\perp AH$ nên HA là đường phân giác ngoài của $\Delta DHE.$

Do đó $\dfrac{HD}{HE}=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{ID}{IE}$ mà $PQ\,//\,BK$ nên A, P, K thẳng hàng.

Câu 4:

Đường chéo BD cắt AN, AM lần lượt tại P và Q. Ta có $\widehat{PAM}=\widehat{PBM}=45°$ nên tứ giác $ABMP$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PMA}=\widehat{PBA}=\widehat{PAM}=45° \Rightarrow \Delta APM$ vuông cân. Tương tự $\widehat{NDQ}=\widehat{NAQ}=45°$ nên tứ giác $ADNQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNA}=\widehat{QDA}=\widehat{QAN}=45° \Rightarrow \Delta AQN$ vuông cân. Kẻ $PH \perp AM$ tại H $\Rightarrow HA=HM=PH$ hay $AM=2PN$.

Ta có $\dfrac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\dfrac{PH.AQ}{NQ.AM}=\dfrac{PH.NQ}{NQ.2PH}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{AMN}=2S_{APQ}$

Câu 5:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1}=(a+1)-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\le(a+1)-\frac{(a+1)b^2}{2b}=(a+1)-\frac{ab+b}{2}.$$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{b+1}{c^2+1}\le(b+1)-\dfrac{bc+c}{2};\dfrac{c+1}{a^2+1}\le(c+1)-\dfrac{ca+a}{2}.$

Cộng theo vế được

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge a+b+c+3-\frac{ab+bc+ca+a+b+c}{2}\ge 6-\frac{ab+bc+ca+3}{2}$$

Mặt khác ta có BĐT $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3.$

Do đó $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge 3.$ Dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

Đề số 15

Câu 1: *(4,5 điểm)*

1) Ta có:

$$\begin{cases}x-y=m+1\\2x-3y=m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3y=3m+3\\2x-3y=m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2m\\y=x-m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2m\\y=m-1\end{cases}\ (\forall m\in\mathbb{R})$$

Ta có: $P=x^2+8y=4m^2+8(m-1)=4m^2+8m-8=(2m+2)^2-12\ge -12$

Dấu "=" xảy ra khi $2m+2=0\Leftrightarrow m=-1$. Giá trị nhỏ nhất của P là -12 khi $m=-1$

2) Ta có $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^3-y^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2+2xy=1\\(x-y)(1+xy)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy=1-(x-y)^2\\(x-y)(2+2xy)=-2\end{cases}$

Suy ra $(x-y)\left[2+1-(x-y)^2\right]=-2\Leftrightarrow(x-y)^3-3(x-y)-2=0$

$\Leftrightarrow (x-y-2)(x-y+1)^2 = 0$

Xét $x-y=2 \Rightarrow xy = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x(x-2) = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=0$ Vô nghiệm.

Xét $x-y=-1 \Rightarrow xy=0$. Suy ra hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(0;1),(-1;0)\}$

Câu 2: *(4,5 điểm)*

1. Ta có:

$x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 27x + 9 = 0 \quad (*)$

Với $x=0$, (*) $\Leftrightarrow$ 0x+9=0 (phương trình vô nghiệm).

Với $x \neq 0$ chia 2 vế của phương trình (*) cho x^2.

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 24 - \frac{27}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 = \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{x}\right)^2 - 9\left(x+\frac{3}{x}\right) + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{x}-3\right)\left(x+\frac{3}{x}-6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{3}{x}-3=0 \\ x+\dfrac{3}{x}-6=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+3=0 \ (vo\ nghiem) \\ x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=3-\sqrt{6} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2. Ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3 \geq 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+1\right)+\left(\frac{c}{a}+1\right) \geq 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}-\frac{4a}{a+b}+\frac{b+c}{c}-\frac{4b}{b+c}+\frac{c+a}{a}-\frac{4c}{c+a} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{c(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{a(c+a)} \geq 0$$

Luôn đúng vì a, b, c là các số dương. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Câu 3:

1) **Cách 1:** $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c) \quad (1)$

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c) \,\vdots\, 2$, theo (1)Suy ra: b.c $\vdots\, 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c \vdots 2 \Rightarrow a(b+c) \vdots 2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b+c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2:

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow bc=a(b+c) \;\; \Leftrightarrow abc=a^2\left(b+c\right)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vây thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn. Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

2. <u>Cách 1:</u> Dùng hàm Ơle:

Phân tích số m ra thừa số nguyên tố: $m=p_1^{\,x}.p_2^{\,y}.p_3^{\,z}...$

Số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m là $\varphi(m)=m.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)....$

Ta có: $999=3^3.37 \Rightarrow \varphi(999)=999.\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{37}\right)=648$

Có 648 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 999.

Vậy có 649 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 1000.

<u>Cách 2:</u>

Gọi A là số các số nguyên dương không vượt quá 1000. Suy ra A = 1000

B là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không nguyên tố cùng nhau với 999.

C là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Ta có: $999 = 3^3.37$

B = (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3) – (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3)

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{3}+1=333$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 là: $\frac{999-37}{37}+1=27$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho cả 37 và 3 (chia hết cho 111) là: $\frac{999-111}{111}+1=9$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3 là: $27-9=18$

Suy ra $B=333+18=351$. Vậy $C = A - B = 1000 - 351 = 649$

Câu 4:

$$A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+3\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+....+98\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)+99\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)$$
$$=-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{4}-...-\sqrt{99}+99\sqrt{100}$$

Và $B=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$

$\Rightarrow A+B=100\sqrt{100}-1=999$

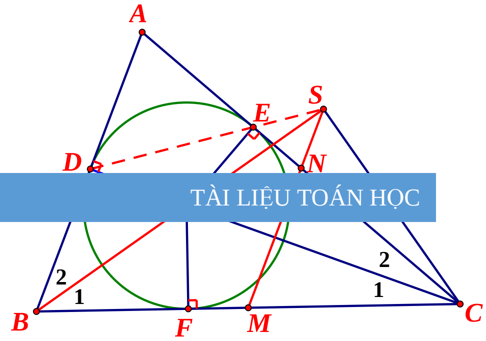
Câu 5:

a) Gọi F là tiếp điểm của BC với đường tròn (I)

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$AD=AE;\ BD=BF;\ CE=CF$ Suy ra:

$AB+AC-BC=\left(AD+DB\right)+\left(AE+CE\right)-\left(BF+CF\right)$



$= AD + AE = 2AD.$

b) Gọi S là giao điểm của BI, MN. Ta cần chứng minh: D, E, S thẳng hàng.

Thật vậy:

Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN//AB

$\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{BSM}$ (hai goc so le trong);$\widehat{B_2} = \widehat{B_1}$
$\Rightarrow \widehat{BSM} = \widehat{B_1}$

Suy ra tam giác MBS cân tại M nên $MB = MS = MC$.

Tam giác BSC có đường trung tuyến SM=1/2BC nên tam giác BSC vuông tại S.

Ta có:

Tứ giác $IECF, IESC$ là các tứ giác nội tiếp (đường tròn đường kính IC)

Nên 5 điểm I, E, S, C, F cùng thuộc đường tròn đường kính IC

Ta có:

$\Rightarrow \widehat{SEC} = \widehat{SIC}$; $\widehat{SIC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ ($goc\ ngoai$ cua tam giac)
$\Rightarrow \widehat{SEC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (1)

Lại có tam giác ADE cân tại A

nên: $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SEC} = \widehat{AED}$ mà A, E, C thẳng hàng nên D, E, S thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.

<u>**Cách khác:**</u> Gọi P là giao điểm của DE, BI Đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Đề số 16

Câu 1: Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcd} > 2019$

<u>***Trường hợp 1.***</u> $a > 2$

Có 7 cách chọn a. $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Có 9 cách chọn b (Trừ chữ số đã chọn cho a)

Có 8 cách chọn c (Trừ các chữ số đã chọn cho a, b)

Có 7 cách chọn d (Trừ các chữ số đã chọn cho a, b, c)

Trường hợp này có 7.9.8.7 = 3528 (số)

Trường hợp 2. $a = 2, b > 0$

Có 8 cách chọn b

Có 8 cách chọn c

Có 7 cách chọn d

Trường hợp này có $8.8.7 = 448$ (số)

Trường hợp 3. $a = 2, b = 0, c > 1$

Có 7 cách chọn c

Có 7 cách chọn d

Trường hợp này có $7.7 = 49$ (số)
Như vậy, số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$3528 + 448 + 49 = 4025 \text{ (số)}$$

Câu 2:

1) Ta có: $A = 3n^3 + 15n = 3\left(n^3 - n + 6n\right) = 3\left[\left(n-1\right)n\left(n+1\right) + 6n\right]$

Với mọi số nguyên n, $\left(n-1\right)n\left(n+1\right) + 6n$ chia hết cho 6

Vậy $A = 3\left[\left(n-1\right)n\left(n+1\right) + 6n\right]$ chia hết cho 18

2) Gọi số ô tô lúc đầu là x với $x \in \mathbb{N}$; $x \geq 2$

Số học sinh đi tham quan là $12x + 1$

Theo giả thiết nếu số xe là $x - 1$ thì số học sinh của đoàn được chia đều cho tất cả các xe.
Khi đó mỗi xe chở được y học sinh với $y \in N$; $0 < y \leq 16$

Ta có: $\left(x-1\right)y = 12x + 1$

$$\Leftrightarrow y = \frac{12x+1}{x-1} = 12 + \frac{13}{x-1}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x - 1 \in Ư(13) = \{1; 13\}$

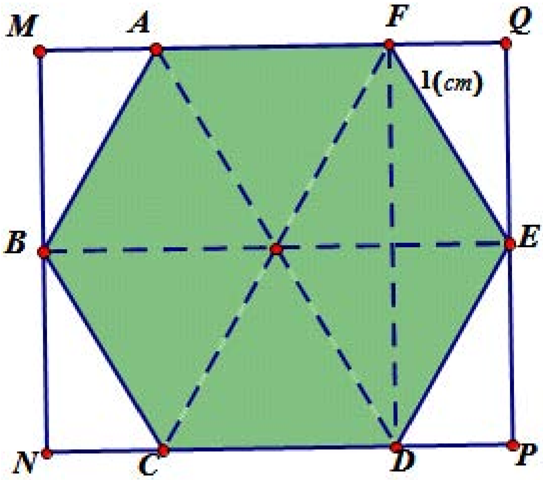
Với $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ suy ra $y = 25$ (loại)

Với $x - 1 = 13 \Leftrightarrow x = 14$ suy ra $y = 13$ (thỏa mãn)

Vậy đoàn tham quan có 14 ô tô và 169 học sinh.

Câu 3:

1)



Đáy hộp là một hình chữ nhật có các kích thước là

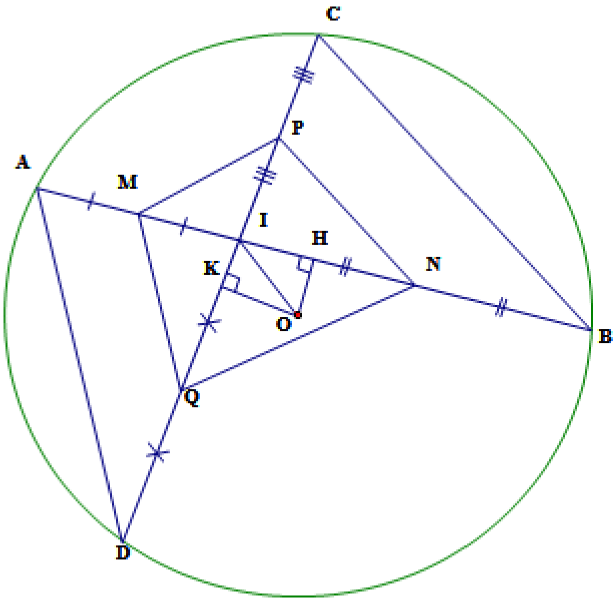
$MQ = BE = 2.1 = 2(cm)$

$QP = FD = 2.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\left(cm\right)$

Chiều cao của hộp bằng chiều cao của cây nến.

Thể tích của khối hộp là $V = 2.3.20 = 120\ cm^3$

2a)



a) Ta có: MQ là đường trung bình của tam giác AID.

Suy ra $MQ//AD$ suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{QMN}$. Tương tự $\widehat{BCD} = \widehat{NPQ}$

có D $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{QMN} = \widehat{NPQ}$

Suy ra tứ giác $MPNQ$ nội tiếp

Vậy bốn điểm M, P, N, Q cùng thuộc một đường tròn.

2b) Vì $AB \perp CD$ nên $S_{MPNQ} = \frac{1}{2}.MN.PQ = \frac{1}{8}.AB.CD \le \frac{1}{16}\left(AB^2 + CD^2\right)$

Kẻ $OH \perp AB$ tại H, $OK \perp CD$ tại K, ta có :

$$AB^2 + CD^2 = 4(AH^2 + CK^2) = 4(R^2 - OH^2 + R^2 - OK^2)$$
$$= 4(2R^2 - KH^2) = 4(2R^2 - OI^2)$$

Suy ra $S_{MPNQ} \le \frac{1}{4}\left(2R^2 - OI^2\right)$ (không đổi)

Vậy S_{MPNQ} đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}\left(2R^2 - OI^2\right)$

đạt được khi và chỉ khi : $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow OKIH$ là hình vuông nên AB và CD lập với OI các góc bằng 45^o.

Câu 4:

1) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \le 2 \\ 5 + 2y \ge (x-1)^2 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có:

$$5x^4 - 10x^3y + x^2 - 2xy = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^3(x - 2y) + x(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x(x-2y)(5x^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2y \end{array}\right.$$

Với $x = 0$ thay vào (1) ta có: $1 + \sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-2y} = 4 - \sqrt{4+2y} \Leftrightarrow 2\sqrt{4+2y} = 4 + y \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Với: $x = 2y$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{5 + x - (x-1)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}.\sqrt{4-x} = \frac{t^2-5}{2}$

Thay vào phương trình (*) ta có:

$$t + \frac{t^2-5}{2} = 5 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -5 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Khi $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1}.\sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Tóm lại, hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), \left(3; \frac{3}{2}\right)$

2) Nếu chia trục số thành hai phần bởi số 0, thì trong 3 số $(2x-1),(2y-1),(2z-1)$ luôn tồn tại hai số nằm về cùng phía, không mất tính tổng quát giả sử

$$(2x-1)(2y-1)\geq 0 \Rightarrow 2(x+y)-4xy\leq 1 \Rightarrow z(x+y)-2xyz\leq \frac{z}{2}$$

Từ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ suy ra

$$1-z^2=2xyz+x^2+y^2\geq 2xy+2xyz=2xy(z+1)\Rightarrow xy\leq \frac{1-z}{2}$$

Vì vậy $P=xy+yz+zx-2xyz\leq \frac{1-z}{2}+\frac{z}{2}=\frac{1}{2}$

Với $x=y=z=\frac{1}{2}$ thì P bằng $\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$

Đề số 17

Câu 1:

a) Phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ (*)

ĐKXĐ: $x\geq 1$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{2-x} \\ b=\sqrt{x-1} \end{cases}$ với $a\leq 1,\ b\geq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3=2-x \\ b^2=x-1 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^2=1.$$

Từ $(*)$ ta có: $a=1-b \Rightarrow b=1-a$.

Thay $b=1-a$ vào thệ thức $a^3+b^2=1\Rightarrow$ $a^3+(1-a)^2=1$ $\Leftrightarrow a^3+a^2-2a+1=1$ $\Leftrightarrow a^3+a^2-2a=0$ $\Leftrightarrow a(a^2+a-2)=0$ $\Leftrightarrow a(a+2)(a-1)=0$.

* Nếu $a=0$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow b=1$. Ta được $\begin{cases} 2-x=0 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$ $\Rightarrow b=3$. Ta được $\begin{cases} 2-x=-8 \\ x-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a-1=0$ $\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=0$. Ta được $\begin{cases} 2-x=1 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;2;10\}$.

b) $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$.

Với $n\in\mathbb{N}$ ta có: $1-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n^2+n-2}{n(n+1)}=\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$S=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{2019.2022}{2020.2021}=\frac{(1.2.3...2019).(4.5.6...2022)}{(2.3.4...2020).(3.4.5...2021)}=\frac{1.2022}{2020.3}=\frac{337}{1010}.$$

Vậy $S=\dfrac{337}{1010}$.

Câu 2:

a) Ta có: $\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9 \Rightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9$

$\Rightarrow\left[(2a-b)^2+3b^2\right]\vdots 9$ (1)

Mà $3b^2\vdots 3$ nên $(2a-b)^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b)\vdots 3$.

$(2a-b)\vdots 3$ nên $(2a-b)^2\vdots 9$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2\vdots 9\Rightarrow b^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b\vdots 3$.

$(2a-b)\vdots 3$ và $b\vdots 3$ $\Rightarrow$ $2a\vdots 3$ mà $(2;3)=1$ nên $a\vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3.

Theo đề bài 9^n+11 là tích k số tự nhiên liên tiếp mà 9^n+11 không chia hết cho 3 nên $k=2$.

Đặt $9^n+11=a(a+1)$ với a là số nguyên dương.

$9^n+11=a(a+1)\Leftrightarrow 4.9^n+45=4a^2+4a+1$

$\Leftrightarrow(2a+1)^2-\left(2.3^n\right)^2=45\Leftrightarrow\left(2a+1-2.3^n\right)\left(2a+1+2.3^n\right)=45$.

Vì a,n nguyên dương và $2a+1+2.3^n\geq 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=9 & (1)\\ 2a+1+2.3^n=5 & (2)\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $4a+2=14\Leftrightarrow a=3\Rightarrow 9^n+11=12\Leftrightarrow 9^n=1\Leftrightarrow n=0$ (Loại).

Trường hợp 2. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=15 & (3) \\ 2a+1+2.3^n=3 & (4) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2=18 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow 9^n+11=20 \Leftrightarrow 9^n=9 \Leftrightarrow n=1$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 3. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=45 & (5) \\ 2a+1+2.3^n=1 & (6) \end{cases}$

Từ (5) và (6) ta có $4a+2=46 \Leftrightarrow a=11 \Rightarrow 9^n+11=132 \Leftrightarrow 9^n=121 \Leftrightarrow n\in\varnothing$.

Vậy $n=1$.

Câu 3:

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}>0;\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}>0;\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}>0.$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$36=\left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4-y}.\frac{1}{\sqrt{4-y}}+\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{4-z}.\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{4-x}.\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)^2$$

$$\le(x+4-y+y+4-z+z+4-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 36\le 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)\ge 3. \qquad (*)$$

Giả sử ba số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)<1+1+1=3$ (Trái với $(*)$)

Do đó trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Ta có $2P=2(ab+bc+ca)-2abc$

$=2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-1$ (Vì $-2abc=a^2+b^2+c^2-1$)

$=(a+b+c)^2-1$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$\Leftrightarrow\ a^2b+2abc+c^2=1-a^2-b^2+a^2b^2$

$\Leftrightarrow (ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)$.

Từ $a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Rightarrow a^2<1\ ,\ b^2<1 \ \Rightarrow\ 1-a^2>0\ ,\ 1-b^2>0$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $1-a^2, 1-b^2$ ta có:

$$(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)\le\left(\frac{2-a^2-b^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow ab+c\le\frac{2-a^2-b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow c\le\frac{2-(a+b)^2}{2}. \qquad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $(a+1)^2$ và 1 ta có:

$$(a+b)^2+1\ge 2.\sqrt{(a+b)^2.1}=2(a+b)$$

$$\Rightarrow a+b\le\frac{(a+b)^2+1}{2}\ . \qquad (2)$$

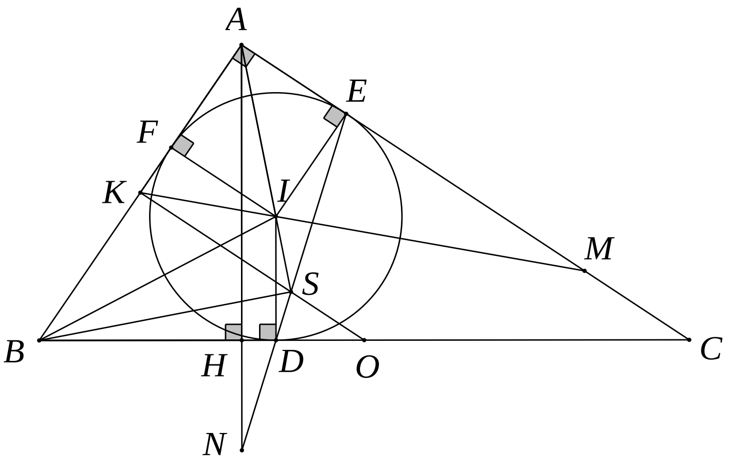
Từ (1) và (2) ta có: $a+b+c\le\dfrac{(a+b)^2+1}{2}+\dfrac{2-(a+b)^2}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Do đó $2P\le\dfrac{9}{4}-1\ =\dfrac{5}{4}\ \Rightarrow P\le\dfrac{5}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}1-a^2=1-b^2\\(a+b)^2=1\\a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $MaxP=\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4:



a) Ta có AI là tia phân giác của góc BAC nên $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$,

BI là tia phân giác của góc ABC nên $\widehat{IBA} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Theo tính chất tổng ba góc trong ΔAIB ta có:

$\widehat{AIB} = 180° - \left(\widehat{IAB} + \widehat{IBA}\right) = 180° - \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$

$= 180° - \frac{180 - \widehat{C}}{2}$ (Do $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 180° - \widehat{C}$ theo tính chất tổng ba góc của tam giác)

$= 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CE = CD \Rightarrow \Delta CED$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \frac{180° - \widehat{C}}{2}$.

Lại có: $\widehat{AES} = 180° - \widehat{DEC}$ (Hai góc kề bù)

$= 180° - \frac{180° - \widehat{C}}{2} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AES} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{EAS} = \widehat{IAB}$ (Tính chất tia phân giác).

Do đó: $\Delta IAB \# \Delta EAS$ (g - g).

b) Ta có: $\Delta IAB \# \Delta EAS \Rightarrow \widehat{ASE}=\widehat{ABI}=\widehat{IBD}$.

Tứ giác $IBDS$ có $\widehat{IBD}+\widehat{ISD}=\widehat{ASE}+\widehat{ISD}=180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $IBDS$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ISB}=\widehat{IDB}=90^\circ$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BI}$ nhỏ) mà $\widehat{IAB}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=45^\circ$ (Tính chất tia phân giác) $\Rightarrow \Delta ASB$ vuông cân tại S.

ΔASB vuông cân tại S có SA là đường trung tuyến nên SA là đường trung trực của AB. $(*)$

Mặt khác ΔABC vuông có AO là trung tuyến nên $OA=OB=\frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB. $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow$ Ba điểm K,O,S thẳng hàng.

c) Vì AI là tia phân giác của ΔAMK nên $\frac{AK}{AM}=\frac{IK}{IM}$. (1)

IF //AM (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{IK}{IM}=\frac{FK}{FA}$ (Định lý Ta lét). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AK}{AM}=\frac{FK}{FA}\Rightarrow \frac{AK}{FK}=\frac{AM}{AF}$. (3)

Mặt khác ID//AN (Cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \frac{AN}{ID}=\frac{SA}{SI}$ (Hệ quả định lý Ta lét)

mà IF //KS (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{SA}{SI}=\frac{AK}{FK}$ nên $\frac{AN}{ID}=\frac{AK}{FK}$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{ID}$.

Tứ giác $AEIF$ có $\widehat{EAF}=\widehat{AFI}=\widehat{AEI}=90^\circ$ nên tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AF=EI=ID$.

Ta có $AF=ID$ và $\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{ID}$ nên $AM=AN$.

Câu 5:

Ta thấy hai ô vuông ở hai góc đối của hình vuông 10×10 là xa nhau nhất.

Gọi các số được điền vào mỗi ô vuông đó lần lượt là $a_1,a_2,a_3,...,a_{19}$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
									a_{11}
									a_{12}
									a_{13}
									a_{14}
									a_{15}
									a_{16}
									a_{17}
									a_{18}
									a_{19}

Ta có

$\Leftrightarrow -1 < a_1 - a_2 < 1$.

Tương tự ta có:

$-1 < a_2 - a_3 < 1$; $|a_1 - a_2| < 1$

.......................;

$-1 < a_{18} - a_{19} < 1$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$-18 < a_1 - a_{19} < 18 \Leftrightarrow |a_1 - a_{19}| < 18$.

Vì $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$ là các số nguyên nên chỉ có tối đa 19 số nguyên khác nhau được điền vào trong bảng.

Có 100 ô vuông trên bảng nên theo nguyên lý Dirichle thì sẽ có một số xuất hiện trên bảng ít nhất là $\left[\frac{100}{19}\right] + 1 = 6$ (lần).

Đề số 18

Câu 6: *(2,0 điểm)*

a) Ta có $xyz = 9 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{xyz}\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + \sqrt{xyz}\sqrt{z} + \sqrt{xyz}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{yz}}{1 + \sqrt{yz} + \sqrt{y}} = 1 \Rightarrow \sqrt{10P - 1} = 3.$$

b) Ta có $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4 \Rightarrow 4x + 4y + 4z + 4\sqrt{xyz} = 16$.

Do đó

$\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x(16-4y-4z+yz)}=\sqrt{x\left(4x+4\sqrt{xyz}+yz\right)}=\sqrt{x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2}$

$=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)$.

Tương tự ta có $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}$

$=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)+\sqrt{y}\left(2\sqrt{y}+\sqrt{zx}\right)+\sqrt{z}\left(2\sqrt{z}+\sqrt{xy}\right)=2(x+y+z)+3\sqrt{xyz}$

$=2\left(4-\sqrt{xyz}\right)+3\sqrt{xyz}=8+\sqrt{xyz}$ (đpcm).

Câu 7: *(2,0 điểm)*

a) ĐKXĐ: $x\neq -2$.

Phương trình đã cho tương đương $x^2+3\left(x^2+4x+4\right)=\left(3x^2-6x\right)\left(x^2+4x+4\right)$

$$\Leftrightarrow 3x^4+6x^3-16x^2-36x-12=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-6\right)\left(3x^2+6x+2\right)=0$$

Xét phương trình $x^2-6=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Xét phương trình $3x^2+6x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\pm\sqrt{6};\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}\right\}$.

b) Từ phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xy+2=4x$.

Khi đó ta có $2x^2+x(x+y)^2+x-2+2xy+2=4x\Leftrightarrow x\left[(x+y)^2+2(x+y)-3\right]=0$

$$\Leftrightarrow x(x+y-1)(x+y+3)=0.$$

Xét $x=0$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được $y^2+1=0$. Phương trình vô nghiệm.

Xét $x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được

$x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

- Với $x=1\Rightarrow y=0$.
- Với $x=2\Rightarrow y=-1$.

Xét $x+y+3=0\Leftrightarrow y=-x-3$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được

$x^2+x+10=0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\{(1;0);(2;-1)\}$.

Câu 8: *(2,0 điểm)*

a) Ta có $x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3\Leftrightarrow x^2-x+2x-2+2y^2-2xy^2+y-xy=1$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(2y^2+y-x-2\right)=1.$$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2+y-x-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Chọn nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2+y-x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(x;y)=(2;1)$.

b) Vì $2019^{2018} \vdots 3$ nên $(a_1+a_2+...+a_n) \vdots 3$. Xét hiệu:

$(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)-(a_1+a_2+...+a_n)=(a_1-1)a_1(a_1+1)+(a_2-1)a_2(a_2+1)+...+(a_n-1)a_n(a_n+1)$ chia hết cho 3. Do đó $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3 (đpcm).

Câu 9: *(3,0 điểm)*

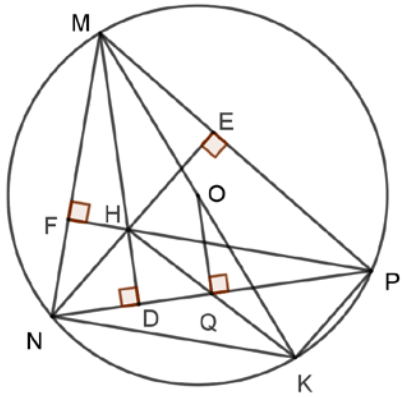
a) Kẻ đường kính MK.

Ta có $\widehat{MPK}=\widehat{MNK}=90^0$ hay $KP \perp MP$ và $KN \perp MN$. Suy ra $KP // NH$ và $KN // PH$ nên tứ giác $KPHN$ là hình bình hành. Suy ra H,Q,K thẳng hàng.

Xét ΔKMH có $OM=OK$, $OH=QK$ nên OQ là đường trung bình của ΔKMH.

Suy ra $MH=2OQ$ (đpcm).

b) Ta có $\sin\widehat{MNP}=\sin\widehat{MKP}=\dfrac{MP}{MK}=\dfrac{MP}{2R} \Rightarrow 2R=\dfrac{MP}{\sin\widehat{MNP}}$.



Tương tự ta cũng có $2R=\dfrac{MN}{\sin\widehat{MPN}}$ và $2R=\dfrac{NP}{\sin\widehat{NMP}}$.

Do đó $\dfrac{MN}{\sin\widehat{MPN}}=\dfrac{MP}{\sin\widehat{MNP}}=\dfrac{NP}{\sin\widehat{NMP}}=\dfrac{MN+MP}{\sin\widehat{MPN}+\sin\widehat{MNP}}$

$=\dfrac{2NP}{\sin\widehat{MPN}+\sin\widehat{MNP}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{MPN}+\sin\widehat{MNP}=2\sin\widehat{NMP}$ (đpcm).

c) Ta có $NP=R\sqrt{2} \Rightarrow NQ=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lí Pitago ta có $OQ=\sqrt{NO^2-NQ^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{2}}=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}=NQ$.

Khi đó ΔNOQ vuông cân tại Q $\Rightarrow \widehat{NOQ}=45° \Rightarrow \widehat{NOP}=90° \Rightarrow \widehat{NMP}=45°$

$\Rightarrow \widehat{NHF}=\widehat{PHE}=45°$. Do đó các tam giác NHF và PHE vuông cân. Suy ra $NH=\sqrt{2}FH$ và $PH=\sqrt{2}HE$.

Theo câu a) $MH=2OQ=R\sqrt{2}$.

Mặt khác $\Delta NDH \backsim \Delta MEH \Rightarrow \dfrac{ND}{ME} = \dfrac{NH}{MH} = \dfrac{\sqrt{2}FH}{R\sqrt{2}} = \dfrac{FH}{R} \Rightarrow ME.FH = R.ND$.

Tương tự $\Delta PDH \backsim \Delta MFH \Rightarrow MF.HE = R.PD$.

Suy ra $ME.FH + MF.HE = R.\left(ND + PD\right) = R.NP = \sqrt{2}R^2$ (đpcm).

Câu 10: *(1,0 điểm)*

Từ giả thiết $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = 3 \Rightarrow a + b + c = 3abc$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$P = \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a+b}.\frac{bc^2}{b+c}.\frac{ca^2}{c+a}} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Lại có $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \dfrac{a+b+b+c+c+a}{3} = \dfrac{2(a+b+c)}{3} = 2abc$.

Suy ra $P \geq \dfrac{3}{2}$.

Vậy GTNN của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Đề số 19

Bài 1. (2,0 điểm)

a) $A = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \dfrac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right)} + \frac{3\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}\left(x - \sqrt{xy} + y\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right)} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$.

Ta có $x_0^3 = \left(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}\right)^3$

$\Leftrightarrow x_0^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(9 - 4\sqrt{5}\right)\left(9 - 4\sqrt{5}\right)}.x_0$

$\Leftrightarrow x_0^3 = 3x_0 + 18$

$\Leftrightarrow \left(x_0^3 - 3x_0 - 17\right)^{2019} = 1^{2019}$

$\Leftrightarrow \left(x_0^3 - 3x_0 - 17\right)^{2019} - 1 = 0$

Vậy x_0 là một nghiệm của phương trình $\left(x^3 - 3x - 17\right)^{2019} - 1 = 0.$

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Xét phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0 \quad (1)$

Ta thấy $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall m.$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Khi đó $B = \dfrac{2x_1x_2 + 7}{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2} = \dfrac{2(2m-3)+7}{4m^2+2} = \dfrac{4m+1}{4m^2+2}$

$B = \dfrac{4m^2 + 2 - 4m^2 + 4m - 1}{4m^2+2} = 1 - \dfrac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \le 1$ (vì $\dfrac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \ge 0 \quad \forall m$).

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là 1 khi $m = \dfrac{1}{2}\cdot$

b) Xét phương trình $(I)\begin{cases} x^3y^3 + 1 = 19x^3 \\ xy^2 + y = -6x^2 \end{cases}.$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình, suy ra $x \ne 0.$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^3 - 3\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 19 \\ \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = -6 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x} + y = u;\ \dfrac{y}{x} = v$ ta có:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 1 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -6 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 1 \\ \dfrac{y}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + x - 1 = 0 \\ y = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-1) = 0 \\ y = -6x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình (I) có hai nghiệm $\left(-\dfrac{1}{2};3\right);\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$x^5 - x = x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right) \vdots 6 \quad (1)$ (vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp)

Với $x = 5q \left(q \in \mathbb{Z}_+\right)$ thì $x^5 - x \vdots 5$

Với $x = 5q \pm 1 \left(q \in \mathbb{Z}_+\right)$ thì $x^5 - x \vdots 5$

Với $x=5q\pm 2\ (q\in\mathbb{Z}_+)$ thì $x^5-x\vdots 5$

Suy ra $x^5-x\vdots 5\ (2)$ mà $(5,6)=1\ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $x^5-x\vdots 30$

Xét hiệu $Q-P=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+\left(a_3^5-a_3\right)+...+\left(a_{2019}^5-a_{2019}\right)$

Vì $x^5-x\vdots 30$ nên $Q-P\vdots 30$

Mà theo bài ra $P\vdots 30$ nên $Q\vdots 30$

b) Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1+a)\left(1-a+a^2\right)}}\ge\frac{2}{(1+a)+\left(1-a+a^2\right)}=\frac{2}{2+a^2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}\ge\frac{2}{2+b^2};\quad \frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge\frac{2}{2+c^2}$$

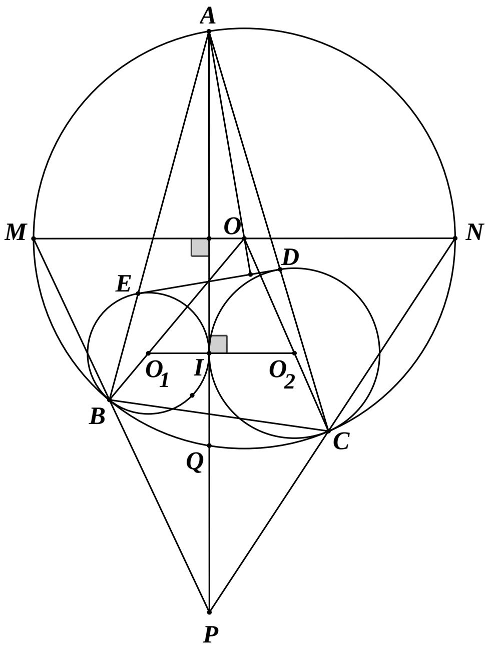
Bài toán trở về

$$\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 12$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số a^2,b^2,c^2 có $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=12$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Bài 4. (3,0 điểm)



a) Chứng minh $\Delta ABI\backsim\Delta AIE$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AI}{AE}=\dfrac{AB}{AI}\Rightarrow AI^2=AE.AB$

Tương tự $AI^2=AD.AC$

Suy ra $AE.AB=AD.AC\Rightarrow\Delta AED\backsim\Delta ACB\ (c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{AED}=\widehat{ACB}\Rightarrow$ Tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $BCDE$ nội tiếp suy ra $\widehat{ADE}=\widehat{ABC}$

mà $\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}\Rightarrow\widehat{ADE}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}$

Vì ΔAOC cân tại O suy ra $\widehat{OAC}=\frac{180^o-\widehat{AOC}}{2}$

Suy ra $\widehat{ADE}+\widehat{OAC}=90^o$. Vậy $OA\perp DE$.

c) Gọi P là giao điểm của BM và CN .

Vì $O_1O_2 // MN\Rightarrow\widehat{BO_1I}=\widehat{BON}$ (hai góc đồng vị)

Do ΔO_1BI cân tại O_1 suy ra $\widehat{O_1BI}=\frac{180^o-\widehat{BO_1I}}{2}$

Tương tự $\widehat{OBN}=\frac{180^o-\widehat{BON}}{2}\Rightarrow\widehat{O_1BI}=\widehat{OBN}$.

Suy ra ba điểm B,I,N thẳng hàng. Suy ra $BN\perp BM$.

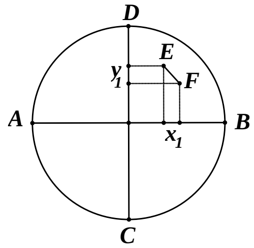
Chứng minh tương tự ba điểm C,I,M thẳng hàng $\Rightarrow CN\perp CM$

Do đó I là trực tâm của $\Delta PMN\Rightarrow PI\perp MN$

Mà $AI\perp MN$ nên ba điểm A,I,P thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AQ,BM,CN đồng quy.

Bài 5. (1,0 điểm)



Gọi độ dài hình chiếu của EF trên AB,CD là x_1,y_1.

Ta có $x_1+y_1\ge 1$.

Gọi độ dài hình chiếu của 37 đoạn thẳng còn lại trên AB là $x_2,...,x_{38}$ trên CD là $y_2,...,y_{38}$.

Khi đó ta có $(x_1+x_2+\cdots+x_{38})+(y_1+y_2+\cdots+y_{38})\ge 38$

Do vậy tồn tại một trong hai tổng lớn hơn hoặc bằng 19, giả sử $x_1+x_2+\cdots+x_{38}\ge 19$

Do đó trên AB tồn tại một điểm M thuộc ít nhất hai trong các hình chiếu trên AB. Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB là đường thẳng cần tìm

Đề số 20

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Đkxđ : $x;y\ne 0$; $y\ne -2x$

Từ giả thiết:

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y}\Leftrightarrow\frac{2y-x}{xy}=\frac{1}{2x+y}\Leftrightarrow(2y-x)(2x+y)=xy$$

`

$$\Leftrightarrow 4xy+2y^2-2x^2-xy=xy\Leftrightarrow 2xy+2y^2-2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow xy+y^2-x^2=0\ (*)$$

Vì $x;y\ne 0$ nên chia cả hai vế của phương trình (*) cho xy, ta được:

$$1+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=0\Leftrightarrow\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1\Rightarrow\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=3$$

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Ta có $(c-2)^2=(a+b)^2\geq 4ab=4\left(2c^2-3c+1\right)\Rightarrow c^2-4c+4\geq 8c^2-12c+4$

$\Leftrightarrow 7c^2-8c\leq 0\Leftrightarrow c(7c-8)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq c\leq\frac{8}{7}$

Do đó $P=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(c-2)^2-2\left(2c^2-3c+1\right)=-3c^2+2c+2$

$=-3\left(c^2-\frac{2c}{3}-\frac{2}{3}\right)=-3\left(c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\leq\frac{7}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $c=\frac{1}{3}$ (t/m)

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$ khi $c=\frac{1}{3}$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Gọi độ dài quãng đường AC là x (km). Điều kiện: $0<x<33$, khi đó quãng đường BD là $33-x$ (km).

Gọi vận tốc của An là y (km/h), điều kiện: $y>0$, khi đó vận tốc của Bình là $\frac{2y}{3}$ (km/h) và của Cường là $\frac{4y}{3}$ (km/h).

Thời gian An đi từ Sài Gòn đến C là $\frac{x}{y}$ (giờ) và từ Sài Gòn đến D là $\frac{x+6}{y}$ (giờ).

Thời gian Bình đi từ Biên Hòa đến D là $\frac{99-3x}{2y}$ (giờ).

Thời gian Cường đi từ Biên Hòa đến C là $\frac{117-3x}{4y}$ (giờ).

Vì Cường và Bình xuất phát sau An 5 phút $=\frac{1}{12}$ giờ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{117-3x}{4y}=\frac{1}{12}\\ \frac{x+6}{y}-\frac{99-3x}{2y}=\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{117-3x}{4y}+\frac{1}{12}\\ \frac{x}{y}=\frac{87-3x}{2y}+\frac{1}{12}\end{cases}\Rightarrow\frac{117-3x}{4y}=\frac{87-3x}{2y}$$

$\Leftrightarrow 117-3x=2(87-3x)$

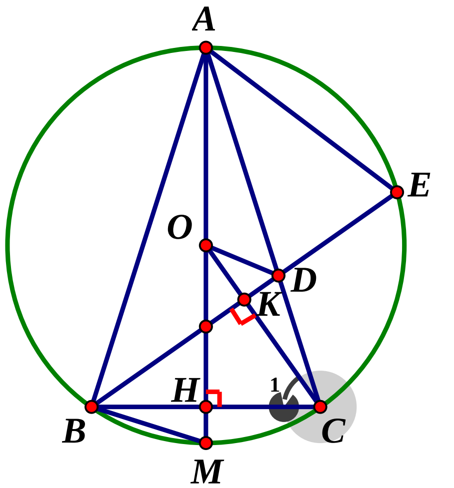
$\Rightarrow x=19$ (thỏa mãn điều kiện).

Ta có $\frac{19}{y}=\frac{117-3.19}{4y}+\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{19}{y}=\frac{15}{y}+\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{4}{y}=\frac{1}{12}\Rightarrow y=48$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc của An, Cường, Bình lần lượt là 48 (km/h), 64 (km/h), 32 (km/h).

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Kẻ đường cao AH của ΔABC, tia AH cắt (O) tại M.



Vì ΔABC cân tại A nên AM là đường kính và $HB = HC = 2$ (cm).

Tam giác ABM vuông tại B nên $AB^2 = AH.AM$

$\Rightarrow 64 = \sqrt{AB^2 - HB^2}.AM$

$\Rightarrow 64 = \sqrt{60}.AM \Rightarrow AM = \dfrac{64}{\sqrt{60}} = \dfrac{32\sqrt{15}}{15}$

$\Rightarrow AO = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$ (cm)

Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{CBK}$, $\widehat{COM} = \widehat{COH}$ mà $\widehat{CBK} = \widehat{COH}$ (cùng phụ $\widehat{C_1}$) nên suy ra

$\widehat{CBD} = \widehat{COM}$

Lại có ΔAOC có $OA = OC = R$ nên ΔAOC cân tại O, $\widehat{COM}$ là góc ngoài của ΔAOC tại đỉnh O nên $\widehat{COM} = 2\widehat{CAM} = \widehat{CAB}$.

Suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CAB}$

Xét ΔABC và ΔBDC có:

$\widehat{C}$ là góc chung;

$\widehat{CBD} = \widehat{CAB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \dfrac{BC^2}{AC} = \dfrac{4^2}{8} = 2$ (cm) và $BD = BC = 4$ (cm)

$\Rightarrow AD = AC - CD = 8 - 2 = 6$ (cm).

Xét ΔCBD và ΔEAD có:

$\widehat{CDB} = \widehat{EDA}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{DBC} = \widehat{EAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

$\Rightarrow \Delta CBD \# \Delta EAD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CD}{DE} \Rightarrow DE = \dfrac{AD.CD}{BD} = \dfrac{6.2}{4} = 3$ (cm)

Ta có $BD.DE = (BK + KD)(EK - KD) = (BK + KD)(BK - KD) = BK^2 - KD^2$

$= (OB^2 - OK^2) - (OD^2 - OK^2) = OB^2 - OD^2$

$\Rightarrow OD = \sqrt{OB^2 - BD.DE} = \sqrt{\dfrac{256}{15} - 3.4} = \dfrac{2\sqrt{285}}{15}$ (cm).

Câu 5: *(4,0 điểm)*

a) Ta có bán kính đáy hình trụ là $R = 12,2 : 2 = 6,1$ (cm)

Do đó thể tích hình trụ $V=\pi R^2 h=\pi.(6,1)^2.2,4=89,304\pi$ (cm³)

Vậy thể tích của một miếng phô mai là $\frac{V}{8}=\frac{89,304\pi}{8}=11,163\pi$ (cm³)

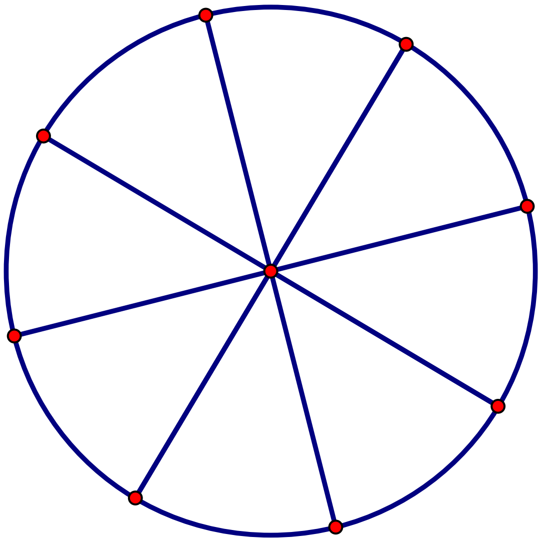
b) Một miếng phô mai là một hình gồm hai mặt đáy là hai hình quạt tròn bằng nhau nên có diện tích là $S_1=2.\frac{\pi R^2 \ell}{360}=2.\frac{\pi.R^2.45}{360}=\frac{\pi R^2}{4}$

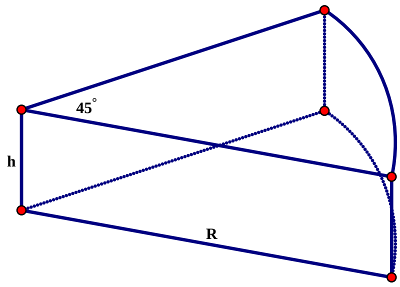
Hai mặt bên là hai hình chữ nhật bằng nhau nên diện tích là $S_2=2.hR$

Một mặt bên là hình chữ nhật dạng cong nên có diện tích là $S_3=\frac{2\pi R}{8}.h=\frac{\pi Rh}{4}$

Diện tích giấy phải gói là $S_1+S_2+S_3=\frac{\pi R^2}{4}+2.hR+\frac{\pi Rh}{4}=\frac{\pi}{4}R(R+h)+2.hR$

$$=\frac{3,14}{4}.6,1(6,1+2,4)+2.6,1.2,4\approx 70\,(\text{cm}^3).$$





Đề số 21

Câu 1 *(3,0 điểm)*

1) Ta có

$$A=\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\frac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right).\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{x}+1\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)+3}{\left(x^2+x\sqrt{3}+3\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}.\frac{x^2+3+x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}.x-3+3}{x-\sqrt{3}}.\frac{1}{x\sqrt{3}}$$

$$A=\frac{1}{x-\sqrt{3}}$$

2) Tính tổng : $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Với x > 0, ta có:

$$1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-2.\frac{x+1}{x}.\frac{1}{x+1}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\left|1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right|$$

Vì x > 0 $\Rightarrow 0<x<x+1 \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{x+1}\Rightarrow 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}>0$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} \quad (*)$$

Áp dụng công thức (*), ta có:

$$B=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)$$

$$\Rightarrow B=2019-\frac{1}{2019}$$

Câu 2 *(3,0 điểm)*

1) từ pt (1) $\Leftrightarrow x^2+5x+2-\sqrt{x^2+5x+4}=0$

Đặt t = $\sqrt{x^2+5x+4}$ (đk: $t\ge 0$) $\Rightarrow t^2=x^2+5x+4$

Ta có pt: $t^2-t-2=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \quad (n) \\ t=-1\ (l)\end{array}\right.$

Với t = 2, ta có: $\sqrt{x^2+5x+4}=2 \Leftrightarrow x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Vậy pt có hai nghiệm: $x=0$, $x=-5$

2) $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4 \end{cases}$

Đk: $y \neq 0$

Khi đó hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right).\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$

Đặt $a=x^2+\dfrac{1}{y^2}$, $b=x+\dfrac{1}{y}$

Từ đó hệ pt có dạng: $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a.(4-a)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2-x)^2=2 \\ \dfrac{1}{y}=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2=0 \\ \dfrac{1}{y}=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} (n)$

Vậy nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 3 *(3,0 điểm)*

1) ta có: 1947 = 3.11.59

Đặt $A=46^n+296.13^n$

* $\begin{cases} 46^n \equiv 1^n = 1 (\bmod 3) \\ 13^n \equiv 1^n = 1 (\bmod 3) \end{cases}$

Suy ra: $A \equiv 1+296 \equiv 297 \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow A \vdots 3$ (1)

* $\begin{cases} 46^n \equiv 2^n = 1(\bmod 11) \\ 13^n \equiv 2^n = 1(\bmod 11) \end{cases}$

Suy ra: $A \equiv 2^n + 296.2^n \equiv 297.2^n \equiv 11.27.2^n \equiv 0(\bmod 11) \Rightarrow A \vdots 11$ (2)

* $46^n \equiv (-13)^n \equiv -13^n (\bmod 13)$

Vì n là số tự nhiên lẻ

$\Rightarrow A \equiv -13^n + 296.13^n \equiv 295.13^n \equiv 5.59.13^n \equiv 0(\bmod 59)$
$\Rightarrow A \vdots 59$ (3)

Mà 3; 11; 59 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (1), (2), (3)

$\Rightarrow A \vdots (3.11.59) \Rightarrow A \vdots 1947$

Cách 2:

Ta có: 1947 = 33. 59

Đặt $A = 46^n + 296.13^n = 46^n - 13^n + 297.13^n = \left(46^n - 13^n\right) + 297.13^n$

$A = \left(46 - 13\right).A_1 + 33.9.13^n = 33\left(A_1 + 9.13^n\right) \vdots 33$

Lại có:

$A = 46^n + 296.13^n = 46^n - (-13^n) + 295.13^n = \left[46^n - (-13^n)\right] + +295.13^n$

$A = \left[46 - (-13)\right].A_2 + +59.5.13^n$ (vì n lẻ)

$= 59.\left(A_2 + 5.13^n\right) \vdots 59$

Mà $\left(33;59\right) = 1$ nên $A \vdots (33.59) = 1947$

2) Đặt $A = m^2$ và $B = n^2$, với m, n là các số nguyên dương (m < n)

Ta có: $A + 1111 = B \Leftrightarrow m^2 + 1111 = n^2$

$\Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 11.101$

Do m < n $\Rightarrow n - m$; $n + m$ là hai số nguyên dương và $n - m < n + m$

Mà 11 và 101 là hai số nguyên tố nên 1111 chỉ có các cách phân tích thành tích 2 số nguyên dương là : 1111 = (1).(1111) = (11).(101)

Mà $n-m<n+m$ nên có hai trường hợp:

* TH1: $\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=1111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=556 \\ m=555 \end{cases}$ (loại vì $A=m^2$ có nhiều hơn 4 chữ số)

* TH2: $\begin{cases} n-m=11 \\ n+m=101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=56 \\ m=45 \end{cases}$ khi đó : $\begin{cases} A=2025 \\ B=3136 \end{cases}$

Câu 4 *(4,0 điểm)*

1)

a) Xét $A(-2;1)$ ta có: $m.(-2)+(m-2).1+m+2=-2m+m-2+m+2=0$, $\forall m$

$\Rightarrow A\in(d_1)$ với mọi m

Do (d_1) là đường thẳng thay đổi nên (d_1) chỉ qua điểm cố định $A(-2;1)$.

Tương tự: Xét $B(1;2)$ ta có: $(2-m).1+m.2-m-2=2-m+2m-m-2=0$, $\forall m$

$\Rightarrow B\in(d_2)$ với mọi m

$\Rightarrow$ (d_2) luôn đi qua điểm cố định $B(1;2)$

b) ta chứng minh 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) luôn vuông góc với nhau

* Nếu m = 0: (d_1): $-2y+2=0$ là đường thẳng song song với Ox

(d_2): $2x-2=0$ là đường thẳng song song với Oy

Suy ra: $(d_1)\perp(d_2)$

* Nếu m = 2: (d_1): $2x+2=0$ là đường thẳng song song với Oy

(d_2): $2y-2=0$ là đường thẳng song song với Ox

Suy ra: $(d_1)\perp(d_2)$

* Nếu $m\neq 0$ và $m\neq 2$:

(d_1) có pt: $y=\left(\dfrac{m}{2-m}\right)x+\dfrac{m+2}{2-m}$; (d_2) có pt: $y=\left(\dfrac{m-2}{m}\right)x+\dfrac{m+2}{m}$

Tích hệ số góc của (d_1) và (d_2) là $\left(\dfrac{m}{2-m}\right).\left(\dfrac{m-2}{m}\right)=-1$

Suy ra: $(d_1) \perp (d_2)$

Vậy ta luôn c/minh được $(d_1) \perp (d_2) \Rightarrow (d_1)$ luôn cắt (d_2) tại I

Và $IA \perp IB$, A và B là hai điểm cố định $\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AB cố định.

2) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a > 1,\ b > 1,\ c > 1,\ d > 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16$$

Vì a, b, c, d > 1 nên a – 1> 0, b – 1> 0, c – 1 > 0, d – 1 > 0

Áp dụng BĐT AM – GM ta có:

$$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}.4(b-1)} = 4a \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{c-1} + 4(c-1) \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c-1}.4(c-1)} = 4c \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{d-1} + 4(d-1) \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{d-1}.4(d-1)} = 4c \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{d^2}{a-1}.4(a-1)} = 4d \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có:

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} + 4(a+b+c+d) - 16 \geq 4(a+b+c+d) +$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 2$

Cách 2:

Ta có :

$(b-2)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 4(b-1) > 0 \Rightarrow b-1 \leq \frac{b^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b-1} \geq \frac{a^2}{\frac{b^2}{4}} = \frac{4a^2}{b^2}$

Tương tự, ta có: $\frac{b^2}{c-1} \geq \frac{4b^2}{c^2}$; $\frac{c^2}{d-1} \geq \frac{4c^2}{d^2}$; $\frac{d^2}{a-1} \geq \frac{4d^2}{a^2}$

Do đó:

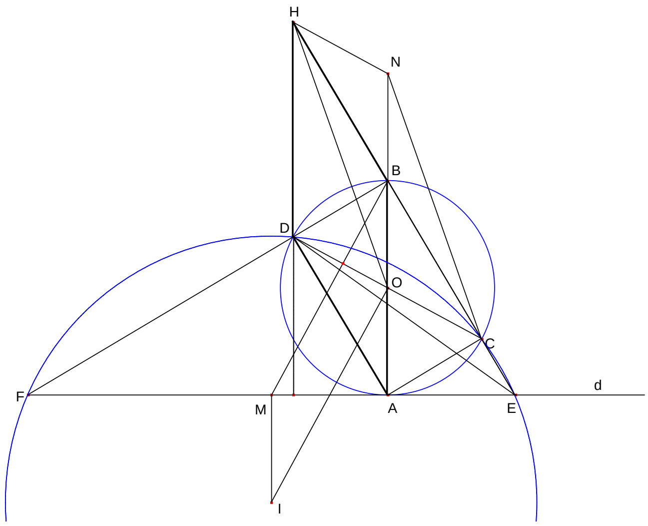
$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{d-1}+\frac{d^2}{a-1} \geq 4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$\geq 4\left(2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}}+2\sqrt{\frac{c^2}{d^2}.\frac{d^2}{a^2}}\right)$$

$$=8\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 16$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c = d = 2$

Câu 5 *(5, 0 điểm).*



1) Chứng minh tứ giác *CDFE* nội tiếp được đường tròn

Ta có: $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)

Do: d là tiếp tuyến của (O) tại A $\Rightarrow d \perp AB$

Và $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đ.tròn) $\Rightarrow AD \perp BF$

Suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{BFA}$ (cùng phụ $\widehat{ABF}$)

Do đó: $\widehat{BCD} = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow \widehat{DCE} + \widehat{DFE} = \widehat{DCB} + \widehat{DCE} = 180^0$

Suy ra: tứ giác *CDFE* nội tiếp.

2) Chứng minh : $AB = 2.IM$

Ta có: $ME = MF$ (gt)

$\Rightarrow MI \perp EF$ (T/c đường kính và dây cung)

$AB \perp EF$ (EF là t/tuyến của (O))

$\Rightarrow MI // AB$ hay MI // OB (1)

Xét ΔFBE vuông tại *B*, trung tuyến *BM* $\Rightarrow$ $MB = MF$

$\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MBF}$

Vì tứ giác *CDFE* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{MBD} + \widehat{BDC} = \widehat{BFM} + \widehat{BEM} = 90^0$

$\Rightarrow BM \perp CD$

Lại có $IO \perp CD$ (T/c đường kính và dây cung)

Suy ra: $BM // IO$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ *BMIO* là hình bình hành

$\Rightarrow IM = BO = \dfrac{1}{2}AB$ hay $AB = 2.IM$

3) Vì *H* là trực tâm của ΔDEF , ta có $DH // AB$ (cùng vuông góc với *EF*)

$AD // BH$ (cùng vuông góc với *FB*)

Suy ra tứ giác *ABHD* là hình bình hành $AH = AD$

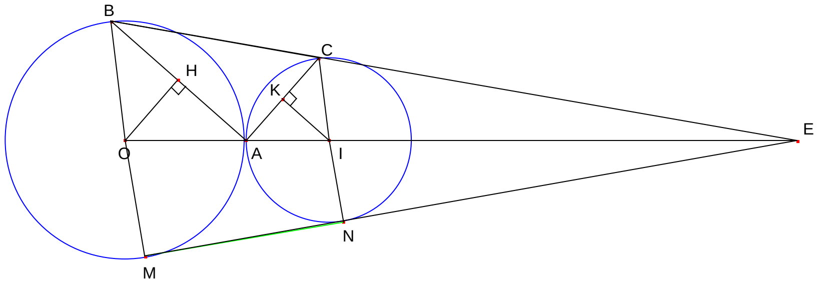
Mà $AD = BC$ (vì *ADBC* là hình chữ nhật) $\Rightarrow BH = BC$

Lấy *N* đối xứng với *O* qua *B*, ta có tứ giác *OHNC* là hình bình hành

$\Rightarrow NH = OC = R$ không đổi và *N* là điểm cố định (Vì *O* và *B* cố định)

Vậy khi *C* di động trên (O) thì *H* chạy trên đường tròn $(N ; R)$

Câu 6 *(2, 0 điểm).*



1) Chứng minh : *BC, OI, MN* đồng quy

Gọi *E* là giao điểm của đường thẳng *BC* và *OI*

Ta có *O, A, I* thẳng hàng (t/c đường nối tâm)

ΔIAC cân tại $I \Rightarrow \widehat{AIC} = 180^0 - 2.\widehat{IAC}$

ΔOAB cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOB} = 180^0 - 2.\widehat{OAB}$

$\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{AIC} = 360^0 - 2.(\widehat{OAB} + \widehat{IAC}) = 360^0 - 2.90^0 = 180^0$

$\Rightarrow IC \,//\, OB$

Áp dụng định lý Talet trong ΔEOB ta có : $\dfrac{EI}{EO} = \dfrac{IC}{OB} = \dfrac{r}{R}$

Gọi *E′* là giao điểm của *OI* và *MN*

ΔEOM có *IN // OM* (cùng vuông góc với *MN*). Áp dung định lý Talet ta có:

$\dfrac{EI}{EO} = \dfrac{IN}{OM} = \dfrac{r}{R}$

Suy ra : *E* trùng *E′*. Vậy ba đường thẳng *BC, OI, MN* đồng quy.

2) Xác định số đo $\widehat{AOB}$ để diện tích ΔABC lớn nhất.

Vẽ $OH \perp AB (H \in AB)$; $IK \perp A(K \in AC)$

Ta có: $\widehat{OAH} = \widehat{AIK} = \alpha$ (cùng phụ với $\widehat{KAI}$)

$AB = 2.AH = 2.OA.\cos\widehat{OAB} = 2.R.\cos\alpha$

$AC = 2.AK = 2.IA.\sin\widehat{AIK} = 2.r.\sin\alpha$

Vì ΔABC vuông tại *A*, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{1}{2}.2.R.\cos\alpha.2.r.\sin\alpha = R.r.2.\cos\alpha.\sin\alpha$$

Mặt khác: $2.\cos\alpha.\sin\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Do đó : $S_{\Delta ABC} \le R.r$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

Vậy diện tích ΔABC lớn nhất khi góc $\alpha = 45^0$

Đề số 22

Câu 1: Ta có: $\sqrt{2}\text{A} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$.

$\sqrt{2}\text{A} = \sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1 = 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \text{A} = \sqrt{10}$.

Câu 2: *a)* Điều kiện xác định: $x \ge -2$.

Ta có: $\left(\sqrt{x+2}+1\right)(4-x) = 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(4-x) = 2(x+1)\left(\sqrt{x+2}-1\right)$.

$\Leftrightarrow (x+1)(4-x) = 2(x+1)\left(\sqrt{x+2}-1\right)$.

Vì $x=-1 \Rightarrow 6=0$ (vô lý), do đó $x \ne -1$.

Khi đó: $4-x = 2\left(\sqrt{x+2}-1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 6-x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 6 \\ x^2-16x+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

b) Điều kiện xác định: $x \ne 0$.

$$\begin{cases} x-2y = \dfrac{2}{x}-1 \\ x^2-\dfrac{4}{x^2}+1 = 4y(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \dfrac{2}{x}-1 \\ (x-2y)^2-\dfrac{4}{x^2}+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{x}-1\right)^2 - \frac{4}{x^2}+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay vào phương trình thứ nhất được $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x;y) = (2;1)$.

Câu 3: *a)* Để $(d_1)//(d_2)$ thì $\begin{cases} m^2-5m=-6 \\ 2m \neq m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-3)=0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Rightarrow m=2$.

b) Gọi số lần đi của robot từ A đến B là x, điều kiện xác định: $x \in \mathbb{N}^*$.

Thời gian robot đi là: $\frac{5}{2,5}+\frac{10}{2,5}+\frac{15}{2,5}+\ldots+\frac{5x}{2,5}=2+4+6+\ldots+2x=x(x+1)$ (giây).

Thời gian robot nghỉ là: $1+2+3+\ldots+(x-1)=\frac{(x-1)x}{2}$ (giây).

Theo đề bài ra ta có: $x(x+1)+\frac{(x-1)x}{2}=551 \Leftrightarrow 3x^2+x-1102=0$

Giải phương trình bậc hai, ta được: $x=-\frac{58}{3}$ (loại); $x=19$ (thỏa mãn).

Quãng đường robot chuyển động từ A đến B là: $95m$.

Câu 4:

a) Xét ΔADC và ΔABD có:

$\widehat{A}$ chung

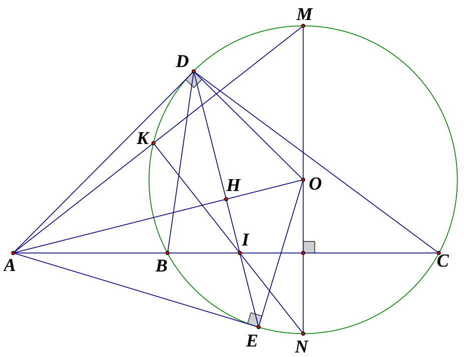
$\widehat{ADB}=\widehat{DCB}$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp)

Do đó: $\Delta ADC \backsim \Delta ABD\,(g.g)$.

$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2=AB.AC \Rightarrow AD=\sqrt{AB.AC}$

.

Do A, B, C cố định nên D cố định.



b) Gọi J là giao điểm của MN với AC. Dây DE cắt AO tại H và cắt AC tại I.

Ta có: $AD=AE$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA=OE=R$.

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của DE.

$\Rightarrow AO \perp DE$ tại H

$\Rightarrow \widehat{IHO}=\widehat{IJO}=90^\circ \Rightarrow \Delta AHI \backsim \Delta AJO$.

$\Rightarrow \frac{AH}{AJ}=\frac{AI}{AO} \Rightarrow AH.AO=AI.AJ$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADO có: $AD^2=AH.AO$.

$\Rightarrow AD^2=AH.AJ$.

Ta lại có: $\Delta AKD \backsim \Delta ADM \Rightarrow \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AD}{AM} \Rightarrow AD^2 = AK.AM$.

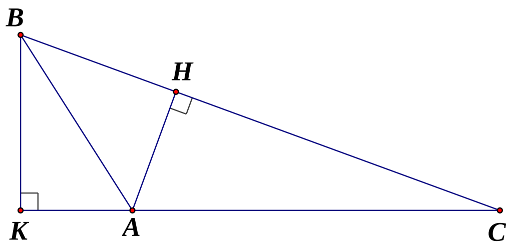
$\Rightarrow AK.AM = AI.AJ$.

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AJ} = \dfrac{AI}{AM} \Rightarrow \Delta AHI \backsim \Delta AJM \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AJM} = 90°$ hay $\widehat{MKI} = 90°$.

Mà $\widehat{MKN} = 90°$.

Do đó K, I, N thẳng hàng hay ba đường thẳng AB, DE và NK đồng quy.

Câu 5:



a) Kẻ $BK \perp AC$ (K thuộc đường thẳng AC), kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$

Ta có: $\sin B.\cos C + \cos B.\sin C = \sin \widehat{ABC}.\cos C + \cos \widehat{ABC}.\sin C = \dfrac{AH}{AB} \cdot \dfrac{CH}{AC} + \dfrac{BH}{AB} \cdot \dfrac{AH}{AC}$

$\sin B.\cos C + \cos B.\sin C = \dfrac{AH}{AB.AC} \cdot (CH + BH) = \dfrac{AH.BC}{AB.AC} = \dfrac{AC.BK}{AB.AC} = \dfrac{BK}{AB}$

Mặt khác: $Sin(B + C) = \sin \widehat{KAB} = \dfrac{BK}{AB}$.

Từ đó, ta có $\sin(B + C) = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C$.

b) Gọi 25 điểm trên mặt phẳng lần lượt là $A_1, A_2, A_3, ..., A_{25}$ phân biệt.

Giả sử A_1A_2 là độ dài lớn nhất trong các độ dài nối 2 điểm bất kì trong 25 điểm đã cho.

Nếu $A_1A_2 < 1$. Vì trong 3 điểm bất kỳ đã cho bao giờ cũng tìm được 2 điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1 nên với mọi điểm A_k $(k = 3; 4; ...; 25)$ ta luôn có $A_1A_k < 1$. Xét đường tròn $(A_1; 1)$ sẽ chứa toàn bộ 25 điểm đã cho, ta có điều phải chứng minh.

Nếu $A_1A_2 \geq 1$. Xét điểm tùy ý trong A_k điểm còn lại, giả sử A_3. Vì trong 3 điểm bất kỳ đã cho bao giờ cũng tìm được 2 điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1 nên $A_1A_2 < 1$ hoặc $A_2A_3 < 1$. Suy ra có ít nhất 12 đoạn thẳng xuất phát từ A_1 có độ dài nhỏ hơn 1, hoặc ít nhất 12 đoạn thẳng xuất phát từ A_2 có độ dài nhỏ hơn

1. Do đó, tồn tại đường tròn $(A_1;1)$ hoặc $(A_2;1)$ sẽ chứa ít nhất 13 điểm trong 25 điểm đã cho. Vậy tồn tại một hình tròn có bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong 25 điểm nói trên.

Câu 6:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a và bc (vì $a,b,c>0$), ta có:

$$a^2+bc \ge 2a\sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+bc} \le \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{b}{b^2+ca} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right); \dfrac{c}{c^2+ab} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Suy ra: $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{ab+bc+ca}{2abc} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

Mặt khác từ $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2018}\right)^2 \le 2019a^2b^2c^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2018} \le abc\sqrt{2019}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \le 1009\sqrt{2019}$$

Do đó: $P \le 1009\sqrt{2019}$ suy ra giá trị lớn nhất của P là $1009\sqrt{2019}$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2018\sqrt{2019}}$.

Đề số 23

Câu 1. (4,0 điểm)

ĐKXĐ: $x \ge 0, x \ne 1$.

a) $P = \left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}\right)$.

$$P = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right).$$

$$P = \left(\frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right).$$

$$P = \left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$P = \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) Để: $P = \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\ (TM)\\ \sqrt{x}=-3\ (KTM)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=4.$

Vậy $x=4$ thì $P=\dfrac{2}{7}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+4x=19-3y^2$.

Ta có: $2x^2+4x=19-3y^2 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2=21-3y^2$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=3\left(7-y^2\right)$

Vì: $2(x+1)^2 \vdots 2 \Rightarrow 3\left(7-y^2\right) \vdots 2$ *hay* $7-y^2 \vdots 2$ (1)

Mà: $2(x+1)^2 \ge 0 \Rightarrow 3\left(7-y^2\right) \ge 0 \Rightarrow y^2 \le 7 \Rightarrow y^2=\{1,4\}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Với $y=\pm 1 \Rightarrow 2(x+1)^2=3(7-1) \Leftrightarrow 2(x+1)^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-4\end{array}\right.$

Vậy pt có nghiệm là: $(x;y)=(2;1);\ (-4;\ 1);\ (2;-1);\ (-4;-1)$

b) Tìm dư trong phép chia: $x^{200}-2x^{91}+1$ cho x^2-1.

Giả sử: $f(x)=x^{200}-2x^{91}+1$; $g(x)=x^2-1$

Ta thấy: $\begin{cases} f(x)=x^{200}-2x^{91}+1=(x-1)\left(x^{199}+x^{198}+x^{197}+...+x^3-x^2-x-1\right)\\ g(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^{199}+x^{198}+x^{197}+...+x^3-x^2-x-1}{x+1}=\dfrac{h(x)}{x+1}$

=> Số dư của *f(x)* cho *g(x)* chính là số dư của *h(x)* cho *x +1*.

Mà: $h(-1)=\left((-1)^{199}+(-1)^{198}+...+(-1)^5+(-1)^4\right)+(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1$

$=0+(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-2$

Vậy số dư trong phép chia trên là -2.

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Phương trình: $x-(2m+3)x+m=0$.

Có: $\Delta=(2m+3)^2-4m=4m^2+12m+9-4m=4m^2+8m+9$

$=(2m+2)^2+5 \ge 5\ (\forall m)$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Vi-Et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+3\\ x_1.x_2=m\end{cases}$

Mà: $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(2m+3\right)^2-2m=4m^2+12m+9-2m$

$$=4m^2+10m+9=\left(2m+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}(\forall m)$$

Vậy $Min\left(x_1^2+x_2^2\right)=\frac{11}{4}$. Dấu "=" xảy ra <=> m = -5/4.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-2y^2-xy+2y-x=0 & (I)\\ x^2-y^2+6x+12=0 & (II)\end{cases}$

Từ phương trình (I) ta có: $x^2-2xy-2y^2+xy+2y-x=0$

$$\Leftrightarrow x\left(x-2y\right)+y\left(x-2y\right)-\left(x-2y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2y\right)\left(x+y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x-2y\right)=0\\ \left(x+y-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2y & (1)\\ x=1-y & (2)\end{array}\right.$$

Thay (1) vào (II) ta được: $\left(2y\right)^2-y^2+6\left(2y\right)+12=0\Leftrightarrow 3y^2+12y+12=0$

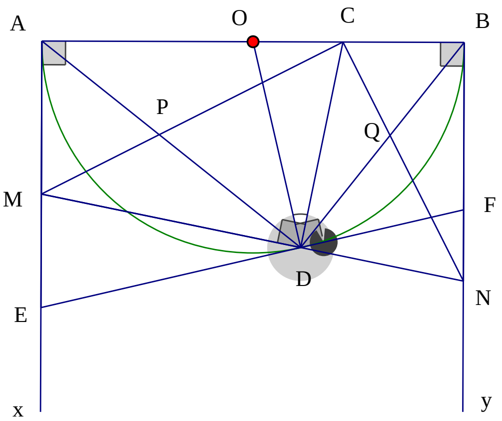
$\Leftrightarrow 3\left(y+2\right)^2=0\Leftrightarrow y=-2\Rightarrow x=-4\ (TM)$

Thay (2) vào (II) ta được:

$\left(1-y\right)^2-y^2+6\left(1-y\right)+12=0\Leftrightarrow -8y+19=0\Leftrightarrow y=\frac{19}{8}\Rightarrow x=\frac{-11}{8}\ (TM)$

Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm là: (-4; -2) và (-11/8; 19/8).

Câu 4. (5,0 điểm)



a) Xét tứ giác MACD có: $\widehat{MDC}=\widehat{MAC}=90^0$.

=> Tứ giác MACD nội tiếp.

Tương tự: Tứ giác CDNB nội tiếp.

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{MAD}=\widehat{MCD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MD}\\ \widehat{CBD}=\widehat{CND}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}\end{cases}$$

Mà: $\widehat{ABD} = \widehat{MAD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MCD} = \widehat{CBD} = \widehat{CND}$.

Mặt khác: $\widehat{DNC} + \widehat{DCN} = 90^0\left(MN \perp CD\right) \Rightarrow \widehat{DCN} + \widehat{DCM} = 90^0\left(\widehat{DNC} = \widehat{DCM}\right)$.

$\Rightarrow \widehat{DCN} + \widehat{DCM} = 90^0\left(\widehat{DNC} = \widehat{DCM}\right) \Rightarrow \widehat{PCQ} = 90^0$

=> Tứ giác PCQD nội tiếp (Vì: $\widehat{PDQ} + \widehat{PCQ} = 180^0$)

b) Ta có: $\widehat{MCN} = 90^0\,(cmt) \Rightarrow \widehat{NCB} + \widehat{MCA} = 90^0$

Mà: $\widehat{AMC} + \widehat{MCA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BCN}$ (cùng phụ với $\widehat{MCA}$)

Xét ΔAMC và ΔBCN có: $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = 90 \\ \widehat{M} = \widehat{C}\ (cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta BCN\ (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{AC}{BN} \Rightarrow AM.BN = AC.BC.$

c) Qua *D* kẻ tiếp tuyến của *(O)* cắt *Ax, By* lần lượt tại *E, F*. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_{AED} + S_{BFD}$.

Ta có: $S_{AED} + S_{BFD} = S_{ABFE} + S_{AED} = \frac{1}{2}\left(AE + BF\right).AB - \frac{1}{2}AD.BD$

$$= \frac{1}{2}EF.AB - \frac{1}{2}AD.BD$$

$$\geq \frac{1}{2}AB.AB - \frac{1}{2}AD.BD = \frac{1}{2}\left(AB^2 - AD.BD\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(AB^2 - \frac{AD^2 + BD^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 - \frac{AB^2}{2}\right) = \frac{1}{4}AB^2$$

Dấu "=" xảy ra <=> AD = BD. Hay D nằm chính giữa cung AB.

Khi đó: $Min\left(S_{AED} + S_{BFD}\right) = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}(2R)^2 = R^2$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Áp dụng bất đẳng thức Cô - Si ta có:

$$\frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{xy} \geq \frac{\sqrt{1 + 2xy}}{xy} = \sqrt{\frac{1}{x^2y^2} + \frac{2}{xy}} = \sqrt{z^2 + 2z} = \sqrt{z\left(x + 2\right)}\ \left(Do: z = \frac{1}{xy}\right)$$

Tương tự:

$$VT \geq \sqrt{z(z+2)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{y(y+2)}$$

$$\geq 3.\sqrt[3]{\sqrt{xyz.\left(x+2\right)\left(y+2\right)\left(z+2\right)}} = 3.\sqrt[6]{\left(xy + 2x + 2y + 4\right)\left(z+2\right)}$$

$$= 3.\sqrt[6]{xyz + 2\left(xy + yz + zx\right) + 4\left(x + y + z\right) + 8}$$

$$=3.\sqrt[6]{9+2.3.\sqrt[3]{xy.yz.zx}+4.3.\sqrt[3]{xyz}}=3.\sqrt[6]{9+6+12}$$

$$=3.\sqrt[6]{27}=3.\sqrt{\sqrt[3]{27}}=3.\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Đề số 24

Câu 1: *(2,0 điểm)*

$$A=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1.$$

Vậy $A=\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ là một số nguyên.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Ta có: $2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$.

+ $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

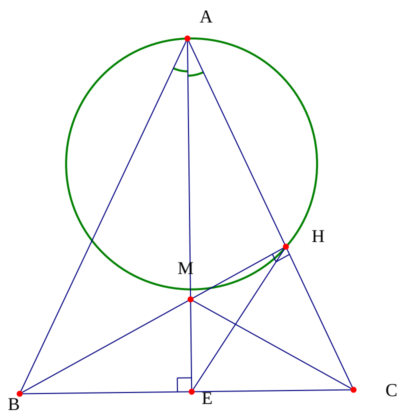
+ Xét $2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$ tac có:

- Nếu n chia hết cho 3 thì $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 3
- Nếu n chia 3 dư 2 thì $n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3+3n^2+n$ sẽ chia hết cho 3
- Nếu n chia 3 dư 1 thì $2n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3+3n^2+n$ sẽ chia hết cho 3

Vậy trong mọi trường hợp thì $2n^3+3n^2+n$ sẽ chia hết cho 3.

Ta có $(2;3)=1$ nên $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Câu 3: *(2,0 điểm)*



ΔABC cân tại A, AE là đường phân giác nên AE đồng thời là đường cao $\Rightarrow M$ là trực tâm của ΔABC.

- Ta có: $\widehat{AHB}=\widehat{AEB}=90^0$

$\Rightarrow$Tứ giác $AHEB$ nội tiếp (Hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh AB dưới một cặp góc bằng nhau $\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{BHE}$ mà $\widehat{BAE}=\widehat{EAH}$ và đường tròn đường kính AM chính là đường tròn ngoại tiếp ΔAMH nên $\widehat{MAH}=\widehat{MHE}$ nên theo hệ quả của tiếp tuyến và dây cung suy ra EH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AM .

Câu 4: *(2,0 điểm)*

Ta có:

$2x+5y-3xy=1 \Leftrightarrow 6x-9xy+15y=3$

$\Leftrightarrow 3x(2-3y)-10+15y=-7$

$\Leftrightarrow 3x(2-3y)-5(2-3y)=-7$

$\Leftrightarrow (3x-5)(2-3y)=-7$.

Nên: $\begin{cases} 3x-5=1 \\ 2-3y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

$\begin{cases} 3x-5=-1 \\ 2-3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=3 \end{cases}$ (Loại).

$\begin{cases} 3x-5=7 \\ 2-3y=-1 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-5=-7 \\ 2-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (loại).

Vậy nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình là $(2;3)$ hoặc $(4;1)$.

Câu 5: *(1,5 điểm)*

Ta có:

$(a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0$

$\Leftrightarrow ab+bc+ac=\dfrac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=\dfrac{1}{2}$

Vậy $M=a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: *(1,5 điểm)*

Ta có:

$$B=\frac{3x+4}{x^2+1}=\frac{6x+8}{2x^2+2}=\frac{-9x^2+6x-1+9x^2+9}{2x^2+2}=\frac{9}{2}-\frac{(3x-1)^2}{2(x^2+1)}\le\frac{9}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\dfrac{9}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{1}{3}$.

Lại có:

$$B=\frac{3x+4}{x^2+1}=\frac{6x+8}{2x^2+2}=\frac{x^2+6x+9-x^2-1}{2x^2+2}=\frac{(x+3)^2}{2x^2+2}-\frac{1}{2}\ge\frac{-1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\dfrac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $x=-3$.

Câu 7: *(1,5 điểm)*

Gọi $AC = s_1; CD = s_2; DB = s_3; s_1 > 0; s_2 > 0; s_3 > 0$.

Ta có: $s_1 + s_2 + s_3 = 30(km)$.

Gọi vận tốc lên, vận tốc xuống dốc lần lượt là $v_1; v_2; v_3$.

Thời gian đi và về là 4 giờ 25 phút $= \frac{53}{12}$ giờ.

Theo đề bài ta có phương trình:

$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \frac{s_1}{v_3} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_1} = \frac{53}{12} \Leftrightarrow s_1\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right) + s_3\left(\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_1}\right) + \frac{2s_2}{v_2} = \frac{53}{12}$

$\Leftrightarrow s_1\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) + s_3\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$

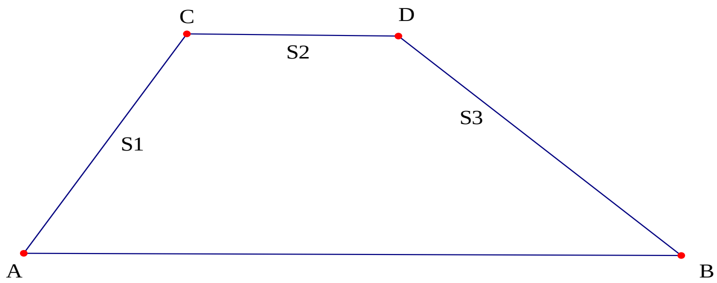
$\Leftrightarrow (s_1 + s_3)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{20}(s_1 + s_3) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{20}(30 - s_2) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$

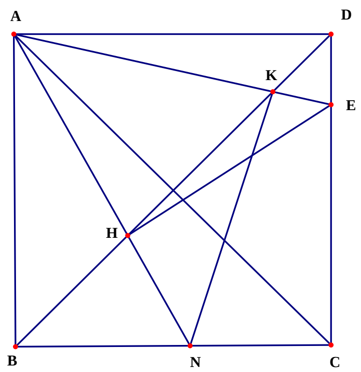
$\Leftrightarrow \frac{-s_2}{60} = \frac{-1}{12}$

$\Leftrightarrow s_2 = 5(km)$.



Vậy quãng đường ngang CD bằng 5 (km).

Câu 8: *(2,0 điểm)*



Vì $ABCD$ là hình vuông, AC và BD là hai đường chéo của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow \widehat{BDC} = 45°$ hay $\widehat{HDE} = 45°$; $\widehat{DBC} = 45°$ hay $\widehat{KBN} = 45°$.

Xét tứ giác $AHED$ có: $\widehat{HDE} = \widehat{HAE} = 45° \Rightarrow$ Tứ giác $AHED$ nội tiếp (Hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh HE dưới một cặp góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{AHE} = 180° \Rightarrow \widehat{HAE} = 90°$.

Xét tứ giác $AKNB$ có:

$\widehat{KBN} = \widehat{NAE} = 45° \Rightarrow$ Tứ giác $AKNB$ nội tiếp (Hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh KN dưới một cặp góc bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{AKN} = 180° \Rightarrow \widehat{AKN} = 90°$.

Từ đó ta có: $\widehat{ADE} = \widehat{ABN} = \widehat{AHE} = \widehat{AKN} = 90°$.

Tứ giác $EHNC$ có $\widehat{EHN} + \widehat{ECN} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow EHNC$ nội tiếp đường tròn đường kính EN.

(1)

Tứ giác $EKNC$ có $\widehat{EKN} + \widehat{ECN} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow EKNC$ nội tiếp đường tròn đường kính EN .

(2)

Tứ (1) và (2) suy ra tứ giác $EHNC$ và $EKNC$ nội tiếp đường tròn đường kính EN . Vậy các điểm $H, N, C,, E$ cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 9: *(2,0 điểm)*

Vì $abc=1$ ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Ta có:

$(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)$

$=abc+ab+ac+a+bc+b+c+1=2+(ab+bc+ac)+(a+b+c)$

và: $a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)=(ac+bc+ab)+(a+b+c)$

vậy (1) tương đương với

$$\frac{(ab+bc+ac)+(a+b+c)}{2+(ab+bc+ac)+(a+b+c)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\left[(ab+bc+ac)+(a+b+c)\right]\geq 6+3\left[(ab+bc+ac)+(a+b+c)\right]$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ac)+(a+b+c)\geq 6(*)$$

Lại có:

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$

$ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$ nên (*) luôn đúng

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Lưu ý: Bài này có thể chứng minh theo cách khác đó là nhờ sự ràng buộc $abc=1$ *ta có thể đặt* $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$ *khi đó* $\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}=1$ *ta vẫn có điều cần chứng minh.*

Câu 10: *(1,5 điểm)*

Ta có:

$2\sqrt{x-1}-2x+5=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2x-5$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{5}{2}\\4(x-1)=(2x-5)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{6+\sqrt{7}}{2}.$$

Thử lại ta có $x=\frac{6+\sqrt{7}}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên loại.

Xét $x \neq \frac{6+\sqrt{7}}{2}$ ta có: $2\sqrt{x-1}-2x+5=0$. Do đó với điều kiện $x \geq 1$ ta có:

$\sqrt{4x^2-15x+20}=4x-10+7\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-15x+20}-3\sqrt{x-1}-2(2\sqrt{x-1}+2x-5)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2-24x+29}{\sqrt{4x^2-15x+20}+3\sqrt{x-1}}+\dfrac{2(4x^2-24x+29)}{2\sqrt{x-1}-(2x-5)}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-24x+29=0 \\ 8\sqrt{x-1}+2x-5+2\sqrt{4x^2-15x+20}=0 \end{array}\right.$

Giải phương trình $4x^2-24x+29=0$ và chỉ nhận nghiệm $x=\frac{6-\sqrt{7}}{2}$.

Giải phương trình $8\sqrt{x-1}+2x-5+2\sqrt{4x^2-15x+10}=0$ ta nhận vô nghiệm vì

$8\sqrt{x-1}+2x-5+2\sqrt{4x^2-15x+20}=8\sqrt{x-1}+2(x-1)+\left(2\sqrt{4x^2-15x+20}-3\right)>0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\left\{\frac{6-\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Câu 11: *(2,0 điểm)*

Qua H vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB tại M, vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N.

- Tứ giác $AMHN$ là hình bình hành ($AM // HN$; $AN // MH$) nên $AM = HN$

ΔHAN có $HA < AN + HN = AN + AM$

Vì $MH // AC; BH \perp AC \Rightarrow BH \perp MH \Rightarrow HB < BM$

$HN // AB; CH \perp AB \Rightarrow CH \perp NH \Rightarrow HC < CN$

Ta có: $HA + HB + HC < AN + AM + BM + CN$

$\Rightarrow HA + HB + HC < AB + AC$ (1)

Chứng minh tương tự:

$HA + HB + HC < AC + BC$ (2)

$HA + HB + HC < AB + BC$ (3)

Từ (1); (2);(3) ta suy ra:

$3(HA + HB + HC) < 2(AB + AC + BC)$

$\Leftrightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Dấu "=" không xảy ra khi tam giác ABC nhọn.

Đề số 25

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}-\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|-\left|3-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}-\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|}=\frac{\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-\sqrt{2}}=3.$$

b) Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\ (*)\ \text{ với } a,\ b,\ c\in\mathbb{R} \text{ và } x,\ y,\ z>0.$$

Với $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $x,\ y>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\qquad(**)$$

$\Leftrightarrow\left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\ge xy(a+b)^2\ \Leftrightarrow\ (bx-ay)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Vì: $xy+yz+zx=673$ nên $x\left(x^2-yz+2019\right)=x\left(x^2+xy+zx+1346\right)>0.$

Tương tự: $y\left(y^2-zx+2019\right)>0$ và $z\left(z^2-xy+2019\right)>0$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}$$

$$=\frac{x^2}{x\left(x^2-yz+2019\right)}+\frac{y^2}{y\left(y^2-zx+2019\right)}+\frac{z^2}{z\left(z^2-xy+2019\right)}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)}\qquad(1)$$

Biến đổi:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Từ đó suy ra:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.673\right)$$

$$=(x+y+z)$$

$$\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.(xy+yz+zx)\right]$$

$$=(x+y+z)(x+y+z)^2=(x+y+z)^3\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}\quad \text{(đpcm).}$$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Gọi x (m/s) là vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh.

Điều kiện $x>0,2$.

Vận tốc lúc cõng bạn về của Khanh là $x-0,2$.

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{1800}{x-0,2}-\frac{1800}{x}=750$$

$\Leftrightarrow 750x^2-150x-360=0$ (hay $25x^2-5x-12=0$)

Giải phương trình ta được $x_1=0,8$ (nhận); $x_2=-0,6$ (loại)

Vậy vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh là $0,8$ (m/s).

b) Ta có

$$\begin{cases}x^3=2x+y\\y^3=2y+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=x-y\\x^3+y^3=3(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=x-y\\(x+y)(x^2-xy+y^2)=3(x+y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-1)=0\\(x+y)(x^2-xy+y^2-3)=0.\end{cases}$$

TH1: $\begin{cases}x-y=0\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0.\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}x-y=0\\x^2-xy+y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3},y=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3},y=-\sqrt{3}\end{array}\right.$

TH3: $\begin{cases}x^2+xy+y^2-1=0\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=-1\\x=-1,y=1\end{array}\right.$

TH4: $\begin{cases}x^2+xy+y^2-1=0\\x^2-xy+y^2-3=0\end{cases}$

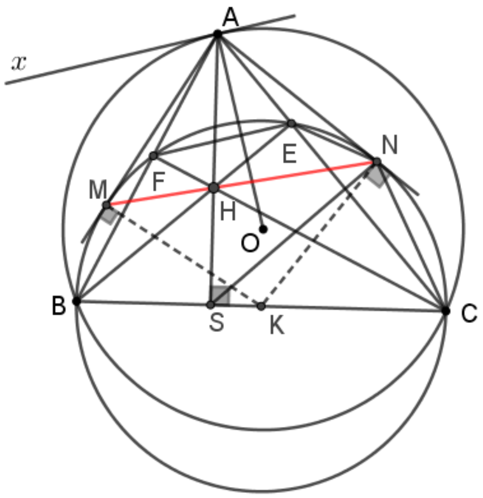
Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=x.y\end{cases}$ $(S^2-4P\ge0)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}S^2-P-1=0\\S^2-3P-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=-1\\S=0\end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases}x+y=0\\x.y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=-1\\x=-1,y=1\end{array}\right.$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình là: $(0;0)$; $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(1;-1)$; $(-1;1)$.

Câu 3: *(5,0 điểm)*



a) Chứng minh OA vuông góc EF.

Dựng tiếp tuyến Ax của (O). Ta có:

+ $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

+ $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$, do tứ giác $BFEC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AFE} \Rightarrow Ax \,//\, EF$

Mà $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp EF$.

b) Chứng minh rằng: M, H, N thẳng hàng.

ΔABC có BE, CF là hai đường cao và H là trực tâm.

Kẻ đường cao thứ 3 là AS của ΔABC.

M, N, S cùng thuộc đường tròn đường kính AK.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AN).

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (ΔAMN cân vì $AM = AN$ theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{ASN}$ (1)

Ta có: ΔANE đồng dạng ΔACN (g.g) $\Rightarrow AN^2 = AE.AC$

ΔAEH đồng dạng ΔASC (g.g) $\Rightarrow AH.AS = AE.AC$

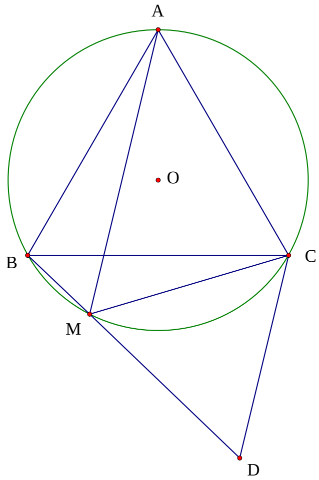
$\Rightarrow AN^2 = AH.AS$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AH} = \dfrac{AS}{AN} \Rightarrow$ ΔASN đồng dạng ΔANH (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ASN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ANH} \Rightarrow M,\ H,\ N$ thẳng hàng.

Câu 4: *(3,0 điểm)*



Trên tia đối của MB lấy điểm D sao cho $MD = MC$

$\widehat{BAC} = 60^o$ ($\triangle ABC$ đều) $\Rightarrow \widehat{BMC} = 120^o \Rightarrow \widehat{CMD} = 60°$

$\Rightarrow \triangle MCD$ đều $\Rightarrow CM = CD$

$\triangle ACM = \triangle BCD$ (c.g.c)$\Rightarrow AM = BD$.

Mà $BD = MB + MD = MB + MC$

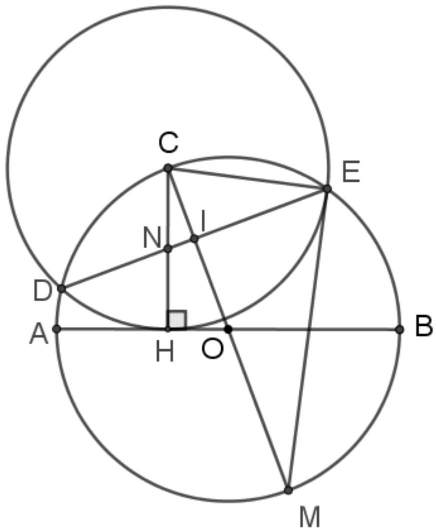
$\Rightarrow S = MA + MB + MC = 2MA$

Mà $AM \le 2R$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất khi MA là đường kính $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Khi đó $S = 2.2R = 4R$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*



Vẽ đường kính CM của đường tròn (O). Gọi N, I lần lượt là giao điểm của DE với CH và CM.

(O) và (C) cắt nhau tại $D, E \Rightarrow OC \perp DE$

ΔCEM vuông tại E, EI là đường cao nên $CE^2 = CI.CM$

Mà $CM = 2CO$ và $CE = CH$ nên $CH^2 = 2CI.CO$ hay $\dfrac{CH^2}{2} = CI.CO$ (1)

ΔCIN đồng dạng ΔCHO (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CI}{CH} = \dfrac{CN}{CO} \Rightarrow CN.CH = CI.CO$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $CH = 2CN \Rightarrow N$ là trung điểm của CH.

Vậy DE đi qua trung điểm của CH.

Đề số 26

Câu 1:

a) ĐKXĐ : $x \ge -3;\ x \ne 1$. Ta có $A = \dfrac{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{x-1} = -\sqrt{x+3}-1$.

b) Ta có : $A \le -1 \Rightarrow -\sqrt{x+3}-1 \le -1 \Leftrightarrow -\sqrt{x+3} \le 0 \Leftrightarrow x \ge -3; x \ne 1$.

Câu 2: a) ĐKXĐ : $x \ge -1$. Phương trình $\Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 5(x-2)\sqrt{x+1} + 2(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 4(x-2)\sqrt{x+1} - (x-2)\sqrt{x+1} + 2\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right] - \sqrt{x+1}\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{x+1}\right)\left(2x-4-\sqrt{x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1} = x-2 \\ \sqrt{x+1} = 2x-4 \end{array}\right.$

Xét $2\sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x(x-8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$ (TMĐK).

Xét $\sqrt{x+1} = 2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (TMĐK).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3;\ \ x = 8$.

Câu 3: a) Ta có p^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét p^2 chia cho 3 dư 0, vì p là số nguyên tố nên $p = 3$, suy ra $q = 1$, vô lí.

Xét p^2 chia cho 3 dư 1, suy ra $8q$ chia hết cho 3 mà $(8;3) = 1$ nên $q = 3 \Rightarrow p = 5$ thỏa mãn.

Vậy $p = 5; q = 3$ thỏa mãn bài.

b) Ta có :

$n^5 - n = n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right) = n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4+5\right) = n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right) + 5n\left(n^2-1\right)$

$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 5 và 6 nên chia hết cho 30.

Câu 3: Từ giả thiết $a+b+c+ab+bc+ca-6abc = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca} = 6$.

Áp dụng BĐT $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$ ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhia ta có $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ (2)

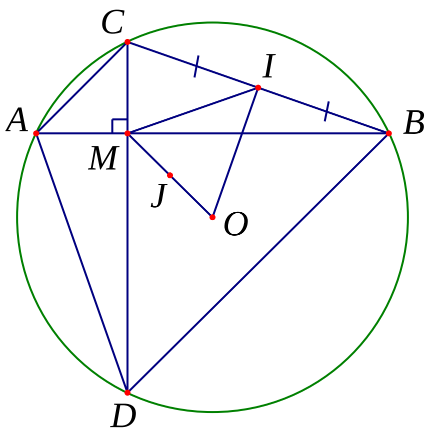
Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$6=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\Leftrightarrow P+\sqrt{3}\sqrt{P}\ge 6$.

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{P}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{P}+2\sqrt{3}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{P}-\sqrt{3}\ge 0\Leftrightarrow P\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 3:



a) Ta có $AC^2+BD^2=MA^2+MC^2+MB^2+MD^2$.

$=\left(MA^2+MD^2\right)+\left(MB^2+MC^2\right)=AD^2+BC^2$.

Kẻ đường kính CE ta có $\widehat{CDE}=90^o$ hay $CD\perp DE$.

$\Rightarrow DE\,//\,AB$ nên tứ giác $ABED$ là hình thang cân.

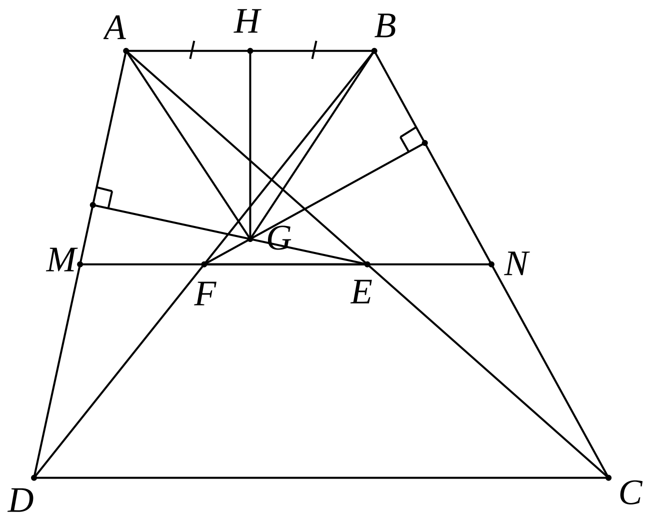
$\Rightarrow AD=BE$. Ta có $AD^2+BC^2=BE^2+BC^2=CE^2=4R^2$ không đổi.

b) Vì $IB=IC=IM$ nên $IO^2+IM^2=OC^2-IM^2+IM^2=R^2$.

Gọi J là trung điểm của MO. Áp dụng công thức đường trung tuyến trong ΔIMO ta có:

$IJ=\sqrt{\frac{IO^2+IM^2}{2}-\frac{MO^2}{4}}=\sqrt{\frac{R^2}{2}-\frac{MO^2}{4}}$ không đổi (vì O, M cố định). Do đó, I chạy trên đường tròn tâm J bán kính IJ không đổi.

Câu 4:



Gọi H là trung điểm của AB.

Ta có $HA = HB$ và $FD = FB$ nên HF là đường trung bình của ΔABD.

$\Rightarrow HF \,//\, AD$ mà $EM \perp AD$ nên $EM \perp HF$.

Tương tự HE cũng là đường trung bình của ΔABC nên $HE \,//\, BC$ mà $FN \perp BC$ nên $FN \perp HE$. Do đó G là trực tâm của $\Delta HEF \Rightarrow HG \perp EF$ (1)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Ta có ME là đường trung bình của ΔACD nên $ME // CD$.

Tương tự $NF // CD$ và $MN // CD$ hay M, F, E, N thẳng hàng.

Suy ra $EF // AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $HG \perp AB$ mà $HA = HB$.

Do đó tam giác GAB cân tại G suy ra $GA = GB$ (đpcm).

Đề số 27

Câu 1: a) Ta có $a^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$$= 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 6 + 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} + 1\right)^2$$

Do $a > 0$ nên $a = \sqrt{5} + 1$

$a = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow (a-1)^2 = 5$ hay $a^2 - 2a - 4 = 0$

Vậy a là nghiệm của phương trình $a^2 - 2a - 4 = 0$

b) Ta có $T = \dfrac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12} = \dfrac{a^4 - 2a^3 - 4a^2 - 2a^3 + 4a^2 + 8a + a^2 - 2a - 4 + 8}{a^2 - 2a - 4 + 16}$

$= \dfrac{a^2(a^2 - 2a - 4) - 2a(a^2 - 2a - 4) + a^2 - 2a - 4 + 8}{a^2 - 2a - 4 + 16} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$ (vì $a^2 - 2a - 4 = 0$)

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a)Ta có

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ $(S^2 - 4P \geq 0)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^3 - 3SP = 8 \\ S + 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ S^3 - 3S.\dfrac{2-S}{2} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ (S-2)(2S^2 + 7S + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = 2 \end{cases}$$

(Vì $2S^2 + 7S + 8 = 2(S+\dfrac{7}{4})^2 + \dfrac{15}{8} > 0$)

Khi đó $\begin{cases} x + y = 2 \\ x.y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 0 \\ x = 0, y = 2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \{(0;2);(2;0)\}$.

b) Phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$$

Đặt $y = x^2 + 6x$ ta có phương trình: $(y+5)(y+8)(y+9) = 360$

$$\Leftrightarrow y(y^2 + 22y + 157) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

(Vì $y^2 + 22y + 157 = (y+11)^2 + 36 > 0$)

Ta có: $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -6 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0; x = -6$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$

Cộng vế theo vế ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

b) Từ câu a) ta có: $(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ca) = 2.9 = 18 \Rightarrow 2P \geq 18 \Rightarrow P \geq 9$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b = c = \sqrt{3}$

Vậy $MinP = 9$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$

Vì $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$

Tương tự ta có: $bc + 1 \geq b + c$, $ca + 1 \geq c + a$

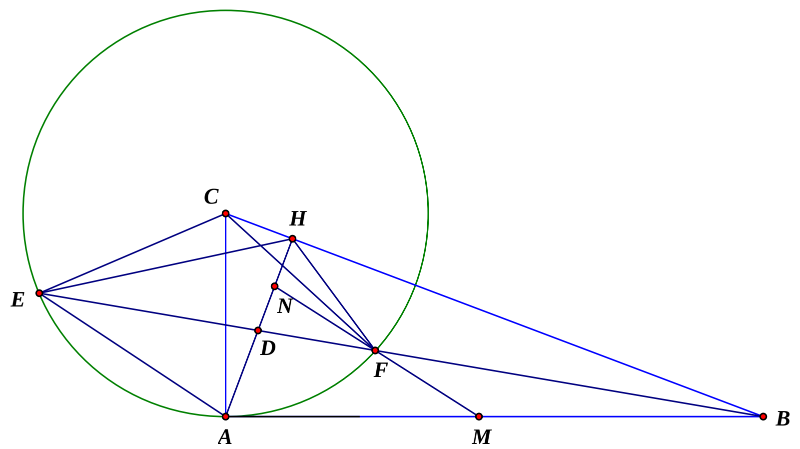
Do đó: $ab + bc + ca + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \leq \dfrac{9+3}{2} = 6$

Mà $P=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-18$

$\Rightarrow P\le 36-18=18$. Dấu bằng xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l} a=4;b=c=1 \\ b=4;a=c=1. \\ c=4;a=b=1 \end{array}\right.$

Vậy $MaxP=18$ khi: $\left[\begin{array}{l} a=4;b=c=1 \\ b=4;a=c=1. \\ c=4;a=b=1 \end{array}\right.$

Câu 3: *(6,0 điểm)*



a) AB là tiếp tuyến của đường tròn $(C;CA)\Rightarrow BA^2=BE.BF$ (1)

AH là đường cao của tam giác vuông $ABC\Rightarrow BA^2=BH.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE.BF=BH.BC$

Ta có: $BE.BF=BH.BC\Rightarrow \dfrac{BH}{BF}=\dfrac{BE}{BC}$

Từ $\dfrac{BH}{BF}=\dfrac{BE}{BC}$ và $\widehat{HBF}=\widehat{EBC}\Rightarrow \Delta HBF\sim\Delta EBC\Rightarrow \widehat{BHF}=\widehat{BEC}$

Suy ra tứ giác $EFHC$ nội tiếp đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{BHF}=\widehat{BEC}=\widehat{EFC}=\widehat{EHC}\Rightarrow \widehat{EHD}=\widehat{FHD}$ (vì $AH\perp BC$)

Do D nằm giữa E,F nên HD là phân giác của góc $\widehat{EHF}$

c) Ta có: $\widehat{BFM}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACF}=\widehat{AEF}\Rightarrow AE//MN$ (3)

Theo câu b) và vì $HD\perp HB$ nên HB là phân giác ngoài của $\widehat{EHF}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{MF}{AE}=\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{HF}{HE}=\dfrac{DF}{DE}=\dfrac{FN}{AE}\Rightarrow FM=FN.$

Câu 4: *(2,0 điểm)*

Ta có: $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{a^2+c^2}=\dfrac{2c}{b+c}\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{c^2}{a^2+c^2}-\dfrac{c}{b+c}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(b+c)-c(a^2+b^2)}{(b+c)(a^2+b^2)}+\frac{c^2(b+c)-c(a^2+c^2)}{(b+c)(a^2+c^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(a^2-bc)}{(b+c)(a^2+b^2)}+\frac{-c(a^2-bc)}{(b+c)(a^2+c^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-bc}{b+c}\left(\frac{b}{a^2+b^2}+\frac{-c}{a^2+c^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2-bc)^2(b-c)}{(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)}=0 \Rightarrow (a^2-bc)(b-c)=0$$

Xét $a^2-bc=0 \Rightarrow bc=a^2$ là số chính phương

Xét $b-c=0 \Rightarrow b=c$. Khi đó $bc=c^2$ là số chính phương

Đề số 28

Câu 1:

a) Ta có $a+b=c^3-2018c \Leftrightarrow a+b+c=(c-1).c.(c+1)-2016c$ chia hết cho 6. Mặt khác $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a-1).a.(a+1)+(b-1).b.(b+1)+(c-1).c.(c+1)$ chia hết cho 6

Do đó $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

b) Xét $x=1 \Rightarrow y=1$.

Xét $x \geq 2$ thì $4^x \vdots 8$. Nếu y chẵn, đặt $y=2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k \equiv 2\left(\bmod 8\right)$, vô lí

Nếu y lẻ $y=2k+1\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k.3 \equiv 4\left(\bmod 8\right)$, vô lí.

Vậy $x=y=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có $4B=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n.(n-1).(n-2).\left[(n+3)-(n-1)\right]$

$=n.(n+1).(n+2).(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n<n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

Mặt khác

$n^4+6n^3+11n^2+6n>n^4+6n^3+9n^2=\left(n^2+3n\right)^2 \Rightarrow \left(n^2+3n\right)^2<4B<\left(n^2+3n+1\right)^2$

Do đó B không phải là số chính phương.

Câu 2:

a) ĐKXĐ : $x \geq \frac{-7}{3}$. Khi đó phương trình tương đương

$3x^2+3x-3x\sqrt{3x+7}-4x-4+4\sqrt{3x+7}-x\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x+7}-3x-7$

$\Leftrightarrow 3x\left(x+1-\sqrt{3x+7}\right)-4\left(x+1-\sqrt{3x+7}\right)-\sqrt{3x+7}\left(x+1-\sqrt{3x+7}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+7}\right)\left(3x-4+\sqrt{3x+7}\right)=0$.

Xét trường hợp : $\sqrt{3x+7}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7=(x+1)^2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x=3.$

Xét trường hợp : $\sqrt{3x+7}=4-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7=(4-3x)^2 \\ \dfrac{-7}{3}\leq x\leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

b) Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+1)=5 \\ (x+y)(x-y)^2=6 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}$, ta có $\begin{cases} (a+1)b=5 \\ ab^2=6 \end{cases}$

Nếu $b=0 \Rightarrow x=y$, vô nghiệm. Vậy $b\neq 0$ ta có $ab^2=6 \Rightarrow a=\dfrac{6}{b^2}$. Thế vào

$(a+1)b=5$ được $b^2-5b+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$.

Với $b=2 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2} \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Với $b=3 \Rightarrow a=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{2}{3} \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{6} \\ y=-\dfrac{7}{6} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm : $\left(\dfrac{7}{4};-\dfrac{1}{4}\right),\left(\dfrac{11}{6};-\dfrac{7}{6}\right)$.

Câu 3:

a) Ta có $C=\sqrt{x^2+\dfrac{2x^2+2x+1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x}{x+1}=\sqrt{x^2+\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x}{x+1}$

$=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)^2}+\dfrac{x}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}=x+1$

b) Ta có $D=a(b+c)=a(1-a)=-a^2+a=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của D bằng $\dfrac{1}{4}$ khi $a-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

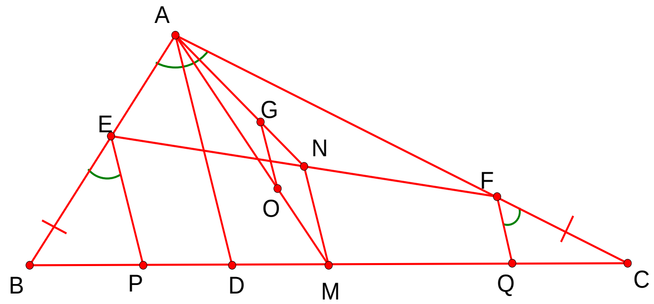
c) Vì x, y, z là ba cạnh của một tam giác nên $y+z-x>0$; $z+x-y>0$; $x+y-z>0$.

Áp dụng BĐT CauChy ta có $\sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \le z$; $\sqrt{(z+x-y)(x+y-z)} \le x$;

$\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)} \le y$.

Nhân theo vế các BĐT này ta được điều cần chứng minh.

Câu 4:



a) Vì AD là phân giác nên

$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$

Lại có $PE // AD // QF$

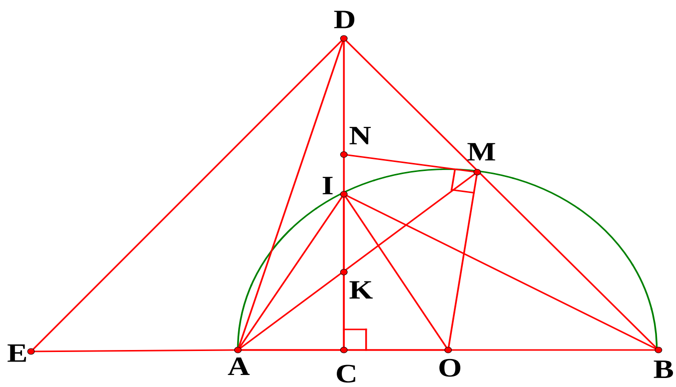
$\Rightarrow \frac{BP}{BE} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{CQ}{CF}$

Mà $BE = CF$ nên $BP = CQ$

b) Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và EF . Khi đó MN là đường trung bình của hình thang $PEFQ$ nên $MN // PE // AD$. Mà AD cố định, M cố định nên MN cố định .

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC , ta có $\frac{AG}{AN} = \frac{AO}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow OG // MN$. Mà O cố định nên G di động trên đường thẳng qua O song song với MN cố định .

Câu 5:



a) Ta có $\widehat{KMN} = \widehat{MBA}$ (1)

Tứ giác $BMKC$ có

$\widehat{BMK} = \widehat{BCK} = 90^0$

nên nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKN} = \widehat{MBA}$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$\widehat{KMN} = \widehat{MKN}$

$\Rightarrow \Delta KMN$ cân tại N .

b) Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{BDC}; \widehat{ACK} = \widehat{BCD}$ nên $\Delta ACK \sim \Delta DCB \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{KC}{CB}$

$$\Rightarrow DC = \frac{AC.BC}{KC} = \left(\frac{R}{2}.\frac{3R}{2}\right) : \frac{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}}{2} = R\sqrt{3}$$

Do đó $S_{\Delta ABD} = \frac{DC.AB}{2} = \frac{R\sqrt{3}.2R}{2} = R^2\sqrt{3}$.

c) Gọi E là điểm đối xứng với B qua C. Ta có $\widehat{CDE} = \widehat{CDB} = \widehat{CKA}$ nên tứ giác $AKDE$ nội tiếp. Do đó đường tròn ngoại tiếp ΔAKD cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AKDE$.

Ta có A, C, B cố định nên AE cố định. Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔAKD đi qua điểm cố định thứ hai khác A là E.

Đề số 29

Câu 1:

a) Ta có $P = \dfrac{2}{\sqrt{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}} + \sqrt{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}} + \sqrt{x-1}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}{2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$

b) Ta có $P^2 = 2+\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}} \Rightarrow x-1 = \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-\sqrt{x^4-x^2}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2-1} = x(2-x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 2-x \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$ (vì $x \ge 1$).

Câu 2:

a) Ta biết rằng tổng các chữ số của một số tự nhiên thì có cùng số dư với số tự nhiên đó khi chia cho 9. Mà một số chính phương khi chia cho 9 có số dư là $0;1;4$ hoặc 7. Nhưng 2019 chia cho 9 dư 3. Do đó tổng các chữ số của một số chính phương bất kỳ không thể bằng 2019.

b) Ta có thể tích của bể là $V = Sh = \pi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{40}{\pi}}\right)^2.10 = 100\left(\text{dm}^3\right) = 100$ lít.

Gọi x, y theo thứ tự là số lượt đổ thùng loại 4 lít và 7 lít vào bể $\left(x, y \in N^*\right)$.

Theo bài toán thì $4x+7y = 100 \Rightarrow 7y \vdots 4 \Rightarrow y \vdots 4$.

Mặt khác $7y = 100-4x \le 96 \Leftrightarrow 4 \le y \le 12$.

Xét $y=4$ thì $x=18$, xét $y=8$ thì $x=11$, xét $y=12$ thì $x=4$.

Câu 3:

a) Vì $2.(-18) = -36 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1+x_2 = \dfrac{m+1}{2} \\ x_1x_2 = -9 \end{cases}$

Ta có $Q=\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+25\right)=x_1^2x_2^2+4x_2^2+25x_1^2+100$

$=\left(2x_2\right)^2+\left(5x_1\right)^2+181\geq 2\sqrt{\left(2x_2\right)^2.\left(5x_1\right)^2}+181=20\left|x_1x_2\right|+181=180+181=361$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left|2x_2\right|=\left|5x_1\right|\\ x_1x_2=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_2=-5x_1\\ x_1x_2=-9\end{cases}\Leftrightarrow x_1=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Với $x_1=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\Rightarrow x_2=-\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{-9\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{-9\sqrt{10}}{10}\Leftrightarrow m=\dfrac{-9\sqrt{10}-5}{5}$.

Với $x_1=-\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\Rightarrow x_2=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}\Leftrightarrow m=\dfrac{9\sqrt{10}-5}{5}$.

b) Hệ phương trình $\begin{cases}x\left(y^2+1\right)=2y^2\\ y\left(x^4+x^2+1\right)=3x^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x\left(y^2+1\right)=2y^2\Rightarrow x=\frac{2y^2}{y^2+1}\leq\frac{2y^2}{y}=y\Rightarrow x\leq y$$

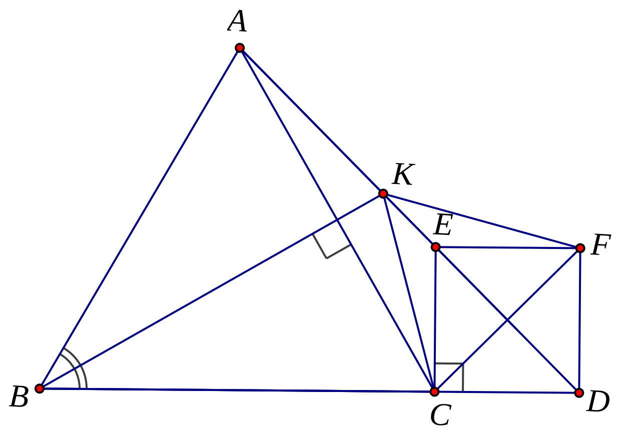
và $y\left(x^4+x^2+1\right)=3x^3\Rightarrow y=\dfrac{3x^3}{x^4+x^2+1}\leq\dfrac{3x^3}{3\sqrt[3]{x^4.x^2.1}}=x\Rightarrow y\leq x$.

Do đó $x=y$ ta có $\begin{cases}y^3+y=2y^2\\ y^5+y^3=3y^3-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\left(y-1\right)^2=0\\ y\left(y-1\right)\left(y^2-1\right)^2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y=0; y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=y=0; x=y=1$.

Câu 4:



Ta có $\widehat{ACB}=\widehat{CDA}+\widehat{ADC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60° - 15° = 45°$, suy ra ΔCDE vuông cân.

Đường thẳng qua E vuông góc với CE cắt đường thẳng qua D vuông góc với CD tại F. Suy ra tứ giác $CDFE$ là hình vuông, suy ra AD là trung trực của CF

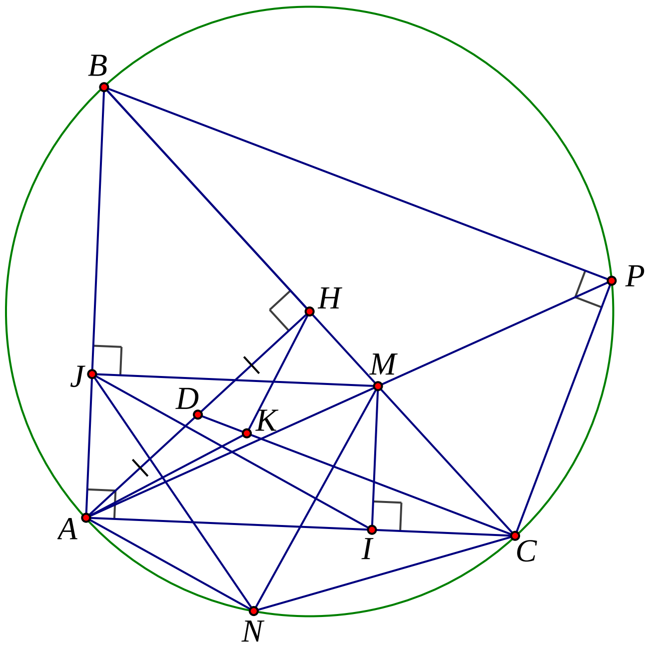
$\Rightarrow KC = KF \Rightarrow \Delta KCF$ cân.

Mặt khác BK là trung trực của AC nên $KA = KC \Rightarrow \Delta KAC$ cân.

Do đó $\widehat{KCF} = \widehat{ACD} - \left(\widehat{ACK} + \widehat{DCF}\right) = (180° - 60°) - (15° + 45°) = 60°$

$\Rightarrow \Delta KCF$ đều $\Rightarrow KC = CF = ED$. Do đó $AK = ED$.

Câu 5:



a) Ta có tứ giác $AIMJ$ là hình chữ nhật. Do đó $AIMJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AM và IJ. Vì N đối xứng với M qua IJ nên $\widehat{JNI} = \widehat{JMI} = 90°$

hay N thuộc đường tròn đường kính IJ và $AM \Rightarrow \widehat{ANM} = 90°$.

Mặt khác I thuộc trung trực MN, ΔMIC vuông cân nên I thuộc trung trực MC

suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNC

$\Rightarrow \widehat{MNC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MIC} = 45°$. Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{ANC} = 45° + 90° + 45° = 180°$

hay tứ giác $ABCN$ nội tiếp đường tròn (T).

b) Ta có $\Delta MPC \backsim \Delta MBA \Rightarrow \dfrac{PM}{MB} = \dfrac{PC}{BA} \Rightarrow \dfrac{PM}{PC} = \dfrac{MB}{BA}$ (1)

$\Delta MBP \backsim \Delta MAC \Rightarrow \dfrac{PM}{MC} = \dfrac{PB}{CA} \Rightarrow \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{MC}{CA}$ (2)

Cộng theo vế (1) với (2) được:

$$\frac{PM}{PC} + \frac{PM}{PB} = \frac{MB}{BA} + \frac{MC}{CA} = \frac{MB}{BA} + \frac{MC}{BA} = \frac{BC}{BA} > 1 \Rightarrow \frac{1}{PC} + \frac{1}{PB} > \frac{1}{PM}.$$

c) Áp dụng hệ thức lượng ta có $DH^2 = DK.DC \Rightarrow DA^2 = DK.DC \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DK}{DA}$

$\Rightarrow \Delta DKA \backsim \Delta DAC \Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{DAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{AKH} = 45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^\circ = \widehat{HKC}$ mà $\widehat{ABK} = \widehat{AHK} = \widehat{KCH}$ nên suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{KHC}$.

Đề số 30

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a.Ta có: $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) + 1 - xy}{1-xy} :$$

$$\frac{xy - 1 - \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)}{xy-1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\sqrt{xy+1} + 1 - xy}{1 - xy + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) + \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{xy}+x\sqrt{y}\right)} = \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Vậy với $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $xy \neq 1$ thì $P = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

b. Ta có: $x^3 = \left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}\right)^3 = 8 + 3\left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}\right)$

$= 8 - 6x$

$\Rightarrow x^3 + 6x = 8 \Leftrightarrow x\left(x^2+6\right) = 8 \Leftrightarrow xy = 8$ thỏa mãn điều kiện xá định.

Thay vào ta có $P = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Vậy $P = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(m-1)x+y=3m-4\\ x+(m-1)y=m\end{cases} \quad (*) \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x=m-(m-1)y\\ m(m-2)y=(m-2)^2 (1)\end{cases}$$

Để (d) cắt (d') $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 2\end{cases}$.

Với $\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 2\end{cases}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\dfrac{3m-2}{m}\\ y=\dfrac{m-2}{m}\end{cases}$.

Lúc đó $M\left(\dfrac{3m-2}{m};\dfrac{m-2}{m}\right)$.

Từ giả thiết $\widehat{MOx}=30^0$ nên M có hoành độ dương và $\tan\widehat{MOx}=\left|\dfrac{\dfrac{m-2}{m}}{\dfrac{3m-2}{m}}\right|$

$$\tan\widehat{MOx}=\tan 30^\circ=\left|\dfrac{\dfrac{m-2}{m}}{\dfrac{3m-2}{m-2}}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\left|\frac{m-2}{3m-2}\right| \Rightarrow 3m-2=\pm\sqrt{3}(m-2)$$

$\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ thõa mãn.

Vậy $m=\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Điều kiện xá định $\dfrac{-1}{3}\le x\le 6(*)$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0 \Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5(\mathrm{t/m}(*))\\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

VT của phương trình (1) luôn luôn lớp hơn 0 với mọi x thỏa mãn (*) nên (1) vô nghiệm.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{5\}$.

b) Điều kiện các định $3x-y+7\ge 0$.

(1) $\Leftrightarrow (x^2+2)(x+y-2)=0$

$\Leftrightarrow x+y-2=0 \Leftrightarrow y=2-x \quad \left(\text{ do } x^2+2>0\forall x\right).$

Thay $y = 2 - x$ vào (2) ta được

$x^2-x(2-x)-4x-1=\sqrt{3}x-(2-x)+7 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2 \Leftrightarrow (2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11.$

Đặt $\sqrt{4x+5}=2t-3$

Ta có $\begin{cases}(2t-3)^2=4x+5\\(2x-3)^2=4t+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2t-3)^2=4x+5\\(t-x)(t+x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2t-3)^2=4x+5\\ \left[\begin{array}{l}t=x\\t=2-x\end{array}\right.\end{cases}.$

Trường hợp 1: $t=x \Leftrightarrow \sqrt{4x+5}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x+1=0\\2x-3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow y=-\sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện xá định. Hệ có nghiệm $(x;y)=\left(2+\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

Trường hợp 2: $t=4-x \Leftrightarrow \sqrt{4x+5}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-1=0\\1-2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$

$\Rightarrow y=1+\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện xá định. Hệ có nghiệm $(x;y)=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(2+\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$; $(x;y)=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Đặt $T=3a^2+3b^2+3c^2+4abc$. Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0<a\leq b\leq c$.

Từ $a + b + c = 3$ và $a + b > c$ suy ra $1\leq c<\frac{3}{2}$

$T=3\left(a^2+b^2\right)+3c^2+4abc=3\left[(a+b)^2-2ab\right]+3c^2+4abc \;=3(3-c)^2+3c^2-2ab(3-2c)$

Do $3-2c > 0$ và $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$, suy ra

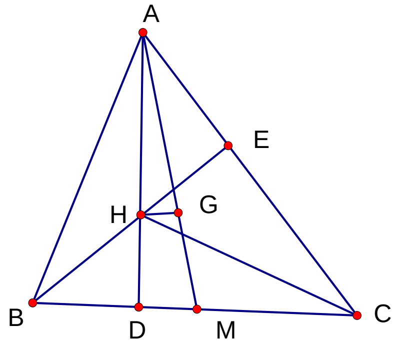
$T\geq 3(3-c)^2+3c^2-\frac{1}{2}(a+b)^2(3-2c)$

$=3\left(c^2-6c+9\right)+3c^2-\frac{1}{2}(3-c)^2(3-2c)$

$=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}=c(c-1)^2+\frac{1}{2}(c-1)^2+13\geq 13$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 5. *(3,0 điểm)*



a. Gọi M là trung điểm BC, ta có tam giác ABD vuông tại D nên $\tan B = \dfrac{AD}{BD}$.

Tương tự: $\tan C = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \tan B \tan C = \dfrac{AD^2}{BD \cdot CD}$.

Ta có $\widehat{BHD} = \widehat{EHA} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{HAE}$

$\Rightarrow \Delta BDH \sim \Delta ADC \Rightarrow BD.CD = AD.DH \Rightarrow \tan B \cdot \tan C = \dfrac{AD}{DH}$.

Ta có $HG // BC \Rightarrow \dfrac{AD}{DH} = \dfrac{AM}{GM} \Rightarrow \tan B \tan C = 3$.

b. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diên tích các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB, ta có

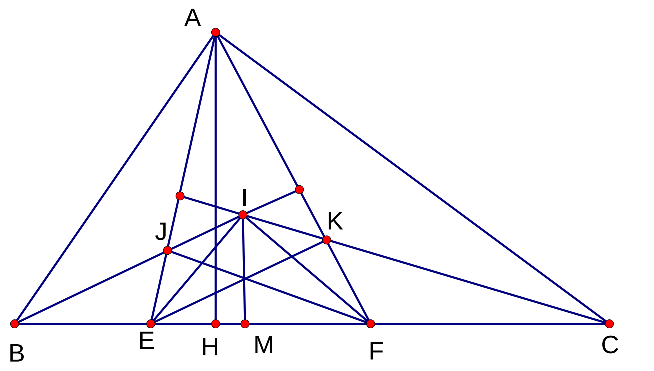
$\tan B \tan C = \dfrac{AD}{DH} \Rightarrow \dfrac{1}{\tan B \cdot \tan C} = \dfrac{DH}{AD} = \dfrac{S_1}{S}$.

Tương tự $\Rightarrow \dfrac{1}{\tan C \cdot \tan A} = \dfrac{S_2}{S}, \dfrac{1}{\tan A \cdot \tan B} = \dfrac{S_3}{S}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan B \cdot \tan C} + \dfrac{1}{\tan C \cdot \tan A} + \dfrac{1}{\tan A \tan B} = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} = 1$

Câu 6. *(3,0 điểm)*



a. $\widehat{AEC} + \widehat{EAH} = 90^\circ, \widehat{CAE} + \widehat{EAB} = 90^0, \widehat{EAH} = \widehat{EAB} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{CAE}$

$\Rightarrow \Delta AEC$ cân tại C, $\Rightarrow$ CI là trung trực của AE.

Tương tự BI là trung trực của $AF \Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

b. Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên BC $\Rightarrow M$ là trung điểm của EF và $MI = r$.

Tam giác ABF cân tại B, tam giác ACE cân tại C nên $EF = AB + AC - BC$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, do tam giác ABC vuông tại A ta chứng minh được $AB + AC - BC = 2r \Rightarrow EF = 2r$.

A và E đối xứng nhau qua CI nên $\widehat{KEC} = \widehat{KAC}$, mà $\widehat{KAC} = \widehat{KAH}$,

$\widehat{KAH} + \widehat{KFH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KEC} + \widehat{KFE} = 90^0 \Rightarrow \Delta KEF$ vuông tại K $\Rightarrow \mathrm{MK} = \dfrac{\mathrm{EF}}{2} = \mathrm{r}$

$\Rightarrow \mathrm{MJ} = \mathrm{MI} = \mathrm{MK} = \mathrm{r} \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Câu 7. *(2,0 điểm)*

Ta có $\dfrac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}} = \dfrac{m}{n}\left(m, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1\right)$

$$\Rightarrow mx - my = (mz - ny)\sqrt{2019} \Rightarrow \begin{cases} nx - my = 0 \\ mz - my = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \Rightarrow xz = y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x+z-y).$$

Vì $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$.

Thử lại $\dfrac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}} = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận $(x; y; z) = (1;1;1)$.

Đề số 31

Bài 1.

a) Với $x \ge 0; x \ne 1$ ta có:

$$P = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{1-x}\right) : \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \left(\sqrt{x}+1 - \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 - x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}+1} . \frac{\sqrt{x}+1}{x - 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

Với $x \ge 0; x \ne 1$ ta có:

$$P - 1 = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} < 0 \text{ nên } P < 1.$$

b) Đặt $\sqrt[3]{2}=x \Rightarrow x^3=2$

Do đó

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{x}{\sqrt[3]{9}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9(x-1)}=x^2-x+1 \Leftrightarrow 9(x-1)=(x^2-x+1)^3\ (1)$$

Ta có VP = $(x^2-x+1)^3=(x^2-x+1)^2(x^2-x+1)=(x^4+x^2+1-2x^3-2x+2x^2)(x^2-x+1)$

$$=[x(x^3-2)-2x^3+3x^2+1](x^2-x+1)=3(x^2-1)(x^2-x+1)=3(x-1)(x^3+1)$$

$$=3(x-1)[(x^3-2)+3]=9(x-1)=\text{VT}$$

Vậy $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

Bài 2. .

a) $\sqrt{3x+8+6\sqrt{3x-1}}+\sqrt{3x+8-6\sqrt{3x-1}}=3x+4 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3x-1}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3x-1}-3)^2}=3x+4\left(x\ge\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-1}+3+\left|\sqrt{3x-1}-3\right|=3x+4$ (1)

Với $x\ge\frac{10}{3}$, (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3x-1}=3x+4 \Leftrightarrow 9x^2+12x+20=0$ (VN)

Với $\frac{1}{3}\le x\le\frac{10}{3}$, (1) $\Leftrightarrow 6=3x+4 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$(tm)

b) TH1. Nếu một trong 3 số a, b, c bằng 0 thì các số còn lại bằng 0. Do vậy $a=b=c=0$

TH2. Xét a, b, c khác 0:

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1+b^2}{2b^2}+\frac{1+c^2}{2^2}+\frac{1+a^2}{2a^2}=\frac{(1-b)^2}{2b^2}+\frac{1}{b}+\frac{(1-c)^2}{2c^2}+\frac{1}{c}+\frac{(1-a)^2}{2a^2}+\frac{1}{a}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu " = " xảy ra khi $1-b=1-c=1-a=0 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $a=b=c=1$ hoặc $a=b=c=0$

Câu 3: Gọi x, y, z, lần lượt là số gói kẹo chocola, kẹo chuối và kẹo dừa lớp 9A đã mua (gói, 0< x, y, z <22, nguyên)

Theo đề ta có $\begin{cases} x+y+z=22 \\ \frac{y}{4}.110000+\frac{x}{3}.50000+15000z=445000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x+20y+20z=440(1) \\ 20x+33y+15z=534(2) \end{cases}$

Trừ (2) cho (1) theo vế với vế ta được :$13y-2z=94 \Leftrightarrow z=\frac{13y-94}{2}$

Vì $0<z<22$ nên $0<\frac{13y-94}{2}<22 \Leftrightarrow 7<y<11$ mà y nguyên suy ra $y\in\{8,9,10\}$

Chỉ có $y=8$ thì tìm được $x=9, z=5$

Vậy lớp 9A mua được 9 gói kẹo chocola, 8 gói kẹo chuối, 5 gói kẹo dừa.

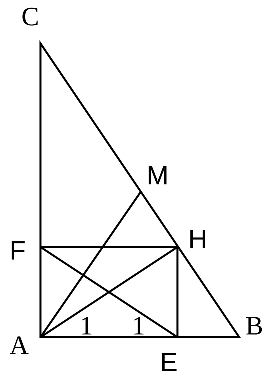
Bài 4. a) Tính AB, AC.

Tam giác AHC vuông tại H nên $\tan C = \frac{3}{4} = \frac{AH}{CH}$

Suy ra $\frac{CH}{4} = \frac{AH}{3} = \frac{CH - AH}{4-3} = 4$. Do đó AH = 12cm và CH = 16cm

Tam giác AHC vuông tại H nên $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 20$ (pytago)

Tam giác ABC vuông tại A nên $\tan \widehat{ACB} = \frac{3}{4} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \frac{3AC}{4} = 15$



b) Chứng minh EF ⊥ AM.

Tứ giác AEHF có $\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

Tam giác ABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = MB$ suy ra tam giác AMB cân tại M suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{B}$ (2)

Tam giác AHB vuông tại H nên $\widehat{A_1} + \widehat{B} = 90^0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{E_1} = 90^0$ suy ra EF ⊥ AM.

c) Chứng minh $2S = \frac{AH^4}{HE.HF}$.

Vì AEHF là hình chữ nhật nên AE = HF và AF = HE

Áp dụng hệ thức giữa cạch và đường cao ta có

$$AE.AB = AH^2 \Rightarrow AB = \frac{AH^2}{AE}$$

$$AF.AC = AH^2 \Rightarrow AC = \frac{AH^2}{AF}$$

Do đó $AC.AB = \frac{AH^4}{AE.AF} = \frac{AH^4}{HE.HF}$ hay $2S = \frac{AH^4}{HE.HF}$ (đpcm).

Đề số 32

Câu 1: *(4,5 điểm)*

1. Ta có:

$* \, 6 - 4\sqrt{2} = 4 + 2 - 2.2\sqrt{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2$

Suy ra: $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{2}\right| = 2 - \sqrt{2}$

$* \, 20 + 14\sqrt{2} = 8 + 12 + 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{2} + 3.2.\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2+\sqrt{2}\right)^3$

Suy ra: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} = 2 + \sqrt{2}$

* $\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}=\sqrt[3]{a\sqrt{a}+3\sqrt{a}-3a-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{1}\right)^3-3.1^2.\sqrt{a}+3.1.\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}\right)^3}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{a}\right)^3}$

$=1-\sqrt{a}$

Và $\dfrac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}-1=\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right).\left(\sqrt{a}+1\right)}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}-1=\dfrac{\sqrt{a}-1}{2}$

Vậy ta có: $S=\left(2+\sqrt{2}\right).\left(2-\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{2}\right)+2019=4-2-2+2019=2019$

2. Ta có: $36x^2<36x^2+10x+3<36x^2+10x+1+2x=36x^2+12x+1$ (với x nguyên dương)

$\Rightarrow 6x\le\sqrt{36x^2+10x+3}\le 6x+1$

$\Rightarrow 4x^2+4x+1<4x^2+4x+2x\le 4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}\le 4x^2+6x+1\le 4x^2+8x+4$

$\Rightarrow (2x+1)^2\le 4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}\le(2x+2)^2$

$\Rightarrow 2x+1\le\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}\le 2x+2$

$\Rightarrow x^2+2x+1\le x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}\le x^2+2x+2$

$\Rightarrow (x+1)^2\le x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}\le x^2+4x+4$

$\Rightarrow x+1\le[B]<(x+2)^2$

Mà $x\in\mathbb{N}^*$ nên $[B]=x+1$

3. $\begin{cases}xy(x+y)=2\\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3xy(x+y)=6\\ 9xy(3x-y)+6+x^3+y^3=27x^3-y^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3+3xy(x+y)=6+x^3+y^3\\ 9xy(3x-y)+6+x^3+y^3=(3x-y)\left(9x^2+3xy+y^2\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3=6+x^3+y^3\\ (3x-y)\left(9x^2+3xy+y^2-9xy\right)=6+x^3+y^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3=6+x^3+y^3\\ (3x-y)^3=6+x^3+y^3\end{cases}$

Suy ra: $(x+y)^3=(3x-y)^3\Rightarrow x+y=3x-y\Rightarrow x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình $xy(x+y)=2$ ta được:

$x.x(x+x)=2\Leftrightarrow x^2.2x=2\Leftrightarrow 2x^3=2\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$. Suy ra $y=1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x=y=1$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét.

Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2$ m.

Theo giả thiết, ta có: $OM = ON = 2\sqrt{5}$

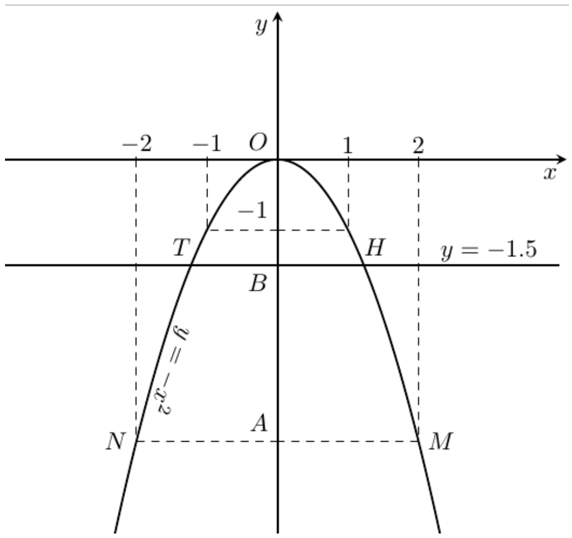
Áp dụng định lý Py-ta-go, ta được: $OA = 4$.

Vậy $M(2;-4)$; $N(-2;-4)$

Do $M(2;-4)$ thuộc Parabol (P) nên tọa độ điểm M thỏa mãn công thức $y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$.

Vậy $(P): y = -x^2$

b)



Để đáp ứng chiều cao trước xe tải phải đi vào chính giữa cổng, ta xét đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$ (ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ giao điểm là $T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Suy ra: $HT = 3\sqrt{2} > 2,4$

Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Từ giả thiết $xy + yz + zx = 5$ ta có: $x^2 + 5 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(z + x)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$\sqrt{6\left(x^2+5\right)}=\sqrt{6(x+y)(z+x)}\le\dfrac{3(x+y)+2(z+x)}{2}=\dfrac{5x+3y+2z}{2}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\sqrt{6\left(y^2+5\right)}\le\dfrac{3x+5y+2z}{2}$; $\sqrt{z^2+5}\le\dfrac{x+y+2z}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$\sqrt{6\left(x^2+5\right)}+\sqrt{6\left(y^2+5\right)}+\sqrt{z^2+5}\le\dfrac{9x+9y+6z}{2}$

Suy ra $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6\left(x^2+5\right)}+\sqrt{6\left(y^2+5\right)}+\sqrt{z^2+5}}\ge\dfrac{2(3x+3y+2z)}{9x+9y+6z}=\dfrac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1; z=2$.

2. Ta có: $a\ne 0$, $b\ne 0$

$\begin{cases}6a^2+20a+15=0\\15b^2+20b+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a^2b^2+20ab^2+15b^2=0\\15b^2+20b+6=0\end{cases}$

$\Rightarrow\left(6a^2b^2-6\right)+\left(20ab^2-20b\right)=0$

$\Leftrightarrow 6(ab-1)(ab+1)+20b(ab-1)=0$

$\Leftrightarrow 6(ab+1)=-20b$ (vì $ab\ne 1$)

$\Leftrightarrow ab+1=\dfrac{-10}{3}b$

Tương tự: $ab+1=\dfrac{-4}{3}a$

Vậy: $\begin{cases}ab+1=\dfrac{-10}{3}b=\dfrac{-4}{3}a\\2a=5b\end{cases}$

$A=\dfrac{b^3}{ab^2-9(ab+1)^3}=\dfrac{b^3}{ab^2-9\left(-b^3\right).\dfrac{1000}{27}}$

$A=\dfrac{b}{a+\dfrac{1000}{3}b}=\dfrac{b}{\dfrac{5}{2}b+\dfrac{1000}{3}b}=\dfrac{6}{2015}$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

1. Theo đề bài ta có số phải tìm có từ 4 chữ số trở lên.

Giả sử sau khi bỏ ba chữ số tận cùng $\overline{abc}$ của n ta được số x thì: $n=10^3x+\overline{abc}$

Theo đề bài, ta có: $x=\sqrt[3]{1000x+\overline{abc}}\Leftrightarrow x^3=1000x+\overline{abc}\Leftrightarrow x\left(x^2-1000\right)=\overline{abc}$

Nếu $x\ge 33$ thì vế trái lớn hơn hoặc bằng $33.(1089-1000)=33.89=2937>\overline{abc}$

Do $\overline{abc}$ là số có ba chữ số nên $x<33$ (1)

Nếu $x \le 31$ thì $x^2 \le 961$ nên $x\left(x^2 - 1000\right) < 0$.

Lại có: $\overline{abc} > 0$ nên $x > 31\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 32$.

Thật vậy, với $x = 32$ thì $32.(1026 - 1000) = \overline{abc}$ hay $\overline{abc} = 768$.

Do đó: $n = 10^3.32 + 768 = 32768$

Vậy số cần tìm là 32768.

2. Gọi năm số cần tìm là $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ với $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}^+$

Ta có: $a = \left(b + c + d + e\right)^2$ và $b = \left(a + c + d + e\right)^2$

Suy ra: $a - b = \left(b + c + d + e\right)^2 - \left(a + c + d + e\right)^2$

$\Leftrightarrow a - b = \left(b - a\right)\left(a + b + 2c + 2d + 2e\right)$

$\Leftrightarrow \left(a - b\right)\left(a + b + 2c + 2d + 2e + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ a + b + 2c + 2d + 2e + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $a + b + 2c + 2d + 2e + 1 = 0$ là vô lí vì $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}^+$. Vậy $a = b$.

Tương tự ta có: $a = b = c = d = e = \dfrac{1}{16}$

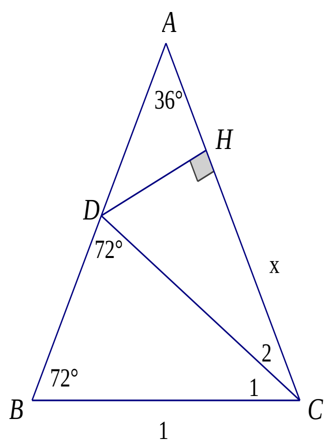
Câu 5: *(3,0 điểm)*

Ta có: ΔABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^\circ$.

Kẻ tia phân giác góc C cắt AB tại D nên $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 36^\circ$

ΔADC có $\widehat{A} = \widehat{C_2} = 36^\circ$ nên ΔADC cân tại D.

Kẻ DH vuông góc với AC. Khi đó: AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến.



Đặt $BC = 1$ cm, $AH = x$ (cm) với $x > 0$.

Ta có: $AB = AC = 2x$; $BD = 2x - 1$; $AD = 1$.

Ta có: CD là tia phân giác nên $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CA}{CB}$

hay $\dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{2x}{1} \Leftrightarrow 2x\left(2x - 1\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Ta loại $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$ vì $x > 0$.

Vậy $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2x}{1} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 6: *(3,5 điểm)*

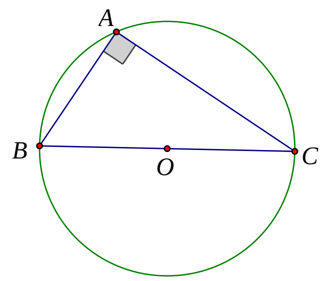
1. <u>*Trường hợp 1:*</u> Xét ΔABC vuông tại A.

Ta có ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O với O là trung điểm của cạnh huyền BC.

Vì $\sin A = \sin 90° = 1$

$\Rightarrow BC = 2R.\sin A = 2R.1 = 2R$ (luôn đúng).

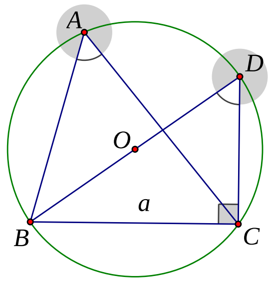
Vậy $BC = 2R.\sin A$



<u>*Trường hợp 2:*</u> *Xét* ΔABC với góc A nhọn.

Ta vẽ đường kính BD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và khi đó vì tam giác BCD vuông tại C nên ta có $BC = BD.\sin D$ hay $a = 2R.\sin D$

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ vì đó là hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$. Do đó $a = 2R.\sin A$ hay $BC = 2R.\sin A$.



<u>*Trường hợp 3:*</u> *Xét* ΔABC với góc A tù.

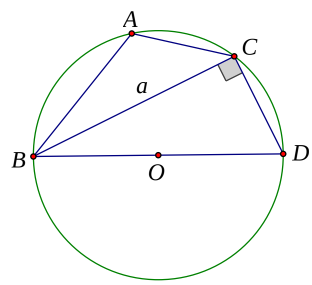
Ta vẽ đường kính BD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn tâm O nên $\widehat{D} = 180° - \widehat{A}$.

Do đó: $\sin D = \sin(180° - A)$.

Ta lại có $BC = BD.\sin D$ hay $BC = BD.\sin A$

Vậy $BC = 2R.\sin A$.



2. Ta có: $\widehat{IMN} = \widehat{MBA}$ (tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

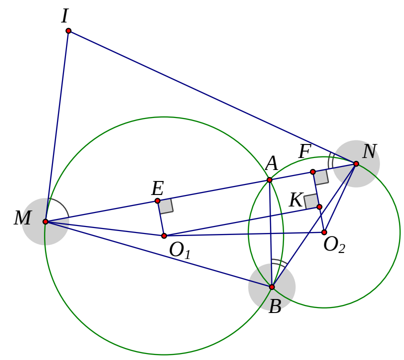
$\widehat{INM} = \widehat{NAB}$ (tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

Xét tứ giác $IMBN$, ta có: $\widehat{MBN} = \widehat{MBA} + \widehat{NBA} = \widehat{IMN} + \widehat{INM}$

$= 180° - \widehat{MIN}$

Suy ra tứ giác $IMBN$ nội tiếp.

Các góc AMB và ANB là những góc nội tiếp chắn cung AB cố định của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ nên $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ không đổi.



Suy ra: $\widehat{MBN}$ không đổi nên $\widehat{MIN} = 180° - \widehat{MBN}$ không đổi.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MIN thì $MN = 2R.\sin MIN$

$\Rightarrow R = \dfrac{MN}{2\sin MIN}$

Do đó R lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất.

Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của O_1O_2 lên (d), K là hình chiếu vuông góc của O_1 lên O_2F thì: $MN = 2EF = 2O_1K \le 2O_1O_2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $EF // O_1O_2$ hay $(d) // O_1O_2$.

Đề số 33

Câu 1:

$$A=\frac{x+8}{\left(\sqrt{x}\right)^3+2^3}+\frac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{(\sqrt{x}-2)^2}}{x-4}$$

$$=\frac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\frac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{\left|\sqrt{x}-2\right|}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\frac{1}{x-2\sqrt{x}+4}-\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

(vì $0\le x<4$ nên $0\le\sqrt{x}<2$)

$$=\frac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\frac{1}{x-2\sqrt{x}+4}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{x+8+(\sqrt{x}+2)-(x-2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}=\frac{3}{x-2\sqrt{x}+4}$$

Ta có : $x-2\sqrt{x}+4=(\sqrt{x}-1)^2+3\ge 3\Rightarrow 0<A\le 1$.

+ Để A là số nguyên (khi đó A =1) thì $x-2\sqrt{x}+4=3$ hay $x=1$

Chú ý: Các học sinh có thể đặt t = $\sqrt{x}$ ($0\le t<2$) – thực hiện các biến đổi đại số. Các thầy cô cho điểm thích hợp theo cách cho điểm từng phần trên đây.

b) Cho ba số thực a,b,c thỏa $1\le a,b,c\le 2$. Chứng minh :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\le 7.$$

Vì a,b,c có vai trò như nhau và $1\le a,b,c\le 2$ nên giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$

Khi đó: $(b-a)(b-c)\le 0$

$\Rightarrow b^2+ac\le ab+bc$ (*) $\Rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{c}\le 1+\frac{a}{c}$ (chia 2 vế (*) cho bc)

và $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\le 1+\frac{c}{a}$ (chia 2 vế (*) cho ab)

$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le 2+2(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})$

Để chứng minh (1) ta tiếp tục chứng minh $2+2(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\le 7\Leftrightarrow\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{5}{2}$ (2)

Ta có: $2\ge a\ge c\ge 1\Rightarrow\ 1\le x=\frac{a}{c}\le 2$

(2) $\Leftrightarrow\ x+\frac{1}{x}\le\frac{5}{2}\ \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\le 0\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)\le 0$ (đúng vì $1\le x\le 2$

(2) được chứng minh $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

Dấu "="xảy ra khi a =2, b = c = 1 hoặc a = b = 2, c = 1 và các hoán vị của nó.

Câu 2:

a) Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - 2m = 0$. *Tìm để phương trình có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.*

Cách 1:

• Điều kiện pt có 2 nghiệm phân biêt là $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.

• Ta có : $x_1 + x_2 = 2,\quad x_1.x_2 = 3 - 2m$

$x_1 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 + 2m - 3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3x_2 + 2m - 3$

$\Rightarrow 3x_2 = 5 - 2m \Rightarrow 3x_1 = 1 + 2m$

$\Rightarrow 9x_1.x_2 = (5-2m)(1+2m)$

$\Rightarrow 9(3-2m) = -4m^2 + 8m + 5$

$\Rightarrow 4m^2 - 26m + 22 = 0 \Rightarrow m = 1,\ m = \dfrac{11}{2}$ - chọn $m = \dfrac{11}{2}$

Cách 2:

Điều kiện : $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.

• Ta có : $x_1 + x_2 = 2,\quad x_1.x_2 = 3 - 2m$

Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì

$(x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0$

$\Rightarrow x_1x_2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1^2x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1^2x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_1^2x_2^2 + 7x_1x_2 - 8 = 0 \Rightarrow x_1x_2 = 1,\quad x_1x_2 = -8.$

$+\ x_1x_2 = 1 \Rightarrow 3 - 2m = 1 \Rightarrow m = 1\ (loai)$

$+\ x_1x_2 = -8 \Rightarrow 3 - 2m = -8 \Rightarrow m = \dfrac{11}{2}$ (thỏa mãn)

Cách 3 :

• Điều kiện : $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.

Phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 1 + \sqrt{2m-2},\ x_2 = 1 - \sqrt{2m-2}$

Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì $x_1 = x_2^2$

(không xảy ra trường hợp ngược lại $x_2 = x_1^2$ vì $0 < x_2 < 1,\ x_1^2 > 1$ (!))

$\Rightarrow 1 + \sqrt{2m-2} = 1 - 2\sqrt{2m-2} + 2m - 2$

$\Rightarrow (2m-2) - 3\sqrt{2m-2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2m-2} = 0 \vee \sqrt{2m-2} = 3$

$\Rightarrow m = 1 \vee m = \dfrac{11}{2}$ - Chọn $m = \dfrac{11}{2}$

b) Giải phương trình $2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2} = 3 - x$ *(1)*

Cách 1:

Điều kiện : $-1 \le x \le 1$

(1) $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}$ = 3–x (2)

Đặt $\sqrt{1-x}=a;\ \sqrt{1+x}=b$ ($\Rightarrow$ a,b $\ge$ 0)

.(2) viết lại: $2a+ab=4-b^2$

$\Rightarrow a(2+b)=(2+b)(2-b)$ $\Rightarrow$ $a=2-b$ (do 2+b>0

$\Rightarrow$ $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2$ $\Rightarrow$ x=0 (Cô si – hoặc bình phương...)

x=0 thỏa điều kiện $\Rightarrow$ x=0 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Cách 2:

Điều kiện : $-1 \le x \le 1$

(1) $\Leftrightarrow 2[\sqrt{1-x}-(1-x)]+[\sqrt{1-x^2}-(1+x)]=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})+\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}.\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}.\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=0 \Leftrightarrow x(\dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}})=0$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}(*)$

(*) $\Leftrightarrow 1-x=\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow 1+x^2-2x=1+x \Leftrightarrow x=0, x=3\ (loai)$

Kết luận: x=0 là nghiệm duy nhất.

Câu 3:

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n $\ge$ 1 thì (n+2)(n+1)(n+8) không thể là lập phương của một số tự nhiên.

Ta có: $(n+2)^3 < (n+2)(n+1)(n+8) < (n+4)^3$ (*)

$\Leftrightarrow$ $n^3+6n^2+12n+8 < (n^2+3n+2)(n+8)=n^3+11n^2+26n+16 < n^3+12n^2+48n+64$ (đúng)

Giả sử có n$\in$N, n $\ge$ 1 sao cho (n+2)(n+1)(n+8) là lập phương của một số tự nhiên, khi đó, từ (*) suy ra: $(n+2)(n+1)(n+8)=(n+3)^3$

$\Rightarrow$ $n^3+11n^2+26n+16=n^3+9n^2+27n+27$

$\Rightarrow 2n^2-n-11=0 \Rightarrow n=\dfrac{1\pm\sqrt{89}}{4}\notin N$ (!)

Vậy $\forall$n $\ge$ 1, n $\in$ N thì (n+2)(n+1)(n+8) không là lập phương của một số tự nhiên.

b) Cho số nguyên tố $p\ (p>3)$ và hai số nguyên dương a, b thỏa mãn phương trình $p^2+a^2=b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.

Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow$ $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

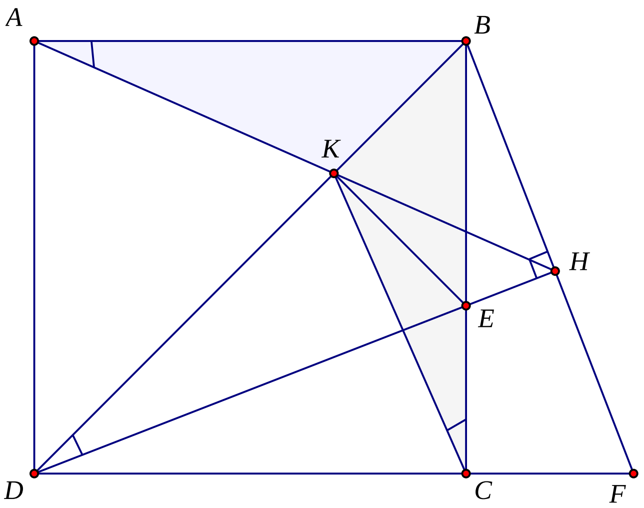
Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)
Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2(p+a+1)=2\left(p+\frac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=(p+1)^2$ là số chính phương.

Câu 4:

a)Chứng minh tứ giác KDCE nội tiếp đường tròn và ba điểm K, E, F thẳng hàng.



(Không có hình vẽ không chấm bài)

+ Hai tam giác BKA và BKC bằng nhau $\Rightarrow$ $\widehat{BCK}=\widehat{BAK}$.

+ Lại có A, B, H, D cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{BAK}=\widehat{KDE}$.

Suy ra $\widehat{BCK}=\widehat{KDE}$ Do đó tứ giác $KDCE$ nội tiếp trong đường tròn.

+ Trong tam giác BDF có BC và DH là hai đường cao. Suy ra $FE\perp BD$ (1).

Tứ giác $KDCE$ nội tiếp trong đường tròn và $\widehat{ECD}=90^0$ nên $\widehat{EKD}=90^0$ hay $EK\perp BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra K, E, F thẳng hàng.

b) Khi E là trung điểm cạnh BC, tính diện tích tứ giác $BKEH$.

Ta có Δ BKE vuông cân, BK= KE $=\sqrt{2}$

$S_{BKE}=\frac{1}{2}BK.KE=\frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{2}=1$

Xét ΔBHE ta có BH = BE. sinE = 2. sinE = $2.\frac{DC}{DE}=2\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

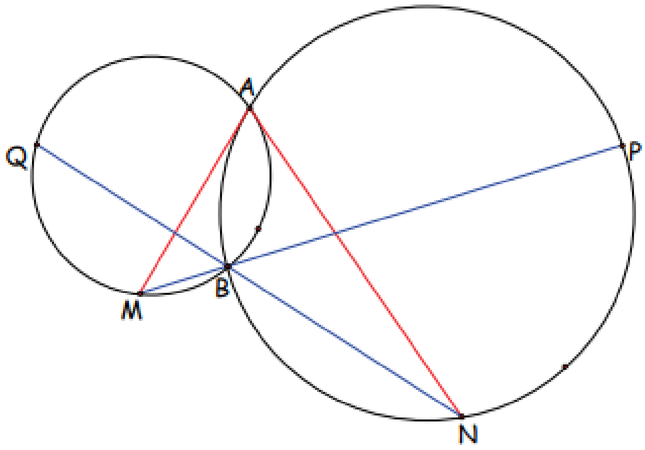
$HE^2=BE^2-BH^2=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}\Rightarrow HE=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$S_{BHE}=\frac{1}{2}HE.BH=\frac{4}{5}$

$S_{BKEH}=S_{BKE}+S_{BHE}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$ (cm^2)

Câu 5:

a/ Chứng minh các tam giác AMP và ANQ đồng dạng.



(Không có hình vẽ không chấm bài)

Tứ giác ABNP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{APB}$

Tứ giác ABMQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{AMB}$

Suy ra: Δ ANQ đồng dạng Δ APM

b/ Chứng minh: $MB.NA^2 = NB.MA^2$.

AM là tiếp tuyến , MBP là cát tuyến của (C_2) –chứng minh $MA^2 = MB.MP$

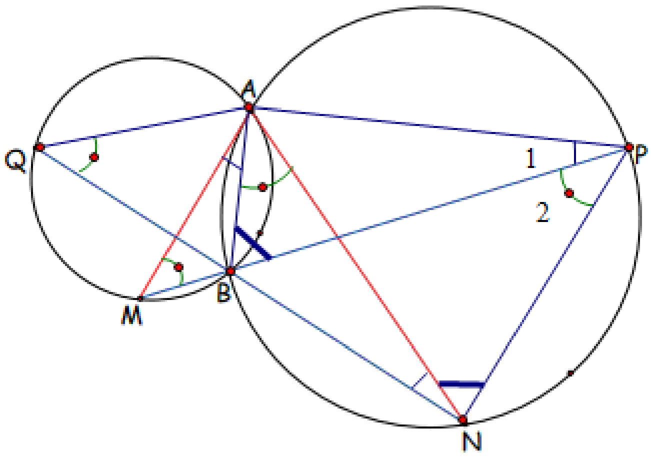
Tương tự AN là tiếp tuyến , NBQ là cát tuyến của (C1), ta có: $NA^2 = NB.NQ$

$\Rightarrow \dfrac{MA^2}{NA^2} = \dfrac{MB}{NB}.\dfrac{MP}{NQ}$ (1)

Để có (1), ta chứng minh MP =NQ

(AMP và ANQ đồng dạng , chứng minh A M = AP $\Rightarrow$ *Δ AMP = Δ AQN*

Cần chứng minh A M = AP hay $\widehat{APN} = \widehat{ANB}$ *)*



+ Ta có $\widehat{P_1} = \widehat{ANB} = \widehat{MAB}$ (chắn cung AB của (C_2))

+ Ta có $\widehat{P_2} = \widehat{NAB}$ (chắn cung NB của (C_2))

$\widehat{NAB} = \widehat{AMB}$ (chắn cung AB của (C_1))

+ Suy ra $\widehat{P_1}+\widehat{P_2}=\widehat{MAB}+\widehat{AMB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{APN}=\widehat{ABP}$ (Góc ngoài bằng tổng 2 góc trong không kề nó)

+ Mặt khác $\widehat{ABP}=\widehat{ANP}$ (chắn cung AP của (C_2))

Suy ra: $\widehat{APN}=\widehat{ANP}$.

Ta có: $\widehat{APN}=\widehat{ANP}$ $\Rightarrow \Delta$ ANP cân tại N $\Rightarrow$ AN= AP

Tam giác AMP và AQN đồng dạng kết hợp AN= AP

$\Rightarrow \Delta$ AMP = Δ AQN $\Rightarrow$ MP=NQ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow \dfrac{MA^2}{NA^2}=\dfrac{MB}{NB}$ hay $MB.NA^2=NB.MA^2$.

Đề số 34

Bài 1.(4.0 điểm).

1/ ĐKXĐ: $x\ge 1$

Đặt $a=\sqrt{1-\frac{1}{x}};b=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ ta có hpt $\begin{cases}a+b=x\\a^2-b^2=1-x\end{cases}\Rightarrow a^2-(x-a)^2=1-x\Leftrightarrow a=\dfrac{x^2-x+1}{2x}$

Do đó: $\dfrac{x^2-x+1}{2x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow x^4-2x^3-x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x^2-2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})-2(x-\frac{1}{x})-1=0$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}\Leftrightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ ta có pt: $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1$

Với $t=1$ thì $x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}(loai)\end{array}\right.$

Vậy pt có một nghiệm x=$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2/ Tự giải

Bài 2.(4.0 điểm).

1/ $\begin{cases} x+xy+y=0(1) \\ x^2+y^2=8(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2xy+2y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2+2(x+y)-8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ y=-4-x \end{array}\right.$ thế vào (1) ta được: $\left[\begin{array}{l} x^2-2x-2=0 \\ x^2+4x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy hpt có ba nghiệm: $(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ và (-2;-2)

2/ Tự giải

Bài 3.(3.0 điểm).

Phương trình: $2x^2-2mx+m^2-2=0$ có hai nghiệm không âm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1+x_2 \geq 0 \\ x_1.x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4 \geq 0 \\ m \geq 0 \\ \dfrac{m^2-2}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m \geq 0 \\ m \geq \sqrt{2} \vee m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 2$

Do $0 \leq x_1 \leq x_2$ nên $x_2 = \dfrac{m+\sqrt{-m^2+4}}{2}$. Mà $x_1+x_2=m$ nên x_2 đạt GTLN $\Leftrightarrow$ x_2=m

Hay $\dfrac{m+\sqrt{-m^2+4}}{2} = m \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{2}(nhân) \\ m=-\sqrt{2}(loai) \end{array}\right.$

Vậy khi $m=\sqrt{2}$ thì GTLN của x_2 là $\sqrt{2}$

Bài 4.(3.0 điểm).

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2(a+b+c)+ab+bc+ca=0$

$\Delta'=[-(a+b+c)]^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

Do phương trình có nghiệm kép nên $\Delta'=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab2-bc-2ca=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$

Vậy ABC đều nên $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^0$

Bài 5.(2.0 điểm).

Nếu x,y,z chẵn thì x^3,y^3,z^3 chẵn

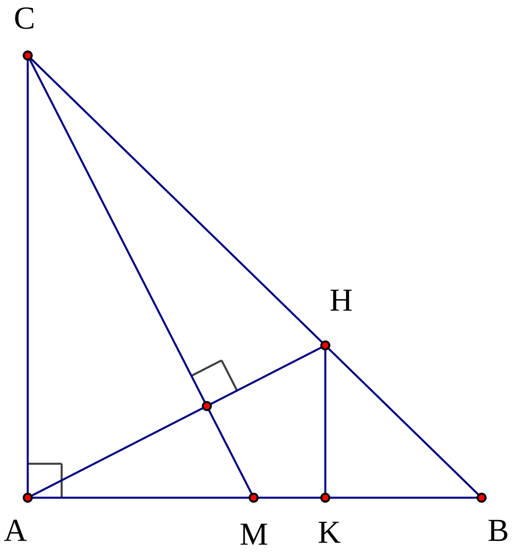
Nếu x,y,z lẻ thì x^3,y^3,z^3 lẻ

Suy ra x+y+z và $x^3+y^3+z^3$ cùng tính chẵn, lẻ nên $(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)$ luôn chẵn

Do đó $(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)=2017$ là vô lí

Vậy không tồn tại các số nguyên *x, y, z* thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=x+y+z+2017$

Bài 6.(4.0 điểm).



Kẻ $HK \perp AB$ tại K,

Ta có HK//AC (cùng $\perp AB$)

$\Rightarrow \frac{BH}{HC}=\frac{BK}{KA}$ (định lí Ta-let)

Mà ΔBHK vuông cân tại K nên BK=HK

$\Rightarrow \frac{BH}{HC}=\frac{HK}{KA}$ (1)

Mà $\Delta AKH \backsim \Delta CAM$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{HK}{KA}=\frac{MA}{AC}=\frac{MA}{AB}=\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BH}{HC}=\frac{1}{2}$