|  |  |
| --- | --- |
|  | **ĐỀ THI HSG TOÁN 12 – SỞ NAM ĐỊNH –NĂM 2021**  *Môn: Toán Lớp 12* |
| **HỌC HỎI - CHIA SẺ KIẾN THỨC** | *Thời gian: 1800 phút (Không kể thời gian phát đề)* |
|  | |

**Câu 1. (2 điểm)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị hàm số  có ba điểm cực trị , , cùng với gốc tọa độ  tạo thành  đỉnh của một hình thoi.

**Câu 2. (2,5 điểm)**

**1.** Gọi  là tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho  mà mỗi số có  chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp , tính xác suất để chọn được số chứa đúng một chữ số .

**2.** Giải phương trình .

**Câu 3. (1.5 điểm)** Giải hệ phương trình ****.

**Câu 4. (2 điểm)** Cho hình chóp  có đáy là hình thoi cạnh bằng ,  và tam giác đều

a/ Tính thể tích của khối chóp và tính khoàng cách từ điểm đến mặt phẳng .

b/ Giả sử là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua và vuông góc với mặt phẳng. Gọi là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng . Tính giá trị lớn nhất của .

**Câu 5. (2 điểm)** Xét ba số thực  thỏa mãn 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**------------------------HẾT------------------------**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **ĐỀ THI HSG TOÁN 12 – SỞ NAM ĐỊNH –NĂM 2021**  *Môn: Toán Lớp 12* |
| **HỌC HỎI - CHIA SẺ KIẾN THỨC** | *Thời gian: 1800 phút (Không kể thời gian phát đề)* |
|  | |

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị hàm số  có ba điểm cực trị , , cùng với gốc tọa độ  tạo thành  đỉnh của một hình thoi.

**Lời giải**

⬩Ta có:.

⬩ Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì .

⬩Khi đó .

⬩ Do đó tọa độ ba điểm cực trị là:

,,.

⬩ Gọi  là trung điểm của . Suy ra: .

⬩ Ta có:.

⬩Phương trình đường thẳng .

⬩ Để là hình thoi thì .

⬩ Đối chiếu với điều kiện:  ta được.

**Câu 2.1.** Gọilà tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho  mà mỗi số có  chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp , tính xác suất để chọn được số chứa đúng một chữ số .

**Lời giải**

Ta có không gian mẫu cần tìm là tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho  mà mỗi số có chữ số .

Suy ra không gian mẫu là: 

Gọi biến cố chọn số tự nhiên có  chữ số mà chia hết cho  với đúng một chữ số là 

Ta xét 2 trường hợp như sau:

\* Trường hợp 1: Chữ số đầu tiên là số nên chắc chắn P chia hết cho .

Khi đó chọn 2019 chữ số tiếp theo sẽ có cách và chữ số còn lại sẽ có 1 cách

\* Trường hợp 2: Chữ số đầu tiên là số khác 9

Khi đó, ta chọn chữ số đầu tiên có:  cách

Chọn vị trí để bỏ số 9 vào trong 2020 số còn lại: cách

Chọn 2018 số chữ số tiếp theo sẽ có cáchvà chữ số còn lại sẽ có 1 cách

Từ đó ta suy ra được biến cố chọn được số tự nhiên có 2021 chữ số mà chia hết cho 9 với đúng 1 chữ số 9 là  cách

Vậy suy ra xác suất cần tìm là .

**Câu 2.2.** Giải phương trình .

**Lời giải**

Ta có:

TXĐ:  .

Xét  lúc đó phương trình trở thành :  mà  nên  không phải là nghiệm của phương trình .

Xét  :

.

Chia cả 2 vế của phương trình cho  ta được như sau :



.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là  .

**Câu 3.** Giải hệ phương trình ****

**Lời giải**

Điều kiện:  (do  không thỏa phương trình (1))

Phương trình (1) tương đương với: 



Xét hàm đặc trưng  có 

Suy ra trên  (\*)

Phương trình (2) tương đương với:



Đặt thì khi đó phương trình trở thành:



Trường hợp 1:  thì khi đó phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2:  thì khi đó phương trình vô nghiệm

Như vậy dấu bằng sẽ xày ra khi



 mà  nên suy ra 

Như vậy ta kết luận hệ phương trình trên có nghiệm 

**Câu 4.** Cho hình chóp  có đáy là hình thoi cạnh bằng ,  và tam giác đều

a/ Tính thể tích của khối chóp và tính khoàng cách từ điểm đến mặt phẳng .

b/ Giả sử là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua và vuông góc với mặt phẳng. Gọi là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng . Tính giá trị lớn nhất của .

****

**Lời giải**

a/ Tính thể tích của khối chóp và tính khoàng cách từ điểm đến mặt phẳng .

⬩Ta có: và đều như vậy suy ra hình chiếu của lên mặt phẳng  trùngvới tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác , gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác .

Kẻ suy ra  (F trùng D).

Kẻ tiếp thì ta suy ra  (do ).

.

Mà mặt khác ta thấy: 

.

b/ Giả sử là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua và vuông góc với mặt phẳng. Gọi là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng . Tính giá trị lớn nhất của .

⬩Ta giả sử cho điểm bất kì thuộc mặt phẳng  với sao cho .

Mà mặt khác ta thấy  nên suy ra sin góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sẽ đạt giá trị lớn nhất khi góc cần tìm bằng với góc giữa và mặt phẳng .

Suy ra .

Như vậy, .

**Câu 5.** Xét ba số thực  thỏa mãn 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có: 









.

Như vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức  bằng  khi và chỉ khi .