Bài 5. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_3 y = 1 \\ x^2 + y^3 = 31 \end{cases}$.

Điều kiện xác định: $x, y > 0; x, y \neq 1$.

Đặt $\log_2 x = a, \log_3 y = b \Rightarrow x = 2^a, y = 3^b, ab = 1$.

Từ $x^2 + y^3 = 31$, ta có $4^a + 27^b = 31$.

Thay $b = \dfrac{1}{a}$ vào, ta được $4^a + 27^{\frac{1}{a}} = 31$.

Ta thấy nếu $a < 0$ thì vế trái bé hơn 2, không thỏa nên chỉ xét $a > 0$.

Xét hàm số $f(t) = 4^t + 27^{\frac{1}{t}} - 31, t > 0$

$f'(t) = 4^t \ln 4 - \dfrac{1}{t^2} \cdot 27^{\frac{1}{t}} \ln 27$, $f''(t) = 4^t (\ln 4)^2 + \dfrac{2}{t^3} \cdot 27^{\frac{1}{t}} \ln 27 + \dfrac{1}{t^4} \cdot 27^{\frac{1}{t}} (\ln 27)^2 > 0$.

Đạo hàm cấp 2 của $f(t)$ dương nên phương trình $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm. Dễ thấy rằng hai nghiệm này là $t = 1, t = \log_4 27$

Với $t = 1$ thì $a = b = 1$ và nghiệm của hệ là $x = 2, y = 3$.

Với $t = \log_4 27$ thì $a = \log_4 27, b = \log_{27} 4$ và nghiệm của hệ là $x = 3\sqrt{3}, y = \sqrt[3]{4}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (2, 3), (3\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có đúng 4 nghiệm thực phân biệt:

$$(x-4)^2 = m\left(\sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x} + 4\right) + 6\sqrt{1-x^3} + 13.$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} 1 - x^3 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x}$ với $x \leq 1$.

Trước hết, ta tìm miền giá trị của t với $x \leq 1$. Đặt $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - 3\sqrt{1-x}$ với $x \in (-\infty; 1)$ thì $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} + \dfrac{3}{2\sqrt{1-x}}$ nên

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(2x+1)\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1+x+x^2}.$$

Bình phương 2 vế, ta có $(x+2)(4x^2+x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, thử lại ta thấy thỏa.

x	$-\infty$ -2 1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-2\sqrt{3}$ ↗ $\sqrt{3}$	