**CHỦ ĐỀ CÂU 50: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

1. Trong không gian , cho 2 điểm và . Xét khối nón có đỉnh , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính . Khi có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của có phương trình dạng . Giá trị của bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có .

Gọi là điểm thuộc đoạn ( khác ) sao cho khi đó .

Thể tích khối nón:

,

Lập bảng biến thiên ta có GTLN của trên đạt được khi

và Gọi , ta có hệ phương trình:

Phương trình mặt phẳng chứa đáy của hình nón đi qua điểm và có vectơ pháp tuyến là:

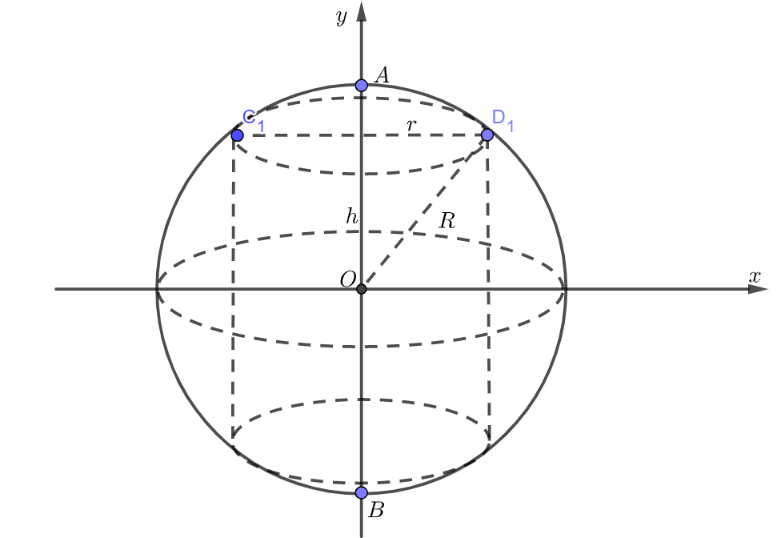
Đồng nhất với mặt phẳng ta có .

**ĐỀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 50.1.** Trong không gian hệ tọa độ , cho hai điểm , . Mặt cầu nhận là đường kính. Hình trụ là hình trụ có trục thuộc trục tung, nội tiếp với mặt cầu và có thể tích lớn nhất. Khi đó mặt phẳng chứa đáy của hình trụ đi qua điểm nào sau đây?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

****

**Chọn B**

Bán kính của mặt cầu là .

Gọi chiều cao của hình trụ là , . Do đó bán kính của hình trụ là .

Thể tích khối trụ là .

.

Dấu đẳng thức xảy ra .

Khi đó hình trụ có thể tích lớn nhất là .

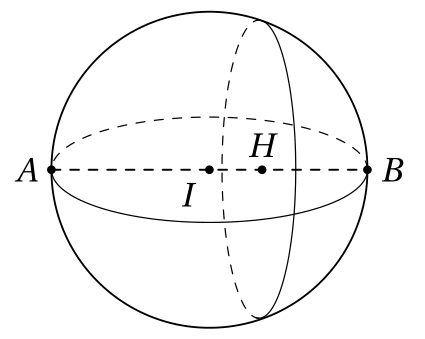
Vậy hai mặt đáy của trụ có phương trình tương ứng là .

**Câu 50.2.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho mặt cầu  có đường kính ,  là trung điểm . Gọi  là mặt phẳng vuông góc với đoạn  tại  sao cho khối nón đỉnh  và đáy là đường tròn  ( là giao của  và ) có thể tích lớn nhất. Biết  có bán kính , viết phương trình mặt cầu .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Lời giải**



**Chọn B**

Mặt cầu  có tâm , bán kính ,  có tâm , bán kính . Đặt  , ta có

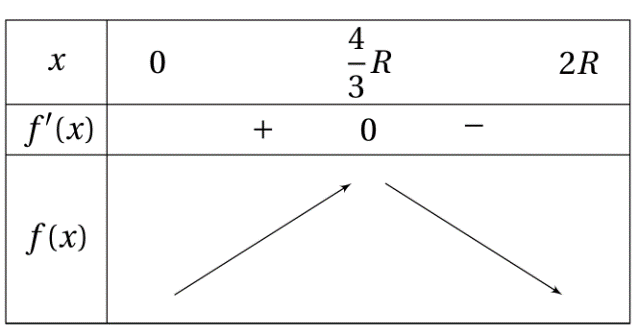


Do  là đường kính nên ta có . Khi đó

.

Xét hàm số  trên , , 

Bảng biến thiên :



Dựa vào bảng biến thiên, ta có  lớn nhất khi  hay . Mà . Suy ra



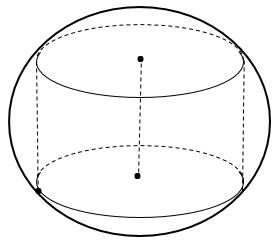
Suy ra .

**Câu 50.3.** Trong không gian , cho hai điểm và mặt cầu. Xét khối trụ nội tiếp mặt cầu và có trục đi qua điểm . Khi khối trụ có thể tích lớn nhất thì hai đường tròn đáy của nằm trên hai mặt phẳng có phương trình dạng và . Giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của mặt trụ và là bán kính mặt cầu , ta có: , .

Thể tích khối trụ là

Mà theo Cô-si ta có:

Suy ra: . Dấu “=” xẩy ra khi

Vậy khi khối trụ đạt thể tích lớn nhất thì chiều cao ( Có thể dùng phương pháp hàm số).

Mặt khác tâm của khối trụ chính là tâm của mặt cầu nên trục của khối trụ nằm trên đường thẳng . Vậy hai đáy của khối trụ nằm trên 2 mặt phẳng vuông góc với đường thẳng và cách tâm một khoảng bằng . Gọi là tâm của đường tròn đáy hình trụ, ta có

Vậy 2 mặt phẳng chứa 2 đường tròn đáy của mặt trụ có phương trình là:

Và

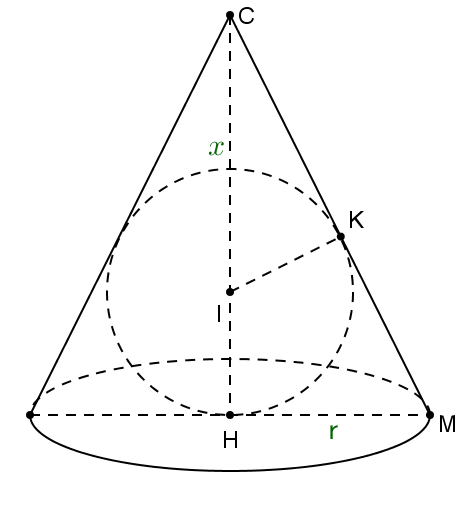
Vậy: .

**Câu 50.4.** Trong không gian , cho hai điểm và đường thẳng . Xét khối nón có đỉnh có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng và ngoại tiếp mặt cầu đường kính . Khi có thể tích nhỏ nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của có phương trình dạng . Giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**

**Lời giải**

**Chọn A**



Mặt cầu đường kính có tâm , bán kính .

Gọi lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của , là đỉnh của .

Khi đó thẳng hàng ( nằm giữa ),

Đặt

đồng dạng nên

nhỏ nhất nhỏ nhất

nhỏ nhất , khi đó nên

Mặt khác nên hoặc

Vì có tọa độ nguyên nên

nên

Mặt phẳng chứa đường tròn đáy của đi qua và nhận làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là

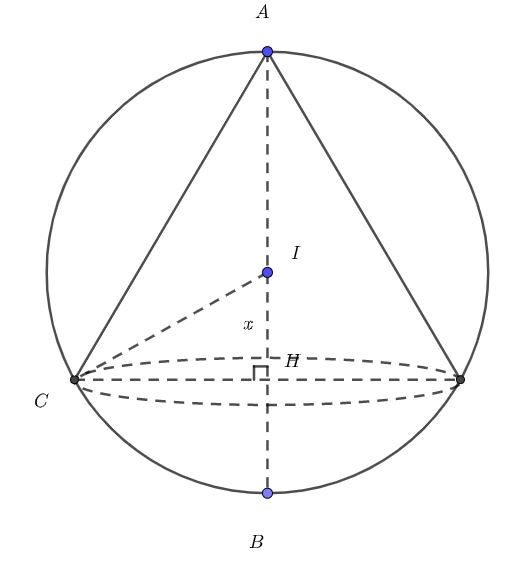
Do đó nên .

**Câu 50.5.** Trong không gian , cho hai điểm và . Xét khối nón có đỉnh đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính . Khi có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của cách điểm một khoảng là bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có: nên có vtpt là

. Đặt như hình vẽ

Khối nón có và

với

Khảo sát hàm số với

Đạt max khi với

. Khoảng cách từ điểm tới mặt phẳng là .

**Câu 50.6.** Trong không gian , cho mặt cầu và đường thẳng Biết điểm thuộc đường thẳng sao cho từ kẻ được 3 tiếp tuyến , , đến mặt cầu (Với ,,là các tiếp điểm) thỏa mãn, , . Tổng bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**



Mặt cầu có tâm và có bán kính .

Vì , và là các tiếp tuyến của nên nên là trục của tam giác .

Đặt . Khi đó . và . Như vậy tam giác vuông tại .

Gọi là trung điểm ta có là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và .

Trong tam giác vuông ta có: .

.

Phương trình tham số của .

nên với (vì )

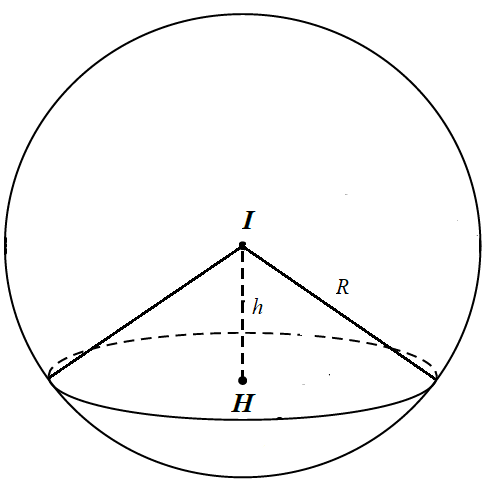
.

**Câu 50.7.** Trong không gian cho hai điểm và mặt cầu . Xét khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đường tròn đáy nằm trên mặt cầu . Khi có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của và đi qua hai điểm có phương trình dạng và . Giá trị của bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**

**Lời giải**

**Chọn D**

****

Mặt cầu có tâm và bán kính

Xét khối nón có đỉnh , bán kính đáy *r* và chiều cao ( là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng chứa đường tròn đáy) có thể tích là

Khảo sát hàm trên khoảng ta được max khi

Bài toán quy về lập phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm *A,B* và cách điểm *I* một khoảng

Gọi là vectơ pháp tuyến của mp

Ta có ;

Mp đi qua *A*, với vectơ pháp tuyến có phương trình là

+ Với

+ Với , chọn

Vậy .

**Câu 50.8.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho , điểm . Gọi là đường thẳng di động luôn đi qua và tiếp xúc với mặt cầu tại . Tiếp điểm di động trên đường tròn có tâm . Gọi , thì giá trị của là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

**Chọn B**

****

Mặt cầu có tâm , bán kính .

Có , nên nằm ngoài của mặt cầu .

Có tiếp xúc mặt cầu tại , nên tại .

Gọi là điểm chiếu của lên .

Có . Suy ra (không đổi), cố định.

Suy ra thuộc cố định và mặt cầu , nên thuộc đường tròn tâm .

Gọi , có

, . Vậy .

**Câu 50.9.** Trong không gian với hệ trục , cho mặt cầu và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng song song với và cắt theo thiết diện là đường tròn sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là đường tròn có thể tích lớn nhất.

**A.**  hoặc

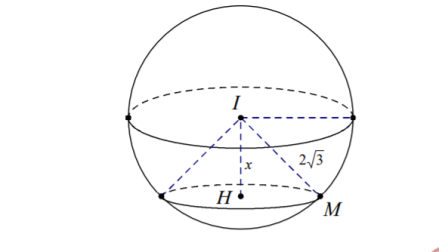
**B.**  hoặc

**C.**  hoặc

**D.**  hoặc

**Lời** **giải**

**Chọn A**

**

nên với

Mặt cầu có tâm , bán kính

Gọi là khối nón thỏa đề bài có đường sinh

Đặt . Khi đó

Thể tích khối nón với

Khảo sát hàm đạt giá trị lớn nhất tại hay

Khi đó tìm được hoặc .

Vậy phương trình mặt phẳng hoặc .

**Câu 50.10.** Trong không gian với hệ trục , cho mặt cầu và mặt phẳng . Xét điểm di động trên , các điểm phân biệt di động trên sao cho là các tiếp tuyến của . Mặt phẳng luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Mặt cầu có tâm , bán kính

Xét điểm ; ta có hệ:

Lấy (1) – (2) theo vế ta được:

Vậy mặt phẳng là mặt phẳng đi qua ba tiếp điểm.

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng luôn đi qua điểm cố định .