|  |
| --- |
| PHÒNG GD VÀ ĐT THANH OAIĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – V2MÔN TOÁN 9 NĂM HỌC 2020 – 2021**Đề số 18** |

1. (4,0 điểm)

1. Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn .

Tính giá trị của biểu thức *M = abc*

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n*:



1. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: 

2. Tìm số nguyên thỏa mãn: 

1. (4,0 điểm).

1*.* Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì *A = 7.5****2n*** *+ 12.6****n*** chia hết cho 19.

2. Với *a, b, c > 0* thỏa mãn *a+ b+ c = abc - 2*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

 

1.  điểm)

1. Cho đường tròn (O, R). Đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên đường tròn lấy E (E khác A, B). Đường thẳng vuông góc với OE tại E cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Hạ EF vuông góc với AB tại F, BC cắt EF tại I.

a) Chứng minh I là trung điểm của EF

b) Gọi EA cắt CF tại M, EB cắt DF tại N và K là trung điểm của AC. Chứng minh K, M, I, N thẳng hàng

c) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác COD. Chứng minh 

1. (2,0 diểm)

Với *a, b, c* là các số thực dương, chứng minh rằng:



🙢**HẾT**🙠

|  |
| --- |
| ĐÁP ÁN KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC: 2020 – 2021.  |

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1. (4,0 điểm)

1. Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn .

Tính giá trị của biểu thức *M = abc*

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n*:



**Lời giải**

1. (2 điểm)

Ta có 



**2**. ***(2 điểm)***Chứng minh được công thức tổng quát:



Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra:



Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

suy ra đpcm

1. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: 

2. Tìm số nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

 **1. *(2 điểm)***

 Điều kiện xác định: x = 0 hoặc xhoặc x

- Xét x = 0, thỏa mãn phương trình nên x=0 là nghiệm

- Xét x, chia hai vế cho , ta được: 

Đặt: . Ta được:
Giải được  suy ra  (Thỏa mãn ĐKXĐ)

Thử lại ta có nghiệm của phương trình là

**2. *(2 điểm)***

 (1)



Vì VT là số chính phương suy ra VP là số chính phương mà  và là hai số nguyên liên tiếp nên phải có hoặc 

\* Với  ta có  nên 

\* Với thì suy ra hoặc 

Thử lại ta có nghiệm nguyên của (1) là: (0;0); (1;-1); (-1;1)

**Bài 3.**  *(4,0 điểm)*

1*.* Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì *A = 7.5****2n*** *+ 12.6****n*** chia hết cho 19.

2. Với *a, b, c > 0* thỏa mãn *a+ b+ c = abc - 2*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

 

**Lời giải**

**1**. **(*2 điểm)***

Với n = 0 ta có A(0) = 19  19

Giả sử A chia hết cho 19 với n = k nghĩa là: A(k) = 7.52k + 12.6k  19

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với n = k + 1 nghĩa là phải chứng minh:

A(k + 1) = 7.52(k + 1) + 12.6k + 1 19

Ta có: A(k + 1) = 7.52(k + 1) + 12.6k + 1

 = 7.52k.52 + 12.6n. 6

 = 7.52k.6 + 7.52k .19 + 12.6n. 6

 = 6.A(k) + 7.52k .19 19

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì A = 7.52n + 12.6n 19 với mọi nN .

**2. *(2 điểm)***Chứng minh được 

Thật vậy: 



(đúng, theo giả thiết)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:



Vậy Pmax =khi và chỉ khi a= b= c= 2

**Bài 4.**  *(6,0 điểm)*

1. Cho đường tròn (O, R). Đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên đường tròn lấy E (E khác A, B). Đường thẳng vuông góc với OE tại E cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Hạ EF vuông góc với AB tại F, BC cắt EF tại I.

a) Chứng minh I là trung điểm của EF

b) Gọi EA cắt CF tại M, EB cắt DF tại N và K là trung điểm của AC. Chứng minh K, M, I, N thẳng hàng

c) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác COD. Chứng minh 

**Lời giải**

****

**a. *(2 điểm)*** Kéo dài BE cắt Ax tại Q

+ Chứng minh các tam giác vuông ACO=ECO để có AC=CE, tương tự có ED=DB (HS có thể dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

+ Chứng minh được CEQ cân tại C và CAE cân suy ra CA = CQ(1)

+ Chứng minh được EF//AQ nên áp dụng định lý Talet vào QBC và

BCA có:  (2)

 suy ra đpcm

**b. *(2 điểm)***

  lại có 

 Từ đó chứng minh đượcEMI đồng dạng AMK (c-g-c)

 Suy ra góc EMI = góc KMA

 Suy ra  Nên K, M, I thẳng hàng (3)

 Kéo dài IN cắt BD tại P. Do EF//BD nên áp dụng hệ quả định lý Talet có:  mà EI=FI (cmt) nên BP=DP=1/2BD

Áp dụng ĐL Talet trong BCD (EI/BD) có:

Kết hợp với (slt) suy ra KCI đồng dạng PBI (c-g-c)

Suy ra từ đó có nên K, I, P thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) suy ra K, M, N, I thẳng hàng (đpcm)

**c. *(2 điểm)***

+ Đặt CD = a ; OC =b ; OD =c ( a > b; a > c )

+ Chứng minh được công thức tính diện tích tam giác S= p.r (r là bán kính đường tròn nội tiếp, p là nửa chu vi)

Dựa vào 2 cách tính diện tích tam giác COD ta có:



+ Trong COD có b+c > a suy ra a+ b +c > 2a

  (5)

+ Vì  (6)

Từ (5) (6) suy ra đpcm

**Bài 5.**  *(2,0 điểm)*  Với *a, b, c* là các số thực dương, chứng minh rằng:



**Lời giải**

Ta đặt a, b, c là độ dài các đoạn thẳng như hình vẽ sau:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Sử dụng tỉ số lượng giác tính được:*AB =* Vì Nên ta có đpcm |

🙢 **HẾT** 🙠