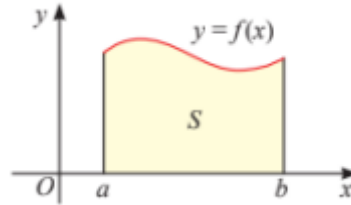


BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

- Quy ước: $\int_a^a f(x) dx; \int_b^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

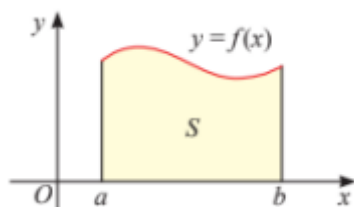
- Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào

biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

• Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di

chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức:

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

CHỦ ĐỀ 1

TÍNH TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

DẠNG 1

TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

$$I = \int_0^2 (2x+1)dx$$

Câu 1. Tính tích phân

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$$

Ta có

$$\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$$

Câu 2. Tích phân bằng

- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3)dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = 9$$

$$\text{Câu 3. Tính tích phân } I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- A. $I = \frac{1}{e}$ B. $I = \frac{1}{e} + 1$ C. $I = 1$ D. $I = e$

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e}$$

$$\text{Câu 4. Biết } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9. \text{ Tính tổng } S = a + b + c.$$

- A. $S = 7$. B. $S = 5$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7.$$

Do đó

Câu 5. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e)$$

Câu 6. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = 3$

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2} \right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2} \right)^x \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

Câu 7. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

A. $I = 2(e + 3)$

B. $I = \frac{1}{2}(e + 3)$

C. $I = e - 3$

D. $I = 2(e - 3)$

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx = \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_0^1 = e - 3$$

Câu 8. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{ab}$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = -2$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx = (e^x - \ln|x|) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

Câu 9. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{ab}$ là

A. $P = e^4 - 1$

B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$

C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = \frac{1}{e^4} - 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{a+b}{a.b} = \frac{1 - e^4}{e^4}$$

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. 0. **B. 1.** C. -1. **D. $\frac{\pi}{2}$.**

Lời giải

Chọn B.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

+ Tính được

Câu 11. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A. $P = 45$ **B. $P = 60$** C. $P = 65$ **D. $P = 70$**

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \left(-2 \cos x + 3 \sin x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{18}$$

$$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 60$$

Câu 12. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

- A. $P = 6$ **B. $P = -4$** C. $P = 4$ **D. $P = -6$**

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 3 \left(\tan x - x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 3 - 4 = -4$$

- Câu 13.** Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là
- A. $P = 6$ B. $P = -4$ C. $P = 4$ D. $P = -6$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 5 dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = (3x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1$$

- Câu 14.** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là
- A. $P = 17$ B. $P = 16$ C. $P = 32$ D. $P = 49$

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 32 + 16 = 49$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 15.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$ B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- C. $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) d(2x)$ D. $\int_a^{2024} f(x) dx = 0$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a 2024 f(x) dx = 0$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ **B.** $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$

C. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ **D.** $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; c]$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ **B.** $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

C. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$ **D.** $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Câu 18. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ **B.** $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dx$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

C.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Câu 19. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\int_{-2024}^{2024} dx = 4048$$

A.

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_a^b f_2(x)dx$$

B.

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Câu 20. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\int_a^b kf(x)dx = k(F(b) - F(a))$$

A.

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

B.

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a; x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$

$$\int_a^b f(2x+3)dx = F(2x+3)\Big|_a^b$$

D.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Câu 21. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2} dx = e-3$

B. $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{2} + 1$

C. $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 - e - \ln 2$

D. $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = e^4 - 1$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x+2} dx = \int_0^1 (e^x-2) dx = (e^x-2x)\Big|_0^1 = e-3$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

$$\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = (e^x - \ln|x|)\Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{1-e^4}{e^4} = e^{-4} - 1$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

$$I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$$

Câu 22. Với a, b là các tham số thực. Tính tích phân

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = b^3 - b^2 a - b$

Ta có $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx = (x^3 - ax^2 - x) \Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b$.

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

A. $(-1; 2)$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(0; 4)$

D. $(-3; 1)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

Ta có: $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 1 - \ln 2$

Ta có $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = (x - \ln|x|) \Big|_1^2 = (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2$.

Câu 25. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 26. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 27. Tính $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$$

Câu 28. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$$

Câu 29. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$$

Câu 30. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

Câu 31. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

Câu 32. Biết . Tính giá trị của $P = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = -1$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx \\ &= \left(\frac{e^{-3x+1}}{-3} + \frac{4e^{-2x+1}}{-2} + \frac{4e^{-x+1}}{-1} \right) \Bigg|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2} = -9e + 4 + \frac{4}{e} + \frac{1}{e^2}$$

$$P = a + b + c = -1$$

Câu 33. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a + b = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} &\Rightarrow a + b = 0 \end{aligned}$$

Câu 34. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

$$I = \left(\frac{2024^{2x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} \right) e^{3x}$$

Đáp án:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx = \int_0^1 \frac{2024^{2x} + 2 \cdot 2024^x + 1}{e^{-3x}} dx = \left[\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^x + e^{3x} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^1}{\ln \frac{2024^2}{e^{-3}}} + \frac{2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^1}{\ln \frac{2024}{e^{-3}}} + \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{2024^{2x} e^{3x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x} e^{3x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} e^{3x} \\ &= \left(\frac{2024^{2x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} \right) e^{3x} \end{aligned}$$

Câu 35. Tính $I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

$$I = \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2}$$

Đáp án:

$$I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx = (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) \Big|_0^1$$

$$= \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2}$$

$$I = \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$$

Câu 36. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Câu 37. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 2

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

$$I = \int_a^b |f(x)| dx$$

Tính tích phân: ?

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích

$$I = \int_a^b |f(x)| dx$$

phân đã học để tính

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Câu 38. Giá trị của bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$\text{-Do : } x \in [0; \pi] \rightarrow \sin x > 0. \Rightarrow |\sin x| = \sin x; x \in [\pi; 2\pi] \rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

$$\text{Vậy : } I = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \right) = \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \sqrt{2} (1 + 1 + 1 + 1) = 4\sqrt{2}$$

$$I = \int_0^2 |x - 2| dx$$

Câu 39. Tính tích phân

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x - 2| dx$$

$$\text{+ Do : } x \in [0; 2] \Rightarrow x - 2 < 0, \Leftrightarrow |x - 2| = 2 - x$$

$$\text{+ Vậy : } I = \int_0^2 (2 - x) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2$$

$$I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$$

Câu 40. Tính tích phân

A. $I = -\frac{1}{2}$.

B. $I = 5$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$$

$$\text{+ Do : } f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1; x = 1$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{+ Vậy : } I = \int_0^1 (x - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2}$$

$$I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

Câu 41. Tính tích phân

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 5$.

D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

$$+ \text{Vi: } f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -3 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 -f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3 - 2x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \left(3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) + \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right] = 5$$

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$$

Câu 42. Cho tích phân

với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính

$$P = a + b$$

A. $P = \frac{40}{3}$

B. $P = \frac{80}{3}$

C. $P = \frac{17}{3}$

D. $P = \frac{98}{3}$

Lời giải

Chọn A.

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

Tính

$$- \text{Vi: } f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$$

$$- \text{Vậy: } I = \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3$$

$$= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\Rightarrow I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{40}{3} \sqrt{3} + \frac{40}{3} \sqrt{2}$$

$$I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

Câu 43. Tính tích phân

A. $I = 38$

B. $I = 44$

C. $I = 48$

D. $I = 40$

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$- \text{Lập bảng xét dấu: } f(x) = 4 \forall x \in [-2; 2]; f(x) = 2x \forall x \in [2; 5]$$

$$\text{-Vậy : } \int_{-2}^5 f(x)dx = \int_{-2}^2 4dx + \int_2^5 2xdx = 4x \Big|_{-2}^2 + x^2 \Big|_2^5 = 16 + 32 - 4 = 44$$

Câu 44. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 15$

B. $P = 10$

C. $P = 5$

D. $P = 18$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

- Nhận xét : $2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2. \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [2; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 2]$

$$\text{- Vậy : } I = \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx = \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3$$

$$= \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4 \right) = 4 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18$$

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$

B. $\ln 2$

C. $2 \ln 2$

D. $\frac{2}{\ln 2}$

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$$

ta có $2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{\ln 2}$$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx$.

A. $I = 0$

B. $I = 2$

C. $I = -2$

D. $I = -3$

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$$

Cách 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx = \int_{-1}^2 |x| dx - \int_{-1}^2 |x-1| dx = - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 (x-1) dx - \int_1^2 (x-1) dx \\ &= - \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \left. \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right|_{-1}^1 - \left. \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right|_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Cách 2.

Bảng xét dấu

x	-1	0	1	2
x	-	0	+	+
x-1	-	-	0	+

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 (-x+x-1) dx + \int_0^1 (x+x-1) dx + \int_1^2 (x-x+1) dx = -x \Big|_{-1}^0 + (x^2-x) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 0$$

$$I = \int_{-1}^a |x| dx$$

Câu 47. Cho a là số thực dương, tính tích phân theo a .

- A. $I = \frac{a^2+1}{2}$. B. $I = \frac{a^2+2}{2}$. C. $I = \frac{-2a^2+1}{2}$. D. $I = \frac{|3a^2-1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $a > 0$ nên $I = - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$

Câu 48. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx-1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $m \in (4; 6)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (1; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy $\int_1^m |2mx-1| dx = \int_1^m (2mx-1) dx = (mx^2 - x) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1$

$$m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \sqrt{2} \end{cases} \text{ Do } m > 1 \text{ vậy } m = \sqrt{2}.$$

Từ đó theo bài ra ta có

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_1^1 |x|^3 dx = \left| \int_1^1 x^3 dx \right|$

B. $\int_1^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_1^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$

C. $\int_2^3 |e^x (x+1)| dx = \int_2^3 e^x (x+1) dx$

D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$

Do đó: $\int_1^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_1^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$

$$I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$$

Câu 50. Tính tích phân

A. $I = \frac{5}{2}$

B. $I = -\frac{1}{2}$

C. $I = -2$

D. $I = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx = \int_1^4 |x - 3| dx$$

- Ta có: $x - 3 > 0 \forall x \in [3; 4]; x - 3 < 0 \forall x \in [1; 3]$

- Vậy: $I = \int_1^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \Big|_3^4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

Câu 51. Tính tích phân

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{40}{3}$

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

Vì: $f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$

$$I = \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3$$

Vậy :

$$= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$$

Câu 52. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^2 (-x^2 - 2x + 3) dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 53. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 54. Tính tích phân

$$I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 55. Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 56. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 57. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 58. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$$

Câu 59. Tính tích phân

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

Câu 60. Tính tích phân

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: