|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN****BẮC GIANG****ĐỀ ĐỀ NGHỊ** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN****KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ** **NĂM 2023****ĐỀ THI MÔN: TOÁN LỚP 10***Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)* *(Đề thi gồm 01 trang)* |

1. **(4 điểm)** Tìm tất cả các đa thức *P*(*x*) thỏa mãn

.

1. **(4 điểm)** Cho các số thực dương *x,y,z*. Chứng minh rằng

.

**Câu 3. (4 điểm)** Cho điểm D nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến DB, DC tới (O). Gọi A là một điểm nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (O), tiếp tuyến của (O) tại A cắt DC, DB lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt AC tại N. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BO.

Chứng minh rằng PF vuông góc với DO.

**Câu 4. (4 điểm)** Tìm bộ hai số nguyên dương (x; y) thỏa mãn:

$$x^{2}+y^{2}-7xy-x-y+7=0$$

**Câu 5. (4 điểm)** Có 4030 người đang xếp hàng mua vé xem bóng chuyền, trong đó có 2007 người chỉ mang theo tờ tiền mệnh giá 100.000đ và 2023 người chỉ mang theo tờ tiền mệnh giá 50.000đ. Biết mỗi vé giá 50.000đ và trước lúc bán vé hòm tiền của người bán vé không có một tờ tiền nào. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hang cho 4030 người trên mà không ai phải chờ trả lại tiền?

……………………Hết……………………

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Hướng dẫn chấm** | **Điểm** |
| **1** | Tìm tất cả các đa thức *P*(*x*) thỏa mãn  . |  |
|  | Trường hợp 1. Xét  tức  thay vào (1) ta được  hoặc , hay  là hai đa thức thỏa mãn. | **1,0** |
| Trường hợp 2. Xét , tức . Khi đó, so sánh hệ số của lũy thừa cao nhất của (1) ta có   | **1,0** |
| suy ra đặt , với  là đa thức hệ số thực và  , thay vào (1) ta có  | **1,0** |
| Nếu  khác đa thức 0 từ  so sánh bậc cao nhất hai vế ta có  vô lí, suy ra  là đa thức hằng 0. Suy ra . Thử lại ta thấy thỏa mãn.Vậy các đa thức cần tìm là *P*(*x*)=0, *P*(*x*)=1; . | **1,0** |
| **2** | Cho các số thực dương *x,y,z*. Chứng minh rằng. |  |
|  | Không làm mất tính tổng quát ta cho xyz =1.Đặt. | **1.0** |
| Khi đó bđt cần chứng minh trở thành | **1,0** |
| Sử dụng bdt Cauchy Schwarz, ta có | **2,0** |
| **3** | Cho điểm D nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến DB, DC tới (O). Gọi A là một điểm nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (O), tiếp tuyến của (O) tại A cắt DB, DC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt AC tại N. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BO.Chứng minh rằng PF vuông góc với DO. |  |
|  | Xét thế hình sau:C:\Users\duong\Downloads\baihinhduyenhai.pngGọi T là giao điểm của OF và AC.Ta có $\hat{TOD}=\hat{POD}-\hat{TOP}=\frac{1}{2}\left(\hat{BOC}-\hat{BOA}\right)=\frac{1}{2}\hat{AOC}=\hat{TCD}$Suy ra tứ giác TOCD nội tiếp, suy ra $\hat{OTD}=90^{o}$.Gọi G là giao điểm của DO và AC, ta cũng có $\hat{OGF}=90^{o}$. | **2** |
| Xét tam giác OBD và tam giác NMT có $ON∥BM∥DT$ (cùng vuông góc với OT) và:P là giao điểm của OB và NMF là giao điểm của BD và MTG là giao điểm của OD và NTTheo định lý Desargue ta có P, F, G thẳng hàng, từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. | **2** |
|  |  |
| **4** | Tìm bộ hai số nguyên dương (x; y) thỏa mãn:$$x^{2}+y^{2}-7xy-x-y+7=0$$ |  |
|  | Xét dãy số $(u\_{n})$xác định bởi:$\left\{\begin{array}{c}u\_{0}=u\_{1}=1\\u\_{n+2}=7u\_{n+1}-u\_{n}+1\end{array}\right.$ (\*) | **1** |
| Ta sẽ chứng minh (x; y) là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi (x; y) = $(u\_{n+1};u\_{n})$ hoặc (x; y) = $(u\_{n};u\_{n+1})$, với n là số tự nhiên nào đó. |
| Thật vậy, dễ dàng chứng minh được:$u\_{n+1}^{2}+u\_{n}^{2}-7u\_{n+1}u\_{n}-u\_{n+1}-u\_{n}+7=0$ với mọi số tự nhiên n. |
|  | Ngược lại, với mỗi cặp số nguyên dương (x; y) với x$ \leq $y là nghiệm của phương trình đã cho, ta sẽ chứng minh tồn tại số tự nhiên n sao cho (x; y) = $(u\_{n};u\_{n+1})$.  | **1** |
|  | Thật vậy, nếu x = y, giải phương trình ta được $x=y=1=u\_{0}=u\_{1}$Xét nghiệm $(x\_{1};x\_{0})$ bất kì của phương trình đã cho thỏa mãn $1\leq x\_{1}<x\_{0}$.+ Nếu $x\_{1}+1=x\_{0}$, thay vào phương trình ban đầu, không thỏa mãn, do đó $x\_{1}+2 \leq x\_{0}$.+ Đặt $x\_{2}=7x\_{1}-x\_{0}+1$, khi đó ta có:$x\_{2}=\frac{7x\_{1}x\_{0}-x\_{0}^{2}+x\_{0}}{x\_{0}}=\frac{x\_{1}^{2}-x\_{1}+7}{x\_{0}}<\frac{x\_{1}^{2}+4x\_{1}+4}{x\_{0}}\leq \frac{x\_{0}^{2}}{x\_{0}}=x\_{0} $(1)Do đó $x\_{2}+x\_{1}<x\_{1}+x\_{0}$. |
|  | Hơn nữa, $(x\_{1};x\_{2})$ cũng là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.+ Nếu chưa đạt trạng thái dừng $x\_{2}=x\_{1}=1$ thì ta đã xây dựng được một nghiệm mới của phương trình đã cho thỏa mãn $x\_{2}+x\_{1}<x\_{1}+x\_{0}$ và $1\leq x\_{2}<x\_{1}$.Thật vậy, giả sử ngược lại $x\_{2}>x\_{1}$, theo chứng minh trên ta có $x\_{1}+2 \leq x\_{2}$. Suy ra $x\_{0}.x\_{2}\geq \left(x\_{1}+2\right)^{2}>x\_{1}^{2}-x\_{1}+7=x\_{0}.x\_{2} (do \left(1\right))$, mâu thuẫn. | **1** |
|  | Khi đó, ta sẽ xây dựng được một dãy các nghiệm nguyên dương $(x\_{n};x\_{n+1})$ của phương trình đã cho thỏa mãn:$$…<x\_{n}+x\_{n+1}<…<x\_{2}+x\_{1}<x\_{1}+x\_{0}$$Và $1\leq …<x\_{n}<…<x\_{2}<x\_{1}$Do quá trình giảm này không diễn ra vô hạn nên luôn tồn tại số nguyên dương k sao cho: $x\_{k}=1=u\_{1}; x\_{k+1}=1=u\_{0}$Khi đó ta có:$x\_{k-1}=7x\_{k}-x\_{k+1}+1=7u\_{1}-u\_{0}+1=u\_{2}$ … $x\_{1}=7x\_{2}-x\_{3}+1=7u\_{k-1}-u\_{k-2}+1=u\_{k}$$x\_{0}=7x\_{1}-x\_{2}+1=7u\_{k}-u\_{k-1}+1=u\_{k+1}$ Vậy với mỗi cặp số nguyên dương $(x\_{1};x\_{0})$ là nghiệm của phương trình đã cho, tồn tại số tự nhiên k sao cho $(x\_{1};x\_{0})$ = $(u\_{k};u\_{k+1})$.Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là tất cả các cặp số $(u\_{k};u\_{k+1})$ và $(u\_{k+1};u\_{k})$, với $u\_{k}$ là số hạng của dãy (\*) | **1** |
| **5** | Có 4030 người đang xếp hàng mua vé xem bóng chuyền, trong đó có 2007 người chỉ mang theo tờ tiền mệnh giá 100.000đ và 2023 người chỉ mang theo tờ tiền mệnh giá 50.000đ. Biết mỗi vé giá 50.000đ và trước lúc bán vé hòm tiền của người bán vé không có một tờ tiền nào. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hang cho 4030 người trên mà không ai phải chờ trả lại tiền? |  |
|  | Giả sử 4030 người xếp hang mua vé đã được sắp xếp theo thứ tự nào đó.Đặt $x\_{i}=1$ nếu người thứ i mang theo tờ tiền mệnh giá 50.000đ và $x\_{i}=-1$ nếu người thứ i mang theo tờ tiền mệnh giá 100.000đ.Khi đó hiệu giữa người mang theo tờ tiền mệnh giá 50.000đ và người mang theo tờ tiền mệnh giá 100.000đ tại thời điểm có k người sắp hàng là $S\_{k}=\sum\_{i=1}^{k}x\_{i}$. | **0,5** |
|  | Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A\_{k}=(k;S\_{k})$.Xét đường gấp khúc nối O(0; 0) và $A\_{4030}=(4030;16)$ và đi qua các điểm $A\_{k}=(k;S\_{k})$, k = 1; 2; …; 4029.Mỗi đường gấp khúc như vậy ta gọi là một quỹ đạo. Số các quỹ đạo là $C\_{4030}^{2007} $( lên 2023 bước, xuống 2007 bước). | **1,5** |
|  | Dễ thấy, quỹ đạo thỏa mãn không ai phải chờ trả lại tiền là quỹ đạo không cắt đường thẳng d: y = - 1.Ta sẽ đếm số quỹ đạo cắt đường thẳng d như sau: Với mỗi quỹ đạo T mà ở đó cắt đường thẳng d, ta xây dựng quỹ đạo T’ theo cách sau: từ lúc khởi điểm đến giao điểm đầu tiên của quỹ đạo T và d, ta giữ nguyên quỹ đạo T, phần còn lại, ta lấy đối xứng qua đường thẳng d: y = - 1. Từ đó ta xây dựng được một song ánh từ tập các quỹ đạo T là các đường gấp khúc nối O(0; 0) và $A\_{4030}=(4030;16)$ đến tập các quỹ đạo T’ là các đường gấp khúc nối O(0; 0) và điểm $(4030;-18)$.Giả sử các đường gấp khúc nối O(0; 0) và điểm $(4030;-18)$ có a bước hướng lên và b bước hướng xuống, ta có:$$\left\{\begin{array}{c}a+b=4030\\a-b=-18\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}a=2006\\b=2024\end{array}\right.\right.$$Khi đó số quỹ đạo cắt đường thẳng d: y = -1 là $C\_{4030}^{2006}$ | **1,5** |
|  | Vậy số cách xếp hàng cần tìm là $(C\_{4030}^{2007}-C\_{4030}^{2006}).2023!.2007!$ | **0,5** |

Người ra đề:

Vũ Thị Vân – SĐT: 0982415216

Nguyễn Thị Thanh Loan – SĐT: 0981634810