**ĐỀ 03**

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO YÊN THÀNH**

**ĐỀ THI HSG TOÁN 9**

**Câu 1.** (4 điểm)

1. Chứng minh rằng: $n^{3}+6n^{2}+8n$ chia hết cho 48 với n là số nguyên chẵn.
2. Cho 2 số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng nếu tích a.b là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ là số chính phương.

**Câu 2.** (6 điểm)

1. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}+}\sqrt{\frac{bc}{bc+a}+}\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\leq \frac{3}{2}$$

1. Giải phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$
2. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^{3}+y^{3}+1=5xy$

**Câu 3.** (2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

Trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c $\leq \frac{3}{2}$

**Câu 4.** (7 điểm)

 Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của HC; N là trung điểm của AC. AM cắt HN tại G. Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

1. Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.

Từ đó hãy suy ra $S\_{AEF}=S\_{ABC}.cos^{2}\hat{BAC}$.

1. BH.KM = BA.KN
2. $\sqrt{\frac{GA^{5}+GB^{5}+GH^{5}}{GM^{5}+GK^{5}+GN^{5}}}$ = $4\sqrt{2}$

**Câu 5.** (1 điểm)

 Cho bảng ô vuông kích thước 10cm x 10cm gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đinh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

**--- Hết ---**

**LỜI GIẢI**

**Câu 1.** (4 điểm)

1. Ta có:

 A = $n^{3}+6n^{2}+8n$

= n($n^{2}+6n+8)$

= $n(n^{2}+4n+2n+8)$

= $n\left[n\left(n+1\right)+2(n+4)\right]$

= n(n + 2)(n + 4)

Thay n = 2k

Ta có: A = n(n + 2)(n + 4) = 8k(k + 1)(k + 2)

Vì 8 $\vdots 8$ và k(k + 1)(k + 2) .6

Nên A = 8k(k + 1)(k + 2) $\vdots 48$

1. Đặt A = $a^{2}+b^{2}+c^{2}$. Do tích a.b chẵn nên ta xét các trường hợp sau: TH1: Trong 2 số a, b có 1 số chẵn và 1 số lẻ.

Không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn, b lẻ.

=> $a^{2}\vdots $4; $b^{2}$ $\vdots $4 dư 1 => $a^{2}+b^{2}$ $\vdots $4 dư 1

=> $a^{2}+b^{2}$ = $4m+1$ (m $\in N)$

Chọn c = 2m => $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ = $4m^{2}+4m+1$ = $(2m+1)^{2}$ (tm) (1)

TH2: Cả 2 số a, b cùng chẵn.

=> $a^{2}+b^{2}$ $\vdots $4 => $a^{2}+b^{2}$ = 4n (n $\in N)$

Chọn c = n - 1 => $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ = $n^{2}+2n+1$ = $(n+1)^{2}$ (tm) (2)

Từ (1) và (2) ta luôn tìm c $\in $ Z thỏa mãn bài toán.

**Câu 2.** (6 điểm)

a)

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{acb}{ac+b}}\leq \frac{3}{2}$$

Ta thấy $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$

Tương tự $\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}$ $\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{b+a}\right)$; $\sqrt{\frac{acb}{ac+b}}$ $\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}\right)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{acb}{ac+b}}\leq \frac{3}{2}$$

b) Phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$. Điều kiện x $\geq 2$

Ta có:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$$

$$⇔\sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1}+x+1=5\sqrt{x-2}$$

$⟺\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^{2}}+x+1-5\sqrt{x-2}$ = 0

$⟺$ $\sqrt{x-2}+1$ $+ x+1$ $- 5\sqrt{x-2}$ = 0

$⟺$ x.2 - $4\sqrt{x-2}$ +4 = 0

$⟺ \left(\sqrt{x-2}-2\right)^{2}=0⟺ $x = 6 (tmđk)

Vậy nghiệm của PT là: x = 6

1. $x^{3}+y^{3}+1=5xy$

$$⟺\left(x+y\right)^{3}-3xy(x+y)+1=5xy$$

Đặt x + y = a, xy = b ta được $a^{3}-3ab+1=5b⟺ a^{3}+1=b(3a+5)$

Vì 3a + b $\ne 0 với ∀$ a $\in Z$ suy ra b = $\frac{a^{3}+1}{3a+5}$

Ta có $a^{2}-4b=\left(x-y\right)^{2}\geq $ 0 $∀ x, y.$

Suy ra $a^{2}-\frac{4a^{3}+4}{3a+5}$ $\geq 0=>\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}\geq $ 0

Nếu a $\geq 5$ => $-a^{3}+5a^{3}-4=a^{2}(5-a) -4 <0; 3a +5>0$

Suy ra: $\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}$ < 0 (loại)

Nếu a $\leq -2$ =>$a^{2}(5-a)\geq $ 28 => -$a^{3}+5a^{2}-4>0; 3a+5<0$

Suy ra: $\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}$ < 0 (loại)

Nếu -2 < a < 5 mà a nguyên nên a nhận các giá trị: -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5

Do b nguyên và b = $\frac{a^{3}+1}{3a+5}$ nên tìm được các cặp số (a; b) thỏa mãn: (-1;0); (3;2)

Với a = -1; b = 0, tìm được các cặp (x;y) thỏa mãn: (0; -1); (-1; 0)

Với a = 3; b = 2, tìm được các cặp (x;y) thỏa mãn: (1;2); (2;1)

Vậy các cặp số (x;y) thỏa mãn: (0; -1); (-1; 0); (1;2); (2;1)

**Câu 3.** (2 điểm)

Đặt $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ = x; $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ = y; $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$ = z => (x, y, z > 0)

=> P = (3 + x)(3 + y)(3 + z)

=

$\geq 27+9\sqrt[3]{(xyz)^{2}}+27\sqrt[3]{xyz}+xyz$ (\*)

Lại có: xyz = $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ $\geq \frac{8}{abc}$ (vì a, b, c > 0)

Mà $\frac{3}{2}$ $\geq $ a + b + c $\geq 3\sqrt[3]{abc}$ => $\frac{1}{2}\geq \sqrt[3]{abc}$

=> abc $\leq \frac{1}{8}$ => $\frac{8}{abc}$ $\geq 64$ => xyz $\geq \frac{8}{abc}$ $\geq 64$

Thay vào (\*) ta được: P $\geq 27+9\sqrt[3]{64^{2}}+27\sqrt[3]{64}+64$

 = 27 + 144 + 108 + 64 = 343

Dấu “=” có khi a = b = c = $\frac{1}{2} =>P\_{min}=343$ khi a = b = c = $\frac{1}{2}$

**Câu 4.** (7 điểm)



1. $∆AEB vuông tại E nên cos\hat{BAE}=\frac{AE}{AB}$

$∆ACF vuông tại E nên cos\hat{CAF}$ = $\frac{AF}{AC}$

Từ đó chứng minh được tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC (c.g.c)

Vì tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC nên:

$\frac{S\_{AEF}}{S\_{ACF}}=\frac{AE^{2}}{AB^{2}}=$ $cos^{2}\hat{BAC}$ => $S\_{AEF}=S\_{ABC}.cos^{2}\hat{BAC}$.

1. $∆ABH và ∆MNK$ có $\hat{BAH}=\hat{NMK}; \hat{ABH} =\hat{MKN}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

Suy ra $∆ABH$ đồng dạng với $∆MNK$ (g.g)

Suy ra:

$\frac{BA}{KM}=\frac{BH}{KN}$ => BA.KN = BH.KM

1. $∆ABH$ đồng dạng với $∆MNK$ nên $\frac{AB}{MK}=\frac{AH}{MN}$ = 2 (Vì MN là đường TB của tam giác AHC);

Lại có: $\frac{AG}{MG}=2;\frac{HG}{NG}=2$ (G là trọng tâm của tam giác AHC)

=> $\frac{AB}{MK}$ = $\frac{AG}{MG}=2$. Mặt khác $\hat{BAG}=\hat{GMK} (so le trong)$

=> $∆$ABG đồng dạng với tam giác $∆$MKG (c.g.c)

=> $\frac{GB}{GK}=\frac{GA}{GM}=\frac{GH}{GN}=2=>\frac{GB^{5}}{GK^{5}}=\frac{GA^{5}}{GM^{5}}=\frac{GH^{5}}{GN^{5}}=\frac{GB^{5}+GA^{5}+GH^{5}}{GK^{5}+GM^{5}+GN^{5}}=32$

=> $\sqrt{\frac{GB^{5}+GA^{5}+GH^{5}}{GK^{5}+GM^{5}+GN^{5}}}=4\sqrt{2}$

**Câu 5.** (1 điểm)

 Xét hình vuông cạnh 2x2, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10x10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2x2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 10 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần.