HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
KHU VỰC DUYÊN HẢI, ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG**

**ĐỀ THI ĐỀ XUẤT**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**
**LẦN THỨ XIV**
**MÔN THI: TOÁN – KHỐI 10**
**Ngày thi 14/07/2023**
**Thời gian làm bài 180 phút**
*(Đề này có 5 câu; gồm 01 trang)*

**Câu 1.** **(4,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+xy-7y^2=-1 \\ y\left(\sqrt{xy+2y^2}-\sqrt{3y^2-xy}\right)=1 \end{cases}$

**Câu 2.** **(5,0 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$, điểm $C$ nằm ngoài $(O)$, gọi $D$ là hình chiếu của $C$ lên $AB$ biết $D$ nằm giữa $A$ và $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là giao điểm của $(O)$ với $CA,CB$. Gọi $E$ là giao điểm của $DM$ với đường tròn $(ADC)$ và gọi $F$ là giao điểm của $DN$ với đường tròn $(BDC)$ (với $E$ và $F$ khác $D$).

a) Gọi $d$ là đường thẳng đi qua điểm $C$ và vuông góc với $EF$. Chứng minh $d$ qua tâm đường tròn $(DMN)$.

b) Chứng minh ba đường thẳng $d,AF,BE$ đồng quy.

**Câu 3.** **(3,0 điểm)** Cho số nguyên tố $p>3$, xét số $k=\dfrac{25^p-1}{24}$.

a/ Chứng minh $k$ là hợp số lẻ và $k$ không chia hết cho 5.

b/ Chứng minh $5^{k-1}\equiv 1\pmod{k}$.

**Câu 4.** **(4,0 điểm)** Cho ba số thực $a,b,c$ thỏa $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^2(3a-1)^2+b^2(3b-1)^2+c^2(3c-1)^2\ge 6\left(a^4+b^4+c^4-1\right)$$

**Câu 5.** **(4,0 điểm)**

a/ Cho hai số nguyên dương $a,b$; xét các số có dạng $a+b;a+2b;a+3b;...;a+nb;...$. Chứng minh rằng trong các số đó, luôn tồn tại ít nhất một số mà 4 chữ số đầu tiên của nó viết trong hệ thập phân là 2023.

b/ Một tập hợp các số nguyên dương khác nhau được gọi là tập "*ôn hòa*" nếu mọi phần tử của tập đó trừ hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất đều là trung bình cộng của hai phần tử khác của tập hợp. Trong tập "*ôn hòa*' có 16 phần tử mà phần tử lớn nhất là 2023. Hãy xác định tổng nhỏ nhất có thể của tất cả các phần tử của tập hợp.

**==== Hết ====**

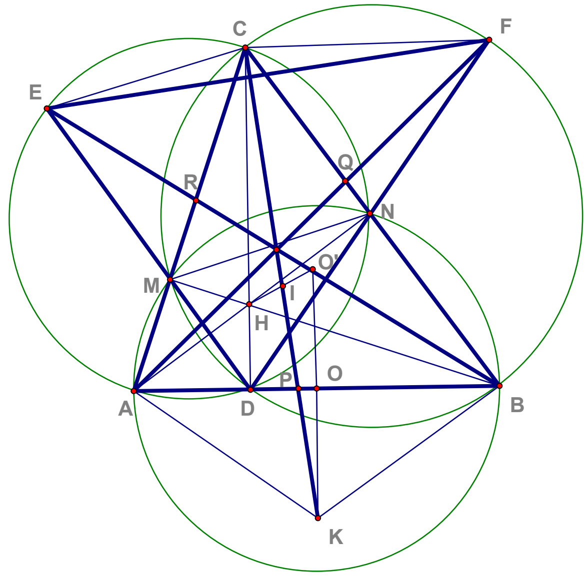
**Họ tên người ra đề:** **1/ Nguyễn Văn Thời.** **Điện thoại: 0905605911**
**2/ Đinh Thị Duy Phương.** **Điện thoại: 0989446606**

| HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI, ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ | KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LẦN THỨ XIV MÔN THI: TOÁN – KHỐI 10 Ngày thi 14/07/2023 |
|---|---|
| **HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI ĐỀ XUẤT** | *(Hướng dẫn chấm này gồm có 07 trang)* |

**Câu 1. (4 điểm)**

| Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+xy-7y^2=-1 & (1) \\ y\left(\sqrt{xy+2y^2}-\sqrt{3y^2-xy}\right)=1 & (2) \end{cases}$ | **Điểm** |
|---|---|
| Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy+2y^2>3y^2-xy\ge 0 \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le xy+2y^2<3y^2-xy \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2xy>y^2\ge \dfrac{xy}{3} \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2y^2\le xy<\dfrac{y^2}{2} \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{3}\le y<2x \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} y<2x \\ y\le -\dfrac{x}{2} \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right.$ | **0.5** |
| Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được: $$x^2+xy-7y^2+y\left(\sqrt{xy+2y^2}-\sqrt{3y^2-xy}\right)=0$$ Từ (2) suy ra $y\ne 0$ <br> Chia cả hai vế của PT cho $y^2$,ta được: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}-7+\sqrt{\dfrac{x}{y}+2}-\sqrt{3-\dfrac{x}{y}}=0$ | **1.0** |
| Đặt $\dfrac{x}{y}=t\Rightarrow t\in[-2;3]$ ta được phương trình: <br> $t^2+t-7+\sqrt{t+2}-\sqrt{3-t}=0$ <br> $\Leftrightarrow t^2+t-6=\left(2-\sqrt{t+2}\right)+\left(\sqrt{3-t}-1\right)$ | **1,0** |
| $\Leftrightarrow (t-2)(t+3)=\dfrac{2-t}{2+\sqrt{t+2}}+\dfrac{2-t}{\sqrt{3-t}+1}$ <br> $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t+3=\dfrac{-1}{2+\sqrt{t+2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{3-t}+1} \quad (3) \end{array}\right.$ <br> Với $t\in[-2;3]$ thì (3) vô nghiệm | **0,75** |
| Với $t=2$ suy ra $x=2y$, thay vào PT (1): $y^2=1\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y=1\Rightarrow x=2 & (tm) \\ y=-1\Rightarrow x=-2 & (ktm) \end{array}\right.$ <br> Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(2;1)$. | **0.75** |

**Câu 2. (5 điểm)**

| | |
|---|---|
| Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$, điểm $C$ nằm ngoài $(O)$, gọi $D$ là hình chiếu của $C$ lên $AB$ biết $D$ nằm giữa $A$ và $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là giao điểm của $(O)$ với $CA,CB$. Gọi $E$ là giao điểm của $DM$ với đường tròn $(ADC)$ và gọi $F$ là giao điểm của $DN$ với đường tròn $(BDC)$ (với $E$ và $F$ khác $D$).<br>a) Gọi $d$ là đường thẳng đi qua điểm $C$ và vuông góc với $EF$. Chứng minh $d$ qua tâm đường tròn $(DMN)$.<br>b) Chứng minh ba đường thẳng $d,AF,BE$ đồng quy. | **Điểm** |
|  | |
| a/ Ta có AN, BM và CD là ba đường cao của tam giác ABC, nên chúng cũng là ba phân giác của tam giác DMN. Do đó ta có CM = CF, CN = CE suy ra NM = NF và MN = ME nên FN = NM = ME.<br>Gọi I và r là tâm và bán kính đường tròn (DMN). Ta có<br>$P_{E/(DMN)} = \overline{EM}.\overline{ED} = EI^2 - r^2 ; P_{F/(DMN)} = \overline{FM}.\overline{FD} = FI^2 - r^2$<br>$=> P_{E/(DMN)} - P_{F/(DMN)} = EI^2 - FI^2 = IE^2 - IF^2$ (1)<br>Lại có $P_{E/(DMN)} = \overline{EM}.\overline{ED} = \overline{EM}.\left(\overline{EM} + \overline{MD}\right) = EM^2 + \overline{EM}.\overline{MD}$ | **1,0** |
| Tương tự $P_{F/(DMN)} = FN^2 + \overline{FN}.\overline{ND}$ Mà EM = FN nên<br>$P_{E/(DMN)} - P_{F/(DMN)} = \overline{EM}.\overline{MD} - \overline{FN}.\overline{ND} = \overline{CM}.\overline{MA} - \overline{CN}.\overline{NB}$<br>$= \overline{CM}.\left(\overline{MC} + \overline{CA}\right) - \overline{CN}\left(\overline{NC} + \overline{CB}\right)$ | **0,75** |
| Mà $\overline{CM}.\overline{CA} = \overline{CN}.\overline{CB}$ do tứ giác AMNB nội tiếp. Suy ra:<br>$P_{E/(DMN)} - P_{F/(DMN)} = CN^2 - CM^2 = CE^2 - CF^2$ (2)<br>Từ (1) và (2) ta có $IE^2 - IF^2 = CE^2 - CF^2$ suy ra CI vuông góc với EF hay $d$ qua tâm I. (định lý 4 điểm) | **0,75** |

| | |
|---|---|
| b/ Gọi giao điểm của *d*, AF, BE lần lượt với AB, BC, CA là P, Q và R. Ta cần chứng minh CP, AQ và BR đồng quy, tức là cần chứng minh $\frac{PA}{PB}.\frac{QB}{QC}.\frac{RC}{RA}=1$<br>Gọi H là trực tâm tam giác ABC, gọi O' là tâm đường tròn (ABC), ta có đường tròn (DMN) chính là đường tròn Euler của tam giác ABC nên tâm I là trung điểm ủa O'H.<br>Gọi K là điểm đối xứng với O' qua BC, ta có O'K//= CH, nên K đối xứng với C qua I.<br>Do AC là đường kính của đường tròn (ACD) và CN = CE nên E và N đối xứng qua AC, tương tự M và F đối xứng qua BC. | **1,0** |
| Do đó ta có: $\widehat{ECA}=\widehat{NCA}=\widehat{AO'O}=\widehat{AKO}$ suy ra $\widehat{EAC}=\widehat{KAO}=\widehat{KAB}$ nên $\widehat{CAK}=\widehat{BAE}$ Tương tự ta cũng có: $\widehat{ABF}=\widehat{CBK}$ và $\widehat{BCE}=\widehat{ACF}$ (3)<br>Ta có<br>$\frac{PA}{PB}.\frac{QB}{QC}.\frac{RC}{RA}=\frac{S_{CAK}}{S_{CBK}}.\frac{S_{ABF}}{S_{ACF}}.\frac{S_{BEC}}{S_{BEA}}=\frac{AC.AK.\sin CAK}{BC.BK.\sin CBK}.\frac{BA.\mathrm{BF}.\sin ABF}{CA.\mathrm{CF}.\mathrm{sinACF}}.\frac{CB.\mathrm{CE}.\sin BCE}{\mathrm{AB}.\mathrm{AE}.\sin BAE}$ | **0,75** |
| => $\frac{PA}{PB}.\frac{QB}{QC}.\frac{RC}{RA}=\frac{\sin CAK}{\sin CBK}.\frac{\mathrm{BF}.\sin ABF}{\mathrm{CF}.\mathrm{sinACF}}.\frac{\mathrm{CE}.\sin BCE}{\mathrm{AE}.\sin BAE}$ do AK = BK<br>Ta có $\Delta CEA\sim\Delta CFB \Rightarrow \frac{CE}{AE}=\frac{CF}{BF}$ kết hợp với (3) ta được $\frac{PA}{PB}.\frac{QB}{QC}.\frac{RC}{RA}=1$. Theo định lý Ceva ta có ba đường thẳng CP, AQ và BR đồng quy hay *d*, AF và BE đồng quy. | **0,75** |

**Câu 3. (3 điểm )**

| | |
|---|---|
| Cho số nguyên tố $p>3$, xét số $k=\frac{25^p-1}{24}$.<br>a/ Chứng minh *k* là hợp số lẻ và *k* không chia hết cho 5.<br>b/ Chứng minh $5^{k-1}\equiv 1\left(\bmod k\right)$. | **Điểm** |
| a/ Ta có $p>3$ nên *p* lẻ.<br>Ta có $k=\frac{25^p-1}{24}=\frac{\left(5^p\right)^2-1}{24}=\frac{5^p-1}{4}.\frac{5^p+1}{6}$.<br>Dễ thấy với *p* lẻ thì $\frac{5^p-1}{4}$ và $\frac{5^p+1}{6}$ đều là các số nguyên dương lớn hơn 1 nên *k* là hợp số. | **0,75** |
| Lại có $k=\frac{25^p-1}{24}=25^{p-1}+25^{p-2}+...+25+1$ tổng này có *p* số hạng lẻ nên *k* lẻ. | **0.75** |

| | |
|---|---|
| Mặt khác $k=25^{p-1}+25^{p-2}+...+25+1=25\left(25^{p-2}+25^{p-3}+...+1\right)+1$<br>nên $k\equiv 1(\bmod 5)$<br>Vậy *k* là hợp số lẻ và *k* không chia hết cho 5. | |
| b/ Theo định lý Fermat nhỏ<br>$25^{p-1}\equiv 1(\bmod p) => 25^{p}\equiv 25(\bmod p) => (25^{p}-25)\vdots p$<br>Mà từ giả thiết $25^{p}-25=(25^{p}-1)-24\vdots 24$<br>Nên $(25^{p}-25)\vdots 24p$ ( do $(p;2)=(p;3)=1$ ) | **0,75** |
| Khi đó $k-1=\dfrac{25^{p}-25}{24}\vdots p$ mà $k-1$ chẵn nên $(k-1)\vdots 2p$<br>Do đó $\left(5^{k-1}-1\right)\vdots\left(5^{2p}-1\right) => 5^{k-1}-1\vdots 24k => 5^{k-1}-1\vdots k$ (do $25^{p}-1=24k$ )<br>Hay $5^{k-1}\equiv 1(\bmod k)$. | **0,75** |

**Câu 4. ( 4 điểm)**

| | |
|---|---|
| Cho ba số thực *a;b;c* thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thưc sau:<br>$a^{2}(3a-1)^{2}+b^{2}(3b-1)^{2}+c^{2}(3c-1)^{2}\geq 6\left(a^{4}+b^{4}+c^{4}-1\right)$<br>(1) | **Điểm** |
| Ta đặt $a=x+1;b=y+1;c=z+1$ từ giả thiết suy ra $x+y+z=0$ Khi đó<br>$(1)\Leftrightarrow\left(3x^{2}+5x+2\right)^{2}+\left(3y^{2}+5y+2\right)^{2}+\left(3z^{2}+5z+2\right)^{2}\geq 6\left[(x+1)^{4}+(y+1)^{4}+(z+1)^{4}-1\right]$<br>$\Leftrightarrow 3\left(x^{4}+y^{4}+z^{4}\right)+6\left(x^{3}+y^{3}+z^{3}\right)+x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq 0$ (2). Ta chứng minh (2) | **0,75** |
| Do $x+y+z=0$ nên luôn tồn tại hai số có tích không âm.<br>Không mất tính tổng quát giả sử $xy\geq 0$ thay $z=-x-y$ vào vế trái của (2) ta được: | **0.5** |
| $VT=3\left[x^{4}+y^{4}+(x+y)^{4}\right]+6\left(x^{3}+y^{3}-(x+y)^{3}\right)+x^{2}+y^{2}+(x+y)^{2}$<br>$=6\left(x^{4}+y^{4}+2x^{3}y+3x^{2}y^{2}+2xy^{3}\right)+2\left(x^{2}+y^{2}+xy\right)-18xy(x+y)$<br>$=6\left(x^{2}+xy+y^{2}\right)^{2}+2\left(x^{2}+y^{2}+xy\right)-18xy(x+y)$ (3) | **0,75** |
| Ta có $x^{2}+xy+y^{2}\geq\frac{3}{4}(x+y)^{2}\geq 3xy\geq 0$ Từ (3) suy ra<br>$VT\geq 54x^{2}y^{2}+\frac{3}{2}(x+y)^{2}-18xy(x+y)$ . Do đó để chứng minh (2) ta cần chứng minh: | **0,75** |

| | |
|---|---|
| $9x^2y^2+\frac{(x+y)^2}{4}\ge 3xy(x+y)\quad (4)$ | |
| Theo bất đẳng thức A-G ta có<br>$9x^2y^2+\frac{(x+y)^2}{4}\ge 2\sqrt{9x^2y^2\frac{(x+y)^2}{4}}=3xy\mid x+y\mid\ge 3xy(x+y)$ (đpcm) | **0,75** |
| Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x=y;27x^2y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2$ giải ra ta được<br>$\left[\begin{array}{l}x=y=0\\ x=y=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c=1\\ a=b=\frac{4}{3};c=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và các hoán vị của nó. | **0,5** |

**Câu 5. (4 điểm)**

| | |
|---|---|
| a/ Cho hai số nguyên dương *a;b*, xét các số có dạng $a+b;a+2b;a+3b;...;a+nb;...$. Chứng minh rằng trong các số đó luôn tồn tại ít nhất một số mà 4 chữ số đầu tiên của nó viết trong hệ thập phân là 2023.<br>b/ Một tập hợp các số nguyên dương khác nhau được gọi là tập "*ôn hòa*" nếu mọi phần tử của tập đó trừ hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất đều là trung bình cọng của hai phần tử khác của tập hợp. Trong tập "*ôn hòa*' có 16 phần tử mà phần tử lớn nhất là 2023. Hãy xác định tổng nhỏ nhất có thể của tất cả các phần tử của tập hợp. | **Điểm** |
| a/ Giả sử $a+b$ trong hệ thập phân có *k* chữ số tức là có: $10^{k-1}\le a+b<10^k$ (với $k>4$)<br>Do đó $\frac{1}{10}\le\frac{a}{10^k}+\frac{b}{10^k}<1\quad(1)$ suy ra $0<\frac{a}{10^k}<1$ và $0<\frac{b}{10^k}<1\qquad(2)$<br>Từ (2) suy ra tồn tại số nguyên dương *m* sao cho<br>$2023\le\frac{a}{10^k}+m.\frac{b}{10^k}<2024\quad(3)$.<br>Ta chứng minh sự tồn tại *m*. | **1,0** |
| Thật vậy, giả sử từ (3) ta có<br>$2023-\frac{a}{10^k}\le m.\frac{b}{10^k}<2024-\frac{a}{10^k}\Leftrightarrow\frac{10^k}{b}\left(2023-\frac{a}{10^k}\right)\le m<\frac{10^k}{b}\left(2024-\frac{a}{10^k}\right)$<br>Như vậy trên đoạn $\left[\frac{10^k}{b}\left(2023-\frac{a}{10^k}\right);\frac{10^k}{b}\left(2024-\frac{a}{10^k}\right)\right]$ sẽ tồn tại số nguyên dương *m* là đúng.<br>Từ (3) ta có $10^k.2023\le a+mb<10^k.2024\quad(4)$<br>Như vậy từ (4) chứng tỏ số $a+mb$ sẽ bắt đầu từ 2023. | **1,0** |

| | |
|---|---|
| b/ Gọi $2023 = a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_{16} \geq 1$ là 16 phần tử của tập "*ôn hòa*" đã cho.<br>Từ $a_2$ phải là trung bình cộng của hai số trong tập hợp nên một trong hai số phải có số lớn nhất $a_1 = 2023$ số kia phải nhỏ hơn $a_2$ nên $a_2 = \dfrac{2023 + a_i}{2} \geq \dfrac{2023+1}{2} = 1012$ $(a_i < a_2)$ do các phần tử nguyên dương và chọn tổng nhỏ nhất nên chọn $a_2 = 1012$. Ta có $a_3 = \dfrac{a_i + a_j}{2} (i \neq j)$, số nhỏ nhất trong tập lớn hơn $a_3$ là $a_2 = 1012$<br>Do đó $a_3 = \dfrac{a_i + a_j}{2} \geq \dfrac{1012+1}{2} = 506,5$ chọn tổng nhỏ nhất nên chọn $a_3 = 507$. | **1,0** |
| Lý luận hoàn toàn tương tự ta được $a_4 = 254; a_5 = 128; a_6 = 65; a_7 = 33; a_8 = 17; a_9 = 9$ còn 7 phần tử còn lại trong tập hợp phải nhỏ nhất có thể nên chọn $a_{10} = 7; a_{11} = 6; a_{12} = 5; a_{13} = 4; a_{14} = 3; a_{15} = 2; a_{16} = 1$.<br>Như vậy dễ dàng kiểm tra tập $A = \{1;2;3;4;5;6;7;9;17;33;65;128;254;507;1012;2023\}$ là tập "*ôn hòa*"<br>Và có tổng nhỏ nhất là $S_A = 4076$. | **1,0** |