

Câu 1. (1,5 điểm). Cho $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - \frac{3}{2}$.

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

Câu 2. (1 điểm). Cho phương trình $2x^2 + 5x - 9 = 0$

- a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm.
b) Không giải phương trình, tính $N = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$.

Câu 3. (0,75 điểm). Quy tắc sau đây cho biết CAN, CHI của năm X nào đó.

- Để xác định CAN, ta tìm số dư r trong phép chia X cho 10 và tra vào bảng 1
- Để xác định CHI, ta tìm số dư s trong phép chia X cho 12 và tra vào bảng 2

Ví dụ: Năm 2020 có CAN là Canh, có CHI là Tý.

Bảng 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CAN	Canh	Tân	Nhâm	Quý	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ

Bảng 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CHI	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tí	Sửu	Dần	Mẹo	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi

- a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN CHI của năm 2023?
b) Lý Thái Tổ (Lý Công Uẩn) là vị vua đầu tiên đã mở nên triều đại Lý phồn thịnh trong suốt trong 200 năm. Ông lên ngôi vào năm Kỷ Dậu đầu thế kỷ XI. Em hãy cho biết ông lên ngôi vào năm nào?

Câu 4. (0,75 điểm). Với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, người ta tạo ra nhiều mẫu xe lăn đẹp và tiện dụng cho người khuyết tật. Công ty A đầu tư và sản xuất ra những chiếc xe lăn cho người khuyết tật với số vốn ban đầu là 450 000 000 đồng, chi phí để sản xuất ra 1 chiếc xe lăn là 2 000 000 đồng, giá bán ra mỗi chiếc là 3 500 000 đồng.

- a) Gọi x là số xe được sản xuất ra và y là tổng số tiền đã đầu tư (gồm vốn ban đầu và chi phí sản xuất). Hãy lập công thức y theo x .
b) Công ty A phải bán bao nhiêu chiếc xe mới thu hồi được vốn?

Câu 5. (1 điểm). Một cửa hàng bánh pizza có chương trình khuyến mãi giảm 70% cho bánh pizza thứ 2 cùng size có giá bằng hoặc thấp hơn pizza thứ nhất. Biết bánh pizza có giá ban đầu là 210 000 đồng.

- a) Hỏi nếu khách hàng mua 10 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?
- b) Cửa hàng có chương trình khuyến mãi thêm, nếu hóa đơn trên 2 000 000 đồng thì được giảm thêm 5% trên tổng số tiền phải trả. Hỏi nếu khách hàng mua 15 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?

Câu 6. (1 điểm). Một bồn nước hình trụ có bán kính đáy là $3m$, chiều cao là $4m$. Người ta đổ nước vào trong bồn sao cho chiều cao của nước bằng đúng một nửa chiều cao của bồn và tiếp tục đặt vào trong bồn một phao nước có dạng hình cầu bằng kim loại không thấm nước có bán kính là $50cm$ và chìm hoàn toàn trong nước.

- a) Hỏi khi đó mực nước trong bồn cao bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)?
- b) Sau đó, người ta lại bơm thêm nước vào bồn bằng một vòi có công suất chảy là $30,0024$ lít cho mỗi giây. Hỏi sau bao nhiêu phút thì bồn đầy nước (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 7. (1 điểm). Một công ty có 100 xe chở khách gồm hai loại, loại xe chở được 30 khách và loại xe chở được 50 khách. Nếu dùng tất cả số xe đó thì tối đa công ty chở một lần được 4300 khách. Hỏi mỗi loại công ty đó có mấy xe?

Câu 8. (3 điểm) Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp O ; R đường kính BC , trên cung nhỏ AC lấy điểm D , BD cắt AC tại E , từ E vẽ $EF \perp BC$ tại F .

- a) Chứng minh tứ giác $BAEF$ nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh DB là phân giác góc ADF .
- c) Gọi M là trung điểm EC . Chứng minh $DM.CA = CF.CO$.

----HẾT----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (1,5 điểm) Cho $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - \frac{3}{2}$.

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

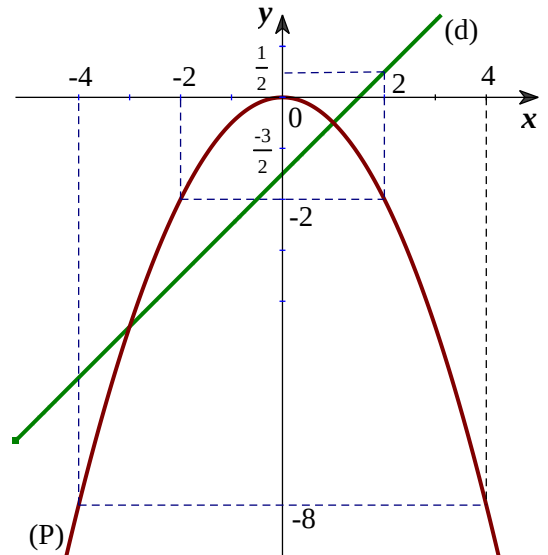
Lời giải

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

BGT:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

x	0	2
$y = x - \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$



- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{-1}{2}x^2 = x - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Thay $x=1$ vào $y = -\frac{1}{2}x^2$, ta được: $y = -\frac{1}{2}.1^2 = -\frac{1}{2}$.

Thay $x = -3$ vào $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2}.(-3)^2 = -\frac{9}{2}$.

Vậy $\left(1; -\frac{1}{2}\right); \left(-3; -\frac{9}{2}\right)$ là hai giao điểm cần tìm.

Câu 2. (1 điểm) Cho phương trình $2x^2 + 5x - 9 = 0$.

- a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm.

b) Không giải phương trình, tính $N = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$.

Lời giải

$$\text{Vì } \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.2.(-9) = 97 > 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lí Vi-et, ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } N = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$$

$$N = \frac{x_2 - 1 + x_1 - 1}{x_1 - 1 \cdot x_2 - 1} = \frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 - x_1 + x_2 + 1} = \frac{S - 2}{P - S + 1} = \frac{\frac{-5}{2} - 2}{\frac{-9}{2} - \frac{-5}{2} + 1} = \frac{9}{2}.$$

Câu 3. (0,75 điểm) Quy tắc sau đây cho biết CAN, CHI của năm X nào đó.

- Để xác định CAN, ta tìm số dư r trong phép chia X cho 10 và tra vào bảng 1
- Để xác định CHI, ta tìm số dư s trong phép chia X cho 12 và tra vào bảng 2

Ví dụ: Năm 2020 có CAN là Canh, có CHI là Tí.

Bảng 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CAN	Canh	Tân	Nhâm	Quý	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ

Bảng 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CHI	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tí	Sửu	Dần	Mẹo	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi

- Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN CHI của năm 2023?
- Lý Thái Tổ (Lý Công Uẩn) là vị vua đầu tiên đã mở nên triều đại Lý phồn thịnh trong suốt trong 200 năm. Ông lên ngôi vào năm Kỷ Dậu đầu thế kỷ 11. Em hãy cho biết ông lên ngôi vào năm nào?

Lời giải

- Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN CHI của năm 2023?

Vì $2023 : 10 = 202$ dư 3 nên sau khi tra vào bảng 1, ta được CAN là Quý.

Vì $2023 : 12 = 168$ dư 7 nên sau khi tra vào bảng 2, ta được CHI là Mẹo.

Vậy năm 2023 có CAN CHI là Quý Mẹo.

b) Em hãy cho biết ông lên ngôi vào năm nào?

Gọi X là năm Lý Thái Tổ lên ngôi.

Vì năm X ở thế kỷ 11 nên $1001 \leq X \leq 1100$

Tra vào bảng 1 ta được $r = 9$; tra vào bảng 2 ta được $s = 1$

Vì năm X là năm Kỷ Dậu nên:

$$X : 10 \text{ dư } 9 \Rightarrow X = 1019; 1029; 1039; 1049; 1059; 1069; 1079; 1089; 1099$$

$$X : 12 \text{ dư } 1 \Rightarrow X = 1069$$

Vậy Lý Thái Tổ lên ngôi vào năm 1069.

Câu 4. (0,75 điểm). Với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, người ta tạo ra nhiều mẫu xe lăn đẹp và tiện dụng cho người khuyết tật. Công ty A đầu tư và sản xuất ra những chiếc xe lăn cho người khuyết tật với số vốn ban đầu là 450 000 000 đồng, chi phí để sản xuất ra 1 chiếc xe lăn là 2 000 000 đồng, giá bán ra mỗi chiếc là 3 500 000 đồng.

a) Gọi x là số xe được sản xuất ra và y là tổng số tiền đã đầu tư (gồm vốn ban đầu và chi phí sản xuất). Hãy lập công thức y theo x .

b) Công ty A phải bán bao nhiêu chiếc xe mới thu hồi được vốn?

Lời giải

a) Hãy lập công thức y theo x .

Công thức y theo x là: $y = 2000000x + 450000000$ (đồng)

b) Công ty A phải bán bao nhiêu chiếc xe mới thu hồi được vốn?

Số tiền thu được khi bán x chiếc xe là: $3500000x$ (đồng)

Để công ty A thu hồi vốn thì $3500000x = 2000000x + 450000000$

$$\Leftrightarrow 1500000x = 450000000$$

$$\Leftrightarrow x = 300$$

Vậy công ty A phải bán 300 chiếc xe mới thu hồi được vốn.

Câu 5. (1 điểm) Một cửa hàng bánh pizza có chương trình khuyến mãi giảm 70% cho bánh pizza thứ 2 cùng size có giá bằng hoặc thấp hơn pizza thứ nhất. Biết bánh pizza có giá ban đầu là 210 000 đồng.

- a) Hỏi nếu khách hàng mua 10 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?
- b) Cửa hàng có chương trình khuyến mãi thêm, nếu hóa đơn trên 2 000 000 đồng thì được giảm thêm 5% trên tổng số tiền phải trả. Hỏi nếu khách hàng mua 15 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?

Lời giải

- a) Hỏi nếu khách hàng mua 10 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?

Giá một bánh pizza sau khi được khuyến mãi 70% là:

$$210\,000 \cdot 1 - 70\% = 63\,000 \text{ (đồng)}.$$

Nếu khách hàng mua 10 bánh pizza thì phải trả tiền mua 5 bánh pizza với giá 210 000 đồng/bánh và trả tiền mua 5 bánh pizza còn lại với giá 63 000 đồng/bánh.

Số tiền khách hàng phải trả nếu mua 10 bánh pizza là:

$$5 \cdot 210\,000 + 5 \cdot 63\,000 = 2\,730\,000 \text{ (đồng)}.$$

- b) Hỏi nếu khách hàng mua 15 bánh pizza thì phải trả bao nhiêu tiền?

Nếu khách hàng mua 15 bánh pizza thì phải trả tiền mua 8 bánh pizza với giá 210 000 đồng/bánh và trả tiền mua 7 bánh pizza với giá 63 000 đồng/bánh.

Số tiền khách hàng phải trả nếu mua 15 bánh pizza mà chưa áp dụng chương trình khuyến mãi thêm là:

$$8 \cdot 210\,000 + 7 \cdot 63\,000 = 2\,121\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vì $2\,121\,000 > 2\,000\,000$ nên khách hàng trên được áp dụng chương trình khuyến mãi thêm là giảm 5% trên tổng số tiền phải trả.

Vậy số tiền khách hàng phải trả khi mua 15 bánh pizza là:

$$2\,121\,000 \cdot 1 - 5\% = 2\,014\,950 \text{ (đồng)}.$$

Câu 6. (1 điểm) Một bồn nước hình trụ có bán kính đáy là $3m$, chiều cao là $4m$. Người ta đổ nước vào trong bồn sao cho chiều cao của nước bằng đúng một nửa chiều cao của bồn và tiếp tục

đặt vào trong bồn một phao nước có dạng hình cầu bằng kim loại không thấm nước có bán kính là 50cm và chìm hoàn toàn trong nước.

- a) Hỏi khi đó mực nước trong bồn cao bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)?
- b) Sau đó, người ta lại bơm thêm nước vào bồn bằng một vòi có lưu lượng nước chảy là $30,0024$ lít cho mỗi giây. Hỏi sau bao nhiêu phút thì bồn đầy nước (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

- a) Hỏi khi đó mực nước trong bồn cao bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)?

Một nửa chiều cao của bồn bằng: $4 : 2 = 2 \text{ m}$.

Đổi: $50\text{cm} = 0,5\text{m}$.

Thể tích của phao nước là: $4\pi \cdot 0,5^2 = \pi \text{ m}^3$.

Chiều cao của mực nước trong bồn cao là: $\frac{\pi}{\pi \cdot 3^2} + 2 = \frac{19}{9} \approx 2,111 \text{ m}$.

- b) Sau đó, người ta lại bơm thêm nước vào bồn bằng một vòi có công suất chảy là $30,0024$ lít cho mỗi giây. Hỏi sau bao nhiêu phút thì bồn đầy nước (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Thể tích phần không chứa nước trong bồn là: $\pi \cdot 3^2 \cdot \left(4 - \frac{19}{9}\right) = 17\pi \text{ m}^3$.

Đổi: $30,0024 \text{ lít/giây} = 1,800144 \text{ m}^3/\text{phút}$.

Bồn đầy nước sau: $17\pi : 1,800144 \approx 30$ (phút).

Câu 7. (1 điểm) Một công ty có 100 xe chở khách gồm hai loại, loại xe chở được 30 khách và loại xe chở được 50 khách. Nếu dùng tất cả số xe đó thì tối đa công ty chở một lần được 4300 khách. Hỏi mỗi loại công ty đó có mấy xe?

Lời giải

Gọi x, y (xe) là số xe loại chở được 30 khách và loại chở được 50 khách. $x, y \in \mathbb{N}$

Vì công ty có 100 xe chở khách nên ta có: $x + y = 100$. 1

Vì nếu dùng tất cả số xe thì tối đa công ty chở một lần được 4300 khách nên ta có:

$$30x + 50y = 4300. \quad 2$$

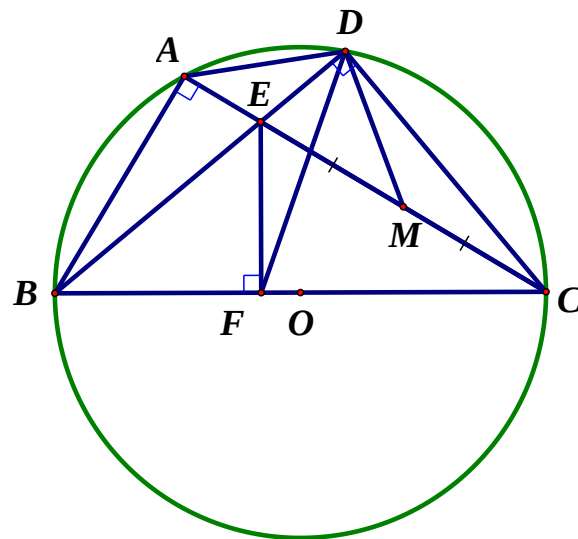
Từ 1 và 2, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 30x + 50y = 4300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 65 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy công ty có 35 xe loại chở được 30 khách và 65 xe loại chở được 50 khách.

Câu 8. (3 điểm) Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp O ; R đường kính BC , trên cung nhỏ AC lấy điểm D , BD cắt AC tại E , từ E vẽ $EF \perp BC$ tại F .

- Chứng minh tứ giác $BAEF$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh DB là phân giác góc ADF .
- Gọi M là trung điểm EC . Chứng minh $DM \cdot CA = CF \cdot CO$.

Lời giải



- Chứng minh tứ giác $BAEF$ nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác $BAEF$, ta có:

$$\angle BFE = 90^\circ \text{ (} EF \perp BC \text{ tại } F \text{)}$$

$$\angle BAE = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa } O \text{)}$$

$$\Rightarrow \angle BFE + \angle BAE = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BAEF$ nội tiếp (Tứ giác có hai góc đối bù nhau)

- Chứng minh DB là phân giác góc ADF .

Xét tứ giác $CDEF$, ta có:

$$\angle CDE = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa } O \text{)}$$

$$\angle BFE = 90^\circ \text{ (cm câu a)}$$

$$\Rightarrow BFE = CDE$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDEF$ nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

$$\Rightarrow EDF = BCA$$

Mà $BCA = ADB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của O)

$$\text{Nên } EDF = ADB$$

$\Rightarrow DB$ là tia phân giác của góc ADF .

c) Chứng minh $DM.CA = CF.CO$.

Xét $\triangle CDE$ vuông tại D , ta có: DM là đường trung tuyến (M là trung điểm của CE)

$$\Rightarrow DM = \frac{1}{2}CE \Rightarrow CE = 2DM .$$

Xét $\triangle CEF$ và $\triangle CBA$, ta có:

C là góc chung

$$CFE = CAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CBA \quad g - g$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} \quad (\text{tỉ số đồng dạng})$$

$$\Rightarrow CE.CA = CF.CB$$

Mà $CE = 2DM$ và $CB = 2CO$ (BC là đường kính của O)

$$\text{Nên } 2DM.CA = CF.2CO$$

$$\Rightarrow DM.CA = CF.CO .$$

----HẾT----