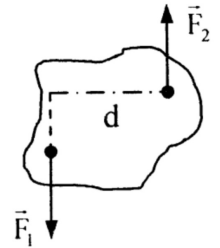


Chuyên đề 12:
CÂN BẰNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

A. Tóm tắt kiến thức

I. Ngẫu lực

- Định nghĩa: Ngẫu lực là một hệ gồm hai lực song song, ngược chiều và cùng độ lớn.
- Tính chất:
 - + Ngẫu lực không có hợp lực
 - + Momen của ngẫu lực đối với một trục quay bất kì vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực đều bằng: $M = Fd$ (d là tay đòn của ngẫu lực).
- Tác dụng: Dưới tác dụng của ngẫu lực vật chuyển động quay theo một chiều nhất định:
 - + Vật không có trục quay: Ngẫu lực làm vật quay quanh khối tâm của vật
 - + Vật có trục quay không qua khối tâm: Ngẫu lực làm vật quay quanh trục quay đó.



II. Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn

Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn là:

- + Tổng các lực tác dụng lên vật bằng 0: $\sum \vec{F} = 0$
- + Tổng momen lực làm vật quay theo chiều kim đồng hồ bằng tổng các momen lực làm vật quay ngược chiều kim đồng hồ: $\sum M_{th} = \sum M_{ng}$

B. Những chú ý khi giải bài tập

*** Về kiến thức và kĩ năng**

- Khi vận dụng điều kiện cân bằng tổng quát để giải các bài toán về cân bằng của vật rắn cần:
 - + Xác định đầy đủ các lực tác dụng vào vật
 - + Áp dụng điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn:
 - $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0; \sum F_y = 0$
 - $\sum M_{th} = \sum M_{ng}$
- (Chú ý lựa chọn hệ trục tọa độ và trục quay thích hợp để việc vận dụng các hệ thức trên được đơn giản)
- Đối với các bài toán về chuyển động của vật rắn cần chú ý: chuyển động bất kì của vật rắn là tổng hợp của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay:
 - + Khi vật chuyển động tịnh tiến: đối với khối tâm thì $\sum M_{th} = \sum M_{ng}$
 - + Bánh xe, vành tròn lăn trên mặt đường: điểm tiếp xúc của bánh xe với mặt đường là trục quay tức thời nên momen của trọng lực, phản lực của mặt đường đối với trục quay đó bằng 0.
 - + Vật chuyển động trên đường vòng: hợp lực tác dụng lên vật phải có giá đi qua khối tâm.

* Về phương pháp giải

Với dạng bài tập về **cân bằng tổng quát của vật rắn**. Phương pháp giải là:

- Xác định vật cần xét sự cân bằng
- Xác định các lực tác dụng vào vật (điểm đặt, hướng) trên hình vẽ.
- Sử dụng các điều kiện cân bằng:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum M_{th} = \sum M_{ng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0 \\ M_1 + M_2 + \dots = M'_1 + M'_2 + \dots \end{cases}$$

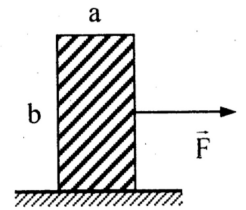
- Từ điều kiện cân bằng, xác định các đại lượng theo yêu cầu của đề bài.

Chú ý:

- Xác định đúng tay đòn lực
- Sử dụng tính chất tam giác đồng dạng

C. Các bài tập vận dụng

11.1. Khối hình hộp đáy vuông, khối lượng $m = 20 \text{ kg}$, cạnh $a = 0,5 \text{ m}$, chiều cao $b = 1 \text{ m}$ đặt trên sàn nằm ngang. Tác dụng lên hộp lực $\vec{F}$ nằm ngang đặt ở giữa hộp. Hệ số ma sát giữa khối và sàn là $\mu = 0,4$. Tìm F để khối hộp bắt đầu mất cân bằng (trượt hoặc lật)



Bài giải

* Khi vật bắt đầu trượt:

- Các lực tác dụng lên hộp: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, lực kéo $\vec{F}$

- Khi vật bắt đầu trượt ($F_{ms} = \mu N = \mu Q$) và:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} + \vec{F} = 0 \quad (1)$$

- + Chiều (1) lên trục Ox ta được: $Q = P = mg = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N}$

- + Chiều (1) lên trục Oy ta được: $F = F_{ms} = \mu Q = 0,4 \cdot 200 = 80 \text{ N}$

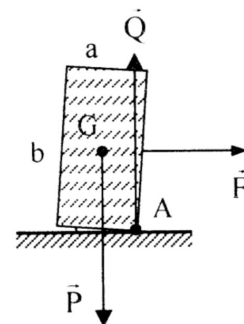
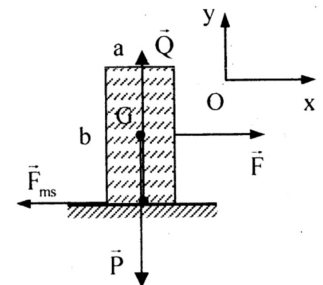
* Khi vật bắt đầu lật:

- Các lực tác dụng lên hộp: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực kéo $\vec{F}$

- Khi vật bắt đầu lật (quay quanh A) thì: $M_{\vec{F}} = M_{\vec{P}}$

$$\Rightarrow F \cdot \frac{b}{2} = P \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow P \cdot \frac{a}{b} = 200 \cdot \frac{0,5}{1} = 100 \text{ N}$$

Vậy: Vật bắt đầu mất cân bằng khi $F = 80 \text{ N}$



12.2. Thanh AB chiều dài $l = 10\text{ m}$, khối lượng $m = 200\text{ kg}$ đặt trên hai giá đỡ C, D ; $AC = 2\text{ m}$, $BD = 3\text{ m}$. Hai vật nặng $m_1 = 800\text{ kg}$, $m_2 = 300\text{ kg}$ treo tại E, A ; $AE = 3\text{ m}$

Áp dụng điều kiện cân bằng của vật rắn, tính các lực đàn hồi của giá đỡ.

Bài giải

- Các lực tác dụng lên giá đỡ: trọng lực $\vec{P}$; các lực căng dây $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ ($T_1 = P_1, T_2 = P_2$); các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thanh AB nằm cân bằng nên:

$$+ \text{Hợp lực bằng } 0: \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow P + T_1 - T_2 - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow Q_2 = P + P_1 - P_2 - Q_1 \quad (1')$$

+ Đối với trục quay ở D :

$$M_{\vec{Q}_1} + M_{\vec{T}_2} = M_{\vec{P}} + M_{\vec{T}_1} \quad (2)$$

$$\Rightarrow Q_1 \cdot CD + P_2 \cdot AD = P \cdot GD + P_1 \cdot ED$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{(m \cdot GD + m_1 \cdot ED - m_2 \cdot AD)g}{CD}$$

$$\text{Với } CD = l - (AC + DB) = 10 - (2 + 3) = 5\text{ m}; GD = GB - DB = 5 - 3 = 2\text{ m}$$

$$ED = 2 + 2 = 4\text{ m}; AD = l - DB = 10 - 3 = 7\text{ m}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{(200 \cdot 2 + 800 \cdot 4 - 300 \cdot 7) \cdot 10}{5} = 3000\text{ N}$$

$$\text{- Thay vào (1')} \text{ suy ra: } Q_2 = 200 \cdot 10 + 800 \cdot 10 - 300 \cdot 10 - 3000 = 4000\text{ N}$$

Vậy: Các lực đàn hồi của giá đỡ tác dụng lên thanh AB là $Q_1 = 3000\text{ N}$ và $Q_2 = 4000\text{ N}$

12.3. Đĩa tròn đồng chất, trọng lượng 40 N đặt thẳng đứng trên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$. Đĩa cân bằng nhờ dây nối AB .

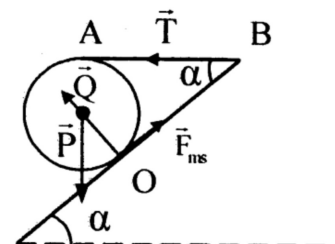
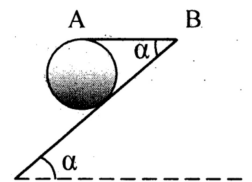
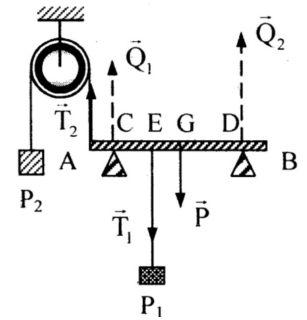
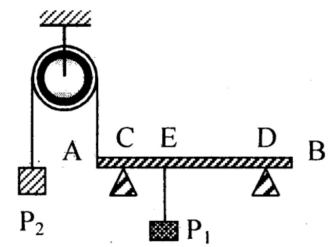
Biết giữa đĩa và mặt nghiêng có ma sát. Tìm lực căng của dây.

Bài giải

- Các lực tác dụng lên đĩa: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, lực căng dây $\vec{T}$

- Vì đĩa cân bằng nên áp dụng quy tắc momen lực với trục quay qua O ta được:

$$M_{\vec{T}} = M_{\vec{P}} \quad (M_{\vec{Q}} = M_{\vec{F}_{ms}}) = 0$$



$$\Rightarrow T.(R + R \cos \alpha) = P.R \sin \alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} P = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} . P = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} . 40 \approx 10,7 \text{ N}$$

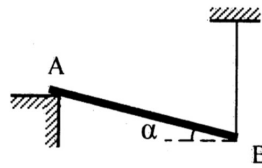
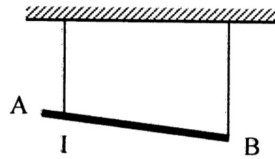
Vậy: lực căng của dây là $T \approx 10,7 \text{ N}$

12.4. Thanh AB chiều dài $l = 2 \text{ m}$, khối lượng $m = 3 \text{ kg}$

a) Thanh được treo cân bằng trên hai dây tại I và B như hình; $AI = 25 \text{ cm}$

Dựa trên điều kiện cân bằng của vật rắn, tính các lực tác dụng lên thanh.

b) Thanh được treo bằng một dây ở đầu B , ở đầu A tựa trên cạnh bàn. Tính các lực tác dụng lên thanh khi thanh cân bằng, biết $\alpha = 30^\circ$



Bài giải

a) Khi thanh được treo cân bằng trên hai dây tại I và B

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực $\vec{P}$, các lực căng dây $\vec{T}_1, \vec{T}_2$

- Thanh nằm cân bằng nên:

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = P = mg = 3 \cdot 10 = 30 \text{ N} \quad (1')$$

$$+ \text{Đối với trục quay qua } G: M_{\vec{T}_1}^G = M_{\vec{T}_2}^G \quad (2)$$

$$\Rightarrow T_1 \cdot GI = T_2 \cdot GB, \text{ với } GB = 1 \text{ m}$$

$$GI = GA - AI = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ m}$$

$$\Rightarrow 0,75 T_1 = T_2 \quad (2')$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $T_1 \approx 17,14 \text{ N}; T_2 \approx 12,86 \text{ N}$

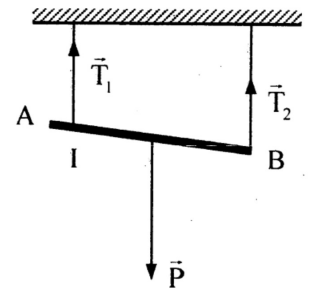
Vậy: Các lực tác dụng lên thanh là $P = 30 \text{ N}; T_1 \approx 17,14 \text{ N}; T_2 \approx 12,86 \text{ N}$

b) Thanh được treo bằng một dây ở đầu B , đầu A tựa trên cạnh bàn

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực $\vec{P}$, lực căng dây $\vec{T}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$

- Thanh nằm cân bằng nên:

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = 0 \quad (3)$$

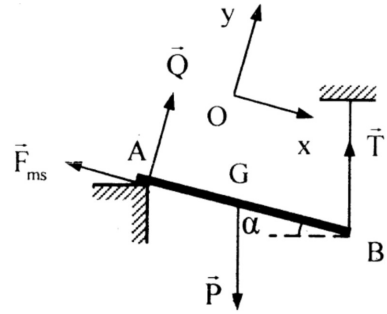


$$\Rightarrow F_{ms} = P \sin \alpha - T \sin \alpha \quad (3')$$

$$\text{Và } Q = P \cos \alpha - T \cos \alpha \quad (3'')$$

$$+ \text{Đổi với trục quay qua } A: M_T = M_P \quad (4)$$

$$\Rightarrow T \cdot AB = P \cdot AG \Rightarrow T = \frac{P}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ N}$$



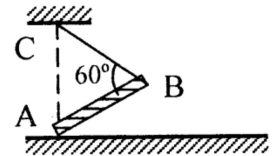
Thay vào (3') và (3'') ta được:

$$F_{ms} = 30 \cdot \sin 30^\circ - 15 \cdot \sin 30^\circ = 7,5 \text{ N} \text{ và } Q = 30 \cdot \cos 30^\circ - 15 \cdot \cos 30^\circ \approx 13 \text{ N}$$

Vậy: Các lực tác dụng lên thanh khi thanh cân bằng là $P = 30 \text{ N}, T = 15 \text{ N}, F_{ms} = 7,5 \text{ N}$ và $Q \approx 13 \text{ N}$

12.5. Thanh AB có đầu A tựa trên sàn, đầu B được treo bởi dây BC . Biết $BC = AB = a$.

Xác định giá trị hệ số ma sát giữa AB và sàn để AB cân bằng.



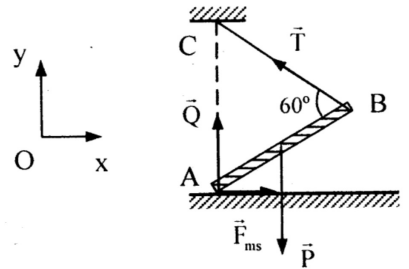
Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực $\vec{P}$, lực căng dây $\vec{T}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$.

- Thanh nằm cân bằng nên:

+ Hợp lực bằng 0:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = 0 \quad (1)$$



$$\Rightarrow F_{ms} = T \cdot \sin 60^\circ = T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1')$$

$$\text{và } Q = P - T \cos 60^\circ = mg - \frac{T}{2} \quad (1'')$$

$$+ \text{đổi với trục quay qua } A: M_T = M_P \quad (2)$$

$$\Rightarrow T \cdot AB \sin 60^\circ = P \cdot AG \sin 60^\circ \Rightarrow T = \frac{P}{2} = \frac{mg}{2}$$

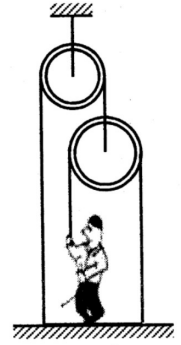
$$\text{Thay vào (1')} \text{ và (1'')} \text{ ta được: } F_{ms} = \frac{mg}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{mg \cdot \sqrt{3}}{4}; Q = mg - \frac{mg}{4} = \frac{3mg}{4}$$

- Thanh chưa trượt (cân bằng) nên $F_{ms} < \mu Q = \mu \cdot \frac{3mg}{4}$

$$\Rightarrow \mu > \frac{4F_{ms}}{3 \cdot mg} = \frac{4 \cdot \frac{mg \sqrt{3}}{4}}{3 \cdot mg} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

Vậy: Để thanh AB cân bằng thì $\mu > 0,58$

12.6. Người trọng lượng $P_1 = 500 \text{ N}$ đứng trên ghế treo trọng lượng $P_2 = 300 \text{ N}$ như hình vẽ. Chiều dài $AB = 1,5 \text{ m}$. Hỏi người cần kéo dây một lực bao nhiêu và đứng ở vị trí nào để hệ cân bằng? Bỏ qua trọng lượng ròng rọc



Bài giải

- Đối với hệ “người và ghế”

+ Các lực tác dụng lên hệ gồm: trọng lực $\vec{P} (P = P_1 + P_2)$, các lực căng dây $\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}''$

+ Hệ cân bằng: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{T}' + \vec{T}'' = 0$ (1)

$$\Rightarrow T + T' + T'' = P$$

$$\text{với } F = T' = T'' = \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow 4F = P \Rightarrow F = \frac{P}{4} = \frac{P_1 + P_2}{4} = \frac{500 + 300}{4} = 200 \text{ N}$$

- Đối với ghế:

+ Các lực tác dụng lên ghế: trọng lực $\vec{P}_2$, áp lực $\vec{N}_1$, các lực căng dây $\vec{T}, \vec{T}''$

+ Với trục quay qua A, ta có: $M_{\vec{T}''} = M_{\vec{P}_2} + M_{\vec{N}_1} (M_{\vec{T}} = 0)$

$$\Rightarrow T'' \cdot AB = P_2 \cdot \frac{AB}{2} + N_1 \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{\left(T'' - \frac{P_2}{2}\right) AB}{N_1} \quad (2)$$

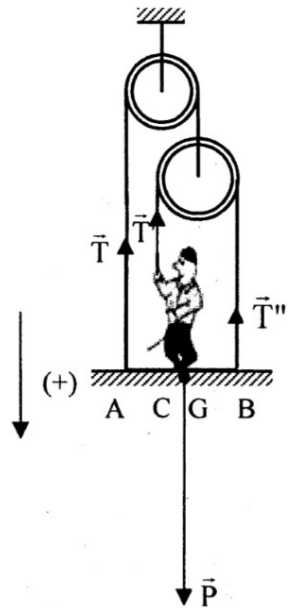
- Đối với người: người cân bằng trên ghế nên: $\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{T}' = 0$

$$\Rightarrow Q_1 = N_1 = P_1 - T' = P_1 - F \quad (3)$$

- Thay (3) vào (2) ta được:

$$AC = \frac{\left(T'' - \frac{P_2}{2}\right) AB}{P_1 - F} = \frac{\left(F - \frac{P_2}{2}\right) AB}{P_1 - F} = \frac{\left(200 - \frac{300}{2}\right) \cdot 1,5}{500 - 200} \Rightarrow AC = 0,25 \text{ m}$$

Vậy: Để hệ cân bằng thì người cần kéo dây một lực là $F = 200 \text{ N}$ và đứng ở vị trí C cách đầu A một đoạn $AC = 0,25 \text{ m}$

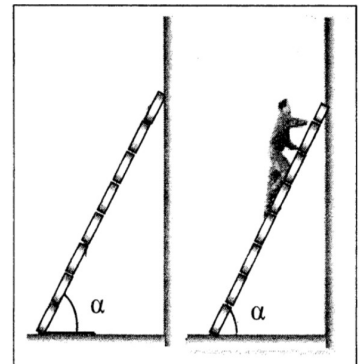


12.7. Thang có khối lượng $m = 20 \text{ kg}$ được dựa vào tường trơn nhẵn dưới góc nghiêng α

Hệ số ma sát giữa thang và sàn là $\mu = 0,6$

a) Thang đứng yên cân bằng, tìm các lực tác dụng lên thang nếu $\alpha = 45^\circ$

b) Tìm các giá trị của α để thang đứng yên không trượt trên sàn



c) Một người khối lượng $m' = 40 \text{ kg}$ trèo lên thang khi $\alpha = 45^\circ$. Hỏi người này lên đến vị trí O' nào trên thang thì thang sẽ bị trượt. Chiều dài thang $l = 2 \text{ m}$

Bài giải

a) Các lực tác dụng lên thang khi $\alpha = 45^\circ$

- Các lực tác dụng lên thang: trọng lực $\vec{P}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thang cân bằng nên:

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow Q_1 = P = mg = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N} \quad (1')$$

$$\text{và } F_{ms} = Q_2 \quad (1'')$$

$$+ \text{đối với trục quay qua A: } M_{\vec{P}} = M_{\vec{Q}_2} \quad (M_{\vec{Q}_1} = M_{\vec{F}_{ms}} = 0) \quad (2)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha = Q_2 \cdot AB \sin \alpha$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{P}{2 \tan \alpha} = \frac{200}{2 \tan 45^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 1} = 100 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_{ms} = Q_2 = 100 \text{ N}$$

Vậy: Các lực tác dụng lên thang khi $\alpha = 45^\circ$ là $P = Q_1 = 200 \text{ N}; F_{ms} = Q_2 = 100 \text{ N}$

b) Giá trị của α để thang không trượt:

Khi thang chưa trượt thì:

$$F_{ms} < \mu Q_1 \Rightarrow \frac{P}{2 \tan \alpha} < \mu P$$

$$\Rightarrow \tan \alpha > \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2 \cdot 0,6} = \frac{1}{1,2} \approx 0,833$$

$$\Rightarrow \alpha > 40^\circ$$

Vậy: Để thang không trượt thì $\alpha > 40^\circ$

c) Vị trí O' trên thang để thang bị trượt

- Các lực tác dụng lên thang: trọng lực $\vec{P}, \vec{P}'$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

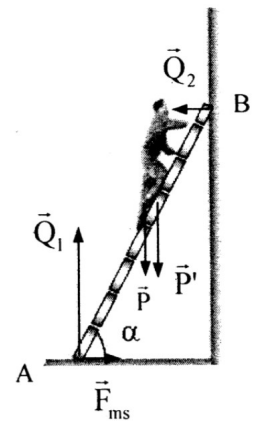
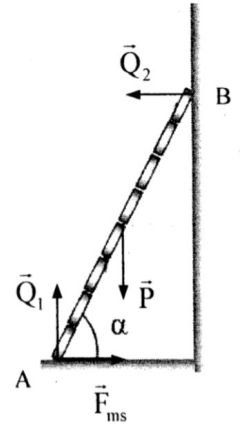
- Thang cân bằng nên:

$$+ \text{hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{P}' + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow Q_1 = P + P' = (m + m')g = (20 + 40) \cdot 10 = 600 \text{ N} \quad (3')$$

$$\text{Và } F_{ms} = Q_2 = \mu Q_1 = 0,6 \cdot 600 = 360 \text{ N} \quad (3'')$$

$$+ \text{Đối với trục quay qua A: } M_{\vec{P}} + M_{\vec{P}'} = M_{\vec{Q}_2} \quad (M_{\vec{Q}_1} = M_{\vec{F}_{ms}} = 0) \quad (4)$$



$$\Rightarrow P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + P' \cdot AO' \cos \alpha = Q_2 \cdot AB \sin \alpha$$

$$\Rightarrow AO' = \frac{\left(Q_2 \sin \alpha - \frac{P}{2} \cos \alpha \right) \cdot AB}{P' \cos \alpha} = \frac{\left(360 \sin 45^\circ - \frac{200}{2} \cdot \cos 45^\circ \right) \cdot 2}{400 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$\Rightarrow AO' = \frac{\left(360 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{200}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2}{400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,3 \text{ m}$$

Vậy: Thang sẽ bị trượt khi người leo đến vị trí O' với $AO' = 1,3 \text{ m}$

12.8. Thang trọng lượng $P = 100 \text{ N}$ dựa vào tường trơn sàn nhám. Cần nghiêng thang góc α đối với sàn bao nhiêu để người có trọng lượng $P_1 = 400 \text{ N}$ có thể trèo lên tận đỉnh thang?

Biết hệ số ma sát giữa thang với sàn là $\mu = 0,3\sqrt{3}$

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thang: trọng lực $\vec{P}, \vec{P}_1$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thang chưa trượt khi ($F_{ms} \leq \mu N$)

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{P}_1 + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow Q_1 = P + P_1 = 100 + 400 = 500 \text{ N} \quad (1')$$

$$\text{Và } F_{ms} = Q_2 \leq \mu Q_1 = 0,3\sqrt{3} \cdot 500 = 150\sqrt{3} \text{ N} \quad (1'')$$

+ Đối với trục quay quanh A :

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{P}_1} = M_{\vec{Q}_2} \quad (M_{\vec{Q}_1} = M_{\vec{F}_{ms}} = 0) \quad (2)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + P_1 \cdot AB \cos \alpha = Q_2 \cdot AB \sin \alpha \quad (2')$$

$$\Rightarrow 450 \cos \alpha \leq 150\sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \geq \sqrt{3} \Rightarrow \alpha \geq 60^\circ$$

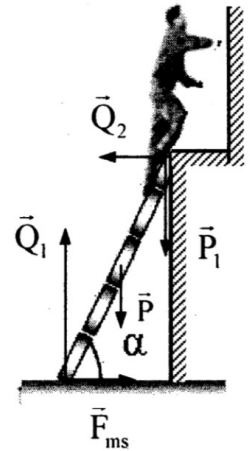
Vậy: để người trèo lên được đến đỉnh thang thì $\alpha \geq 60^\circ$

12.9. Thang dựa vào tường, hợp với sàn góc α . Biết hệ số ma sát giữa thang với tường là $\mu_1 = 0,5$, với sàn là $\mu_2 = 0,4$. Khối tâm thang ở giữa thang. Tìm giá trị nhỏ nhất của α mà thang không trượt.

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thang: trọng lực $\vec{P}$, các lực ma sát $\vec{F}_{ms}, \vec{f}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thang chưa trượt khi ($F_{ms} \leq \mu N$)



+ Hợp lực bằng 0:

$$\vec{P} + \vec{f}_{ms} + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f_{ms} = P - Q_2 \leq \mu_1 Q_1 \quad (1')$$

$$\text{Và } F_{ms} = Q_1 \leq \mu_2 Q_2 \quad (1'')$$

+ Đối với trục quay qua B:

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{F}_{ms}} = M_{\vec{Q}_2} \quad (M_{\vec{Q}_1} = M_{\vec{f}_{ms}} = 0) \quad (2)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + F_{ms} \cdot AB \sin \alpha = Q_2 \cdot AB \cos \alpha \quad (2')$$

$$\Rightarrow P = 2Q_2 - 2F_{ms} \cdot \tan \alpha = 2Q_2 - 2Q_1 \cdot \tan \alpha$$

$$\text{Vì } F_{ms} = Q_1 \leq \mu_2 Q_2; f_{ms} = P - Q_2 \leq \mu_1 Q_1$$

$$\Rightarrow 2Q_2 - 2Q_1 \cdot \tan \alpha - Q_2 \leq \mu_1 Q_1$$

$$\Rightarrow Q_2 - 2Q_1 \cdot \tan \alpha \leq \mu_1 Q_1$$

$$\Rightarrow Q_2 \leq (\mu_1 + 2 \tan \alpha) Q_1 \leq (\mu_1 + 2 \tan \alpha) \mu_2 Q_2$$

$$\Rightarrow 1 \leq (\mu_1 + 2 \tan \alpha) \mu_2 \Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{1}{2\mu_2} - \frac{\mu_1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 0,4} - \frac{0,5}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \geq 45^\circ \Rightarrow \alpha_{\min} = 45^\circ$$

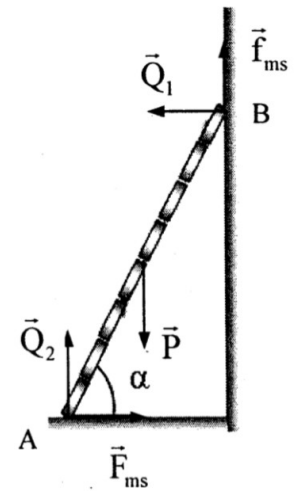
Vậy giá trị nhỏ nhất của α mà thang không trượt là $\alpha_{\min} = 45^\circ$

12.10. Thang chiều dài $AB = l$ nghiêng góc α so với sàn tại A và tựa vào tường tại B. Khối tâm của C của thang cách A một đoạn $\frac{l}{3}$

a) Chứng minh rằng thang không thể cân bằng nếu không có ma sát.

b) Gọi μ là hệ số ma sát giữa thang với sàn và tường, $\alpha = 60^\circ$. Tính μ nhỏ nhất để thang cân bằng

c) Khi μ nhỏ nhất, thang có trượt không nếu một người có trọng lượng bằng trọng lượng thang đứng tại D cách A một khoảng $\frac{2l}{3}$?



Bài giải

a) Chứng minh rằng thang không thể cân bằng nếu không có ma sát

- Nếu không có ma sát, các lực tác dụng lên thang gồm: trọng lực $\vec{P}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$. Nếu thang cân bằng thì: $\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$

- Chiếu (1) lên phương ngang ta được: $Q_2 = 0$ (vô lý)!

Vậy: Thang không thể cân bằng nếu không có ma sát.

b) Giá trị nhỏ nhất của μ để thang cân bằng

- Các lực tác dụng lên thang: trọng lực $\vec{P}$, các lực ma sát $\vec{F}_{ms}, \vec{f}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thang chưa trượt khi ($F_{ms} \leq \mu N$)

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{f}_{ms} + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f_{ms} = P - Q_2 \leq \mu Q_1 \quad (1')$$

$$\text{Và } F_{ms} = Q_1 \leq \mu Q_2 \quad (1'')$$

+ Đối với trục quay qua B

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{F}_{ms}} = M_{\vec{Q}_2} \quad (M_{\vec{Q}_1} = M_{\vec{f}_{ms}} = 0) \quad (2)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{2l}{3} \cos \alpha + F_{ms} \cdot l \sin \alpha = Q_2 \cdot l \cos \alpha \quad (2')$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{2}(Q_2 - F_{ms} \cdot \tan \alpha) = \frac{3}{2}(Q_2 - Q_1 \cdot \tan \alpha)$$

- Vì $F_{ms} = Q_1 \leq \mu Q_2$; $f_{ms} = P - Q_2 \leq \mu Q_1$

- Thay vào (1') ta được: $\frac{3}{2}(Q_2 - Q_1 \cdot \tan \alpha) - Q_2 \leq \mu Q_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Q_2 - \frac{3}{2}Q_1 \cdot \tan \alpha \leq \mu Q_1$$

$$\Rightarrow Q_2 \leq (2\mu + 3 \tan \alpha)Q_1 \leq (2\mu + 3 \tan \alpha) \cdot \mu Q_2$$

$$\Rightarrow 2\mu^2 + 3 \tan \alpha \cdot \mu - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2\mu^2 + 3\sqrt{3}\mu - 1 \geq 0 \quad (3)$$

- Giải (3) ta được: $\mu \geq \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mu_{\min} = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4} \approx 0,18$

Vậy: giá trị nhỏ nhất của μ để thang cân bằng là $\mu_{\min} \approx 0,18$

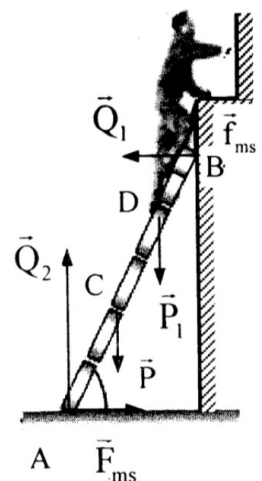
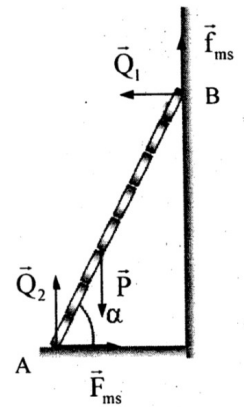
c) Thang có trượt không nếu một người có trọng lượng bằng trọng lượng thang đứng tại D

- Gọi $\vec{P}'$ là hợp lực của $\vec{P}$ và $\vec{P}_1$, vì $P = P_1$ và $\vec{P}, \vec{P}_1$ cách hai đầu thang những khoảng bằng nhau nên suy ra khối tâm E của hệ người và thang nằm ở giữa thang.

- Các lực tác dụng lên thang là: trọng lực $\vec{P}'$, các lực ma sát $\vec{F}_{ms}, \vec{f}_{ms}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- Thang bắt đầu trượt khi:

$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{f}_{ms} + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0$$



$$\Rightarrow f_{ms} = P - Q_2 = \mu Q_1 \quad (3')$$

$$\text{Và } F_{ms} = Q_1 = \mu Q_2$$

+ Đối với trục quay B:

$$M_{P'} + M_{F_{ms}} = M_{Q_2} \quad (M_{Q_1} = M_{f_{ms}} = 0) \quad (4)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha + F_{ms} \cdot l \sin \alpha = Q_2 \cdot l \cos \alpha$$

$$\Rightarrow P = 2(Q_2 - F_{ms} \cdot \tan \alpha) = 2(Q_2 - Q_1 \cdot \tan \alpha)$$

- Thay (3') và (3'') vào ta được: $2(Q_2 - Q_1 \cdot \tan \alpha) - Q_2 = \mu Q_1$

$$\Rightarrow Q_2 - 2Q_1 \cdot \tan \alpha = \mu Q_1$$

$$\Rightarrow Q_2 = (\mu + 2 \tan \alpha) Q_1 = (\mu + 2 \tan \alpha) \cdot \mu Q_2$$

$$\Rightarrow \mu^2 + 2 \tan \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mu^2 + 2\sqrt{3}\mu - 1 = 0 \quad (5)$$

Giải (5) ta được: $\mu = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27 > \mu_{\min}$ (phù hợp)

Vậy: Nếu một người có trọng lượng bằng trọng lượng thang đứng tại D cách A $\frac{2l}{3}$ thì thang sẽ bị trượt

12.11. Thanh đồng chất nằm trong một chỏm cầu nhám, hệ số ma sát μ , độ dài thanh bằng bán kính chỏm cầu. Hỏi thanh có thể tạo với đường nằm ngang góc lớn nhất bao nhiêu mà vẫn cân bằng? Biết thanh nằm trong mặt phẳng thẳng đứng qua tâm chỏm cầu.



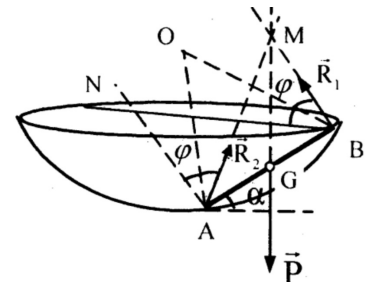
Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực $\vec{P}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$, các lực ma sát $\vec{F}_{ms1}, \vec{F}_{ms2}$

- Thanh cân bằng khi: $\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms1} + \vec{F}_{ms2} = 0 \quad (1)$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0 \quad (\vec{R}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1}; \vec{R}_2 = \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2})$$

- Vẽ hai mặt nón ma sát MAN và MBN tại hai đầu A và B của thanh với nửa góc ở đỉnh φ sao cho $\tan \varphi = \mu$. Lúc đó:



+ Hợp lực tác dụng lên thanh nằm trong mặt nón ma sát thì thanh cân bằng.

+ Hợp lực phải có giá đồng quy thì thanh mới cân bằng.

+ Góc α lớn nhất khi ba lực $\vec{P}, \vec{R}_1, \vec{R}_2$ có giá đồng quy tại giao điểm M của hai mặt nón ma sát.

- Áp dụng định lý hàm sin cho:

+ Tam giác MAG ta có: $\frac{\sin \angle MAG}{MG} = \frac{\sin \angle AMG}{AG}$ ($OA = OB = AB = R, \Delta OAB$ đều)

$$\Rightarrow \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{MG} = \frac{\sin[90^\circ - (\alpha + \angle MAG)]}{\frac{AB}{2}} = \frac{\cos(\alpha + 60^\circ - \varphi)}{\frac{R}{2}} \quad (2)$$

+ Tam giác MBG ta có: $\frac{\sin \angle MBG}{MG} = \frac{\sin \angle BMG}{BG}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ + \varphi)}{MG} &= \frac{\sin[180^\circ - (60^\circ + \alpha + \angle MGB)]}{\frac{AB}{2}} \\ &= \frac{\sin[180^\circ - (60^\circ + \varphi + 90^\circ - \alpha)]}{\frac{AB}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ + \varphi)}{MG} &= \frac{\sin[90^\circ - (60^\circ + \varphi - \alpha)]}{\frac{AB}{2}} = \frac{\cos(\alpha - 60^\circ - \varphi)}{\frac{R}{2}} \quad (3) \end{aligned}$$

Chia (2) cho (3) ta được: $\frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ + \varphi)} = \frac{\cos(\alpha + 60^\circ - \varphi)}{\cos(\alpha - 60^\circ - \varphi)}$

$$\Rightarrow \sin(60^\circ - \varphi) \cdot \cos(\alpha - 60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi) \cdot \cos(\alpha + 60^\circ - \varphi)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha - \varphi) = \frac{1}{3} \tan \varphi \Leftrightarrow \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \varphi} = \frac{1}{3} \tan \varphi$$

$$\Rightarrow 3 \tan \alpha - 3 \tan \varphi = \tan \varphi + \tan \alpha \cdot \tan^2 \varphi$$

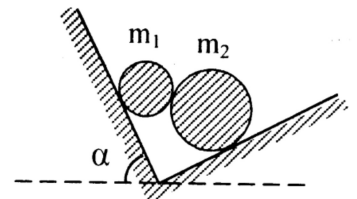
$$\Rightarrow \tan \alpha (3 - \tan^2 \varphi) = 4 \tan \varphi \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4 \tan \varphi}{3 - \tan^2 \varphi} = \frac{4k}{3 - k^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{4k}{3 - k^2}\right)$$

Vậy: Thanh có thể tạo với đường nằm ngang góc lớn nhất là $\alpha = \arctan\left(\frac{4k}{3 - k^2}\right)$ để thanh cân bằng

12.12. Hai trụ nhẵn đồng chất $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$, tâm O_1, O_2 đặt tiếp xúc nhau giữa hai mặt nghiêng trơn vuông góc, $\alpha = 60^\circ$

Tìm góc tạo bởi O_1, O_2 và phương ngang, áp lực của các khối trụ lên mặt phẳng và lực tương tác giữa hai trụ.



Bài giải

- Các lực tác dụng lên trụ thứ nhất là: trọng lực $\vec{P}_1$, phản lực $\vec{Q}_1$, lực tương tác $\vec{F}_1$; các lực tác dụng lên trụ thứ hai là: trọng lực $\vec{P}_2$, phản lực $\vec{Q}_2$, lực tương tác $\vec{F}_2$

- Điều kiện cân bằng của mỗi trụ là:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_1 = 0 \quad (1)$$

$$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_2 = 0 \quad (2)$$

- Chiếu (1) và (2) lên hai trục Ox và Oy ta được:

$$Q_1 \sin 60^\circ - F_1 \cos \beta = 0 \quad (1')$$

$$-Q_2 \sin 30^\circ + F_2 \cos \beta = 0 \quad (2')$$

$$Q_1 \cos 60^\circ + F_1 \sin \beta - P_1 = 0 \quad (1'')$$

$$Q_2 \cos 30^\circ - F_2 \sin \beta - P_2 = 0 \quad (2'')$$

- Từ (1') và (2') suy ra: $Q_1 \sin 60^\circ = Q_2 \sin 30^\circ$ (vì $F_1 = F_2$)

$$\Rightarrow Q_2 = Q_1 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \cdot Q_1 = \sqrt{3} Q_1 \quad (3)$$

Từ (1'') và (2'') suy ra: $Q_1 \cos 60^\circ - P_1 = -Q_2 \cos 30^\circ + P_2$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} \cos 30^\circ + \cos 60^\circ) Q_1 = P_2 + P_1$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3} \cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{10 \cdot 10 + 30 \cdot 10}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = 200 \text{ N}$$

$$\text{Và } Q_2 = \sqrt{3} Q_1 = \sqrt{3} \cdot 200 = 346 \text{ N}$$

$$\text{- Từ (1') và (2') suy ra: } \tan \beta = \frac{P_1 - Q_1 \cos 60^\circ}{Q_1 \sin 60^\circ} = \frac{10 \cdot 10 - 200 \cdot \frac{1}{2}}{200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

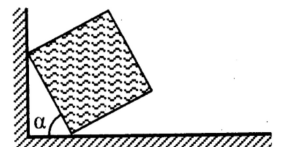
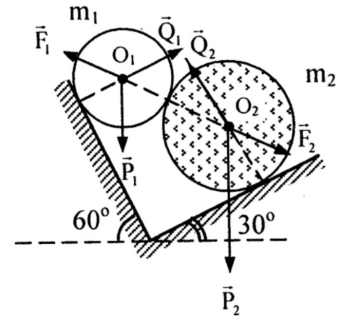
$$\text{- Từ (1') suy ra: } F_1 = Q_1 \frac{\sin 60^\circ}{\cos \beta} = 200 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = 173 \text{ N}$$

Vậy: Góc hợp bởi $O_1 O_2$ và phương ngang là $\beta = 0^\circ$; áp lực các khối trụ lên các mặt phẳng là $N_1 = Q_1 = 200$

N, $N_2 = Q_2 = 346$ N; lực tương tác giữa hai trụ là $F_1 = F_2 = 173$ N

12.13. Khối lập phương tựa trên một cạnh trên nền nhà, một cạnh trên tường nhẵn.

Tìm α để khối cân bằng, biết hệ số ma sát giữa khối và sàn là μ



Bài giải

- Các lực tác dụng lên vật là: trọng lực $\vec{P}$, các phản lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$

- Để khối gỗ cân bằng thì:

+ Hợp lực bằng 0:

$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow Q_2 - F_{ms} = 0 \Rightarrow F_{ms} = Q_2 \quad (1')$$

$$\text{Và } -P + Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = P \quad (1'')$$

$$\Rightarrow F_{ms} = Q_2 \leq \mu N = \mu Q_1 = \mu P \quad (2)$$

+ Đối với trục quay qua A thì:

$$M_{\vec{Q}_2} \geq M_{\vec{P}} \Rightarrow Q_2 \cdot OB \geq P \cdot AH \text{ với } OB = a \sin \alpha$$

$$AH = AG \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{a}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow Q_2 \cdot a \sin \alpha \geq P \cdot \frac{a}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \Leftrightarrow Q_2 \cdot \sin \alpha \geq \frac{P}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

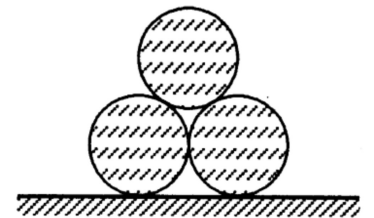
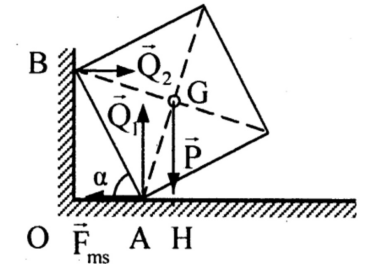
$$\Rightarrow \mu P \cdot \sin \alpha \geq \frac{P}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{1}{2\mu + 1}$$

- Khi $\alpha > \frac{\pi}{4}$ vật sẽ bị lật ngay do trọng lực rơi ngoài chân đế.

Vậy: Để khối gỗ cân bằng thì $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, với $\tan \alpha_0 = \frac{1}{2\mu + 1}$

12.14. Ba hình trụ giống nhau đặt như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa các trụ là μ , giữa trụ với mặt phẳng là μ' .

Tìm điều kiện của μ, μ' để hệ cân bằng.



Bài giải

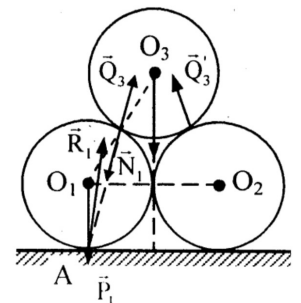
- Các lực tác dụng lên trụ 1: trọng lực $\vec{P}_1$, phản lực $\vec{Q}_1$, lực ma sát $\vec{F}_{ms1}$ và áp lực

$\vec{N}_1$

- Điều kiện cân bằng của trụ 1 là:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1} + \vec{N}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{N}_1 = 0 \quad (1) \quad (\vec{R}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1})$$



- Từ (1) suy ra:

+ $\vec{P}_1, \vec{R}_1, \vec{N}_1$ phải đồng phẳng, đồng quy (có giá qua A)

+ $\vec{N}_1$ nằm trong nón ma sát có trục IO_1 , có nửa góc ở đỉnh là α , với $\alpha = \mu$

+ $\vec{R}_1$ nằm trong nón ma sát có trục AO_1 , có nửa góc ở đỉnh là β , với $\gamma = \mu'$

- tam giác AO_1I cho: $\angle O_1AI = \angle O_1AI = \frac{180^\circ - \angle AO_1I}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$

- Từ điều kiện: $\tan \alpha = \mu \Rightarrow \tan 15^\circ < \mu \Rightarrow \mu > 0,27$

- Trong tam giác lực hợp bởi ba lực $\vec{P}_1, \vec{R}_1, \vec{N}_1$ ta có:

$$\frac{N_1}{\sin \gamma} = \frac{P}{\sin (15^\circ - \gamma)} \quad (2)$$

- Điều kiện cân bằng của trụ thứ ba là: $\vec{P}_3 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_3' = 0$ (3)

$$\Rightarrow Q_3 \cos 15^\circ + Q_3' \cos 15^\circ - P_3 = 0 \quad (3')$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_3' = N_1 = \frac{P_3}{2 \cos 15^\circ} = \frac{P}{2 \cos 15^\circ} \quad (3'')$$

- Thay (3'') vào (2) ta được: $\frac{P}{2 \cos 15^\circ \cdot \sin \gamma} = \frac{P}{\sin (15^\circ - \gamma)}$

$$\Rightarrow 2 \cos 15^\circ \cdot \sin \gamma = \sin (15^\circ - \gamma) = \sin 15^\circ \cos \gamma - \cos 15^\circ \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \tan \gamma = \frac{1}{3} \sin 15^\circ = \frac{1}{3} \cdot 0,259 = 0,089$$

- Từ điều kiện: $\tan \gamma = \mu' \Rightarrow$ để trụ cân bằng thì $\mu' > 0,089$

Vậy: để ba trụ cân bằng thì μ, μ' phải thỏa mãn $\mu > 0,27$ và $\mu' > 0,089$

12.15. Hai khối vuông giống nhau, khối lượng mỗi khối là M , được kéo bởi lực $\vec{F}$ qua hai dây nối $AC = BC$ như hình vẽ. Góc $ACB = 2\alpha$. Hệ số ma sát giữa hai khối là μ , khối M ở dưới gắn chặt với đất. Tìm F để khối M ở trên đứng yên

Bài giải

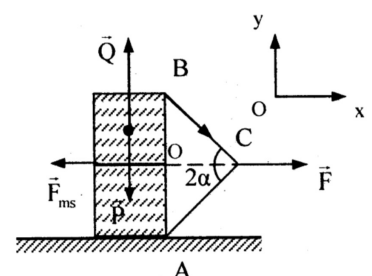
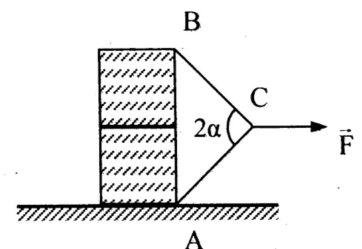
- Các lực tác dụng lên khối M ở trên là: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát

$\vec{F}_{ms}$ và lực căng dây $\vec{T}$

- Để khối M ở trên đứng yên:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} + \vec{T} = 0 \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên hai phương Ox và Oy của hệ trục Oxy ta được:



$$- F_{ms} + T \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{ms} = T \cos \alpha \quad (1')$$

$$\text{Và } Q - P - T \sin \alpha = 0 \Rightarrow Q = P + T \sin \alpha \quad (1'')$$

$$\text{- Tại } C \text{ ta có: } T = \frac{F}{2 \cos \alpha} \quad (2)$$

$$\text{- Để khối } M \text{ ở trên không trượt thì: } F_{ms} < \mu N = \mu Q = \mu(P + T \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow F_{ms} < \mu \left(P + \frac{F}{2} \tan \alpha \right) \quad (3)$$

$$\text{- Thay (1')} \text{ vào (3) ta được: } T \cos \alpha < \mu \left(P + \frac{F}{2} \tan \alpha \right)$$

$$\text{- Từ (2) suy ra: } \frac{F}{2} < \mu \left(P + \frac{F}{2} \tan \alpha \right)$$

$$\Rightarrow F < \frac{2\mu P}{1 - \mu \tan \alpha} = \frac{2\mu Mg}{1 - \mu \tan \alpha} \quad (4)$$

$$\text{- Để khối } M \text{ ở trên không quay quanh } O \text{ thì: } M_P < M_T$$

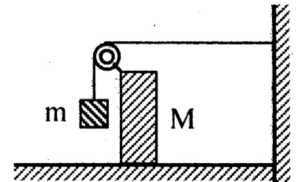
$$\Rightarrow P \cdot \frac{a}{2} > T a \cdot \cos \alpha = \frac{F}{2 \cos \alpha} \cdot a \cdot \cos \alpha = F \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F < P = Mg$$

Vậy: Điều kiện để khối M ở trên đứng yên là $F < Mg$ và $F < \frac{2\mu Mg}{1 - \mu \tan \alpha}$ ($\mu \tan \alpha < 1$)

12.16. Khối đồng chất hình hộp khối lượng M có các cạnh a, b gắn với m qua ròng rọc, dây nối. Hệ số ma sát giữa M và sàn là μ .

Tìm điều kiện để hệ đứng yên cân bằng.



Bài giải

- Các lực tác dụng lên M : trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, các lực căng dây $\vec{T}, \vec{T}'$ ($T = T' = p = mg$)

- Vật M cân bằng khi:

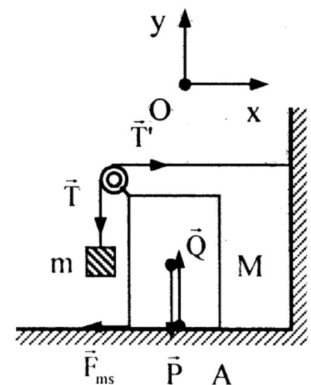
$$+ \text{Hợp lực bằng 0: } \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} + \vec{T} + \vec{T}' = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow T' - F_{ms} = 0 \Rightarrow F_{ms} = T' = p \quad (1')$$

$$\text{Và } -P - T + Q = 0 \Rightarrow Q = P + T = P + p \quad (1'')$$

$$\text{Với } F_{ms} \leq \mu N = \mu Q \text{ (chưa trượt)} \Rightarrow mg \leq \mu \cdot g(M + m)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M} \geq \frac{1 - \mu}{\mu} \quad (2)$$



+ đối với trục quay qua A: $M_P^A + M_T^A \geq M_T^A$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{a}{2} + p \cdot a \geq p \cdot b \Rightarrow Mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot a \geq mg \cdot b$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M} \geq \frac{2(b-a)}{a} \quad (3)$$

Vậy: điều kiện để hệ đứng yên cân bằng là: $\frac{m}{M} \geq \frac{1-\mu}{\mu}$ và $\frac{m}{M} \geq \frac{2(b-a)}{a}$

12.17. Trong xiếc mô-tô bay, một người đi mô-tô trên thành hình trụ thẳng đứng bán kính $R=9$. Khối tâm người và xe cách thành trụ $h=1$ và một đường tròn nằm ngang, vận tốc 20m/s. Tìm góc nghiêng α của xe với phương ngang.

Bài giải

- Các lực tác dụng lên “người và xe” là: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$

- Phương trình chuyển động của “người và xe” là:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = m\vec{a} \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy ta được:

$$Q = ma_{ht} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{(R-h)} \quad (1')$$

$$\text{Và } F_{ms} = P = mg \quad (1'')$$

- Để “xe và người” không bị đổ thì đối với trục quay qua trọng tâm G của hệ “người và xe” ta có: $M_Q^G = M_{F_{ms}}^G$

$$\Rightarrow Q \cdot h \tan \alpha = F_{ms} \cdot h$$

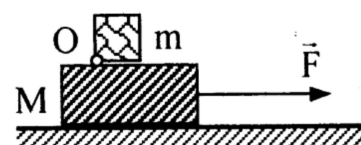
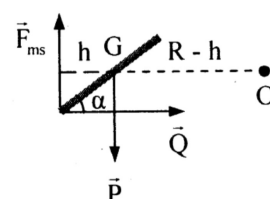
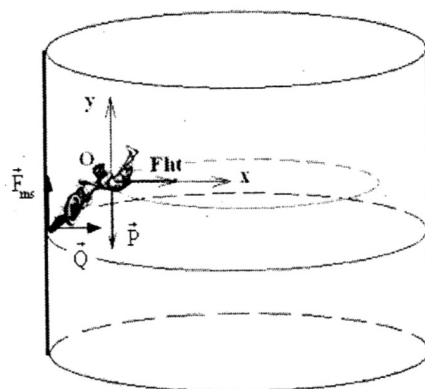
$$\Rightarrow m \frac{v^2}{(R-h)} \cdot h \tan \alpha = mgh$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{g(R-h)}{v^2} = \frac{10 \cdot (9-1)}{20^2} = 0,2 \Rightarrow \alpha = 11,3^\circ$$

Vậy: Góc nghiêng của xe so với phương ngang là $\alpha = 11,3^\circ$

12.18. Vật khối lượng M có thể trượt trên mặt bàn nhẵn. Trên M là một khối hộp lập phương m gắn với M tại O .

Hỏi với giá trị cực đại nào của F nằm ngang đặt lên M thì hình hộp không bị lật?



Bài giải

- Gia tốc của hệ là: $a = \frac{F}{m + M}$

- Trong hệ quy chiếu gắn với vật M , các lực tác dụng vào khối hộp gồm: trọng lực $\vec{P}$, lực quán tính $\vec{F}_{qt}$. Để khối hộp không quay quanh O thì:

$$M_{\vec{F}_{qt}} \leq M_{\vec{P}} \Rightarrow F_{qt} \cdot \frac{b}{2} \leq P \cdot \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow F_{qt} \leq P \Rightarrow m \cdot \frac{F}{m + M} \leq mg$$

$$\Rightarrow F \leq (m + M)g \Rightarrow F_{\max} = (m + M)g$$

Vậy: Giá trị cực đại của F nằm ngang đặt lên M để hình hộp không bị lật là $F_{\max} = (m + M)g$

12.19. Khối trụ tiết diện lục giác đều đặt trên mặt ngang, chịu lực $\vec{F}$ nằm ngang. Xác định hệ số ma sát giữa trụ với sàn để khối trụ trượt mà không quay

Bài giải

- Các lực tác dụng lên khối trụ là: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, lực tác dụng $\vec{F}$.

- Khối trụ không quay (quanh A) khi: $M_{\vec{P}} \geq M_{\vec{F}}$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{a}{2} \geq F \cdot OH \left(OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{a}{2} \geq F \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{P}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

- Khối trụ trượt khi: $Q = P; F \geq F_{ms} = \mu N = \mu Q = \mu P \quad (2)$

- Từ (1) và (2) suy ra: $\mu P \leq F \leq \frac{P}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$.

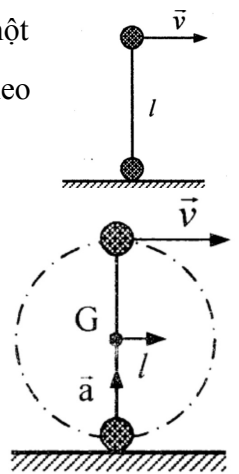
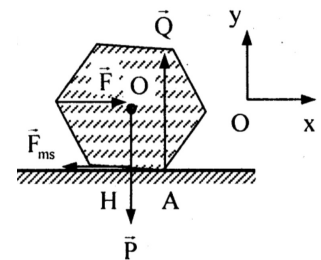
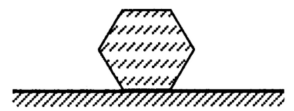
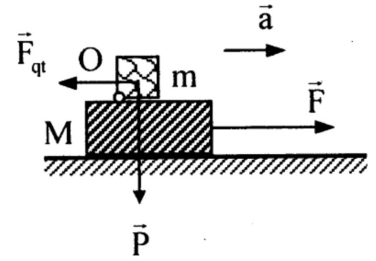
Vậy: để khối trụ trượt mà không quay thì $\mu \leq 0,577$

12.20. Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang, một quả tạ gồm hai quả cầu nhỏ nối với nhau bằng một thanh nhẹ, chiều dài l , đặt thẳng đứng. Truyền cho quả cầu trên một vận tốc đầu v theo phương ngang.

Xác định l để quả cầu dưới bị nhấc khỏi bàn ngay khi bắt đầu chuyển động

Bài giải

- Khi truyền cho quả cầu trên một vận tốc v theo phương ngang thì:



+ Hai quả cầu sẽ quay quanh khối tâm của nó với gia tốc hướng tâm a

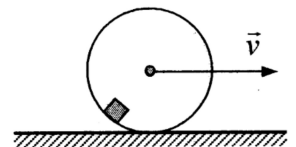
+ Khối tâm sẽ chuyển động tịnh tiến theo phương ngang với vận tốc $\frac{v}{2}$

- Khi quả cầu dưới bị nhấc ra khỏi mặt bàn thì nó sẽ chịu tác dụng của trọng lực và có gia tốc g . Như vậy khi quả cầu nhấc khỏi mặt bàn thì: $a \geq g$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} \geq g \Rightarrow l \leq \frac{v^2}{2g}$$

Vậy: để quả cầu dưới bị nhấc khỏi bàn ngay khi bắt đầu chuyển động thì chiều dài của thanh phải là $l \leq \frac{v^2}{2g}$

12.21. Bánh xe bán kính R , khối lượng M có gắn một vật nhỏ khối lượng m được kéo trên mặt ngang và lăn không trượt. Hỏi với vận tốc nào thì bánh xe có thể nảy khỏi mặt ngang trong khi chuyển động?



Bài giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với tâm O của bánh xe.

- Các lực tác dụng lên m là: trọng lực $\vec{p}$, phản lực $\vec{Q}$:

$$\vec{p} + \vec{Q} = m\vec{a} \quad (1)$$

- Các lực tác dụng lên bánh xe: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}'$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, áp lực $\vec{N}$

$$(\text{của } m): \vec{P} + \vec{Q}' + \vec{F}_{ms} + \vec{N} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow Q' = P \pm N_t \text{ (dấu (+) ứng với phần dưới bánh xe, dấu (-) ứng với phần trên bánh xe).}$$

- Chiều (1) lên phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, ta được:

$$p + Q_t = m \frac{v^2}{R} \cdot \cos \alpha$$

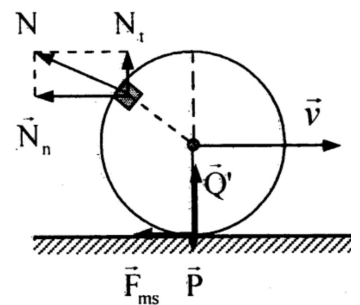
$$\Rightarrow Q_t = m \frac{v^2}{R} \cdot \cos \alpha - mg \quad (3)$$

$$\Rightarrow Q_{t(\max)} = m \frac{v^2}{R} - mg \text{ khi } \cos \alpha = 1 \text{ hay } \alpha = 0; m \text{ ở điểm cao nhất trên bánh}$$

xe.

- Ở vị trí đó, để bánh xe được nâng lên thì $N_{t(\max)} = Q_{t(\max)} \geq P = Mg$

$$\Rightarrow m \frac{v^2}{R} - mg \geq Mg$$



$$\Rightarrow v \geq \sqrt{gR \left(1 + \frac{M}{m} \right)}$$

Vậy: Để bánh xe có thể nảy lên khỏi mặt ngang khi chuyển động thì $v \geq \sqrt{gR \left(1 + \frac{M}{m} \right)}$