**Ví dụ 23.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Với bài toán này, chúng ta có thể đưa ra các lời giải như nâng lũy thừa, đặt ẩn phụ liên hợp,… Tuy nhiên, chúng tôi đưa ra ví dụ này, để chuẩn bị cho một lớp bài toán mà khi giải ta sẽ đưa về hệ phương trình đối xứng hay hệ phương trình gần đối xứng thông qua đặt ẩn phụ đặc biệt. Và đường lối nào cho ta cách tìm ẩn phụ đặc biệt đó? Để trả lời câu hỏi này cũng chính là lý do mà chúng tôi trình bày cho các bạn hướng suy nghĩ và cách đi tìm ẩn phụ đó bằng nhiều đường lối khác nhau sau đây.

Với phương trình đang xét, các bạn quan sát thấy vế phải phương trình chứa căn bậc hai còn vế trái phương trình là một phương trình bậc nhất. Đây được xem là một phép toán ngược và bài toán phép toán ngược thường đưa được hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng. Vậy làm cách nào để có thể dưa phương trình đã cho về hệ đối xứng hay gần đối xứng. Ta có những định hướng sau:

**+ Hướng 1:** Khai thác triệt để hệ số  và hệ số của x bên vế phải của phương trình để có được hằng đẳng thức:

Ta có:  Khi đó: 

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

 

Đặt:  . Khi đó phương trình trở thành hệ phương trình:

 

Hệ  là một hệ đối xứng loại 2 và ta hoàn toàn giải quyết được.

**+ Hướng 2:** Do hai vế chứa hai phép toán ngược nhau liên quan đến bậc 2 nên ta có thể đưa phương trình về hệ đối xứng loại 2 hoặc gần đối xứng loại 2.

Đặt:  Do ta cần đưa hệ phương trình đối xứng (gần đối xứng) loại 2 nên ta xét hệ phương trình:  

Ta tìm m, n sao cho:  

Khi đó ta đặt:  Lúc đó kết hợp với phương trình ta được hệ phương trình:  

Hệ phương trình là một hệ đối xứng loại 2.

**+ Hướng 3:** Do trong phương trình ta có:  nên ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để đạo hàm tìm ra ẩn phụ (bậc 2 thì chỉ cần đạo hàm cấp một) với hàm số có biểu thức là vế phải của phương trình. Cụ thể:

Xét hàm số  có  và   

Khi đó ta đặt:  Kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình:

 

Hệ này giống hệ .

**- Chú ý:** Để sử dụng được đạo hàm vào việc đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại 2 ta cần chú ý là đối phương trình tổng quát:  thì ta có hai trường hợp.

- Trường hợp 1:   thì đặt  với  là số đối của  là nghiệm của đạo hàm cấp 1 của hàm số 

- Trường hợp 2:   thì đặt với  là số đối của  là nghiệm của đạo hàm cấp 1 của hàm số 

**+ Hướng 4:** Sử dụng một biến thể của phương pháp Ferrari (nhắc đến trong ví dụ 8). Cụ thể ta sẽ biến đổi như sau:

Xét phương trình: 

Ta thêm hệ số m sao cho vế trái phương trình là bình phương một tổng.

Biến đổi như sau: 

Ta cần tìm m sao cho vế phải của  có dạng bình phương một tổng hoặc bình phương một hiệu là xem như được giải quyết. Tức là ta cần tìm m sao cho vế phải của phương trình  có biệt thức 



Sau khi tìm được m thì ta có:  xét các khả năng xảy ra sau:

+ Khả năng 1:  

+ Khả năng 2:   ta thu được hệ đối xứng.

+ Khả năng 3:   ta thu được hệ gần đối xứng.

**- Áp dụng vào bài toán đang xét ta có:**

Thêm m và biến đổi: 

Phương trình bậc hai bên vế phải của phương trình có biệt thức:

 

Ta đây ta đưa phương trình đã cho về phương trình:

 

Đặt:  Khi đó kết hợp với phương trình ta thu được hệ phương trình:  

Hệ thu được là hệ đối xứng, đó là do chúng tôi cố tình ép cho được hình thức hệ đối xứng như lí thuyết đã phân tích. Trên thực tế thì với phương trình tổng quát này thì ngay từ  chúng ta hoàn toàn giải quyết được nhanh chóng và điều đó có nghĩa rằng phương trình tổng quát đang xét hoàn toàn giải quyết được về dạng phương trình  như ngay từ ví dụ 1 chúng tôi có nêu ra hướng giải trong trường hợp m là số nguyên tìm được. Chú ý hướng đi 4 chỉ được áp dụng cho hình thức phương trình 

Bây giờ, ta đi vào giải cụ thể bài toán như sau:

Điều kiện:  Đặt:  Kết hợp với phương trình đã cho ta thu được hệ phương trình:

 

Lấy  vế theo vế ta có:

  

Với  thay vào  ta có:  

Đối chiếu cả điều kiện của x, y ta thu được 

Với  thay vào  ta có:  

Đối chiếu cả điều kiện của x, y ta thu được: 

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:  

**- Bình luận.** Thông qua bài toán này, chúng ta đã có thể hình dung được vì sao chúng ta có thể đặt ẩn phụ đặc biệt như vậy trong bài toán đưa phương trình vô tỷ về hệ đối xứng. Theo ý kiến chủ quan của chúng tôi thì đối với bài toán này lối đi đưa về hệ không tự nhiên lắm, tuy vậy chúng ta cần phải mở cho chúng ta nhiều hướng đi để tiếp cận với một bài toán vô tỷ cho dù lối đi đó nó không được tự nhiên và nhanh gọn. Nhưng thông qua đó ta có thể thấy sự phong phú trong cách tiếp cận một bài toán phương trình vô tỷ tùy theo hướng tư duy mà chúng ta rèn luyện được. Để nối tiếp hướng đi này, chúng ta tiếp tục khai thác một số phương trình nữa để có cái nhìn tổng quan hơn.

**Ví dụ 24.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát phương trình ta có vế phải chứa một phương trình bậc ba và vế trái chứa một căn bậc ba nên bài toán chứa hai vế có phép toán ngược nhau nên ta có thể đưa về hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng để giải quyết. Ta sẽ chọn một số hướng đi như ví dụ trên để xem đối với phương trình này xem sao?

Trước tiên ta viết phương trình đã cho gọn lại như sau: 

**+ Hướng 1:** Khai thác triệt để hết hệ số của  và hệ số của  để vế phải của phương trình chứa hằng đẳng thức. Muốn vậy, ta đưa phương trình về phương trình: 



 

Đặt:  

Khi đó kết hợp với phương trình  ta có hệ phương trình:

 

Hệ  là một hệ đối xứng loại 2.

**+ Hướng 2:** Ta sử dụng tìm hệ số ẩn phụ dựa vào điều kiện đối xứng của hệ loại 2:

Đặt:  Do ta cần đưa về hệ đối xứng loại 2 nên ta xét hệ phương trình: 



Ta cần tìm hệ số m, n thỏa mãn hệ thức:

 

Từ đó ta có cách đặt:  

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ phương trình:

 

Hệ  là hệ đối xứng loại 2.

**+ Hướng 3:** Quan sát phương trình đã cho ta để ý thấy  nên ta có thể sử dụng đạo hàm để tìm ẩn phụ với lưu ý do xét hàm bậc ba nên ta sẽ đạo hàm tới cấp 2 để tìm ẩn phụ thích hợp.

Xét hàm số:  ta có

   

Từ đó ta đưa ra cách đặt: 

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

 

Hệ  là một hệ đối xứng loại 2.

Bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể của bài toán: Đặt: 

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình:



Lấy  vế theo vế ta có: 



Xét phương trình: 

Xem phương trình  là phương trình bậc hai theo biến x thì ta có:

 

Do đó phương trình  vô nghiệm nên từ  ta có 

Thay vào  ta có:  

 

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:  

**- Bình luận.** Qua cách giải trên chúng ta lưu ý rằng với phương trình: . Để đưa được về hệ đối xứng bằng đạo hàm ta cần chú ý tới những lưu ý trong hướng hai ở ví dụ số 20 và ta cũng có cách đặt tương tự giống vậy. Tiếp theo, ta tiếp tục khai thác một phương trình vô tỷ nữa mà lời giải của chúng ta nhắm đến hướng đưa về hệ phương trình đối xứng.

**Ví dụ 25.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này vì sao mà chúng ta có thể nghĩ đến việc biến đổi phương trình về hệ đối xứng được? Câu trả lời cũng nằm ở hai vế phương trình chứa hai phép toán ngược nhau. Cái khó của bài toán này chính là ở trước đại lượng căn thức ta còn một đại lượng bậc nhất. Thật vậy, ta biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau:



Bây giờ trong các hướng đưa về hệ phương trình mà ta đã xét đến trong các ví dụ trước thì liệu rằng hướng đi nào có thể giúp chúng ta đưa phương trình này về hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng.

Câu trả lời có vẻ hiệu quả nhất chính là ta khai thác triệt để hệ số của  và hệ số của  trong phương trình để tạo ra một hằng đẳng thức.

Dựa vào phương trình bậc ba bên vế trái của phương trình ta thấy hệ số của  là  có vẻ như là một kết quả đẹp như vậy ta chỉ cần làm cho hệ số của  sẽ theo một hệ số có thể đưa về hằng đẳng thức bậc ba liên quan đến 2x. Do đó ta có sự phân tích sau:

 

Đại lượng vừa xuất hiện trong lúc tìm hằng đẳng thức bậc ba chính là  nên ta cần phải cho nó xuất hiện lại trong căn bậc 3. Vì sao có suy nghĩ này? Câu trả lời cũng nằm ở chỗ hai vế của phương trình là một phép toán ngược.

Vậy còn đại lượng  thì sao? Sẽ giải quyết nó thế nào đây?

Câu trả lời vẫn nằm ở phép toán ngược của hai vế phương trình trong bài toán, tức là hễ ngoài đại lượng căn có gì thì ta cũng trả về trong căn đại lượng đó cộng với trong căn bậc ba là một tam thức bậc hai.

Điều này cũng có nghĩa là ta cần xử lí đại lượng  theo ba đại lượng   

Lại để ý đại lượng  là đại lượng tích với căn thức bậc ba, còn đại lượng  là một biểu thức có được khi lấy căn bậc ba và cuối cùng đại lượng  là phần dư bị trừ ra khi tách hằng đẳng thức. Tất cả những nhận xét này dẫn dến sự phân tích như sau: 

Với sự phân tích này, lúc đó phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



Từ hình thức phương trình  ta có ngay phép đặt:

 

Kết hợp phép đặt và phương trình  ta thu được một hệ phương trình:

 

Hệ  là một hệ đối xứng loại 2. Vậy xem như bài toán đã được giải quyết, bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể của bài toán như sau:

- Điều kiện: 

Phương trình đã chó được biến đổi thành phương trình:





Đặt . Kết hợp phép đặt và phương trình  ta thu được một hệ phương trình:



Lấy  vế theo vế ta được:

 

Ta có: 





Do đó từ  ta có:    

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:  

**- Bình luận.** Qua ví dụ này, một lần nữa chúng ta thấy nếu chúng ta có sự tính toán kỹ lưỡng trước hướng đi và vì sao nghĩ đến được hướng giải quyết đó sẽ giúp chúng ta gỡ rối bài toán khá đơn giản. Tuy nhiên không phải bài toán nào ngược có thể đưa về hệ đối xứng loại 2 hoàn chỉnh như vậy. Quan sát ví dụ sau chúng ta sẽ thấy được điều đó.

**Ví dụ 26.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này một lần nữa ta thấy hai vế phương trình chứa hai phép toán ngược nhau và theo suy nghĩ tự nhiên ta sẽ đưa bài toán về hệ đối xứng. Và vẫn như những gì đã phân tích các hướng chuyển đổi từ phương trình có hình thức này về hệ đối xứng, ta tiến hành như sau:

**+ Hướng 1:** Khử triệt để hệ số của  và hệ số của x để tạo hằng đẳng thức:

Ta có: 

Với sự phân tích để khử triệt để các hệ số cần thiết, thì ta chỉ có thể khử được ở kiểu “gần triệt để” (ví dụ trong bài ta chỉ khử được triệt để hệ số ). Điều này mách bảo cho chúng ta thấy được nếu phương trình này có đưa được về hệ đối xứng thì đó chỉ là hệ gần hệ đối xứng.

Thật vậy, từ sự phân tích ta đưa ra phép đặt: . Lúc đó ta sẽ được hệ phương trình sau: 

Hệ  chỉ được xem là hệ gần đối xứng.

Tuy nhiên, giả sử như ta không phân tích theo hướng 1 mà ta đẩy luôn cách phân tích theo hướng cho hệ số để được hệ đối xứng thì liệu trở ngại nào đang chờ ta phía trước? Để trả lời câu hỏi này ta chuyển sang hướng phân tích thứ hai như sau: