DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

Từ một bài toán hình học trong sách giáo khoa TOÁN 8

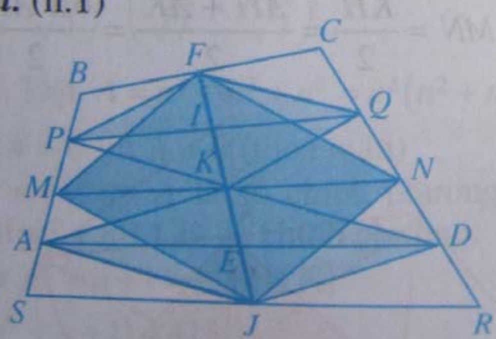
HOÀNG NGỌC ĐAN
(GV THCS Cầu Giấy, Hà Nội)

Trong Sách giáo khoa Toán 8, tập một có đề cập đến bài toán ***"Cho tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì?"*** *(bài 48 trang 93). Bài viết này, xin giới thiệu cùng bạn đọc ứng dụng kết quả của bài toán trên vào giải một số bài toán khác.*

BÀI TOÁN MỞ ĐẦU. *Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh của một tứ giác bất kì là đỉnh của một hình bình hành.*

✪Bài toán 1. *Cho tứ giác ABCD. Lấy M và P trên cạnh AB sao cho AM = MP = PB. Lấy N và Q trên cạnh CD sao cho DN = NQ = QC. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng EF cắt MN và cắt PQ tại trung điểm của mỗi đường.*

Lời giải. (h.1)

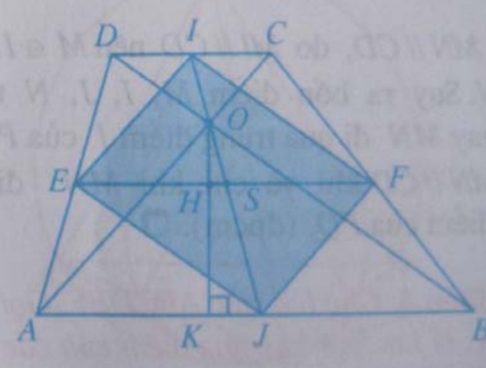


Hình 1

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của PQ và MN. Trên AB, CD lần lượt lấy các điểm S, R sao cho A là trung điểm của SM và D là trung điểm của NR. Theo *bài toán mở đầu* ta có tứ giác $MFNJ$ là hình bình hành, nên MN và FJ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà K là trung điểm của MN, suy ra $K \in FJ$. Hoàn toàn tương tự, các tứ giác $PFQK$ và $AKDJ$ là hình bình hành, suy ra PQ, FK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và AD, KJ cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà I và E lần lượt là trung điểm của PQ và AD, suy ra $I \in FK$, $E \in KJ$. Vậy I và K đều thuộc EF (đpcm). ❐

✪Bài toán 2. *Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB > CD). O là giao điểm của hai đường chéo, EF là đường trung bình, K là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đáy lớn AB. Sau đó hình thang bị xoá đi chỉ còn lại bốn điểm E, F, O, K. Hãy khôi phục lại hình thang.*

Lời giải. (h.2). *Phân tích.* Giả sử đã dựng được hình thang $ABCD$ thoả mãn điều kiện đề bài. Dễ thấy, trung điểm S của EF dựng được. Theo *bài toán mở đầu*, tứ giác $EJFI$ là hình bình hành nên S là trung điểm của IJ.



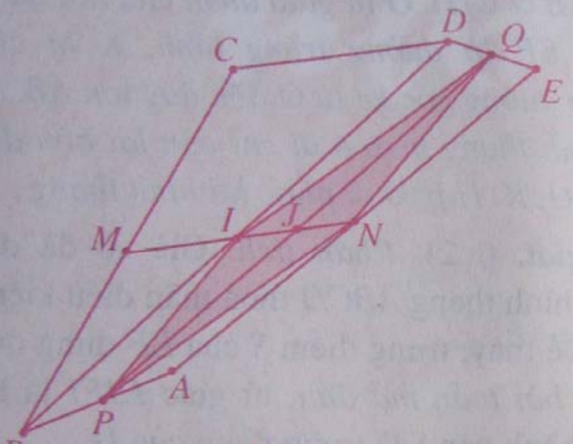
Hình 2

Vậy bốn điểm I, O, S, J thẳng hàng nên J thoả mãn hai điều kiện: J nằm trên đường thẳng OS và nằm trên đường thẳng đi qua K song song với EF. Điểm I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EJFI$. Điểm A là giao điểm của KJ với đường thẳng đi qua O và song song với JF. Điểm C là giao điểm của AO với đường thẳng đi qua I và song song với EF. Điểm D là giao điểm của AE và IC. Điểm B là giao điểm của AK và FC. Từ đó suy ra *cách dựng.* ❐

✪Bài toán 3. *Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB, AE, ED. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để MN//DC là MN đi qua trung điểm của PQ.*

Lời giải. (h.3). Gọi I là trung điểm của BD. Theo *bài toán mở đầu* ta có tứ giác $PIQN$ là hình bình hành nên nếu gọi J là trung điểm của PQ thì J là trung điểm của IN. Vậy ba điểm I, J, N thẳng hàng.

• Nếu MN đi qua trung điểm J của PQ thì M thuộc đường thẳng IJN mà MI là đường trung bình của tam giác BCD, suy ra $MI // CD$ $\Rightarrow MN // CD$.

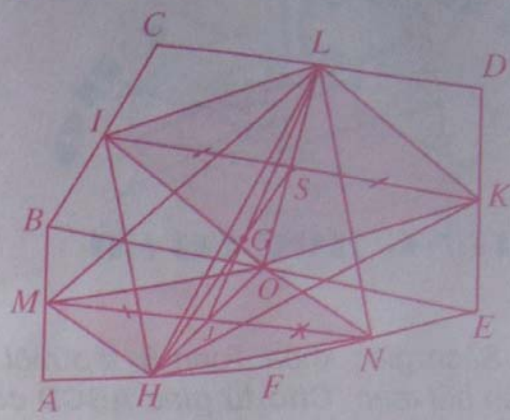


Hình 3

• Nếu $MN // CD$, do $MI // CD$ nên $M \in IN$ mà $J \in IN$. Suy ra bốn điểm M, I, J, N thẳng hàng hay MN đi qua trung điểm J của PQ.
Vậy $MN // CD$ khi và chỉ khi MN đi qua trung điểm của PQ. (đpcm). ❐

✪Bài toán 4. *Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, I, L, K, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MNL và HIK có cùng trọng tâm.*

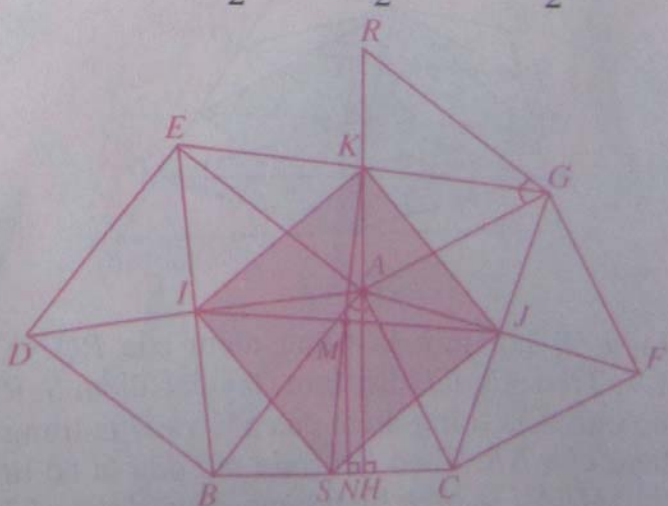
Lời giải. (h.4). Gọi J, S lần lượt là trung điểm của MN và IK. Gọi G là giao điểm của trung tuyến LJ của tam giác MNL với trung tuyến HS của tam giác HIK. Giả sử O là trung điểm của BE, theo *bài toán mở đầu* ta có các tứ giác $ILKO$, $MONH$ là hình bình hành. Từ đó, suy ra S, J lần lượt là trung điểm của LO, HO. Suy ra G là trọng tâm của tam giác HLO, do đó $\dfrac{LG}{LJ} = \dfrac{HG}{HS} = \dfrac{2}{3}$. Vậy điểm G là trọng tâm chung của hai tam giác MNL và HIK (đpcm). ❐



Hình 4

✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có BC = 8 cm, đường cao AH = 6 cm. Về phía ngoài tam giác dựng hai hình vuông ABDE, ACFG. Gọi M là trung điểm đoạn nối tâm của hai hình vuông đó. Tính khoảng cách từ M đến BC.*

Lời giải. (h. 5). Gọi K là giao điểm của AH với EG. Gọi I và J lần lượt là tâm của các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$; S là trung điểm của BC. Theo *bài toán mở đầu* ta có tứ giác $IKJS$ là hình bình hành nên M là trung điểm của KS. Kẻ MN vuông góc với BC tại N. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác KHS, do đó $MN = \dfrac{KH}{2} = \dfrac{AH + AK}{2} = \dfrac{6 + AK}{2}$.



Hình 5

Kẻ đường thẳng qua G song song với AE cắt AK tại R. Khi đó

$AK = \dfrac{AR}{2}$ và $\Delta AGR = \Delta CAB$ (g.c.g).

(Xem tiếp trang 27)

Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, VINH, NGHỆ AN
NĂM HỌC 2010 — 2011

(Đề thi đã đăng trên THTT số 403, tháng 01 năm 2011)

Câu 1. a) Đặt $\sqrt{x^2+8x}=t\,(t\ge 0)$.

PT đã cho trở thành $t^2-2t-3=0 \Rightarrow t=3$.

Với $t=3$, ta có

$$\sqrt{x^2+8x}=3 \Leftrightarrow x^2+8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9. \end{array}\right.$$

PT đã cho có hai nghiệm $x=1;\ x=-9$.

b) Ta viết HPT đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} 4(x^3-y^3)=4(4x+2y) \\ x^2+3y^2=4. \end{cases}$$

Suy ra $4\left(x^3-y^3\right)=\left(x^2+3y^2\right)\left(4x+2y\right)$

$$\Leftrightarrow y\left(x+y\right)\left(x+5y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=-y \\ x=-5y. \end{array}\right.$$

ĐS. HPT đã cho có các nghiệm $(x\ ;\ y)$ là $(2\ ;\ 0)$, $(-2\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ -1)$, $(-1\ ;\ 1)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(\frac{-5}{\sqrt{7}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Câu 2. Đặt $A=n^4+n^3+n^2=n^2\left(n^2+n+1\right)$.

• Với $n=0$ thì $A=0$ (thỏa mãn) .

• Với $n\ne 0$ thì A là số chính phương khi và chỉ khi n^2+n+1 là số chính phương.

Giả sử $n^2+n+1=k^2\,(k\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow 4\left(n^2+n+1\right)=4k^2$

$\Leftrightarrow (2n+1-2k)(2n+1+2k)=-3$. Do

$2n+1+2k\ge 2n+1-2k, \forall n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}$ nên

$$\begin{cases} 2n+1-2k=-3 \\ 2n+1+2k=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2n+1-2k=-1 \\ 2n+1+2k=3. \end{cases}$$

Từ đó tìm được $n=-1$ hoặc $n=0$.

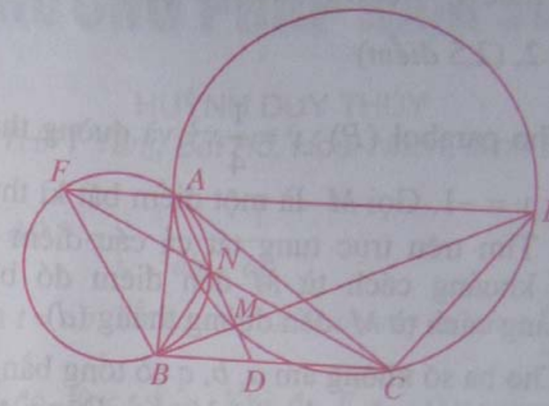
Câu 3. (h. 1) Ta có $\widehat{NAB}=\widehat{NFB}$, $\widehat{MAC}=\widehat{MEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung). Lại có $\widehat{NAB}=\widehat{MAC}$. Suy ra $\widehat{NFB}=\widehat{MEC}$. Do đó, tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên

$$\widehat{CFE}=\widehat{CBM} \qquad (1)$$

Lại có $\widehat{NFA}=\widehat{NBA}$ (2)

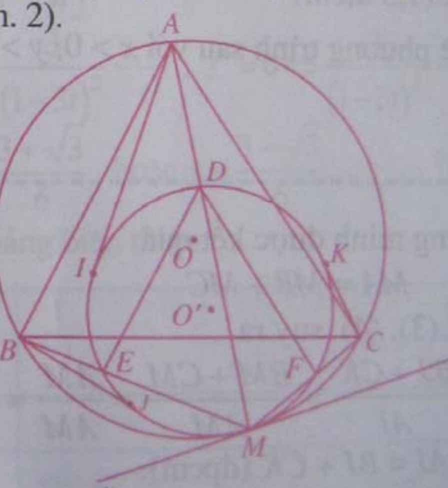
Theo giả thiết $\widehat{NBA}=\widehat{CBM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{NFA}=\widehat{NFE}$. Chứng tỏ ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).



Hình 1

Câu 4. Kẻ tiếp tuyến chung Mx của (O) và (O') tại M (h. 2).



Hình 2

Khi đó $\widehat{MAB}=\widehat{xMB}$, $\widehat{MDE}=\widehat{xME}$

$\Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{MDE} \Rightarrow AB//DE$.

Suy ra $\dfrac{BE}{BM}=\dfrac{AD}{AM} \Rightarrow \dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BM}{AM}$ (1)

Ta có $AI^2=AD.AM$, $BJ^2=BE.BM$

$\Rightarrow \dfrac{BJ^2}{AI^2}=\dfrac{BE.BM}{AD.AM}=\dfrac{BM^2}{AM^2}$ (do (1))

$\Rightarrow \dfrac{BJ}{AI}=\dfrac{BM}{AM}$ (2). Tương tự $\dfrac{CK}{AI}=\dfrac{CM}{AM}$ (3)

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2010 — 2011

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*)

a) Giải phương trình $x^3+3x-140=0$.

b) Không dùng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}$.

Câu 2. (2,5 *điểm*)

a) Cho parabol $(P): y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=-1$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc (P). Tìm trên trục tung tất cả các điểm sao cho khoảng cách từ M đến điểm đó bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng (d).

b) Cho ba số không âm a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $b+c \geq 16abc$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 3. (1,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình sau với $x>0, y>0$

$$\begin{cases} \left|x+\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{10}{3}-x+y\right|=\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y} \\ x^2+y^2=\frac{82}{9}. \end{cases}$$

Câu 4. (3 *điểm*)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=105^o$, đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD cắt nhau tại K sao cho $KB=KC$. Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $HA=HB$.

b) Tính số đo góc ABC và góc ACB.

Câu 5. (1 *điểm*)

Kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x. Tìm các số thực x thoả mãn

$$\left[\frac{8x+1}{6}\right]+\left[\frac{4x-1}{3}\right]=\frac{16x-7}{9}.$$

PHẠM NGỌC QUANG

(Sở GD&ĐT Thanh Hoá) sưu tầm và giới thiệu

Ta chứng minh được kết quả

$$MA=MB+MC \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra

$$\frac{BJ+CK}{AI}=\frac{BM+CM}{AM}=\frac{AM}{AM}=1.$$

Do đó $AI=BJ+CK$ (đpcm).

Câu 5. a) Đặt $\sqrt{a}=x, \sqrt{b}=y, \sqrt{c}=z$

$\Rightarrow x, y, z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2=3$.

Khi đó $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz$.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $y \leq x \leq z$. Từ đó, ta có

$$y(x-y)(x-z) \leq 0 \Rightarrow x^2y+y^2z \leq xyz+xy^2.$$

Suy ra

$$x^2y+y^2z+z^2x-xyz \leq xy^2+xz^2$$
$$=x(y^2+z^2)=x(3-x^2)$$
$$=2-(x-1)^2(x+2) \leq 2.$$

Do đó $P \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=1,\ b=0,\ c=2$ và các hoán vị. Vậy giá trị lớn nhất của P là 2.

b) Vì các điểm đã cho là hữu hạn nên tồn tại hai điểm A, B sao cho 2008 điểm còn lại nằm về một phía đối với đường thẳng AB. Do không có bốn điểm nào cùng nằm trên một đường tròn nên ta có thể đặt tên 2008 điểm còn lại là $M_1,\ M_2, ...,\ M_{2008}$ sao cho

$$\widehat{AM_1B}>\widehat{AM_2B}>...>\widehat{AM_{2008}B}.$$

Vẽ đường tròn đi qua ba điểm A, B, M_{1001}. Khi đó 1000 điểm $M_1,\ M_2,\ ...,\ M_{1000}$ nằm trong đường tròn và 1007 điểm M_{1002}, M_{1003}, ..., M_{2008} nằm ngoài đường tròn này.

THÁI VIẾT THẢO

(Sở GD&ĐT Nghệ An) giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức là một trong những nội dung trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Trong bài viết này chúng tôi đề cập đến cách sử dụng tính chất của hàm số để giải quyết dạng toán trên. Phương pháp này khá mạnh, hiệu quả, chặt chẽ và có đường lối.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất
CỦA MỘT BIỂU THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

HUỲNH DUY THỦY
(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

Để giải bài toán trên bằng phương pháp hàm số thông thường ta thực hiện theo đường lối sau:

• Biến đổi các số hạng chứa trong biểu thức về cùng một đại lượng giống nhau.

• Đưa vào một biến mới t, bằng cách đặt t bằng đại lượng đã biến đổi được ở trên.

• Tìm điều kiện ràng buộc cho biến t, giả sử tìm được $t \in D$.

• Xét hàm số f theo biến t. Khi đó ta hình thành được bài toán tương đương sau:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t \in D$.

• Lúc này ta sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t \in D$.

Nhận xét

Điểm mấu chốt trong cách giải này là xây dựng hàm số $f(t)$ với $t \in D$.

Trường hợp ta không thể xây dựng trực tiếp hàm số $f(t)$, $t \in D$ thỏa mãn $P = f(t)$, ta đi tìm hàm số $f(t)$ thỏa mãn $P \geq f(t)$ (đối với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất) hoặc $P \leq f(t)$ (đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất). Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★ Thí dụ 1. *Cho các số thực dương a, b thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $F = \dfrac{1}{a^3 + b^3} + \dfrac{1}{ab}$.

Lời giải. Ta có

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1 - 3ab.$$

Do đó $F = \dfrac{1}{1-3ab} + \dfrac{1}{ab}$.

Đặt $t = ab$. Từ $(a+b)^2 \geq 4ab$, suy ra $ab \leq \dfrac{1}{4}$.

Do đó $0 < t \leq \dfrac{1}{4}$. Khi đó $F = f(t) = \dfrac{1}{1-3t} + \dfrac{1}{t}$, với $t \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right]$. Ta có

$$f'(t) = \frac{3}{(1-3t)^2} - \frac{1}{t^2}\ ;\ f' = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(1-3t)^2} - \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \text{ hoặc } t = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	8

Vậy Min $f(t) = 4 + 2\sqrt{3}$, đạt tại $t = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$. Do đó

Min $F = 4 + \sqrt{3}$ tại

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right); b = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right),$$

hoặc

$$a = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right); b = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right).$$

★ **Thí dụ 2.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $A=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y}}$, *trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $x+y=1$.

Lời giải. Từ giả thiết có $0<x<1; 0<y<1$.

Áp dụng BĐT $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (với $a>0, b>0$), ta có

$$A=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}+\sqrt{1-x}.$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$, $\forall x\in(0;1)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}};$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $[0\,;1]$ ta thấy $\max\limits_{0<x<1} f(x)=\sqrt{2}$ tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Từ $A\geq f(x)$, $\forall x\in(0;1)$, suy ra $A\geq\sqrt{2}$.

Vậy $\operatorname{Min} A=\sqrt{2}$ đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. □

★ **Thí dụ 3.** *Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\quad(*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad-bc=0$.

Áp dụng BĐT (*), ta có

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\geq\sqrt{(1-x+x+1)^2+(y+y)^2}=\sqrt{4+4y^2}=2\sqrt{1+y^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $1-x=x+1\Leftrightarrow x=0$.

Từ đó $A\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

• Trường hợp $y-2<0\Leftrightarrow y<2$.

Khi đó $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$. Ta có

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1=\frac{2y-\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}};$$

$$f'(y)=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(y)$ trên $(-\infty;2)$, ta thấy $f(y)\geq f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=2+\sqrt{3}$.

• Trường hợp $y-2\geq 0\Leftrightarrow y\geq 2$.

Ta có $f(y)\geq 2\sqrt{1+y^2}\geq 2\sqrt{1+2^2}>2+\sqrt{3}$.

Từ hai trường hợp đã xét ta luôn có $A\geq 2+\sqrt{3}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Kết luận. $\operatorname{Min} A=2+\sqrt{3}$, đạt tại $(x;y)=\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. □

Lưu ý. Để xây dựng được hàm số $f(y)$ ta có thể thực hiện theo cách khác:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các điểm $M(x-1;-y)$, $N(x+1;y)$. Từ $OM+ON\geq MN$, ta được

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq\sqrt{4+4y^2}=2\sqrt{1+y^2}.$$

Từ đó $A\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$. □

★ **Thí dụ 4.** *Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thuộc đoạn* $[0;2]$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$0\leq a<b<c\leq 2.$$

Từ $0<c-a\leq 2$, suy ra $\dfrac{1}{(c-a)^2}\geq\dfrac{1}{4}$ (1)

Từ $0<c-b\leq 2-b$, suy ra $\dfrac{1}{(b-c)^2}\geq\dfrac{1}{(2-b)^2}$ (2)

Từ $0<b-a\leq b$, suy ra $\dfrac{1}{(a-b)^2}\geq\dfrac{1}{b^2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$P\geq\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(2-b)^2}+\frac{1}{4}, \forall b\in(0;2).$$

Xét hàm số

$$f(b)=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(2-b)^2}+\frac{1}{4},\text{ với } b\in(0;2).$$

Ta có $f'(b)=-\dfrac{2}{b^3}+\dfrac{2}{(2-b)^3}$, $f'(b)=0\Leftrightarrow b=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(b)$ trên $(0\,;2)$ ta thấy $f(b)\geq\dfrac{9}{4}$, suy ra $P\geq\dfrac{9}{4}$.

Vậy Min $P = \frac{9}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $(a\,;b\,;c) = (0\,;1\,;2)$ và các hoán vị của nó. ❐

★Thí dụ 5. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = 3(a^2+b^2+c^2)+4abc.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $0<a\le b\le c$. Vì $a+b+c=3$, nên $a+b=3-c$ và $c\ge 1$.

Mặt khác $a+b>c$ nên $3-c>c \Leftrightarrow c<\frac{3}{2}$.

Như vậy $1\le c<\frac{3}{2}$.

Ta có $T = 3(a^2+b^2)+3c^2+4abc$

$$= 3(a+b)^2-6ab+3c^2+4abc$$

$$= 3(3-c)^2+3c^2-2(3-2c)ab.$$

Vì $c<\frac{3}{2}$ nên $3-2c>0$. Mặt khác

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab \Leftrightarrow \left(\frac{3-c}{2}\right)^2\ge ab.$$

Do đó $T\ge 3(3-c)^2+3c^2-2(3-2c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow T\ge c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}.$$

Xét hàm số $f(c)=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}$, với $1\le c<\frac{3}{2}$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(c)$ trên $\left[1\,;\frac{3}{2}\right)$, ta được $f(c)\ge f(1)=13$ hay $T\ge 13$.

Vậy Min $T=13$, đạt được khi $a=b=c=1$. ❐

★Thí dụ 6. *Các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$0\le a\le b\le c\le 3$$

Suy ra $\begin{cases}a(a-b)\le 0\\ a(a-c)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-ab+b^2\le b^2\\ a^2-ac+c^2\le c^2.\end{cases}$

Do đó $P\le b^2c^2(b^2-bc+c^2)=b^2c^2\left((b+c)^2-3bc\right)$.

Từ $\begin{cases}a+b+c=3\\ 0\le a\le b\le c\le 3\end{cases}$ ta có $b+c\le a+b+c$.

Suy ra $b+c\le 3\Leftrightarrow 2\sqrt{bc}\le b+c\le 3\Leftrightarrow 0\le bc\le\frac{9}{4}$.

Do đó $P\le b^2c^2(9-3bc)=9b^2c^2-3b^3c^3$.

Đặt $t=bc$, điều kiện $0\le t\le\frac{9}{4}$. Khi đó $P\le 9t^2-3t^3$.

Xét hàm số $f(t)=9t^2-3t^3$, với $t\in\left[0\,;\frac{9}{4}\right]$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ trên $\left[0\,;\frac{9}{4}\right]$ ta được $f(t)\le 12 \Rightarrow P\le 12$.

Kết luận. Max$P=12$ đạt tại $(a\,;b\,;c)=(0\,;1\,;2)$ và các hoán vị của $(a\,;b\,;c)$. ❐

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2},$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

2. Xét các tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}.$$

3. Xét các tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\cos A+\cos B+\cos C+\frac{4}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}.$$

4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}$$

trong đó x là số thực thỏa mãn điều kiện $0\le x\le 1$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4+y^4-x^2y^2$ trong đó x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2-xy=1$.

6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}$$

trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$x^2+y^2=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{3+2\sin x}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}} \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 1$ (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$$

2) Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m \end{cases}$$

có nghiệm.

Câu III. (1 *điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3(3x+1)}}$.

Câu IV. (1 *điểm*)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$; $\widehat{ABC} = 90^o$; $SA \perp (ABC)$; số đo góc nhị diện cạnh SC bằng 60^o. Kẻ $AM \perp SB$, $AN \perp SC$. Tính thể tích của hình chóp $S.AMN$.

Câu V. (1 *điểm*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^6 + 3y^4} + \sqrt{y^6 + 3x^4},$$

trong đó x, y là các số dương thay đổi thoả mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le 2.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho điểm $M(1;2)$. Lập phương trình đường thẳng qua M, cắt tia Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

2) Trong không gian với hệ trục toạ độ vuông góc $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-1)$, $B(-3;-1;5)$ và đường thẳng (d): $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

Tìm toạ độ điểm M trên (d) sao cho biểu thức $Q = MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Giả sử x, y là hai số thực thoả mãn $0 < x < y < 4$.

Chứng minh rằng $\ln\dfrac{x(4-y)}{y(4-x)} < x - y$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI b. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Biết phương trình các đường thẳng AB, BC tương ứng là (d_1): $2x + y - 1 = 0$, (d_2): $x + 4y + 3 = 0$. Lập phương trình đường cao qua đỉnh B của tam giác ABC.

2) Trong không gian với hệ trục toạ độ vuông góc $Oxyz$, cho đường thẳng (d): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 12 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua (d) và tiếp xúc với mặt cầu $(\mathscr{C})$.

Câu VIIb. (1 *điểm*)

Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn

$$\left|\frac{z + 1 - 5i}{\overline{z} + 3 - i}\right| = 1.$$

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) ĐK để hàm số có ba điểm cực trị là $m > 0$. Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{m};1-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$. Gọi D là trung điểm BC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$ hay $\dfrac{AB.AC}{AD}=2$

$\Leftrightarrow AC^2=2AD \Leftrightarrow m+m^4=2m^2$

$\Leftrightarrow m^3-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-1)=0.$

Chú ý $m>0$, ta tìm được $m=1$, $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ❐

Câu II. 1) Đặt $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0;\ v=\sqrt{y}\geq 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} u^2+v^2+uv=1 \\ u^3+v^3=u+3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=0. \end{cases}$$

Đáp số. $(x;y)=(1;0)$. ❐

2) ĐK $\cos x\neq 0$. PT đã cho tương đương với

$$16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos 2x-2\sin 4x.$$

Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{4}$, ta được

$$16\cos^4 t = 4\sin 2t+2\sin 4t$$

$$\Leftrightarrow 16\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2=4\sin 2t\,(1+\cos 2t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\cos 2t=0 \\ 1+\cos 2t=\sin 2t. \end{array}\right.$$

Đáp số. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=l\pi$ (k, l nguyên). ❐

Câu III. 1) Ta có

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)-\frac{1}{2}A.$$

Tính A. Đặt $u=e^{2x}$, $\mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x$ thì

$$A=-\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-B \qquad (1)$$

Đối với tích phân B, đặt $u=e^{2x}$, $\mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x$ thì

$$B=-\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)+A \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A=\dfrac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$.

Đáp số. $I=\dfrac{1}{8}(e^{2\pi}-1)$. ❐

2) Ta thấy

$(2+x)^{2011}=C_{2011}^0.2^{2011}+C_{2011}^1.2^{2010}x+...+C_{2011}^{2011}x^{2011}$.

Lấy đạo hàm theo x được

$$2011(2+x)^{2010}=$$
$$1.C_{2011}^1 2^{2010}+2.C_{2011}^2.2^{2009}x+...+2011.C_{2011}^{2011}x^{2010}.$$

Nhân cả hai vế đẳng thức này với x, rồi lấy đạo hàm ta được

$$2011(2+x)^{2010}+2011.2010.x(2+x)^{2009}$$
$$=1^2.C_{2011}^1 2^{2010}+2^2.C_{2011}^2.2^{2009}x+...+2011^2.C_{2011}^{2011}x^{2010}.$$

Thay $x=1$, giá trị của tổng cần tìm là

$$2013.2011.2^{2009}.$$ ❐

Câu IV. Gọi E là điểm đối xứng với C qua B; F là điểm đối xứng với C qua D. Khi đó E, N, M thẳng hàng và F, M, P thẳng hàng. Từ E, A, F thẳng hàng, suy ra M, N, E, F, A đồng phẳng. Do $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SA}{SA}=\dfrac{1}{3}$ nên

$$V_{SAMP}=\frac{1}{6}V_{ABCD}\Rightarrow V_{SANMP}=\frac{1}{3}V_{ABCD}.$$

Tỉ số thể tích hai phần bằng $\dfrac{1}{2}$. ❐

Câu V. Đặt $F(a;b;c)=(a-b)(b-c)(c-a)$. Miền giá trị của F đối xứng nên chỉ cần chứng minh $F(a;b;c)\leq\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ (*).

• Nếu hai trong ba số a, b, c bằng nhau thì $F(a;b;c)=0<\dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

• Nếu a,b,c đôi một khác nhau thì không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a;b;c\}$. Lúc đó nếu $b>c$ thì $F(a;b;c)<0<\dfrac{\sqrt{3}}{18}$, nên chỉ cần xét $a>c>b$.

Đặt $x=a+b$ thì $c=1-x$. Ta có

$F(a;b;c)=(a-b)(c-b)(a-c)$
$\le (a+b)c(a+b-c)=x(1-x)(2x-1)=h(x).$

Khảo sát hàm $h(x)$ với $\frac{1}{2}<x\le 1,$ ta được

$$h(x)\le h\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Từ đó suy ra BĐT (*). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{3+\sqrt{3}}{6};\ b=0;\ c=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. ❒

Câu VIa. 1) Gọi B, C là hai đỉnh còn lại của tam giác đều thì $B(-m;n)$, $C(m;n)$. Tam giác ABC đều nội tiếp elip (E) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{m^2}{16}+\frac{n^2}{4}=1\\ 4m^2=m^2+n^2-4n+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4n^2=16\\ 3m^2=n^2-4n+4.\end{cases}$$

Từ hệ trên tìm được $n=-\frac{22}{13}$ (n = 2 loại vì $A\equiv B\equiv C$), từ đó $m=\frac{16\sqrt{3}}{13}$ hoặc $m=-\frac{16\sqrt{3}}{13}$.

$$S_{ABC}=(2m)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{768\sqrt{3}}{169}\text{ (đvdt)}.$$ ❒

2) Giả sử M thuộc (d_1) có tọa độ $M(a+1;2a+2;-2a)$, $N(2b+2;2b;-b+1)$, $P(2c;c;c+1)$.

Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi $\overrightarrow{MN}$ cùng với phương $\overrightarrow{MP}$. Sử dụng giả thiết N là trung điểm MP, ta tìm được $M(-14;-28;30)$; $N\left(-17;-19;\frac{21}{2}\right)$; $P(-20;-10;-9)$. ❒

Câu VIIa. Để đạt được số điểm là 8 trở lên, thí sinh đó cần phải đạt ít nhất 1,6 điểm nữa. Do đó cần phải trả lời đúng 8 trên 10 câu. Bài toán quy về tìm xác suất để trong 10 câu còn lại, anh ta trả lời đúng ít nhất 8 câu. Số cách trả lời 10 câu còn lại là 4^{10} (mỗi câu có 4 cách trả lời). Vậy $|\Omega|=4^{10}$.

Gọi A là biến cố: *Thí sinh đó trả lời đúng ít nhất 8 câu.*

A_i là biến cố: *Thí sinh đó trả lời đúng i câu* ($i\in\{8,9,10\}$).

Số cách chọn i câu đúng là C_{10}^i. Số cách trả lời đúng là 1 và sai là 3. Do đó theo quy tắc nhân $|A_i|=C_{10}^i.3^{10-i}\Rightarrow|A_8|=405$; $|A_9|=30$; $|A_{10}|=1$. Vì A_8,A_9,A_{10} đôi một xung khắc và $A_8\cup A_9\cup A_{10}=A$ nên $|A|=405+30+1=436$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{436}{4^{10}}$. ❒

Câu VIb. 1) Gọi $B(m;n)$ và $C(m;-n)$ $(n>0)$ là hai đỉnh còn lại của tam giác đều OBC. Khi đó tam giác OBC đều nội tiếp $(P)\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}BC=OB=OC\\ B\in(P),C\in(P).\end{cases}$$
Tìm được $m=6,\ n=2\sqrt{3}$.

Từ đó $S_{OBC}=12\sqrt{3}$ (đvdt). ❒

2) Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng $\frac{\sqrt{26}}{13}$. Gọi φ là góc giữa d_3 và mặt phẳng (α) ta có $\sin\varphi=\frac{\sqrt{7}}{3}$. ❒

Câu VIIb. Vì đã được 6,4 điểm, nên để đạt được số điểm từ 7 trở xuống thí sinh đó chỉ trả lời đúng tối đa 3 trên 10 câu còn lại. Bài toán quy về tính xác suất để thí sinh trả lời đúng nhiều nhất 3 câu. Ta có $|\Omega|=4^{10}$.

Gọi B là biến cố: *Thí sinh trả lời đúng nhiều nhất 3 câu.*

B_i là biến cố: *Thí sinh trả lời đúng i câu* ($i=0,1,2,3$).

Số cách chọn i câu đúng là 1 và sai là 3 đối với mỗi câu. Từ đó $|B_i|=C_{10}^i.3^{10-i}\Rightarrow|B_0|=59049$; $|B_1|=196830$; $|B_3|=295245$; $|B_4|=262440$. Do các biến cố B_0,B_1,B_2,B_3 đôi một xung khắc và $B=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3$

Suy ra $|B|=|B_0|+|B_1|+|B_2|+|B_3|=813564$.

Xác suất cần tìm $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{813564}{4^{10}}$. ❒

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011

Chủ đề : DAO ĐỘNG VÀ SÓNG CƠ

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Bắt đầu từ số báo này, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ giới thiệu những kiến thức cơ bản của môn Vật lí nhằm giúp thí sinh vừa ôn luyện kiến thức, vừa làm quen với các dạng cấu trúc đề thi và cách làm bài trong quá trình chuẩn bị ôn thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng.

Trong kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2011 môn Vật lí được thi theo hình thức trắc nghiệm. Nội dung đề thi theo chương trình Trung học phổ thông, chủ yếu là chương trình lớp 12. Đề thi gồm hai phần: Phần chung (40 câu) cho tất cả thí sinh, Phần riêng (10 câu) ra theo từng chương trình: chương trình chuẩn và chương trình nâng cao, thí sinh chỉ được chọn một phần riêng để làm bài (không phân biệt thí sinh đã học theo chương trình nào).

Trong số này, chúng tôi đề cập tới hai chủ đề ***Dao động cơ*** *và* ***Sóng cơ*** *trong chương trình Vật lí lớp 12. Phần chung của hai chủ đề này trong đề thi có 11 câu, trong đó chủ đề Dao động cơ (7 câu), chủ đề Sóng cơ (4 câu). Đối với hai chủ đề này, thí sinh cần nắm vững những nội dung kiến thức sau đây: Dao động điều hòa; Con lắc lò xo và con lắc đơn; Năng lượng của con lắc lò xo và con lắc đơn; Dao động tắt dần, dao động duy trì, dao động cưỡng bức; Hiện tượng cộng hưởng; Tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số; Đại cương về sóng, sự truyền sóng, sóng âm; Giao thoa sóng; Phản xạ sóng, sóng dừng.*

Câu hỏi trắc nghiệm trong đề thi có hai phần: Phần đầu (còn gọi là phần dẫn) nêu ra vấn đề, các thông tin cần thiết hoặc câu hỏi; phần sau là các phương án được đánh dấu bằng các chữ cái **A, B, C, D** *(trong đó chỉ có một phương án đúng) để thí sinh lựa chọn. Khi làm mỗi câu trắc nghiệm, thí sinh cần đọc kĩ phần dẫn và bốn phương án* **A, B, C, D**, *không được bỏ sót từ nào, suy nghĩ cẩn thận để lựa chọn được phương án đúng. Trong một số câu hỏi có từ phủ định như* "**không**", "**không đúng**", "**sai**" *thì phải đặc biệt chú ý để tránh trả lời ngược.*

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số câu trắc nghiệm về hai chủ đề này, đồng thời hướng dẫn cách lựa chọn phương án đúng.

CÂU 1. *Phát biểu nào sau đây là* ***sai*** *khi nói về dao động của con lắc đơn (bỏ qua lực cản của môi trường?*

A. *Với dao động nhỏ thì dao động của con lắc là dao động điều hòa.*

B. *Khi vật nặng ở vị trí biên, cơ năng của con lắc bằng thế năng của nó.*

C. *Chuyển động của con lắc từ vị trí biên về vị trí cân bằng là nhanh dần.*

D. *Khi vật nặng đi qua vị trí cân bằng thì trọng lực tác dụng lên nó cân bằng với lực căng của dây.*

Hướng dẫn. Với li độ góc nhỏ, $\sin\alpha \approx \alpha$, dao động của con lắc là dao động điều hòa (**A** đúng). Cơ năng = động năng + thế năng; khi vật ở vị trí biên thì $v = 0$, vậy cơ năng bằng thế năng (**B** đúng). Khi con lắc từ vị trí biên chuyển động về vị trí cân bằng, lúc này lực kéo về (hay gia tốc $\vec{a}$) cùng chiều với vận tốc $\vec{v}$, nên chuyển động của vật là nhanh dần (**C** đúng). Vật nặng của con lắc chuyển động trên cung tròn nên luôn chịu tác dụng của lực hướng tâm $\vec{F_{ht}}$. Lực này là hợp lực của trọng lực $\vec{P}$ và lực căng của dây $\vec{T}$, $\vec{F_{ht}} = \vec{P} + \vec{T}$. Ở vị trí cân bằng $(v \neq 0)$, về độ lớn, ta có $F_{ht} = T - P = \dfrac{mv^2}{r} \neq 0$, nghĩa là $P \neq T$ (**D** sai). Chọn **D.** ❐

CÂU 2. *Một con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng k = 40N/m và vật nhỏ có khối lượng 400g. Người ta kéo vật nhỏ ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn 8cm và thả cho nó dao động. Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng, mốc thời gian là lúc thả vật. Phương trình dao động của vật là*

A. $x = 8\cos 10t\,(\text{cm})$. **B.** $x = 8\cos 10\pi t\,(\text{cm})$.

C. $x = 8\cos \pi t\,(\text{cm})$. **D.** $x = 8\cos t\,(\text{cm})$.

Hướng dẫn. Phương trình dao động điều hòa dạng tổng quát $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Ta phải tìm A, ω, φ. Do gốc tọa độ được chọn tại vị trí cân bằng, vật được kéo khỏi vị trí cân bằng 8cm, rồi thả cho dao động, nên biên độ $A = 8$cm. Mốc thời gian ($t = 0$) được chọn là lúc thả vật, khi đó vật có li độ $x = 8$cm, do đó ta có $8 = 8\cos(\omega.0+\varphi)$, suy ra $\varphi = 0$. Tần số $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0,4}} = 10$rad/s. Vậy phương trình dao động của vật là $x = 8\cos 10t\,(\text{cm})$.

Chọn A. ❐

CÂU 3. *Một chất điểm dao động điều hòa trên trục Ox với chu kì T. Vị trí cân bằng của chất điểm trùng với gốc tọa độ. Khoảng thời gian ngắn nhất để chất điểm đi từ vị trí có li độ $x = \frac{A}{2}$ đến vị trí có li độ $x = A$ là*

A. $\frac{T}{3}$. **B.** $\frac{T}{2}$. **C.** $\frac{T}{6}$. **D.** $\frac{T}{4}$.

Hướng dẫn. Gọi t_1, t_2 là các thời điểm mà chất điểm có li độ tương ứng là $\frac{A}{2}$ và A, ta có các phương trình

$$x_1 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}.t_1+\varphi\right) = \frac{A}{2} \quad (1)$$

$$x_2 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}.t_2+\varphi\right) = A \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $\frac{2\pi}{T}.t_1+\varphi = -\frac{\pi}{3}$;

Từ (2) suy ra $\frac{2\pi}{T}.t_2+\varphi = 0$.

Do đó $\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1) = \frac{2\pi}{T}.\Delta t = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $\Delta t = \frac{T}{6}$. Chọn C. ❐

CÂU 4. *Tại hai điểm A và B trong một môi trường truyền sóng có hai nguồn sóng kết hợp, dao động cùng phương với phương trình lần lượt là $u_A = a\sin\omega t$ và $u_B = a\sin(\omega t+\pi)$. Biết vận tốc và biên độ sóng do mỗi nguồn tạo ra không đổi trong quá trình truyền sóng. Trong khoảng A và B có giao thoa sóng do hai nguồn trên gây ra. Phần tử vật chất tại trung điểm của đoạn AB dao động với biên độ bằng*

A. a. **B.** 0. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn. Dễ dàng thấy rằng, hai phần tử vật chất tại A và B dao động cùng phương, cùng tần số, cùng biên độ nhưng ngược pha nhau, nên biên độ dao động của phần tử vật chất tại điểm C là trung điểm của AB bằng không ($aC = 0$), (**B** đúng).

Chọn B. ❐

CÂU 5. *Một nguồn phát sóng dao động theo phương trình $u = \sin 20\pi t\,(\text{cm})$ với t tính bằng giây. Trong khoảng thời gian 2s, sóng này truyền đi được quãng đường bằng bao nhiêu lần bước sóng?*

A. 15 lần. **B.** 10 lần. **C.** 20 lần. **D.** 30 lần.

Hướng dẫn. Chu kì của sóng $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1(\text{s})$.

Gọi l và v là quãng đường mà sóng truyền được trong thời gian $t = 2$s và vận tốc của sóng, ta có $v = \frac{l}{t}$. Mặt khác thì $v = \frac{\lambda}{T}$, trong đó λ và T là bước sóng và chu kì của sóng. Suy ra

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \frac{l}{\lambda} = \frac{t}{T} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ lần} \quad \text{(C đúng)}.$$

Chọn C. ❐

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Một con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng k và vật có khối lượng m dao động điều hòa. Khi khối lượng của vật là m_1 thì chu kì dao động là T_1, khi khối lượng của vật là m_2 thì chu kì dao động là T_2. Khi khối lượng của vật là $m_1 + m_2$ thì chu kì dao động là

A. $\frac{T_1T_2}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$. **B.** $\frac{1}{T_1+T_2}$.

C. T_1+T_2. **D.** $\sqrt{T_1^2+T_2^2}$.

Câu 2. Một con lắc đơn có chiều dài dây treo 50cm và vật nhỏ có khối lượng 0,01kg mang điện tích $q = +5.10^{-6}$C, được coi là điện tích điểm. Con lắc dao động điều hòa trong điện trường đều mà vectơ cường độ điện trường có độ lớn $E = 10^4$ V/m và hướng thẳng đứng xuống dưới. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$, $\pi = 3,14$. Chu kì dao động của con lắc là

A. 0,68s. **B.** 1,15s. **C.** 1,47s. **D.** 0,93s.

Câu 3. Trên mặt một chất lỏng có một sóng cơ, người ta quan sát được khoảng cách giữa 15 đỉnh sóng liên tiếp là 3,5m và thời gian sóng truyền được khoảng cách đó là 7s. Tần số của sóng này là

A. 1,2Hz. **B.** 2,7Hz. **C.** 3,4Hz. **D.** 2,0Hz.

Đáp án của các bài tập này sẽ được đăng trong số báo tới.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

(Tiếp theo kì trước)

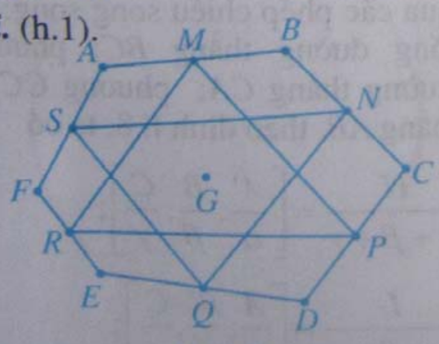
NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

V. CÁC BÀI TOÁN

Trong mục này, tiện ích của các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự trên mặt phẳng và kĩ thuật sử dụng các thuật toán này được giới thiệu thông qua một số các bài toán và lời giải của chúng.

Bài toán 1. *Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của lục giác ABCDEF. Chứng minh rằng hai tam giác MPR, NQS có cùng trọng tâm.*

Lời giải. (h.1).



Hình 1

Đặt $G \equiv \left[\frac{A}{1},\frac{B}{1},\frac{C}{1},\frac{D}{1},\frac{E}{1},\frac{F}{1}\right]$.

Theo định lí 6 thì

$$G \equiv \left[\left[\frac{A}{1},\frac{B}{1}\right],\left[\frac{C}{1},\frac{D}{1}\right],\left[\frac{E}{1},\frac{F}{1}\right]\right] = \left[\frac{M}{2},\frac{P}{2},\frac{R}{2}\right].$$

Từ đó, theo hệ quả 2 của định lí 10, suy ra G là trọng tâm của tam giác MPR.

Theo các định lí 1 và 6 thì

$$G \equiv \left[\left[\frac{B}{1},\frac{C}{1}\right],\left[\frac{D}{1},\frac{E}{1}\right],\left[\frac{F}{1},\frac{A}{1}\right]\right] = \left[\frac{N}{2},\frac{Q}{2},\frac{S}{2}\right].$$

Từ đó, theo hệ quả 2 của định lí 10, suy ra G là trọng tâm của tam giác NQS. Vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm. ❐

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. M là điểm bất kì. A′, B′, C′ theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng AA′, BB′, CC′ đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn và điểm đồng quy này chia đoạn thẳng GM theo tỉ số* $\frac{1}{3}$.

Lời giải. (h.2). Đặt $K \equiv \left[\frac{A}{1},\frac{B}{1},\frac{C}{1},\frac{M}{-1}\right]$.

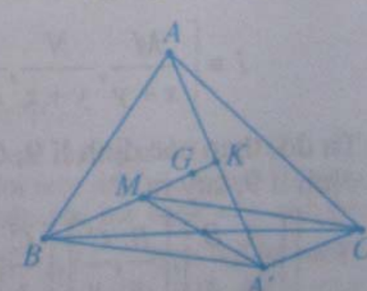
Dễ thấy tứ giác $MBA'C$ là hình bình hành.

Từ đó, theo định lí 6 và hệ quả 3 của định lí 10, suy ra

$$K \equiv \left[\frac{A}{1},\left[\frac{B}{1},\frac{C}{1},\frac{M}{-1}\right]\right] = \left[\frac{A}{1},\frac{A'}{1}\right].$$

Do đó, theo hệ quả của định lí 9, K là trung điểm của AA'.

Tương tự, K là trung điểm của BB', CC'.



Hình 2

Vậy AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm K của mỗi đoạn (1)

Theo định lí 6 và hệ quả 2 của định lí 10, ta có

$$K \equiv \left[\left[\frac{A}{1},\frac{B}{1},\frac{C}{1}\right],\frac{M}{-1}\right]=\left[\frac{G}{3},\frac{M}{-1}\right].$$

Vậy, theo định lí 9, điểm K chia đoạn thẳng GM theo tỉ số $\frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. ❐

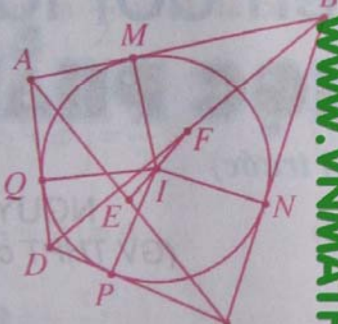
✪Bài toán 3. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Các điểm E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng ba điểm I, E, F thẳng hàng.*

Lời giải. *Bổ đề*. Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. Nếu các vectơ $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$ có độ dài bằng nhau và $(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{A_i A_{i+1}})=\frac{\pi}{2},\ \forall i=1,2,...,n$ thì

$$\sum_{1\le i\le n} A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i}=\vec{0}\ (\text{xem } A_{n+1}\equiv A_1).$$

Bổ đề trên là quen thuộc, phép chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Trở lại giải bài toán 3 (h.3).



Hình 3

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, BC, CD, DA.

Đặt $AM = AQ = x$; $BN = BM = y$; $CP = CN = z$; $DQ = DP = t$.

Chú ý rằng $IM = IN = IP = IQ$ và $AB = x + y$; $BC = y + z$; $CD = z + t$; $DA = t + x$. Từ bổ đề trên, ta có

$$I \equiv \left[\frac{M}{x+y},\frac{N}{y+z},\frac{P}{z+t},\frac{Q}{t+x}\right].$$

Từ đó, theo các định lí 9, 6, 1, 3 và hệ quả của định lí 9, suy ra

$$I \equiv \left[\left[\frac{A}{y},\frac{B}{x}\right],\left[\frac{B}{z},\frac{C}{y}\right],\left[\frac{C}{t},\frac{D}{z}\right],\left[\frac{D}{x},\frac{A}{t}\right]\right]$$

$$=\left[\left[\frac{A}{y},\frac{A}{t}\right],\left[\frac{B}{x},\frac{B}{z}\right],\left[\frac{C}{y},\frac{C}{t}\right],\left[\frac{D}{z},\frac{D}{x}\right]\right]$$

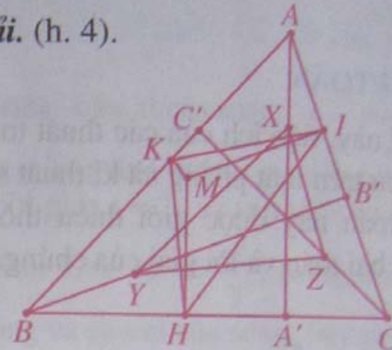
$$=\left[\left[\frac{A}{y+t},\frac{C}{y+t}\right],\left[\frac{B}{x+z},\frac{D}{x+z}\right]\right]$$

$$=\left[\frac{E}{2(y+t)},\frac{F}{2(x+z)}\right].$$

Vậy theo định lí 9, điểm I thuộc đoạn EF. ❐

✪Bài toán 4. *Cho tam giác ABC. Điểm M di động ở miền trong tam giác. H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm quỹ tích trọng tâm của tam giác HIK.*

Lời giải. (h. 4).



Hình 4

Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC.

Đặt $X \equiv \left[\frac{A}{2},\frac{A'}{1}\right]; Y \equiv \left[\frac{B}{2},\frac{B'}{1}\right]; Z \equiv \left[\frac{C}{2},\frac{C'}{1}\right]$ (1)

Phần thuận. Giả sử G là trọng tâm của tam giác HIK.

Vì M nằm trong tam giác ABC nên theo hệ quả 1 của định lí 10, tồn tại các số dương α, β, γ sao cho $\frac{M}{\alpha+\beta+\gamma}=\left[\frac{A}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C}{\gamma}\right]$.

Từ đó, qua các phép chiếu song song: phương AA' xuống đường thẳng BC; phương BB' xuống đường thẳng CA; phương CC' xuống đường thẳng AB, theo định lí 8, ta có

$$\frac{H}{\alpha+\beta+\gamma}=\left[\frac{A'}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C}{\gamma}\right];$$

$$\frac{I}{\alpha+\beta+\gamma}=\left[\frac{A}{\alpha},\frac{B'}{\beta},\frac{C}{\gamma}\right];$$

$$\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}=\left[\frac{A}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C'}{\gamma}\right] \quad (2)$$

Vì G là trọng tâm của tam giác HIK nên, theo hệ quả 2 của định lí 1; chú ý tới (2); theo các định lí 6, 1, chú ý tới (1); theo định lí 2 và hệ quả 1 của định lí 10, ta có

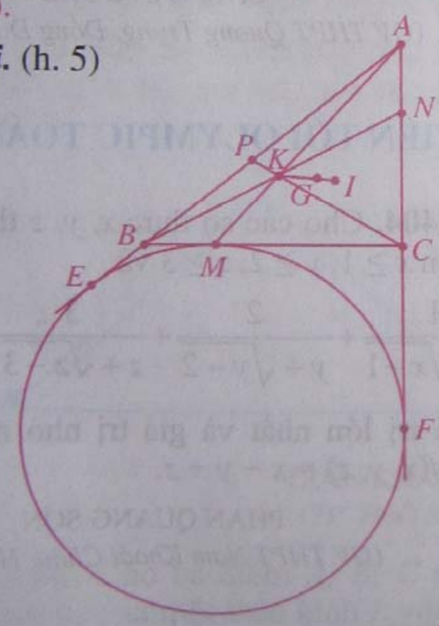
$$G\equiv\left[\frac{H}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{I}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}\right]$$
$$=\left[\frac{A'}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C}{\gamma},\frac{A}{\alpha},\frac{B'}{\beta},\frac{C}{\gamma},\frac{A}{\alpha},\frac{B}{\beta},\frac{C'}{\gamma}\right]$$
$$=\left[\left[\frac{A}{2\alpha},\frac{A'}{\alpha}\right],\left[\frac{B}{2\beta},\frac{B'}{\beta}\right],\left[\frac{C}{2\gamma},\frac{C'}{\gamma}\right]\right]$$
$$=\left[\frac{X}{3\alpha},\frac{Y}{3\beta},\frac{Z}{3\gamma}\right]\equiv\left[\frac{X}{\alpha},\frac{Y}{\beta},\frac{Z}{\gamma}\right]\in\Delta XYZ.$$

Phần đảo. Dành cho bạn đọc.

Kết luận. Quỹ tích trọng tâm tam giác HIK là miền tam giác XYZ. ❒

✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC, trọng tâm G, tâm đường tròn nội tiếp I. Các đường tròn bàng tiếp theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy tại điểm* $K\equiv\left[\frac{A}{p-a},\frac{B}{p-b},\frac{C}{p-c}\right]$ *và K chia đoạn thẳng IG theo tỉ số* $\frac{3}{2}$ *(trong đó p là nửa chu vi tam giác, BC = a, CA = b, AB = c).*

Lời giải. (h. 5)



Hình 5

Gọi E và F theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh A với các tia AB và AC. Ta thấy $2AE=2AF=2p$.

Suy ra $BM=BE=AE-AB=p-c$.

Tương tự $BM=AN=p-c; CN=BP=p-a;$ $AP=CM=p-b$.

Từ đó theo định lí 9 ta có

$$M\equiv\left[\frac{B}{p-b},\frac{C}{p-c}\right];\ N\equiv\left[\frac{C}{p-c},\frac{A}{p-a}\right];$$
$$P\equiv\left[\frac{A}{p-a},\frac{B}{p-b}\right].$$

Vậy chú ý rằng $p-a+p-b+p-c=p\neq0$, theo định lí 11, AM, BN, CP đồng quy tại điểm $K\equiv\left[\frac{A}{p-a},\frac{B}{p-b},\frac{C}{p-c}\right]$.

Mặt khác, theo các định lí 3, 6, 1, các hệ quả 2, 4 của định lí 10 và theo định lí 2, ta có

$$K\equiv\left[\left[\frac{A}{p},\frac{A}{-a}\right],\left[\frac{B}{p},\frac{B}{-b}\right],\left[\frac{C}{p},\frac{C}{-c}\right]\right]$$
$$=\left[\left[\frac{A}{p},\frac{B}{p},\frac{C}{p}\right],\left[\frac{A}{-a},\frac{B}{-b},\frac{C}{-c}\right]\right]=\left[\frac{G}{3p},\frac{I}{-2p}\right].$$

Vậy theo định lí 9 thì điểm K chia đoạn thẳng IG theo tỉ số $\frac{3}{2}$. ❒

Vì khuôn khổ bài báo. Chúng tôi xin tạm dừng ở đây. Sau đây là một số bài tập để các bạn tham khảo thêm.

1. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Các điểm X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1 theo thứ tự là trung điểm của các đoạn BC, B_1C_1, CA, C_1A_1, AB, A_1B_1. Chứng minh rằng XX_1, YY_1, ZZ_1 đồng quy tại một điểm và điểm đó chia đoạn thẳng GM theo tỉ số $-\frac{1}{3}$.

2. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt các đoạn BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và theo thứ tự cắt các đoạn B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng

a) $S_{A_1B_1C_1}\leq\frac{1}{4}S_{ABC}$.

b) $S^2_{A_1B_1C_1}\leq S_{ABC}.S_{A_2B_2C_2}$.

3. Cho tam giác ABC, các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm trong tam giác, đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Gọi T_1, T_2, T_3 theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2). Chứng minh rằng AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy.

4. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại X, Y, Z. Đặt $M=BY\cap XZ$; $N=CZ\cap XY$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của MY, NZ. Chứng minh rằng AI, YF, ZE đồng quy.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/404. (Lớp 6). Cho bảy số nguyên tố khác nhau a, b, c, $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $-a+b+c$, trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể là bao nhiêu?

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hoá)

Bài T2/404. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM, $AB = 2$cm, $AC = 4$cm và $AM = \sqrt{3}$ cm. Hãy tính số đo góc BAC, độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC.

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện H. An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/404. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $n^5 - 2011n$ chia hết cho k, với mọi số tự nhiên n.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T4/404. Giải phương trình

$$(x^4 - 625)^2 - 100x^2 - 1 = 0.$$

NGUYỄN MINH SANG
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T5/404. Cho tam giác ABC nhọn ($AB \neq AC$) nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Một đường thẳng d bất kì đi qua H. Vẽ đường thẳng d' đối xứng với d qua BC. Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho d' là tiếp tuyến của đường tròn (O).

PHẠM TUẤN KHẢI
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/404. Tìm hằng số k lớn nhất thoả mãn bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq k\,(a^2+b^2+c^2)$$

trong đó a, b, c là các số thực dương và có tổng bằng 1.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(Bắc Ninh)

Bài T7/404. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC; D, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng điểm O là trọng tâm của tam giác DEF.

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/404. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\cos 5x + 2\cos x} - \sqrt[3]{2\cos 5x + \cos x} = 2\sqrt[3]{\cos x}\,(\cos 4x - \cos 2x).$$

CAO VĂN DŨNG
(GV THPT Quang Trung, Đống Đa, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/404. Cho các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 2$, $z \geq 3$ và

$$\frac{1}{x+\sqrt{x-1}}+\frac{2}{y+\sqrt{y-2}}+\frac{3}{z+\sqrt{z-3}}=12.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z) = x + y + z$.

PHAN QUANG SƠN
(GV THPT Nam Khoái Châu, Hưng Yên)

Bài T10/404. Cho dãy số (x_n) với $x_1 = \frac{5}{2}$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

TRẦN VŨ HOÀNG ĐẢO
(GV THPT chuyên Long An)

Bài T11/404. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to(0;2011]$ thoả mãn điều kiện

$$f(x)\le 2011\left(2-\frac{2011}{f(y)}\right),\ \text{với } x>y.$$

ĐẶNG THANH HẢI

(*GV Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội*)

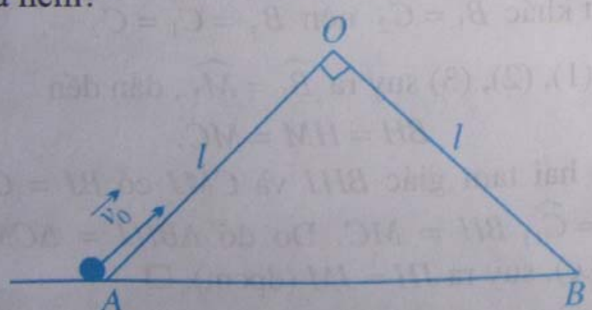
Bài T12/404. Cho bốn điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Lấy điểm M sao cho năm điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) và M không cùng nằm trên một đường tròn. Gọi T_i là tam giác có ba đỉnh là các điểm A_j ($j = 1, 2, 3, 4; j\ne i$), C_i là đường tròn (hoặc đường thẳng) đi qua ba điểm là hình chiếu vuông góc của M xuống ba cạnh (hoặc cạnh kéo dài) của tam giác T_i. Chứng minh rằng các đường C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) cùng đi qua một điểm.

TRẦN VIỆT HÙNG

(*Sở GD&ĐT Sóc Trăng*)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/404. Một quả cầu nhỏ, đàn hồi nằm ở chân của một cái nêm AOB vuông cân ($OA=OB = l$) cố định (hình vẽ). Cần truyền cho quả cầu vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ hướng dọc mặt nêm bằng bao nhiêu để quả cầu rơi đúng điểm B của nêm?



TRẦN KHÁNH HẢI

(*TP. Huế*) *Sưu tầm*

Bài L2/404. Cho ba điểm A, B, C nằm trên trục chính xy của một thấu kính L với $AB = m = 36$cm và $BC = n = 9$cm. Nếu đặt vật sáng tại A thì thu được ảnh của nó tạo bởi thấu kính tại B. Nếu đặt vật sáng tại B thì thu được ảnh của nó tạo bởi thấu kính tại C. Hỏi L là thấu kính hội tụ hay phân kì? Hãy xác định tiêu cự f của thấu kính L.

NGUYỄN QUANG HẬU

(*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/404. (For 6th grade). Given seven distinct prime numbers a, b, c, $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $-a+b+c$, in which the sum of two of three numbers a, b, c equals 800. Let d be the difference between the largest and the smallest number among these seven integers. What is the maximum value of d?

T2/404. (For 7th grade). A triangle ABC has sides $AB = 2$cm, $AC = 4$cm, and median $AM = \sqrt{3}$ cm. Find the measure of the angle BAC, the length of side BC and the area of triangle ABC.

T3/404. Find the largest natural number k so that $n^5 - 2011n$ is divisible by k for all natural number n.

T4/404. Solve the equation

$$(x^4-625)^2-100x^2-1=0.$$

T5/404. Let ABC be an acute triangle ($AB\ne AC$) inscribed in the circle (O), and H is its orthocenter. Let d be an arbitrary line passing through H. Draw the line d' symmetric to d through BC. Find the position of the line d so that d' touches the circumcircle (O).

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/404. Find the largest constant k such that

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge k\,(a^2+b^2+c^2)$$

for all positive real numbers a, b, and c whose sum equals 1.

T7/404. Let ABC be a triangle inscribed in the circle (O), and let G be its centroid; D, E, and F are the circumcenters of triangles GBC, GCA, GAB respectively. Prove that O is the centroid of DEF.

T8/404. Solve the equation

$$\sqrt[3]{\cos 5x+2\cos x}-\sqrt[3]{2\cos 5x+\cos x}=2\sqrt[3]{\cos x}(\cos 4x-\cos 2x).$$

(*Xem tiếp trang 27*)

★Bài T1/400. *Cho*

$$A=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}...\frac{995}{998}.\frac{997}{1000} \text{ và } B=\frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}...\frac{996}{999}.\frac{998}{1001}.$$

1) So sánh A và B;

2) Chứng minh rằng $A<\dfrac{1}{12900}$.

Lời giải. 1) Chú ý rằng với $0<a<b$, sau khi quy đồng mẫu số của $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{a+1}{b+1}$ rồi so sánh hai tử số, ta thấy $ab+a<ab+b$ hay $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+1}{b+1}$.

Các tích A và B đều có 499 thừa số và theo chú ý trên thì

$$\frac{1}{4}<\frac{2}{5};\ \frac{3}{6}<\frac{4}{7};\ ...;\ \frac{997}{1000}<\frac{998}{1001}.$$

Do đó khi lấy tích của chúng, ta có $A<B$.

2) Vì $A<B$ nên $A^2<A.B$. Lại có

$$AB=\frac{1\times2\times3}{999\times1000\times1001}<\frac{1}{16650\times10000}<\frac{1}{12900^2}.$$

Từ đó thu được $A<\dfrac{1}{12900}$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Có thể so sánh các thừa số tương ứng của A và B trong dạng $\dfrac{a}{a+3}<\dfrac{a+1}{a+4}$.

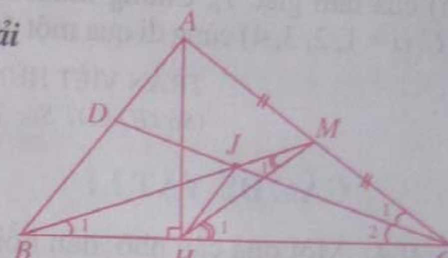
2) Các bạn có lời giải đúng, lập luận rõ ràng là:

Yên Bái: *Trần Mạnh Toản*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, TTr. Yên Thế, Lục Yên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Huyền Trâm, Đoàn Ngọc Linh, Phạm Việt Hoàng*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hưng Yên:** *Cao Linh Phương*, 6B, THCS Hiến Nam, TP. Hưng Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Lưu Cảnh Hào*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, *Lê Thành Công*, 6B, THCS Hermann Gmeiner, TP. Vinh, *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Hân, Tây Sơn; **Hậu Giang:** *Trần Xuân Yến*, 6A3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh.

VIỆT HẢI

★Bài T2/400. *Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại J thỏa mãn điều kiện JB = JC. Từ A kẻ AH vuông góc với cạnh BC. Chứng minh rằng JM = JH.*

Lời giải



Ta có $MA=MC=MH$ suy ra $\widehat{H_1}=\widehat{C_1}+\widehat{C_2}$ (1)

Vì $\widehat{H_1}$ là góc ngoài của tam giác BHM nên $\widehat{H_1}=\widehat{B_1}+\widehat{M_1}$ (2)

Mặt khác $\widehat{B_1}=\widehat{C_2}$ nên $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{B_1}=\widehat{M_1}$, dẫn đến

$$BH=HM=MC.$$

Xét hai tam giác BHJ và CMJ có $BJ=CJ$, $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$, $BH=MC$. Do đó $\Delta BHJ=\Delta CMJ$ (c.g.c), suy ra $JH=JM$ (đpcm). ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Huy Tuyển*, 7A3, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Thanh Quang*, 7A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thanh Hà, Vũ Trung Hoa, Nguyễn Trâm Anh, Nguyễn Hiền Linh*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh*

Phượng, 6B, THCS ...ng Đa; **Hưng Yên:** *Cao Linh An: Trần Ngọc Linh*, 6A, *Đào Mỹ Linh*, 7A, THCS Hiến Nam, TP. Hưng Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Hoan, Đặng Mai Hương, Lê Thanh Tâm, Võ Thị Lê*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Thắng*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Linh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Huỳnh Tiến Vỹ, Nguyễn Thị Kiều Duyên, Cao Thị Thúy Điểm, Tống Thành Nguyện, Nguyễn Thúy Phượng, Võ Trần Thùy Hương*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn; **Hậu Giang:** *Trần Xuân Yến*, 6A3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/400. *Giả sử $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Xét các số tự nhiên $a_n = \overline{11...1}$ được viết bởi n chữ số 1. Chứng minh rằng nếu a_n là một số nguyên tố thì n là ước của $a_n - 1$.*

Lời giải. *Cách 1*. Đặt $a_n = p$, ta có $p = \dfrac{10^n - 1}{9}$ suy ra $10^n - 1 \vdots p$ (1)

Vì $(p, 10) = 1$ nên theo định lí Fermat nhỏ ta có $10^{p-1} - 1 \vdots p$ (2)

Để ý rằng $p - 1 > n$ nên ta có thể viết $p - 1 = nq + r$ với $q, r \in \mathbb{N},\ q > 0, r < n$.

Nếu $p - 1$ không chia hết cho n thì $r > 0$.

Từ (2) có

$10^{nq+r} - 1 \vdots p \Rightarrow 10^r(10^{nq} - 1) + 10^r - 1 \vdots p$ (3)

Do (1) và từ

$10^{nq} - 1 = (10^n - 1)\left((10^n)^{q-1} + (10^n)^{q-2} + ... + 1\right)$,

suy ra $10^{nq} - 1 \vdots p$.

Từ (3) suy ra $10^r - 1 \vdots p$ hay $9.\underbrace{11...1}_{r \text{ chữ số } 1} \vdots p$. Điều này vô lí vì $0 < 9 < p$ và $0 < \underbrace{11...1}_{r \text{ chữ số } 1} < \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số } 1} = p$, p là số nguyên tố. Vậy phải có $p - 1 \vdots n$ hay $a_n - 1 \vdots n$, tức là n là ước của $a_n - 1$.

Cách 2. (Theo đa số các bạn).

Trước hết ta chứng minh: Nếu a_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố.

Thật vậy, nếu n là hợp số thì n viết được dưới dạng $n = bq$ với $b, q \in \mathbb{N},\ 1 < b, q < n$. Khi đó

$a_n = \underbrace{11...1}_{bq \text{ chữ số } 1}$

$= \underbrace{11...1}_{q \text{ chữ số } 1}.(10^{q(b-1)} + 10^{q(b-2)} + ... + 1) \vdots \underbrace{11...1}_{q \text{ chữ số } 1}$.

Do vậy a_n là hợp số, trái với giả thiết.

Suy ra, nếu a_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố.

Ta có $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9} \Rightarrow a_n - 1 = \dfrac{10^n - 10}{9}$

$\Rightarrow 10^n - 10 \vdots 9$ (4)

Theo định lí Fermat nhỏ thì $10^n - 10 \vdots n$ (5)

Xét hai trường hợp

a) Với $n = 3$ khi đó $a_3 = 111 \vdots 3$ nên a_3 không là số nguyên tố, trường hợp này bị loại.

b) $n \neq 3$, n là số nguyên tố nên $(n, 9) = 1$.

Từ (4) và (5) suy ra $10^n - 10 \vdots 9n$, hay

$a_n - 1 = \dfrac{10^n - 10}{9} \vdots n$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Phạm Thị Khánh Linh, Hoàng Minh Phương*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Long, Phạm Đức Hiển*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng, Phan Quang Anh Vũ*, 8A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An:** *Lê Thành Công*, 6B, THCS Hermann Gmeiner, TP. Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Huy*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/400. *Cho bốn số a, b, c, d thuộc $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4 \geq \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \quad (*)$$

Lời giải. • Trước hết ta chứng minh:

Với x, y thuộc $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, ta luôn có

$$\left(\frac{x+y}{2-x-y}\right)^2 \geq \frac{xy}{(1-x)(1-y)} \quad (1)$$

Thật vậy, BĐT (1)

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-x)(1-y) \geq xy(2-x-y)^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-(x+y)+xy) - xy(4-4(x+y)$
$+(x+y)^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-x-y) - 4xy(1-x-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-x-y)(x-y)^2 \geq 0$ (2)

Vì $x, y \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ nên $1 - x - y \geq 0,\ (x-y)^2 \geq 0$ do đó BĐT (2) luôn đúng. Suy ra BĐT (1) luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

• Áp dụng BĐT (1) cho a, b, c, d thuộc $\left(0\,;\frac{1}{2}\right]$, ta được

$$\left(\frac{a+b}{2-a-b}\right)^2 \geq \frac{ab}{(1-a)(1-b)} \quad (3)$$

$$\left(\frac{c+d}{2-c-d}\right)^2 \geq \frac{cd}{(1-c)(1-d)} \quad (4)$$

Nhân theo vế của hai BĐT (3) và (4), ta có

$$\left(\frac{(a+b)(c+d)}{(2-a-b)(2-c-d)}\right)^2 \geq \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \quad (5)$$

Đặt $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{c+d}{2}$ thì $0 < x, y \leq \frac{1}{2}$. Áp dụng BĐT (1), ta có

$\left(\frac{x+y}{2-x-y}\right)^2 \geq \frac{xy}{(1-x)(1-y)}$, tức là

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4 \geq \left(\frac{(a+b)(c+d)}{(2-a-b)(2-c-d)}\right)^2 \quad (6)$$

Kết hợp BĐT (5) và BĐT (6), ta nhận được BĐT (*). Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$ thuộc $\left(0\,;\frac{1}{2}\right]$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Mấu chốt để chứng minh BĐT (*) là BĐT (1). Bằng cách xuất phát từ BĐT:

Với $x, y \in \left(0;\frac{k}{2}\right]$, $(k>0)$ ta luôn có

$$\left(\frac{x+y}{2k-x-y}\right)^2 \geq \frac{xy}{(k-x)(k-y)}.$$

Bạn *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An** đã chứng minh BĐT (*) và nêu ra bài toán tổng quát sau:

Cho n số $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc $\left(0;\frac{k}{2}\right]$ (với $k > 0$, $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$), thì ta có BĐT

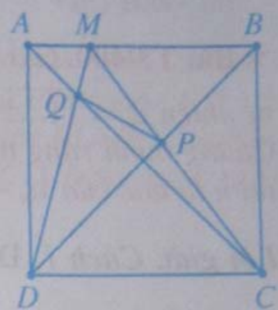
$$\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{nk-x_1-x_2-...-x_n}\right)^n \geq \frac{x_1x_2...x_n}{(k-x_1)(k-x_2)...(k-x_n)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2) Ngoài bạn *Quân*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nam Định:** *Trần Đại Tân*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Đức*, 8C, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/400.** *Cho hình vuông ABCD cạnh a, M là điểm tùy ý trên cạnh AB ($M \neq A, M \neq B$). Nối MC cắt BD tại P, MD cắt AC tại Q. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD.*



Lời giải. Ta thấy

$S_{MCD} = \frac{1}{2}a^2$ và

$\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{MD}{MQ}.\frac{MC}{MP}$ (*).

Vì $AB // CD$ nên theo định lí Thales, ta có các kết quả sau đây :

$$\frac{MD}{MQ} = 1 + \frac{QD}{MQ} = 1 + \frac{DC}{AM} = \frac{AM+a}{AM};$$

$$\frac{MC}{MP} = 1 + \frac{PC}{MP} = 1 + \frac{DC}{MB} = \frac{MB+a}{MB}.$$

Thay vào (*) ta được

$$\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{(AM+a)(MB+a)}{AM.MB}$$

$$= \frac{AM.MB + a(AM+MB) + a^2}{AM.MB} = 1 + \frac{2a^2}{AM.MB}$$

$$\geq 1 + \frac{2a^2}{\left(\frac{AM+MB}{2}\right)^2} = 9.$$

Do đó $S_{MPQ} \leq \frac{1}{9}S_{MDC} = \frac{1}{2}a^2.\frac{1}{9} = \frac{1}{18}a^2$.

Từ đó $S_{CPQD} = S_{MCD} - S_{MPQ}$

$$\geq \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{18}a^2 = \frac{4}{9}a^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = MB$ hay M là trung điểm của AB. Từ đó tam giác MPQ có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{18}a^2$ và tứ giác $CPQD$ có diện tích nhỏ nhất là $\frac{4}{9}a^2$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Bạn *Lại Hồng Hạnh*, 9A$_2$, THCS Trần Phú, Phủ Lý, **Hà Nam** đưa ra một mở rộng hay cho bài toán bằng cách thay giả thiết *ABCD* là hình bình hành.

... Thị Khánh Linh, Lê Tùng Lâm, ...hong; *Nguyễn Thị Thơm, Hoàng Minh Phương*, $9A_1$, THCS Yên Lạc; **Nghệ An**: *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; *Nguyễn Tất Khánh, Lê Hồng Đức, Trương Công Phú*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Tp Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Huy*, $9A_6$, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Dũng*, $9A_3$, THCS Lâm Thao.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/400. *Giải phương trình*

$$25x + 9\sqrt{9x^2 - 4} = \frac{2}{x} + \frac{18x}{x^2+1}.$$

Lời giải. Điều kiện $|x| \ge \frac{2}{3}$.

• Với $x \ge \frac{2}{3}$, PT đã cho tương đương với

$$25 + \frac{9\sqrt{9x^2-4}}{x} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2+1} \qquad (1)$$

Dễ thấy PT (1) có VT > 25, và do $x \ge \frac{2}{3}$, ta có $\text{VP} \le \frac{9}{2} + \frac{162}{13} < 25$ nên PT đã cho vô nghiệm.

• Với $x \le -\frac{2}{3}$, PT đã cho tương đương với

$$25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2+1} \qquad (2)$$

Đặt $\frac{1}{x^2} = t \left(0 < t \le \frac{9}{4}\right)$, PT (2) trở thành

$$25 - 9\sqrt{9-4t} = 2t + \frac{18t}{1+t}$$

$$\Leftrightarrow 9 - 9\sqrt{9-4t} = 2t + \frac{18t}{1+t} - 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1} = \frac{2(t-2)(t+4)}{t+1}$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} - \frac{t+4}{t+1}\right) = 0 \qquad (3)$$

Lưu ý rằng với $0 < t \le \frac{9}{4}$ có $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} \ge \frac{18}{4}$

và $\frac{t+4}{t+1} = 1 + \frac{3}{t+1} < 4 < \frac{18}{4}$

nên $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} - \frac{t+4}{t+1} > 0$.

Vậy (3) $\Leftrightarrow t = 2$. Suy ra $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (vì $x < 0$).

Kết luận. PT đã cho có một nghiệm $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

➤**Nhận xét.** 1) Bằng phương pháp lũy thừa, một số bạn đưa về giải PT bậc cao sau:

$$25x^8 + 221x^6 + 39x^4 - 76x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-1)(13x^6 + 117x^4 + 78x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Một số bạn sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của hàm số, từ đó suy ra nghiệm của bài toán. Tuy nhiên, sử dụng cách này phức tạp và lời giải không gọn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

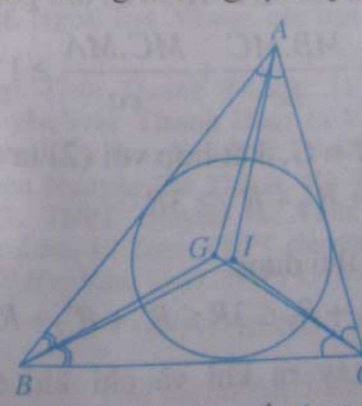
Bắc Giang: *Nguyễn Thế Hiệp*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Thanh Hoá:** *La Hồng Quân*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Đồng Tháp:** *Âu Anh Minh*, 10T, THPT TP. Cao Lãnh; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 10C1, THPT Xuân Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Ninh*, 12CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hậu Giang:** *Đường Ngọc Lan*, 11 Hoá, THPT chuyên Vị Thanh; **Kiên Giang:** *Trương Hữu Vạn Lộc*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/400. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I và trọng tâm là G. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB. Gọi R'_1, R'_2, R'_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng*

$$R'_1 + R'_2 + R'_3 \ge R_1 + R_2 + R_3.$$

Lời giải. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Áp dụng định lí sin cho các tam giác IBC và ABC ta có

$$R_1 = \frac{a}{2\sin\widehat{BIC}} = \frac{2R\sin A}{2\sin\frac{B+C}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Tương tự $R_2 = 2R\sin\dfrac{B}{2}$; $R_3 = 2R\sin\dfrac{C}{2}$.

Từ đó $R_1 + R_2 + R_3$

$$= 2R\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \le 3R \qquad (1)$$

Mặt khác $S_{GBC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$ nên $\dfrac{GB.GC.a}{4R'_1} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{abc}{4R}$

suy ra $\dfrac{R'_1}{3R} = \dfrac{GB.GC}{bc}$.

Tương tự $\dfrac{R'_2}{3R} = \dfrac{GC.GA}{ca}$; $\dfrac{R'_3}{3R} = \dfrac{GA.GB}{ab}$. Vậy

$$\frac{R'_1+R'_2+R'_3}{3R} = \frac{GB.GC}{bc}+\frac{GC.GA}{ca}+\frac{GA.GB}{ab} \quad (2)$$

Với các số thực x, y, z và với mọi điểm M trên mặt phẳng chứa tam giác ABC, ta có

$\left(x.\overline{MA}+y.\overline{MB}+z.\overline{MC}\right)^2 \ge 0$, suy ra

$$x^2.MA^2+y^2.MB^2+z^2.MC^2+xy(MA^2+MB^2-AB^2)$$
$$+xz(MA^2+MC^2-AC^2)+yz(MB^2+MC^2-BC^2)\ge 0$$

hay $(x+y+z)(xMA^2+y.MB^2+z.MC^2)$

$$\ge a^2yz+b^2xz+c^2xy \qquad (3)$$

Chọn $x=\dfrac{a}{MA}; y=\dfrac{b}{MB}; z=\dfrac{c}{MC}$. Từ (3) có

$$\left(\frac{a}{MA}+\frac{b}{MB}+\frac{c}{MC}\right)(a.MA+b.MB+c.MC)$$
$$\ge abc\left(\frac{a}{MB.MC}+\frac{b}{MC.MA}+\frac{c}{MA.MB}\right).$$

Nhân cả hai vế với $MA.MB.MC$, thu gọn ta được

$$\frac{MA.MB}{ab}+\frac{MB.MC}{bc}+\frac{MC.MA}{ca}\ge 1 \qquad (4)$$

Từ (4) cho $M \equiv G$, kết hợp với (2) ta thấy

$$R'_1+R'_2+R'_3 \ge 3R \qquad (5)$$

Từ (1) và (5) thu được

$$R_1+R_2+R_3 \le 3R \le R'_1+R'_2+R'_3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv I$ và $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{3}{2}$, hay tam giác ABC đều. ❒

➢**Nhận xét.** Tất cả các bài giải gửi đến Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Lê Đình Vương*, 11A Toán, THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Xuân Việt*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, 10A1, THPT TTr. Lâm Thao; **Yên Bái:** *Nguyễn Trung Đăng, Phạm Đức Tuấn*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** *Đỗ Thanh Tùng*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Trần Quang Thanh*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Nhung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 10A1, *Nguyễn Thành Đạt*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, *Chu Quang Dần*, Xóm 8, Diễn Trường, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trường Sinh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Quý*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bến Tre:** *Võ Minh Trí*, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 12CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T8/400.** *Cho hàm số $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ $(0<a<b)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in(a;b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho*

$$\frac{2}{a-c}<\frac{f'(c)}{f(c)}<\frac{2}{b-c}.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$. Ta thấy $g(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đạo hàm

$$g'(x)=(x-a)(x-b)f'(x)+\left(2x-a-b\right)f(x)$$

trên khoảng $(a;b)$ và $g(a)=g(b)=0$.

Theo định lí Rolle, tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $g'(c)=0$.

Hay $(c-a)(c-b)f'(c)+\left(2c-a-b\right)f(c)=0$

$\Leftrightarrow (c-a)(c-b)f'(c)=\left(a-c+b-c\right)f(c)$.

Từ đó ta có $\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}$.

Mặt khác, vì $a<c<b$ nên $\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-c}$.

Do đó $\dfrac{2}{a-c}<\dfrac{f'(c)}{f(c)}<\dfrac{2}{b-c}$ (đpcm). ❒

➢**Nhận xét.** Lời giải trên không phức tạp nhưng khó ở chỗ đưa ra hàm số $g(x)$. Các bạn sau có lời giải tốt:

Quảng Nam: *Phạm Tuấn Anh*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Nguyễn Phước Toàn*, 11/5, THPT

... Phú Ninh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Anh Sinh*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/400. *Cho dãy số (a_n) $(n=1, 2,...)$ thỏa mãn $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1+\dfrac{1}{a_n+1}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $a_1^2+a_2^2+...+a_{2010}^2 < 4020$.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Ngọc Thiện*, 11A1, THPT Thanh Miện I, **Hải Dương).**

Từ giả thiết ta thấy $a_n \geq 1$, với mọi $n\geq 1$.

Ta có *công thức "lùi"* sau

$$a_{n+1}^2-2=\left(1+\frac{1}{a_n+1}\right)^2-2=\frac{2-a_n^2}{(a_n+1)^2}.$$

Bởi vậy $a_{n+1}^2 > 2 \Leftrightarrow a_n^2 < 2$.

Do $a_1 = 1$ suy ra $a_n^2 < 2$ nếu n lẻ; $a_n^2 > 2$ nếu n chẵn và với mọi n lẻ thì

$$a_{n+1}^2-2=\frac{2-a_n^2}{(a_n+1)^2} < 2-a_n^2 \Rightarrow a_n^2+a_{n+1}^2 < 4.$$

Do đó $a_1^2+a_2^2+...+a_{2010}^2$

$=\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(a_3^2+a_4^2\right)+...+\left(a_{2009}^2+a_{2010}^2\right)$

$< 1005.4 = 4020.$

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. □

➤**Nhận xét.** Nhiều bạn học sinh đã phát hiện ra bản chất của bài toán: Với mọi $m\in\mathbb{N}$, $a_{2m+1} < \sqrt{2} < a_{2m+2}$ và $a_{2m+1}^2+a_{2m+2}^2 < 4$ bằng nhiều cách chứng minh khác nhau. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, *Phạm Huy Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Tự nhiên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Vũ Nhật Khánh, Lương Đức Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Lê Thị Thanh Nga*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh, Trần Thị Hồng Nhung*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Đinh Thị Nho*, 11T, THPT chuyn Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Lâm*, 11T, *La Hồng Quân*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Cao Xuân Bang*, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; *Nguyễn Văn Hoàng, Lê Đình Tuấn*, 11T7, THPT Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lê Tuấn Dũng*, 11T2, THPT chuyên; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Lâm*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Tiến*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/400. *Cho tập hợp $A\subset\mathbb{R}$, ta định nghĩa tập $A+1=\{a+1 \mid a\in A\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của tập $\{1, 2, ..., n\}$ $(n\geq 1, n\in\mathbb{N})$ sao cho $A\cup(A+1)=\{1,2,...,n\}$?*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Thị Hồng Nhung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định).**

Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $A_n=\{A \mid A\cup(A+1)=\{1, 2, 3,...,n\}\}$ và $S_n=|A_n|$, dễ thấy $S_1=0$, $S_2=1$.

Xét $A_{n+1}=\{A \mid A\cup(A+1)=\{1,2,...,n+1\}\}$, $n\geq 2$.

• Ta thấy $n+1\notin A$, vì nếu $n+1\in A$ thì $n+2\in A+1 \Rightarrow n+2\in\{1,2,...,n+1\}$. Vô lí.

• Ta cũng có $n\in A$, vì nếu $n\notin A$ thì $n+1\notin A+1 \Rightarrow n+1\notin\{1,2,...,n+1\}$.

Với mỗi tập $A\in A_{n+1}$, ta xét tập $B=A\setminus\{n\}$. Khi đó $B\subset\{1,2,...,n-1\}$.

Từ đó $B+1=A+1\setminus\{n+1\}$.

$$\text{Vậy } A\in A_{n+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B\cup(B+1)=\{1,2,...n\} & (1)\\ B\cup(B+1)=\{1,2,...,n-1\} & (2)\end{array}\right.$$

Số các tập B thỏa mãn (1) là S_n.

Số các tập B thỏa mãn (2) là S_{n-1}.

Vậy ta có $S_{n+1}=S_n+S_{n-1}$; $S_1=0$; $S_2=1$.

Từ đó ta tìm được

$$S_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right). \square$$

➤**Nhận xét.** Ngoài bạn *Nhung*, các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hải Dương: *Trần Quang Thanh*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Yên Bái:** *Lê Minh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** *Lê Tuấn Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Lâm*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Võ Huy Vân*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu I.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T11/400. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:*

Với mọi $x, y\in\mathbb{R}^+$, ta luôn có

$$f(x).f(y)=\beta.f(x+yf(x)) \qquad (1)$$

(với $\beta\in\mathbb{R}, \beta>1$ cho trước).

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Chí Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**).

Nếu $f(x) \equiv c$ thỏa mãn (1) thì $c = \beta$.

Ta chứng minh $f(x) \geq 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^+$ mà $f(x_0) \in (0\,;1)$ thì khi thay $x = x_0,\ y = \dfrac{x_0}{1-f(x_0)}$ vào (1), ta được

$$f(x_0).f\left(\frac{x_0}{1-f(x_0)}\right) = \beta f\left(\frac{x_0}{1-f(x_0)}\right).$$

Suy ra $f(x_0) = \beta > 1$, vô lí.

Tiếp theo, ta chứng minh $f(x) \geq \beta$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Thật vậy, giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}^+$ mà $f(y_0) \in (1\,;\beta)$ thì ta xét dãy số

$$x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + y_0.f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta thu được

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + y_0.f(x_n))$$
$$= \frac{f(y_0)}{\beta}.f(x_n) = ... = \left(\frac{f(y_0)}{\beta}\right)^n.f(x_1).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(y_0)}{\beta}\right)^n = 0$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$, mâu thuẫn với $f(x) \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Kết hợp với (1), suy ra

$$f(x) \leq f(x + yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad (2)$$

tức là $f(x)$ là hàm tăng (không giảm) trên $\mathbb{R}^+$.

Giả sử $f(x) > \beta$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ thì $f(x)$ là hàm đồng biến (tăng ngặt) trên $\mathbb{R}^+$.

Trong (1) đổi vai trò x và y, ta nhận được

$$f(x + yf(x)) = f(y + xf(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hay $\quad x + yf(x) = y + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hay $f(x) = \alpha x + 1$. Với mọi hằng số α, hàm này không thỏa mãn (1).

Vậy tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}^+$ để $f(x_1) = \beta$.

Do $f(x)$ không giảm nên $f(x) \equiv \beta$ với $x \in (0; x_1]$.

Trong (1) thay $x = x_1,\ y = x_1$, ta thu được $\beta = f((\beta+1)x_1)$.

Lập luận tương tự, ta thu được

$$f(x) \equiv \beta, \forall x \in [x_1; (\beta+1)x_1].$$

Tiếp tục quá trình này, theo nguyên lí quy nạp, ta thu được $f(x) \equiv \beta$.

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện (1).

Kết luận. Hàm duy nhất thỏa mãn bài toán là $f(x) = \beta, x \in \mathbb{R}^+$. ❐

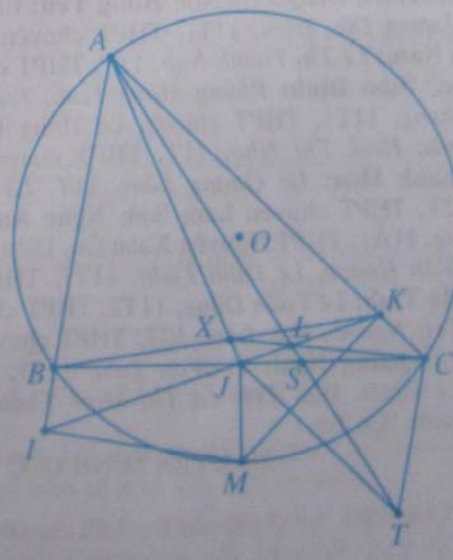
➤**Nhận xét.** Đây là bài phương trình hàm thuộc loại khó, không sử dụng đến tính liên tục. Có rất nhiều lời giải gửi đến tòa soạn đã giải sai vì quan niệm $\mathbb{R}^+$ chứa điểm 0. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Lê Đình Vượng*, 11A, THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Trần Quang Thanh, Mạc Lưu Phong*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Quảng Trị:** *Võ Thị Hồng Hạnh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/400. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn và M là điểm chính giữa của cung BC. Gọi I, J, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB, BC, CA ; X là giao điểm của BK và AJ; L là giao điểm của CX và IJ. Vẽ tia Jy vuông góc với MK cắt AL tại T. Chứng minh rằng CT vuông góc với IM.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tiến Hoàng*, 10 A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**).



$\ldots LT$. Theo kết quả về đường thẳng Simson thì ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Từ định lí Ceva cho tam giác AJC với sự đồng quy của AS, CX, JK, ta có

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}\cdot\frac{\overline{XJ}}{\overline{XA}}\cdot\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}}=-1 \qquad (1)$$

Từ định lí Menelaus cho tam giác AJC với sự thẳng hàng của B, X, K, ta có

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}}\cdot\frac{\overline{XJ}}{\overline{XA}}\cdot\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}}=1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), chú ý rằng J là trung điểm của BC, suy ra $\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}=-\frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}}=-2.$

Từ đó ta có $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}=-2$ (3)

Mặt khác, vì $JT\perp MK$; $AC\perp MK$ nên $JT // AC$.

Vậy theo định lí Thales $\frac{\overline{SA}}{\overline{ST}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{ST}}$.

Từ đó lại theo định lí Thales, suy ra $CT // AB$.

Với chú ý rằng $IM\perp AB$, ta có $IM\perp CT$. □

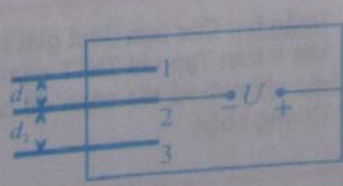
➢**Nhận xét.** 1) Thay việc sử dụng các định lí Ceva, Menelaus, khá nhiều bạn sử dụng kết quả $A(BLJC)$ là chùm điều hoà.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

Hà Nam: *Lê Thị Thanh Nga*, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Nam Định:** *Dương Mạnh Hà*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Đậu Hồng Quân* 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, *Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Lê Mậu Thành*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Hồ Đông Triều*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Võ Văn Quang*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** *Ong Thế Phương*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

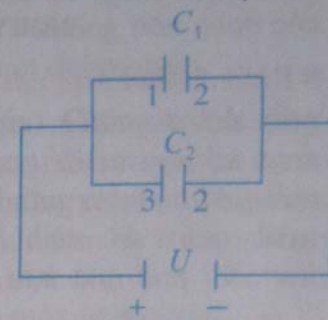
NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/400.** *Ba tấm kim loại có diện tích bằng nhau, được đặt song song và đối diện nhau trong không khí. Các tấm kim loại này được nối với hiệu điện thế U như hình vẽ. Khoảng cách giữa các tấm ngoài và tấm giữa là d_1 và d_2. Hãy xác định lực điện tác dụng lên tấm giữa nếu khoảng cách giữa các tấm nhỏ hơn nhiều so với kích thước các tấm.*



Hình 1

Lời giải. Từ sơ đồ ở đề bài (hình 1) ta có thể chuyển thành sơ đồ mạch tụ điện tương đương như hình 2.



Hình 2

Điện dung của các tụ điện tương ứng là

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1};\ C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Điện tích tương ứng của các tụ điện là

$$Q_1=C_1U=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}U;\ Q_2=C_2U=\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}U.$$

Do hai tụ mắc song song nên có hiệu điện thế chung. Cường độ điện trường do tấm trên và tấm dưới gây ra ở hai phía của tấm giữa là

$$E_1=\frac{U}{d_1};\ E_2=\frac{U}{d_2}.$$

Chú ý rằng, cường độ điện trường này là do điện tích của hai bản tụ gây ra. Do hai bản của tụ mang điện tích có độ lớn như nhau, nên mỗi bản cũng gây ra cường độ điện trường như nhau và bằng

$$E_1'=\frac{E_1}{2};\ E_2'=\frac{E_2}{2}.$$

Điện trường của tấm trên tác dụng lên mặt trên của tấm giữa một lực là

$$F_1=E_1'Q_1=\frac{U}{2d_1}\cdot\frac{\varepsilon_0 SU}{d_1}=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_1^2}.$$

Điện trường của tấm dưới tác dụng lên mặt dưới của tấm giữa một lực là

$$F_2=E_2'Q_2=\frac{U}{2d_2}\cdot\frac{\varepsilon_0 SU}{d_2}=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_2^2}.$$

Hai lực này ngược chiều nên hợp lực tác dụng lên tấm giữa bằng

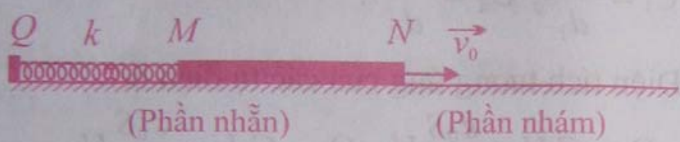
$$F=|F_2-F_1|=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2}\left|\frac{1}{d_2^2}-\frac{1}{d_1^2}\right|. \ □$$

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hóa: *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Nam Định:** *Phạm Quốc Lâm*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Như Bình*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Bùi Hữu Vinh*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Thái Bình:** *Phan Thị Mai*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Bình.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★ **Bài L2/400.** *Một cái thước thẳng MN đồng chất, tiết diện đều, có chiều dài L và khối lượng m tiếp xúc đều với một mặt phẳng nằm ngang. Mặt phẳng nằm ngang đó có hai phần, ngăn cách bởi một đường thẳng: Một phần tuyệt đối phẳng (nhẵn), một phần nhám (hệ số ma sát trượt giữa thước và phần này là μ). Ta bố trí một hệ như hình vẽ:*



Một lò xo nhẹ, đủ dài, có độ cứng k, một đầu gắn cố định vào tường tại Q, đầu còn lại nối với đầu M của thước. Lúc đầu thước và trục lò xo nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng phân cách, lò xo không biến dạng và thước nằm hoàn toàn trong phần nhẵn và điểm N vừa chạm vào đường phân cách. Tại một thời điểm, ta truyền cho thước một vận tốc $\vec{v}_0$ có phương dọc theo thước và chiều hướng vào phía mặt nhám. Tìm độ giãn cực đại của lò xo sau đó.

Lời giải. Trước hết, ta tìm độ lớn công của lực ma sát tác dụng lên thước từ thời điểm ban đầu đến khi thước dịch chuyển một đoạn $x(x \le L)$. Do lực ma sát thay đổi nên ta xét một dịch chuyển rất nhỏ d*x* sao cho lực ma sát trong dịch chuyển đó không đổi. Ta có

$$\mathrm{d}A = F_{ms}.\mathrm{d}x = \frac{\mu mg}{L}x.\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow A_{ms} = \int \mathrm{d}A = \int_0^x \frac{\mu mg}{L}x.\mathrm{d}x = \frac{\mu mg}{2L}x^2.$$

Trở lại bài toán, do ban đầu lò xo không biến dạng nên độ dãn của lò xo bằng độ dịch chuyển của thước. Tùy thuộc vào độ lớn của $\vec{v}_0$, có thể xảy ra hai trường hợp:

• *Trường hợp 1.* Độ giãn cực đại *A* của lò xo nhỏ hơn hoặc bằng chiều dài *L* của thước.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{kA^2}{2} = \frac{\mu mg}{2L}A^2 \Rightarrow A = v_0\sqrt{\frac{m}{k + \frac{\mu mg}{L}}}.$$

Điều kiện xảy ra trường hợp này là

$$A \le L \Rightarrow v_0 \le L\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\mu g}{L}}.$$

• *Trường hợp 2.* Độ giãn cực đại *A* của lò xo lớn hơn *L*. Công của lực ma sát có giá trị là

$$A_{ms} = \frac{\mu mg}{2L}L^2 + \mu mg(A - L)$$
$$= \frac{\mu mg}{2}L + \mu mg(A - L).$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{kA^2}{2} = A_{ms} = \frac{\mu mg}{2}L + \mu mg(A - L)$$
$$\Leftrightarrow kA^2 + 2\mu mgA - (mv_0^2 + \mu mgL) = 0.$$

Giải phương trình này, loại bỏ nghiệm âm ta được

$$A = \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \frac{m(v_0^2 + \mu gL)}{k}} - \frac{\mu mg}{k}.$$

Điều kiện xảy ra là $v_0 > L\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\mu g}{L}}$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Lê Quang Trung* 12 Lí THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng, Lê Văn Đức*, 11T7, THPT Đô Lương I; *Nguyễn Hữu Phong* 10A2, THPT Quỳnh Lưu I; **Vĩnh Phúc:** *Lê Tiến Thắng*, 12A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** *Bùi Thu Thủy*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Bến Tre:** *Liêu Khắc Vũ*, 11 Lí, THPT chuyên Bến Tre.

XUÂN QUANG

Nhắn tin: Các bạn đoạt giải trong Cuộc thi giải Toán – Vật lí trên Tạp chí THTT năm học 2009 – 2010 hãy gửi địa chỉ mới về tòa soạn để nhận Giải thưởng và Bằng Chứng nhận.

THTT

Suy ra $AK = CB = 8$ cm.

Từ đó $AK = 4$ cm.

Vậy $MN = \dfrac{6+4}{2} = 5$ (cm). ❐

Cuối cùng, mời các bạn luyện tập thông qua các bài toán sau.

1. Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích S. Lần thứ nhất ta lấy A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, ta được hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Lần thứ hai ta lấy A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trung điểm của A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, ta được hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$. Cứ như vậy cho đến lần thứ mười, ta được hình bình hành $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$. Hỏi diện tích hình bình hành $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ bằng bao nhiêu lần S?

2. Hãy dựng hình bình hành $ABCD$, biết vị trí trung điểm của các cạnh AB, BC, CD lần lượt là E, F, G.

3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Chứng minh rằng tám điểm gồm bốn trung điểm của bốn cạnh của tứ giác, bốn chân đường vuông góc kẻ từ I xuống bốn cạnh của tứ giác cùng nằm trên một đường tròn.

4. (*Vòng tròn chín điểm*) Chứng minh rằng chín điểm gồm: ba trung điểm của ba cạnh một tam giác, ba chân đường cao kẻ từ ba đỉnh tam giác đến cạnh đối diện, ba trung điểm của ba đoạn thẳng nối trực tâm tam giác với mỗi đỉnh cùng nằm trên một đường tròn.

5. Cho tứ giác $ABCD$. Trên AB lấy hai điểm M và N sao cho $AM = MN = NB$. Trên BC lấy hai điểm P và Q sao cho $BP = PQ = QC$. Trên CD lấy hai điểm R và S sao cho $CR = RS = SD$. Trên DA lấy hai điểm K và I sao cho $DI = IK = KA$. MS cắt PK và QI theo thứ tự tại E và F. NR cắt PK và QI theo thứ tự tại H và K.

Chứng minh rằng $PH = HE = EK$ và $QG = GF = FI$.

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/404. Let x, y, z be real numbers such that $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ and

$$\frac{1}{x+\sqrt{x-1}}+\frac{2}{y+\sqrt{y-2}}+\frac{3}{z+\sqrt{z-3}}=12.$$

Find the maximum and minimum value of the function $f(x, y, z) = x + y + z$.

T10/404. Let (x_n) be a sequence given by $x_1 = \dfrac{5}{2}$ and

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n^3-12x_n+\frac{20n+21}{n+1}}\quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

Prove that the sequence (x_n) converges and find its limit.

T11/404. Find all functions $f:\mathbb{R}\to(0;2011]$ such that

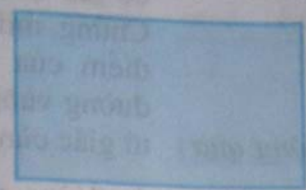
$$f(x)\leq 2011\left(2-\frac{2011}{f(y)}\right), \text{ for all } x>y.$$

T12/404. Given four points A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), no three of them are colinear and a point M so that A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) and M do not lie on the same circle. Let T_i be a triangle having A_j ($j = 1, 2, 3, 4$; $j \neq i$) as its vertices, C_i is the circle (or the line) passing through the feet of the projections through M onto three sides (or extended sides) of triangle T_i. Prove that C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) have a common point.

Translated by LE MINH HA

Giải trí toán học

Ghép hình con mèo



Hình 1

Hình 2

Để trang trí phòng cho buổi gặp gỡ đầu năm mới **TÂN MÃO**, bạn *Dần* dùng miếng bìa hình chữ nhật kích thước 24 × 40 (cm) (h. 1) cắt thành 9 mảnh rồi ghép tất các mảnh lại (không chờm lên nhau), tạo thành hình con Mèo (h. 2). Bạn có mấy cách cắt để ghép thành hình con Mèo? Biết rằng hai cách cắt coi là không khác nhau nếu chúng có các mảnh tương ứng bằng nhau từng đôi một.

ĐAN QUỲNH

Giải đáp bài: ĐỐ BẠN

(Đề đã đăng trên THTT số 399 tháng 9 năm 2010)

Trong câu *Ngày Đại lễ 1000 năm Thăng Long – Hà Nội đúng vào ngày Chủ nhật 10 tháng 10 năm 2010*, có nhiều cách viết mỗi số bởi cùng một số chữ số như dưới đây

$$1000=\left(\frac{33-3}{3}\right)^3=\left(3\times3+\frac{3}{3}\right)^3=\left(3!+3+\frac{3}{3}\right)^3.$$

$$1000=4\left(4^4-4-\sqrt{4}\right)+4-4$$

$$=4^4\times4-(4\times4+4+4)$$

$$=4^4\times4-(4\times4+4\sqrt{4})=\left(4\times4-4-\sqrt{4}\right)^{4-\frac{4}{4}}$$

$$=4(4+4+\sqrt{4})\left(4!+\frac{4}{4}\right)=4\left(4^4-4-\frac{4+4}{4}\right)$$

$$=\frac{4^{4+\sqrt{4}}}{4}-4(4+\sqrt{4})=\left(\frac{44-4}{4}\right)^{4-\frac{4}{4}}=\frac{(4+4+\sqrt{4})^4}{4+4+\sqrt{4}}.$$

Có thể viết 1000 bởi ít chữ số 4 hơn như sau:

$$1000=4^4\times4-4!=4\left(4^4-4-\sqrt{4}\right).$$

$$10=\frac{8+8}{8}+8=\frac{88-8}{8};$$

$$10=\frac{77-7}{7};$$

$$2010=5(5\times5-5)(5\times5-5)+5+5$$

$$=(5\times5-5)(5+5)(5+5)+5+5$$

$$=5^5-(555+555+5)$$

$$=5^5-\frac{5555-5}{5}-5$$

$$=\frac{(55+5\times5)(5!+5)}{5}+5+5$$

$$=5\left(5(55+5\times5)+\frac{5+5}{5}\right)$$

$$=\frac{(5+5)^5}{5\times5+5\times5}+5+5.$$

Các bạn có nhiều cách giải, được nhận tặng phẩm là:

Nghệ An: *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương 1; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Cần Thơ:** *Nguyễn Long Phước Đường*, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Quảng Bình:** *Trần Quang Toản*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** *Trương Đình Sách*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Đức*, 8C, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

AN MINH