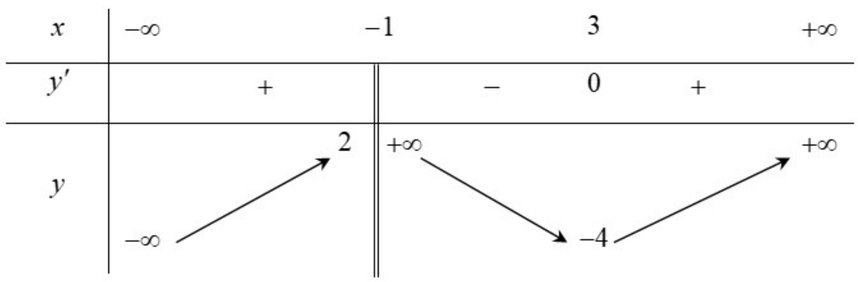
ĐỀ VDC SỐ 10 Cực trị tại một điểm cho trước

❖ **MỞ RỘNG:** Có thể áp dụng quy tắc thứ 2 để tìm cực trị của hàm số tại một điểm cho trước. Kiến thức này thuộc chương trình toán cao cấp của tác giả **Nguyễn Đình Trí**. Định lí được trình bày như sau:

- Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại $x=a$
- Các đạo hàm $f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$ thì:
  - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)<0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại a.
  - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)>0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại a.
  - Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại a.
  - Đặc biệt, khi $n=2$ thì có định lý trong SGK Toán 12.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 2: Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3+(m+4)x^2+(5m+2)x+m+6$ đạt cực tiểu tại $x=-2$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\{-2\}$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực đại tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=0$.

Câu 4: Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$?

A. $m=2$ hoặc $m=-1$. **B.** $m=2$ hoặc $m=1$.
C. $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \{1;2\}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-4	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = \left|f\left(|x|\right)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 1\right)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$

A. $m = 0$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $-1 < m < 1$

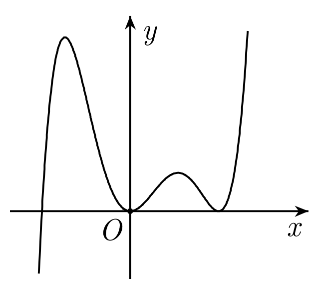
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Câu 13: Tìm m hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3(m+1)x + 2m$ đạt cực trị tại điểm $x = -1$

A. $m = -1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - \left(m^2+1\right)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 15: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = \left(m-1\right)x^4 - \left(m^2-2\right)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 17: Cho hàm số $y = \dfrac{x^5}{5} - \left(2m-1\right)x^4 - \dfrac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $\left(-2019;2019\right)$ để hàm số $y = \dfrac{m-1}{5}x^5 + \dfrac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + \left(m-2\right)x^5 - \left(m^2-4\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0.$

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{2018} + \left(m-5\right)x^5 + \left(25-m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(a,b\right)$ thỏa mãn $a,b \in \left(-20,20\right)$ để hàm số $y = x^8 + ax^7 + bx^6 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0.$

A. 722. **B.** 742. **C.** 703. **D.** 685.

Câu 23: Có bao nhiêu nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0.$

A. 7. **B.** Vô số. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 - mx^5 + \left(10m - m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^6+(m-1)x^4+(m^2-4)x^3+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-(m^2-16)x^4+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 7. **B.** Vô số. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|f(x+h)-f(x-h)\right|\le h^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall h>0$. Đặt $g(x)=\left[x+f'(x)\right]^{2019}+\left[x+f'(x)\right]^{29-m}-(m^4-29m^2+100)\sin^2 x-1$, m là tham số nguyên và $m<27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 108. **B.** 58. **C.** 100. **D.** 50.

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^5-mx^4+(m^3-3m^2-4m+12)x^3+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

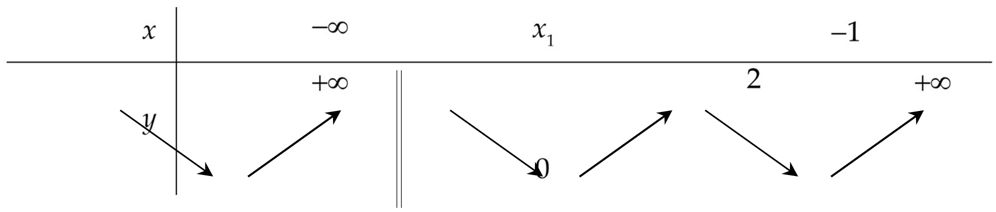
BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.D	6.C	7.C	8.B	9.D	10.C
11.C	12.B	13.C	14.A	15.D	16.A	17.B	18.A	19.B	20.C
21.D	22.B	23.C	24.B	25.B	26.D	27.C	28.A	29.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+4)x + 5m + 2$; $y'' = 6x + 2(m+4)$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ thì $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4(m+4) + 5m + 2 = 0 \\ -12 + 2m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 2 \end{cases}$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6x + m,\ y'' = 6x - 6.$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$

Với $m = 0$ ta có: $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Chọn B

Kiến thức cần nhớ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0, khi đó:

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Áp dụng ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2$; $y'' = 6x + 2(3m-1)$.

Xét phương trình $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3(-1)^2 - 2(3m-1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Với $m=1 \Rightarrow y''=6x+4 \Rightarrow y''(-1)=-2<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=5 \Rightarrow y''=6x+28 \Rightarrow y''(-1)=22>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$; $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

$\Rightarrow y'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2-2m.1+m^2-m+1=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=1$, $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2 \ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}, y'=0 \Leftrightarrow x=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.

Vậy $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=2$, $y'=x^2-4x+3, y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$y''=2x-4. \Rightarrow y''(1)=2.1-4=-2<0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi $m=2$.

Câu 6: Chọn C

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn C

Hàm số $y=f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng và gồm hai phần, phần 1 trùng với phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ ứng với $x\ge 0$; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		0		x_3		2		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 cực trị.

Câu 8: Chọn B

$y'=4mx^3+m^2-1$

Để hàm số đạt cực tại tại $x=0$ thì $y'(0)=0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1 \Rightarrow y=x^4+1, y'=4x^3=0 \Leftrightarrow x=0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

Với $m=-1 \Rightarrow y=-x^4+1, y'=-4x^3=0 \Leftrightarrow x=0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 9: Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại $x=-2$ hoặc $x=2$.

Câu 10: Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=0 \\ x=x_2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$					

Khi đó hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=x_1$ hay hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 11: Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx+m+2$ và $y''=6x-6m$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 6m + m + 2 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$ và $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ suy ra $y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m = 1$ thì $y''(3) = 4 > 0$, suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = 5$ thì $y''(3) = -4 < 0$, suy ra $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + 2mx - 3(m+1)$

Điều kiện cần:- Giả sử hàm số này đạt cực trị tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Điều kiện đủ: Thử lại $m = 0$ ta được $y = x^3 - 3x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 14: Chọn A

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3mx^2 - 2(m^2+1)x + 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

Thử lại:

Với $m = 0$ thì $y = -2x^2 + 2x - 3$ và $y' = -2x + 2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ (KTM)

Với $m = \frac{3}{2}$ thì $y' = \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{4}{9}\right\}$. Hàm số y là hàm số bậc ba có $a = \frac{3}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ (Thỏa mãn).

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$.

Câu 15: Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$

** Điều kiện cần:*

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ là $f'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

** Điều kiện đủ:*

Trường hợp 1: $m=0$ hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2020	$\searrow$	2019	$\nearrow$	2020	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m=2$ hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	2019	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$. Chọn $m=2$.

Vậy với $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Cách 2: Kiểm tra điều kiện đủ

- Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$.

$y'=-4x^3+4x$, $y''=-12x^2+4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=-8<0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

- Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

$y'=4x^3-4x$, $y''=12x^2-4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=8>0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ nên chọn $m=2$.

Kết luận: $m=2$.

Câu 16: Chọn A

$y'=9x^8+7(m-2)x^6-6(m^2-4)x^5 \Rightarrow y'(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$.

$y''=9.8x^7+7.6(m-2)x^5-6.5(m^2-4)x^4 \Rightarrow y''(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $y'''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$

Ta có $y^{(6)}=9.8.7.6.5.4x^3+7.6.5.4.3.2(m-2)x-6.5.4.3.2.1(m^2-4)$

$\Rightarrow y^{(6)}(0)=-6.5.4.3.2.1(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$ thì:

$+m=2 \Rightarrow y'=9x^8\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

$+m=-2 \Rightarrow y'=x^6(9x^2-28)$ không đổi dấu khi qua $x=0$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \pm 2$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì cần thêm

$y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow -6.5.4.3.2.1(m^2-4)>0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2 \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 17: Chọn B

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0 \Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=x\left(2-\dfrac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-|x|=-1 \\ x^2-|x|=1 \\ x=0\ (l) \\ 2-\dfrac{1}{|x|}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$.

Trường hợp 1: $m=1$. Khi đó $y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 1$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{array}\right.$.

Nhận thấy nếu $x_2 = x_1 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = -3x^4 \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1>0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ -2<m<1 \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ là 2016.

Câu 20: Chọn C

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = -4!(m^2-4)$

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .Kiểm tra trực tiếp thấy với $m=2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$ .Với $m=-2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4))$.Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$; $g(0) = -4(m^2-4)$

Nếu $g(0) < 0$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) < 0 \forall x \in (-h;h)$ $\Rightarrow$ y' đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua 0 $\Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực đại tại 0.

Nếu $g(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) > 0 \forall x \in (-h;h)$ $\Rightarrow$ y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua 0 $\Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại 0.

Nếu $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .Kiểm tra trực tiếp thấy với $m=2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$ .Với $m=-2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)}\right]$.

Ta xét các trường hợp sau

* Nếu $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2.$

Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

* Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2.$ Khi đó ta có

$$y' = x^2\left[8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x\right]$$

Số cực trị của hàm $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ bằng số cực trị của hàm $g'(x)$

$$\begin{cases} g'(x) = 8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x \\ g''(x) = 40x^4 + 100(m-2)x - 4(m^2-4) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $g''(0) > 0$. Khi đó

$$-4(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = \{-1;0;1\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của *m*.

Cách 4: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)}\right]$.

Ycbt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(m-2) = -5(m^2-4) = 0 \\ -4(m^2-4) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ -2 < m < 2 \end{array}\right.$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của *m*.

Nhận xét: Ta thấy rằng, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi $y'(0) = 0$ và y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua $x = 0$ điều này tương đương số hạng bậc thấp nhất của y' phải bậc lẻ và dương.

Câu 21: Chọn D

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0, \forall m; y^{(4)}(0) = 4!(25 - m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (thỏa mãn).

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$,hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 5.$

Với $m = -5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017} - 50x^4 = x^4(2018x^3 - 50)$ không đổi dấu khi đi qua $x = 0$ (loại).

Với $m = 5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017}$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $-5 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{-4, ..., 5\}$. Có 10 số nguyên thỏa mãn.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0,\forall a,b.y^{(6)}=6!b.$

Trường hợp 1: Nếu $y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow b>0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ (thỏa mãn).

Vậy trường hợp này $a\in\{-19,...,19\}$, có 39 cách chọn; $b\in\{1,...,19\}$, có 19 cách chọn

$\Rightarrow$ Có $39.19=741$ cặp.

Trường hợp 2: Nếu $y^{(6)}(0)<0 \Leftrightarrow b<0$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$ (loại).

Trường hợp 3: Nếu $y^{6}(0) \Leftrightarrow b=0$. Khi đó $y'=8x^7+7ax^6=x^6(8x+7a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0 \Leftrightarrow a=0$.

Vậy trường hợp này có duy nhất 1 cặp $(a;b)=(0;0)$.

Vậy có tất cả 742 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 23: Chọn C

Ta có $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=-4!(m^2-9)$.

Nếu $f^{(4)}(0)=-4!(m^2-9)>0 \Leftrightarrow -3<m<3$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ (thỏa mãn).

Nếu $f^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow -4!(m^2-9)<0 \Leftrightarrow m>3 \vee m<-3$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $f^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow -4!(m^2-9)=0 \Leftrightarrow m=3 \vee m=-3$.

Với $m=3 \Rightarrow f'(x)=8x^7$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=-3 \Rightarrow f'(x)=8x^7-30x^4=2x^4(4x^3-15)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ (loại).

Vậy $-3<m\le 3 \Rightarrow m\in\{-2,...,3\}$. Có 6 số nguyên thỏa mãn.

Câu 24: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0, \forall m$; $y^{(4)}=4!(10m-m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0)>0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)>0 \Leftrightarrow 0<m<10$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)<0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(10;+\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=10 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow y'=6x^5$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=10 \Rightarrow y'=6x^5-50x^4=2x^4(3x-25)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x=0$ (loại).

Kết luận: Có 10 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 25: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=0, \forall m$; $y'''=3!(m^2-4)$.

Nếu $y'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow 3!(m^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Hàm số không đạt đạt cực trị tại điểm $x=0$ (loại) vì $n=3$ lẻ.

Nếu $y'''(0)=0 \Leftrightarrow 3!(m^2-4)=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Với $m=-2 \Rightarrow y'=6x^5-12x^3=6x^3(x^2-2)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=0$ (loại).

Với $m=2 \Rightarrow y'=6x^5+4x^3=2x^3(3x^2+2)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn). Vậy $m=2$ thỏa mãn.

Câu 26: Chọn D

Ta có $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0, \forall m$; $y^{(4)}=-4!(m^2-16)$.

Nếu $y^{(4)}(0)>0 \Leftrightarrow -4!(m^2-16)>0 \Leftrightarrow -4<m<4$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow -4!(m^2-16)<0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow -4!(m^2-16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Với $m=4 \Rightarrow y'=8x^7$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=-4 \Rightarrow y'=8x^7-40x^4=8x^4(x^3-5)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x=0$ (loại).

Kết luận: Vậy $m \in \{-3;-2;...;4\}$ hay có 8 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 27: Chọn C

Chú ý: Định nghĩa đạo hàm tại điểm x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h>0$, $|f(x+h)-f(x-h)| \le h^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right| \le h$.

Do đó $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)=x^{2019}+x^{29-m}-(m^4-29m^2+100)\sin^2 x-1$.

Khi đó: $\begin{cases} g'(x)=2019x^{2018}+(29-m)x^{28-m}-(m^4-29m^2+100)\sin 2x \\ g''(x)=2019.2018x^{2017}+(29-m)(28-m)x^{27-m}-(m^4-29m^2+100).2\cos 2x \end{cases}$

Có $g'(0)=0$, $g''(0)=-2(m^4-29m^2+100)$.

Trường hợp 1: $g''(0)<0 \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Trường hợp 2: $g''(0)>0 \Leftrightarrow m^4-29m^2+100<0 \Leftrightarrow 4<m^2<25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<5 \\ -5<m<-2 \end{array}\right.$.

Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp 3: $g''(0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 5 \\ m=\pm 2 \end{array}\right.$. Thay lại ta có với $m=\pm 5$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$. Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $S=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng 100.

Câu 28: Chọn A

Ta có $y'=9x^8+7(m-2)x^6-6(m^2-4)x^5$

$y'(0)=y''(0)=...=y^{(5)}(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$, $y^{(6)}(0)=-6!(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)<0 \Rightarrow$ y đạt cực đại tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow -2<m<2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Do đó $m=0;\pm 1$ thỏa ycbt.

Trường hợp 3: $y^{(6)}(0)=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$. Thay $m=\pm 2$ vào y', ta thấy y' không đổi dấu khi đi qua $x=0$. Do đó y không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa ycbt.

Câu 29: Chọn C

Ta có $y'=5x^4-4mx^3+3(m^3-3m^2-4m+12)x^2$

$y'(0)=y''(0)=0$, $\forall m$ và $y^{(3)}(0)=6(m^3-3m^2-4m+12)$.

Trường hợp 1: $y^{(3)}(0)\neq 0$ thì hàm số đã cho không đạt cực trị tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(3)}(0)=0 \Leftrightarrow m\in\{\pm 2;3\}$

Với $m=-2 \Rightarrow y'=5x^4+8x^3=x^3(5x+8)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Với $m=2 \Rightarrow y'=5x^4-8x^3=x^3(5x-8)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Với $m=3 \Rightarrow y'=5x^4-12x^3=x^3(5x-12)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.