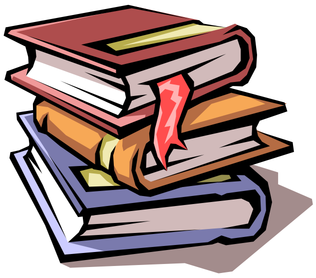
Tailieumontoan.com

Nguyễn Công Lợi



CÁC CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC
LUYỆN THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN

Nghệ An, ngày 31 tháng 7 năm 2020

Mục lục

Chủ đề 1

CÁC BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phép chia.

Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho $a = bq + r$, với $0 \leq r \leq |b|$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư.

Khi a chia cho b thì các số dư $r \in \{0;1;2;3;...;|b|\}$

- Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a. Ký hiệu: $a \vdots b$ hay $b|a$.

Vậy a chia hết cho b khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

- Nếu $r \neq 0$, khi đó ta nói a chia b có số dư là r.

2. Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1. Mọi số nguyên khác 0 luôn chia hết cho chính nó.
- Tính chất 2. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên b chia hết cho số nguyên c thì số nguyên a chia hết cho số nguyên c.
- Tính chất 3. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và ngược lại thì $a = \pm b$.
- Tính chất 4. Nếu $a.b \vdots m$ và $(b,m) = 1$ thì $a \vdots m$.
- Tính chất 5. Nếu hai số nguyên a và b cùng chia hết cho m thì $(a \pm b) \vdots m$.
- Tính chất 6. Nếu a chia hết cho m và n, trong đó $(m,n) = 1$ thì $a \vdots mn$.
- Tính chất 7. Nếu số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên c chia hết cho số nguyên d thì tích ac chia hết cho tích bd.
- Tính chất 8. Trong n số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số nguyên chia hết cho n.
- Tính chất 9. Nếu $a - b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên thì $a^n - b^n \left(n \in N\right)$ chia hết cho $a - b$.
- Tính chất 10. Nếu $a + b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên và n là số tự nhiên lẻ thì $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$.

3. Một số dấu hiệu chia hết.

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; ...; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau.

- Dấu hiệu chia hết cho 2: Số tự nhiên A chia hết cho 2 khi và chỉ khi $a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$
- Dấu hiệu chia hết cho 5: Số tự nhiên A chia hết cho 5 khi và chỉ khi $a_0 \in \{0;5\}$

Từ đó suy ra A chia hết cho 10 khi và chỉ khi $a_0 = 0$.

- Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25: Số tự nhiên A chia hết cho 4(hoặc 25) khi và chỉ khi $\overline{a_1a_0}$ chia hết cho 4 (hoặc 25).
- Dấu hiệu chia hết cho 8 và 125: Số tự nhiên A chia hết cho 8(hoặc 125) khi và chỉ khi $\overline{a_2a_1a_0}$ chia hết cho 8 (hoặc 125).
- Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9: Số tự nhiên A chia hết cho 3(hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số A chia hết cho 3(hoặc 9).
- Dấu hiệu chia hết cho 11: Số tự nhiên A chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

4. Đồng dư thức.

- Định nghĩa: Cho m là số nguyên dương. Nếu hai số nguyên a và b cho cùng số dư khi chia cho m thì ta nói a đồng dư với b theo modun m. Kí hiệu $a \equiv b \pmod m$.
- Một số tính chất của đồng thức.

◦ Tính chất 1. Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $b \equiv a \pmod m$.

◦ Tính chất 2. Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $b \equiv c \pmod m$ thì $a \equiv c \pmod m$.

◦ Tính chất 3. Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $a - c \equiv b - d \pmod m$.

◦ Tính chất 4: Nếu $a \equiv b \pmod m$, d là ước chung của a và b, biết rằng $(d, m) = 1$

Khi đó ta có $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod m$.

- Định lý Fermat. Nếu p là số nguyên tố và a không chia hết cho p thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

5. Ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất

a) Định nghĩa ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất.

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
- Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó.
- Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là: ƯCLN(a, b) hoặc (a, b)

Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là: BCNN(a, b) hoặc [a, b]

b) Một số chú ý về ƯCLN - BCNN.

- Hai số a và b gọi là nguyên tố cùng nhau nếu ƯCLN của chúng là 1.
- Nếu a chia hết cho b thì ƯCLN(a, b) = b
- ƯCLN(a, 1) = 1 và BCNN(a, 1) = a
- Nếu ƯCLN(a, b) = 1 thì BCNN(a, b) = ab

c) Một số tính chất của ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất.

- Với mọi a, b, k là các số tự nhiên khác 0 thì ƯCLN(ka, kb) = k.ƯCLN(a, b).
- Với mọi a, b, k là các số tự nhiên khác 0 thì BCNN(ka, kb) = k.BCNN(a, b).
- Với a và b là các số tự nhiên khác 0 thì a.b = ƯCLN(a, b).BCNN(a, b)

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Bài tập về quan hệ chia hết trên tập số thường có một số dạng như sau

- Chứng minh phép chia hết, phép chia có dư.
- Tìm số dư trong phép chia.
- Tìm điều kiện của biến để xảy ra quan hệ chia hết giữa hai biểu thức.
- Sử dụng tính chất chia hết để giải phương trình nghiệm nguyên, giải các bài toán về số chính phương, chứng minh hai số bằng nhau, chứng minh phân số tối giản…
- Tìm ƯCLN, BCNN hoặc chứng minh ƯCLN, BCNN thỏa mãn một tính chất nào đó.

Các dạng bài tập trên được minh họa thông qua các ví dụ sau đây

Ví dụ 1. Cho x, y, z là các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

Lời giải

Đặt $a=x-y; b=y-z$ khi đó ta được $z-x=-(a+b)$.

Bài toán quy về chứng minh $(a+b)^5-a^5-b^5$ chia hết cho $5ab(a+b)$. Ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^5-a^5-b^5 &= 5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=5ab\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)\\ &=5ab\left[\left(a^3+b^3\right)+\left(2a^2b+2ab^2\right)\right]=5ab\left[(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+2ab(a+b)\right]\\ &=5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\end{aligned}$$

Dễ thấy $5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 5ab(a+b)$.

Do đó $(a+b)^5-a^5-b^5$ chia hết cho $5ab(a+b)$ hay ta được $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$.

Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 27.

Lời giải

- Nếu x, y, z có số dư khác nhau khi chia cho 3 thì các số $(x-y); (y-z); (z-x)$ không chia hết cho 3, mà ta lại có $x+y+z$ chia hết cho 3. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.
- Nếu trong ba số x, y, z có hai số chia cho 3 có cùng số dư. Khi đó trong $(x-y); (y-z); (z-x)$ có một hiệu chia hết cho 3. Mà ta lại có $x+y+z$ không chia hết cho 3. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

- Nếu ba số x, y, z chia cho 3 cho cùng số dư, khi đó $(x-y)$; $(y-z)$; $(z-x)$ cùng chia hết cho 3.

Nên suy ra được $(x-y)(y-z)(z-x)$ chia hết cho 27. Từ đó ta được $x+y+z$ chia hết cho 27.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $(a^3+b^3+c^3)\vdots 9$ thì một trong ba số a, b, c chí hết cho 3.

Lời giải

Với a, b, c là các số nguyên khi đó ta có $a=3q_1+r_1; b=3q_2+r_2; c=3q_3+r_3$ với $q_1;q_2;q_3$ là các số nguyên và các số dư $r_1;r_2;r_3\in\{-1;0;1\}$.

Dễ thấy $r_1^3=r_1; r_2^3=r_1; r_3^3=r_1$. Từ đó ta được

$$a^3=(3q_1+r_1)^3=9k_1+r_1; b^3=(3q_2+r_2)^3=9k_2+r_1; c^3=(3q_3+r_3)^3=9k_3+r_3$$

Khi đó ta được $a^3+b^3+c^3=9(k_1+k_2+k_3)+(r_1+r_2+r_3)$.

Mà theo giả thiết ta có $(a^3+b^3+c^3)\vdots 9$. Do đó nên ta suy ra $(r_1+r_2+r_3)\vdots 9$.

Dễ thấy $|r_1+r_2+r_3|\le 3$, do đó suy ra $r_1+r_2+r_3=0$.

Do $r_1;r_2;r_3\in\{-1;0;1\}$ nên từ $r_1+r_2+r_3=0$ suy ra trong $r_1;r_2;r_3$ có một số bằng 0. Điều này có nghĩa là trong ba số a, b, c có một số chia hết cho 3.

Ví dụ 4. Tìm k để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(n^2-k)\vdots 4$ với $k\in\{0;1;2;3\}$.

Lời giải

Giả sử tồn tại số $k\in\{0;1;2;3\}$ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(n^2-k)\vdots 4$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n=4q$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2-k$.

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $k\vdots 4$ nên suy ra $k=0$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=4q\pm 1$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2\pm 8q+1-k$

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $1-k\vdots 4$ nên suy ra $k=1$.

- Trường hợp 3: Nếu $n=4q+2$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2+16q+4-k$

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $k\vdots 4$ nên suy ra $k=0$.

Vậy với $k=0$ hoặc $k=1$ thì luôn tồn tại số tự nhiên n để $(n^2-k)\vdots 4$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bài toán này bằng phương pháp quy nạp toán học

- Với $n=1$, khi đó ta có $1.\left(2.1^2+7\right)=9\vdots 3$ (đúng).
- Giả sử mệnh đề đúng với n, tức là ta có $n\left(2n^2+7\right)\vdots 3$.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$. Thật vậy, ta có

$$\left(n+1\right).\left[2\left(n+1\right)^2+7\right]=\left(n+1\right)\left(2n^2+4n+9\right)=2n^3+6n^2+13n+9$$
$$=\left(3n^3+7n\right)+\left(6n^2+6n+9\right)$$

Để ý là $n\left(2n^2+7\right)=\left(2n^3+7n\right)\vdots 3$ và $\left(6n^2+6n+9\right)\vdots 3$. Do đó ta được $\left(n+1\right).\left[2\left(n+1\right)^2+7\right]\vdots 3$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $n\left(2n^2+7\right)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

- Với $n=1$, khi đó ta có $5^2+7=32\vdots 8$ (đúng)
- Giả sử mệnh đề đúng với n, tức là ta có $5^{2n}+7\vdots 8$.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$. Thật vậy, ta có

$$5^{2(n+1)}+7=25.5^{2n}+7=24.5^{2n}+\left(5^{2n}+7\right)$$

Để ý là $5^{2n}+7\vdots 8$ và $24.5^{2n}\vdots 8$. Do đó ta được $5^{2(n+1)}+7\vdots 8$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 7. Cho 2014 số tự nhiên bất kì $x_1;x_2;...;x_{2014}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2014 hoặc một số số có tổng chia hết cho 2014.

Lời giải

Xét dãy số sau $S_1=x_1;S_2=x_1+x_2;S_3=x_1+x_2+x_3;...;S_{2014}=x_1+x_2+...+x_{2014}$.

- Nếu trong các số $S_1;S_2;S_3;...;S_{2014}$ có một số chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.
- Nếu trong các số $S_1;S_2;S_3;...;S_{2014}$ không có số nào chia hết cho 2014. Khi đó trong dãy số đó tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2014.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là S_i và S_j với $1\le i<j\le 2014$.

Khi đó ta được $S_j-S_i\vdots 2014$ hay ta được $\left(x_1+x_2+...+x_j\right)-\left(x_1+x_2+...+x_i\right)\vdots 2014$

Suy ra $x_{i+1}+x_{i+2}+...+x_j\vdots 2014$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét: *Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau: Cho n số tự nhiên* $x_1;x_2;...;x_n$. *Chứng minh rằng trong n số trên có một số chia hết cho n hoặc một số số có tổng chia hết cho n.*

Ví dụ 8. Cho các số nguyên $a_1;a_2;...;a_n$. Đặt $A=a_1+a_2+...+a_n$ và $B=a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a ta luôn có $a^3 - a \vdots 6$.

Thật vậy, ta có $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$.

Ta thấy trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3, lại có 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $a^3 - a = (a-1)a(a+1) \vdots 6$. Xét hiệu sau

$$B - A = \left(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right) = \left(a_1^3 - a_1\right) + \left(a_2^3 - a_2\right) + ... + \left(a_n^3 - a_n\right)$$

Áp dụng bổ để trên ta được $\left(a_1^3 - a_1\right) \vdots 6;\ \left(a_2^3 - a_2\right) \vdots 6;\ ...;\ \left(a_n^3 - a_n\right) \vdots 6$

Do đó ta được $B - A \vdots 6$. Suy ra A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Ví dụ 9. Cho a, m , n là các số nguyên dương với $a \neq 1$. Chứng minh rằng $\left(a^m - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$ khi và chỉ khi m chia hết cho n.

Lời giải

- Điều kiện cần: Giả sử $\left(a^m - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$

Do a, m , n là các số nguyên dương với $a \neq 1$ nên suy ra $a^m - 1 \neq 0$.

Do đó từ $\left(a^m - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$ ta suy ra được $\left(a^m - 1\right) \geq \left(a^n - 1\right)$ nên $m \geq n$.

Đặt $m = qn + r$ với $q, r \in N, 0 \leq r < n$.

Do đó $a^m - 1 = a^{qn+r} - 1 = a^r\left(a^{qn} - 1\right) + \left(a^r - 1\right)$.

Nhận thấy $\left(a^m - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$ và $\left(a^{qn} - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$ nên ta suy ra được $\left(a^r - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$.

Mà ta có $0 \leq r < n$ nên $0 \leq a^r - 1 < a^n - 1$ nên suy ra $a^r - 1 = 0 \Rightarrow r = 0$.

Vậy ta được $m = qn$ hay m chia hết cho n.

- Điều kiện đủ: Giả sử m chi hết cho n. Khi đó đặt $m = nq$ với q là số tự nhiên.

Ta có $a^m - 1 = a^{nq} - 1 = \left(a^n\right)^q - 1 = \left(a^n - 1\right)\left[\left(a^n\right)^{q-1} + \left(a^n\right)^{q-2} + \left(a^n\right)^{q-3} + ... + 1\right]$

Từ đó suy ra $\left(a^m - 1\right) \vdots \left(a^n - 1\right)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10. Cho 5 số nguyên phân biệt tùy ý $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$. Xét tích sau đây

$$P = \left(a_1 - a_2\right)\left(a_1 - a_3\right)\left(a_1 - a_4\right)\left(a_1 - a_5\right)\left(a_2 - a_3\right)\left(a_2 - a_4\right)\left(a_2 - a_5\right)\left(a_3 - a_4\right)\left(a_3 - a_5\right)\left(a_4 - a_5\right)$$

Chứng minh rằng P chia hết cho 288.

Lời giải

Ta có $288 = 2^5.3^2$ và $\left(2^5, 3^2\right) = 1$ nên để chứng minh P chia hết cho 288 ta đi chứng minh P chia hết cho 2^5 và 3^2.

- Chứng minh P chia hết cho 3^2.

Theo nguyên lí Dirchlet thì trong bốn số nguyên phân biệt $a_1;a_2;a_3;a_4$ tồn tại hai số nguyên có cùng số dư khi chia cho 3 hay tồn tại hai số nguyên có hiệu chia hết cho 3, không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là $a_1;a_2$, khi đó $\left(a_1-a_2\right)\vdots 3$. Xét tương tự cho bốn số nguyên phân biệt $a_2;a_3;a_4;a_5$ ta cung được ít nhất một hiệu chia hết cho 3. Như vậy trong P luôn tồn tại ít nhất hai hiệu chí hết cho 3. Từ đó suy ra P chia hết cho 9 hay P chia hết cho 3^2.

- Chứng minh P chia hết cho 2^5.

Cũng theo nguyên lí Dirichlet trong năm số nguyên phân biệt tùy ý $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5$ luôn tồn tại ít nhất ba số có cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Trong năm số có ít nhất bốn số có cùng tính chẵn lẻ, khi đó bốn số này tạo ra sau hiệu hia hết cho 2, do đó suy ra P chia hết cho 2^6 hay P chia hết cho 2^5.

+ Trường hợp 2: Trong năm số có đúng ba số có cùng tính chẵn lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử ba số đó là $a_1;a_2;a_3$. Khi đó nếu $a_1;a_2;a_3$ cùng là số lẻ thì ta suy ra được $a_4;a_5$ cùng là số chẵn, do đó ta được bốn hiệu $a_1-a_2;a_1-a_3;a_2-a_3;a_4-a_5$ là các số chẵn. Còn nếu $a_1;a_2;a_3$ cùng là số chẵn thì ta suy ra được $a_4;a_5$ cùng là số lẻ, do đó ta được bốn hiệu

$a_1-a_2;a_1-a_3;a_2-a_3;a_4-a_5$ là các số chẵn.

Mặt khác trong năm số $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5$ tồn tại ít nhất hai hiệu chia hết cho 4. Do đó trong bốn hiệu $a_1-a_2;a_1-a_3;a_2-a_3;a_4-a_5$ có ít nhất mộ hiệu chia hết cho 4.

Suy ra $\left(a_1-a_2\right)\left(a_1-a_3\right)\left(a_2-a_3\right)\left(a_4-a_5\right)\vdots 2^5$ hay P chia hết cho 2^5.

Vậy cả hai trường hợp ta đều được P chia hết cho 2^5.

Như vậy ta được P chia hết cho 2^5 và 3^2 nên P chia hết cho 288.

Ví dụ 11. Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên.

Chứng minh rằng $\left(x^4y^{44}-1\right)\vdots\left(x+1\right)$.

Lời giải

Đặt $\frac{x^4-1}{y+1}=\frac{a}{b};\ \frac{y^4-1}{x+1}=\frac{c}{d}$, trong đó $a,b,c,d\in Z$ và $\left(a,b\right)=\left(c,d\right)=1$.

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ là số nguyên, nên ta suy ra được $\left(ad+bc\right)\vdots bd$

Suy ra ta được $\left(ad+bc\right)\vdots b$ nên $ad\vdots b$, mà ta có $\left(a,b\right)=1$ nên suy ra $d\vdots b$.

Hoàn toàn tương tự ta được $b\vdots d$. Từ đó ta được $b=d$.

Lại có $\left(x^4-1\right)\vdots\left(x+1\right);\ \left(y^4-1\right)\vdots\left(y+1\right)$ nên $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{x^4-1}{y+1}.\frac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên nên suy ra $ac\vdots bd$.

Mà ta có $\left(a,b\right)=\left(c,d\right)=1$ nên suy ra $b=d=1$

Từ đó suy ra $\frac{x^4-1}{y+1} \in Z; \frac{y^4-1}{x+1} \in Z$ nên ta được $(y^4-1) \vdots (x+1)$

Ta có $x^4y^{44}-1=(x^4y^{44}-x^4)+x^4-1=x^4(y^{44}-1)+(x^4-1)$

Do $(y^4-1) \vdots (x+1)$ nên $(y^{44}-1) \vdots (x+1)$ và lại có $(x^4-1) \vdots (x+1)$

Do đó ta suy ra được $(x^4y^{44}-1) \vdots (x+1)$.

Ví dụ 12. Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 30.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} ab(a^2-b^2)(a^2+b^2) &= (a^2+b^2)\left[ab(a^2-1)-ab(b^2-1)\right] \\ &= (a^2+b^2)\left[ab(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)\right] \end{aligned}$$

Với mọi số nguyên a và b thì $ab(a-1)(a+1)$ và $ab(b-1)(b+1)$ luôn chia hết cho 6.

Để chứng minh $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 30 ta cần chứng minh được $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5. Xét các trường hợp sau:

- Nếu trong hai số nguyên a và b có một số chia hết cho 5, khi đó $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.
- Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho 5 thì ta được $a-b$ chia hết cho 5 nên $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.
- Nếu a và b có số dư khác nhau khi chia cho 5 thì ta được a^2+b^2 chia hết cho 5. Từ đó ta suy ra được $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 5.

Do 5 và 6 nguyên tố cùng nhau nên từ các kết quả trên ta suy ra $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ chia hết cho 30.

Ví dụ 13. Cho a, b, c là các số tự nhiên đôi một có số dư khác nhau trong phép chia cho 5. Chứng minh rằng trong ba số $A=3a+b+c; B=3b+c+a; C=2a+2b+c$ có duy nhất một số chia hết cho 5.

Lời giải

Xét hai số $D=4a+c=(c-a)+5a; E=4b+c=5b+(c-b)$.

Do a, b, c đôi một có số dư khác nhau khi chia cho 5 nên ta có $c-a; c-b; a-b$ không chia hết cho 5. Do đó D và E không chia hết cho 5. Ta xét các số sau

$A-B=(3a+b+c)-(3b+c+a)=2(a-b)$ $\quad A-C=(3a+b+c)-(2a+2b+c)=a-b$

$A-D=(3a+b+c)-(4a+c)=b-a$ $\quad A-E=(3a+b+c)-(4b+c)=3(a-b)$

$B-C=(3b+c+a)-(2a+2b+c)=b-a$ $\quad B-D=(3b+c+a)-(4a+c)=3(b-a)$

$B-E=(3b+c+a)-(4b+c)=a-b$ $\quad C-D=(2a+2b+c)-(4a+c)=2(b-a)$

$C-E=(2a+2b+c)-(4b+c)=2(a-b)$ $\quad D-E=(4a+c)-(4b+c)=4(a-b)$

Nhận thấy tất cả các số trên đều không chia hết cho 5. Từ đó suy ra A, B, C, D, E có số dư khác nhau khi chia cho 5. Mà ta biết rằng một số tự nhiên khi chia cho 5 có 5 số dư khác nhau là 0, 1, 2, 3, 4. Từ đó suy ra trong 5 số A, B, C, D, E có duy nhất một số chia hết cho 5. Mà ta đã biết D và E không chia hết cho 5 nên. Do đó trong ba số A, B, C có duy nhất một số chia hết cho 5.

Ví dụ 14. Tìm cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn $x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x.

Lời giải

Từ điều kiện của bài toán ta suy ra được $x+1\ge y; y+1\ge x$

Từ đó ta được $x-1\le y\le x+1$, khi đó do x, y là các số nguyên dương nên suy ra $y=x-1$ hoặc $y=x$ hoặc $y=x+1$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $y=x-1$, khi đó ta được $x-1\,\vdots\,y$ và $x+1\,\vdots\,y$

Suy ra $(x+1)-(x-1)\,\vdots\,y\Rightarrow 2\,\vdots\,y\Rightarrow y=1;2$

+ Với $y=1$ ta được $x=2$

+ Với $y=2$ ta được $x=3$

- Nếu $y=x$, khi đó ta được $x\,\vdots\,y$ và $x+1\,\vdots\,y$

Suy ra $(x+1)-x\,\vdots\,y\Rightarrow 1\,\vdots\,y\Rightarrow y=1$, từ đó ta được $x=1$

- Nếu $y=x+1$, khi đó từ $y+1\,\vdots\,x$ ta được $x+2\,\vdots\,x\Rightarrow 2\,\vdots\,x\Rightarrow x=1;2$

+ Với $x=1$ ta được $y=2$

+ Với $x=2$ ta được $y=3$

Vậy các bộ số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(1;1),(1;2),(2;3),(2;1),(3;2)$.

Ví dụ 15. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho với mọi số nguyên dương lẻ a thỏa mãn với $a^2\le n$ thì n chia hết cho a.

Lời giải

Gọi a là số nguyên lẻ lớn nhất sao cho $a^2<n$. Từ đó ta suy ra được $n\le(a+2)^2$.

Nếu $a\ge 7$ thì ta được $a-4;a-2;a$ là các số nguyên lẻ và $n\,\vdots\,(a-4);n\,\vdots\,(a-2);n\,\vdots\,a$.

Chú ý là ba số $a-4;a-2;a$ là ba số lẻ liên tiếp nên chúng nguyên tố với nhau theo từng đôi một.

Từ đó ta được $n\,\vdots\,\left[(a-4)(a-2)a\right]$ nên suy ra $\left[(a-4)(a-2)a\right]\le n$

Từ đó ta được $(a-4)(a-2)a\le(a+2)^2\Leftrightarrow a^3-7a^2+4a-4\le 0\Leftrightarrow a^2(a-7)+4(a-1)\le 0$, điều này là vô lí do $a\ge 7$.

Như vậy với $a \ge 7$ bài toán không xẩy ra, nên ta được $a < 7$. Chú ý a là số nguyên dương lẻ nên từ $a < 7$ ta được $a \in \{1;3;5\}$. Ta xét các trường hợp cụ thể

- Với $a = 1$, khi đó ta được $1 \le n \le 3^2$ nên suy ra $n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$
- Với $a = 3$, khi đó ta được $3^2 \le n \le 5^2$ và $n \vdots 3$ nên suy ra $n \in \{9;12;15;18;21;24\}$
- Với $a = 5$, khi đó ta được $5^2 \le n \le 7^2$ và $n \vdots 3.5$ nên suy ra $n \in \{30;45\}$

Kết hợp các kết quả trên ta được $n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;12;15;18;21;24;30;45\}$

Ví dụ 16. Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Lời giải

Nếu cho n nhận các giá trị là 1; 2; 3; 4; 5; 6 thì giá trị của 2^n lần lượt là 2; 4; 8; 16; 32; 64. Khi đó số dư của 2^n khi chia cho 7 lần lượt là 2; 4; 1; 2; 4; 1. Chú ý là các số 1; 2; 3 và 4; 5; 6 thoe tứ tự chia 3 có số dư là 1; 2; 3. Điều này gợi ý ta chứng minh 2^n chia cho 7 có số dư lần lượt là 2; 4; 1 tương ứng với n chia 3 dư 1; dư 2; dư 0.

Thật vậy, xét các số $n = 3k+1; n = 3k+2; n = 3k+3$ với k là số tư nhiên, khi đó ta xét từng trương hợp như sau:

- Với $n = 3k+1$, khi đó ta có $2^n = 2^{3k+1} = 2.\left(2^3\right)^k = 2.(7+1)^k = 2.(7a+1)$ chia 7 dư 2, với a là số một số tự nhiên.
- Với $n = 3k+2$, khi đó ta có $2^n = 2^{3k+2} = 4.\left(2^3\right)^k = 4.(7+1)^k = 4.(7b+1)$ chia 7 dư 4, với b là số một số tự nhiên.
- Với $n = 3k+3$, khi đó ta có $2^n = 2^{3k+3} = 4.\left(2^3\right)^k = (7+1)^{k+1} = 7c+1$ chia 7 dư 1, với c là số một số tự nhiên.

Như vậy để $2^n - 1$ chia hết cho 7 thì 2^n chia cho 7 phải có số dư là 1, điều này chỉ có thể xẩy ra khi n chia hết cho 3. Vậy với n là các bội của 3 thì $2^n - 1$ chia hết cho 7

Ví dụ 17. Tìm số tự nhiên n để $A = n\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)$ chia hết cho 120.

Lời giải

Dễ thấy $120 = 2^3.3.5$ và $\left(2^3,3\right) = (3;5) = \left(2^3,5\right) = 1$ nên để A chia hết cho 120 thì A phải đồng thời chia hết cho 2^3, 3, 5. Do đó để tìm các số tự nhiên n sao cho A chia hết cho 120 thì ta cần tìm n để A đồng thời chia hết cho 2^3, 3, 5.

- Tìm n để A chia hết cho 2^3. Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $n = 2k$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó $n^2 + 4$ chia hết cho 4. Nên A chia hết cho 2^3

+ Nếu $n = 2k+1$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó $n^2 + 4$ và $n^2 + 1$ đều không chia cho 4. Nên A không chia hết cho 2^3.

Như vậy để A chia hết cho 2^3 thì n phải là số chẵn.

- Tìm n để A chia hết cho 3. Ta xét các trương hợp sau:

+ Nếu $n = 3k$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó A chia hết cho 3.

+ Nếu $n = 3k \pm 1$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó $n^2 + 4$ và $n^2 + 1$ đều không chia cho 3 . Nên A không chia hết cho 3.

Như vậy để A chia hết cho 3 thì n phải là bội số của 3.

- Tìm n để A chia hết cho 5. Ta xét các trương hợp sau:

+ Nếu $n = 5k$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó A chia hết cho 5.

+ Nếu $n = 5k \pm 1$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó $n^2 + 4$ chia hết cho 5. Nên A chia hết cho 5.

+ Nếu $n = 5k \pm 2$, với k là số một số tự nhiên. Khi đó $n^2 + 1$ chia hết cho 5. Nên A chia hết cho 5.

Với mọi số tự nhiên n thì A luôn chia hết cho .

Kết hợp các kết quả trên ta thấy để A chia hết cho 120 thì n phải là số chẵn và là bội của 3.

Ví dụ 18. Cho $a^2 + b^2$ là bội số của 5 với a và b là các số nguyên. Chứng minh rằng hai số $A = 2a + b$ và $B = 2b - a$ hoặc hai số $A' = 2a - b$ và $B' = 2b + a$ chia hết cho 5.

Lời giải

Cách 1. Ta có $a^2 + b^2 = a^2 - 4b^2 + 5b^2 = (a - 2b)(a + 2b) + 5b^2$

Do $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên suy ra $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$.

Do 5 là số nguyên tố nên từ $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$ suy ra $a - 2b \vdots 5$ hoặc $a + 2b \vdots 5$. Đến đây ta xét các trương hợp sau:

- Nếu $a - 2b \vdots 5$, khi đó $B = 2b - a$ chia hết cho 5.

Mặt khác ta lại có $2b - a = (2b + 4a) - 5a$ nên $2b + 4a \vdots 5 \Rightarrow 2(2a + b) \vdots 5 \Rightarrow A = 2a + b \vdots 5$, do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a + 2b \vdots 5$, khi đó $B' = a + 2b$ chia hết cho 5. Do đó ta được $-a - 2b \vdots 5$.

Mà ta lại có $-a - 2b = -5a - (2b - 4a)$ nên suy ra $2b - 4a \vdots 5 \Rightarrow 2(b - 2a) \vdots 5 \Rightarrow A' = 2a - b \vdots 5$ do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a - 2b \vdots 5$ và $a + 2b \vdots 5$ khi đó cả A, B, A′, B′ cùng chia hết cho 5.

Cách 2. Với mọi số nguyên a và b ta luôn viết được dưới dạng $a = 5k; a = 5k \pm 1; a = 5k \pm 2$ và $b = 5m; b = 5m \pm 1; b = 5m \pm 2$ trong đó k và m là các số nguyên.

Theo bài ra thì $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên ta có các trương hợp sau:

- Nếu $a = 5k$ và $b = 5m$, khi đó ta có A, B, A′, B′ cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A′, B′ cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A′, B′ chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A′, B′ chia hết cho 5.

Ví dụ 19. Xác định các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho a^2b+a+b chia hết cho ab^2+b+7.

Lời giải

- Trường hợp 1: Nếu $a<b$, khi đó do an b nguyên dương nên $b\ge a+1$. Từ đó ta được

$$ab^2+b+7>ab^2+b=b(ab+1)\ge(a+1)(ab+1)=a^2b+ab+a+1>a^2b+a+b$$

Do đó trong trường hợp này không tìm được cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Nếu $a\ge b$, khi đó ta đặt $\dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}=k>0$.

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}\right)(ab^2+b+7)=a^2b+a+ab+7\dfrac{a}{b}+7\dfrac{1}{b}>a^2b+a+b$.

Từ đó suy ta $\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$ nên ta được $k<\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}$.

Lại thấy nếu $b\ge 3$ thì khi đó $b-\dfrac{7}{b}=\dfrac{b^2-7}{b}>0$ nên ta được

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\right)(ab^2+b+7)=a^2b+a-a\left(b-\frac{7}{b}\right)-1-\frac{7}{b}<a^2b+a<a^2b+a+b$$

Từ đó suy ta $\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}<\dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$ nên ta được $k>\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $b=1$ hoặc $b=2$ hoặc $k>\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}$. Đến đây ta lại xét các trường hợp nhỏ như sau:

+ Nếu $\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{b}<k<\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}$, khi đó ta được $a-1<kb<a+1$ nên suy ra $a=kb$

Kết hợp với $\dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}=k>0$ ta tìm được $(a;b)=(7k^2;7k)$ với k là số nguyên dương.

+ Nếu $b=1$, ta cần tìm a nguyên dương để $(a^2+a+1)\,\vdots\,(a+8)$.

Ta có $a(a+8)-(a^2+a+1)=7a-1$ nên $(a^2+a+1)\,\vdots\,(a+8)$ khi và chỉ khi $(7a-1)\,\vdots\,(a+8)$.

Lại có $7(a+8)-(7a-1)=57$ nên $(7a-1)\,\vdots\,(a+8)$ khi và chỉ khi $57\,\vdots\,(a+8)$

Các ước lớn hơn 8 của 57 là 19 và 57 nên ta suy ra $a+8=19\Rightarrow a=11$ và $a+8=57\Rightarrow a-49$

+ Nếu $b=2$, ta cần tìm a nguyên dương để $(2a^2+a+2)\,\vdots\,(4a+9)$

Ta có $a(4a+9)-2(2a^2+a+2)=7a-4$ nên $(2a^2+a+2)\,\vdots\,(4a+9)$ khi $(7a-4)\,\vdots\,(4a+9)$

Lại có $7(4a+9)-4(7a-4)=79$ nên $(7a-4)\,\vdots\,(4a+9)$ khi và chỉ khi $79\,\vdots\,(4a+9)$.

Ước số lớn hơn 9 của 79 là 79 nên ta được $4a+7=79 \Rightarrow a=\frac{35}{2}$ không phải là số nguyên, do đó trong trường hợp này không có giá trị a thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(11;1),(49;1),(7k^2;k)$ với k là số nguyên dương.

Ví dụ 20. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a<b<c$ và $abc-1$ chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)$.

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta $a>1$ nên ta suy ra được $a\ge 2; b\ge 3; c\ge 4$. Khi đó ta đặt đặt

$$d=\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\frac{(a-1+1)(b-1+1)(c-1+1)-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

$$=1+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}+\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(c-1)(a-1)}$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}<4$$

Ta lại thấy $d>1$, nên ta được $1<d<4$. Để $abc-1$ chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)$ thì d phải là số nguyên, do đó từ các kết quả trên ta được $d=2$ hoặc $d=3$.

Mặt khác nếu $a\ge 4$ thì ta được $b\ge 5; c\ge 6$, khi đó $d<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{119}{60}<2$

Do đó ta được $1<d<2$ nên không tồn tại số d nguyên. Từ đó suy ra $a<4$.

Kết hợp lại ta được $1<a<4$, mà a là số nguyên nên $a=2$ hoặc $a=3$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $d=2$ và $a=2$. Khi đó $\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}=2 \Leftrightarrow 2bc-1=2(b-1)(c-1)$

Dễ thấy vế trai của đẳng thức trên là số lẻ và vé phải của đẳng thức trên là số chẵn.

Do đó trường hợp này không tồn tại các số nguyên dương b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Nếu $d=3$ và $a=2$. Khi đó $\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}=3 \Leftrightarrow 2bc-1=3(b-1)(c-1)$

Hay ta được $(b-3)(c-3)=5$. Chú ý là $5=1.5$ và $b<c$, nên ta suy ra được $\begin{cases} b-3=1 \\ c-3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=8 \end{cases}$

Do đó ta được bộ số $a=2; b=4; c=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Nếu $d=2$ và $a=3$. Khi đó ta được

$$\frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}=2 \Leftrightarrow 3bc-1=4(b-1)(c-1) \Leftrightarrow (b-4)(c-4)=11$$

Chú ý là $11=1.11$ và $b<c$, nên ta suy ra được $\begin{cases} b-4=1 \\ c-4=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=15 \end{cases}$

Do đó ta được bộ số $a = 3; b = 5; c = 15$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 4: Nếu $d = 3$ và $a = 3$. Khi đó $\frac{3bc - 1}{2(b-1)(c-1)} = 3 \Leftrightarrow 3bc - 1 = 6(b-1)(c-1)$

Dễ thấy vế trái của đẳng thức trên không chia hết cho 3 và vế phải của đẳng thức lại chia hết cho 3. Do đó trường hợp này không tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy các bộ số thỏa mãn bài toán là $a = 2; b = 4; c = 8$ và $a = 3; b = 5; c = 15$.

Ví dụ 21. Chứng minh rằng trong $2^{n+1} - 1$ số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được 2^n số nguyên mà tổng của chúng chia hết cho 2^n, với n là một số nguyên dương.

Lời giải

Ta sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh bài toán.
- Với $n = 1$, khi đóvới ba số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được hai số nguyên có cùng tính chẵn, lẻ nên tổng của hai số đó luôn chia hết cho 2.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là ta có trong $2^{k+1} - 1$ số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được 2^k số nguyên mà tổng của chúng chia hết cho 2^k, với k là một số nguyên dương.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Ta có $2^{k+1+1} - 1 = 2(2^{k+1} - 1) + 1$.

Theo giả thiết quy nạp ta có có trong $2^{k+1} - 1$ số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được 2^k số nguyên mà tổng của chúng chia hết cho 2^k. Giả sử tổng của 2^k số nguyên đó là S_1, do S_1 chia hết cho 2^k nên ta được $S_1 = 2^k.a$ với a là một số nguyên.

Trong $2^{k+1} - 1$ số nguyên khác với $2^{k+1} - 1$ số nguyên nói trên ta cũng tìm được 2^k số nguyên có tổng chí hết cho 2^k. Giả sử tổng của 2^k số nguyên đó là S_2, do S_2 chia hết cho 2^k nên ta được $S_2 = 2^k.b$ với b là một số nguyên.

Như vậy ta đã có $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ số nguyên có tổng $S_1 + S_2 = 2^k(a+b)$

Do đó trong $2^{k+1+1} - 1 = 2(2^{k+1} - 1) + 1$ số nguyên thì số số nguyên còn lại là

$$2^{k+1+1} - 1 - 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1) + 1 - 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Theo giả thiết thì trong $2^{k+1} - 1$ số nguyên còng lại bao giờ cũng tìm được 2^k số nguyên mà tổng của chúng chia hết cho 2^k. Giả sử tổng của 2^k số nguyên đó là S_3, do S_3 chia hết cho 2^k nên ta được $S_3 = 2^k.c$ với c là một số nguyên.

Trong ba số a, b, c luôn tồn tại hai số có cùng tính chẵn, lẻ. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b, khi đó $a + b \vdots 2$. Từ đó ta được $S_1 + S_2 = 2^k(a+b) \vdots 2^{k+1}$

Chú ý là $S_1 + S_2$ là tổng của $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ số nguyên. Từ đó suy ra có trong $2^{k+2} - 1$ số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được 2^{k+1} số nguyên mà tổng của chúng chia hết cho 2^{k+1}, với k là một số nguyên dương.
Như vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp thì bài toán được chứng minh.

Ví dụ 22. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.

Lời giải

Giả sử $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1, khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $a+b^2=k\left(a^2b-1\right)$

Hay ta được $a+k=b\left(ka^2-b\right)$. Đặt $m=ka^2-b$ với m là một số nguyên.

Khi đó ta được $mb=a+k$. Từ đó suy ra $mb-m-b=a+k-ka^2$ hay ta được

$$mb-m-b+1=a+k-ka^2+1\Leftrightarrow\left(m-1\right)\left(b-1\right)=\left(a+1\right)\left(k+1-ka\right)$$

Do a, b, k là các số nguyên dương nên ta suy ra được $m\ge1$.

Do đó ta suy ra được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)\ge0$, điều này dẫn đến $\left(a+1\right)\left(k+1-ka\right)\ge0$.

Mà ta có a là số nguyên dương nên ta suy ra được $k+1-ka\ge0$ hay $k\left(a-1\right)\le1$.

Mà k cũng là số nguyên dương nên từ $k\left(a-1\right)\le1$ ta được $k\left(a-1\right)=0$ hoặc $k\left(a-1\right)=1$.

+ Nếu $k\left(a-1\right)=0$ ta suy ra được $a-1=0\Rightarrow a=1$, khi đó ta được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=2$

Do 2 là số nguyên tố nên từ $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=2$ ta được $b-1=1$ hoặc $b-1=2$. Từ đó suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Do đó trong trường này ta được hai cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $a=1;b=2$ và $a=1;b=3$

+ Nếu $k\left(a-1\right)=1$, khi đó ta được $k=1;a=2$, khi đó ta được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=0$. Từ đây suy ra $b=1$ hoặc $m=1$.

Với $m=1$, kết hợp với hệ thức $mb=a+k$ ta suy ra được $b=3$

Do đó trong trường này ta được hai cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $a=2;b=1$ và $a=2;b=3$

Vậy các cặp số nguyên dương $\left(a;b\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(1;2\right),\left(1;3\right),\left(2;1\right),\left(2;3\right)$.

Ví dụ 23. Tìm tất cả các số nguyên sao cho tập hợp $\left\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\right\}$ có thể chia thành hai tập hợp sao cho tích tất cả các phần tử của tập hợp này bằng tích tất cả các phần tử của tập hợp kia.

Lời giải

Chú ý là trong năm số nguyên liên tích có duy nhất một số chia hết cho 5.

Như vậy nếu tập hợp $\left\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\right\}$ thỏa mãn tính chất được cho trong bài toán thì tập hợp này phải chứa hai số chia hết cho 5.

Từ đó suy ra hai số chia hết cho 5 phải là n và $n+5$, còn lại các số $n+1,n+2,n+3,n+4$ thì không thể chia hết cho 5.

Mặt khác trong sáu số $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ nếu có một số chia hết cho số nguyên tố $p \ge 7$ thì 5 số còn lại không thể chia hết cho p. Khi đó tập hợp $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ sẽ không thể tách thành hai tập hợp có tính chất như trong bài toán.

Từ đó suy ra các $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ không thể chia hết cho một số nguyên tố $p \ge 7$.

Điều nay dẫn đến các số $n+1, n+2, n+3, n+4$ chỉ có thể chia hết cho hai số nguyên tố là 2 và 3.

Hay ta viết được $n+1 = 2^{k_1}.3^{l_1}, n+2 = 2^{k_2}.3^{l_2}, n+3 = 2^{k_3}.3^{l_3}, n+4 = 2^{k_4}.3^{l_4}$ với $k_i; l_i\ (i = 1;2;3;4)$ là các số tự nhiên.

- Nếu $n+1$ chia hết cho 3 thì suy ra $n+4$ chia hết cho 3, suy ra $n+2$ và $n+3$ không thể chia hết cho 3, do đó ta được $l_2 = l_3 = 0$, nên ta được $n+2 = 2^{k_2}, n+3 = 2^{k_3}$ là hai số chẵn, điều này vô lí vì $n+2$ và $n+3$ là hai số nguyên liên tiếp.
- Nếu $n+2$ hoặc $n+3$ chia hết cho 3, khi đó lặp lại các lập luận như trên ta cũng được mâu thuận.

Như vậy tất cả các trường hợp đầu không tìm được n thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 24. Cho a và b là các só nguyên khác nhau thỏa mãn $ab(a+b)$ chia hết cho a^2+ab+b^2. Chứng minh rằng $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Lời giải

Gọi $d = (a,b)$. Khi đó tồn tại các số nguyên x, y sao cho $a = dx; b = dy$ với $(x,y) = 1$.

Do $ab(a+b)$ chia hết cho a^2+ab+b^2 nên suy ra $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \in Z$

Suy ra ta được $\dfrac{dxy(x+y)}{x^2+xy+y^2} \in Z$. Do đó $dxy(x+y)$ chia hết cho x^2+xy+y^2

Từ $(x,y) = 1$ ta suy ra được $(x^2+xy+y^2, x) = (y^2, x) = 1$ và $(x^2+xy+y^2, y) = 1$

Cũng từ $(x,y) = 1$ ta được $(x+y, y) = 1$ nên $(x^2+xy+y^2, x+y) = (y^2, x+y) = 1$

Từ đó ta được d chia hết cho x^2+xy+y^2 nên $d \ge x^2+xy+y^2$.

Ta có $|a-b|^3 = d^3|x-y|^3 = d^2(x^2+xy+y^2).d|x-y| > d^2.(x^2+xy+y^2)$

Mặt khác $d^2(x^2+xy+y^2) > d^2xy = ab$.

Do đó ta suy ra được $|a-b|^3 > ab$ hay $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Ví dụ 25. Cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của $m+n$ và m^2+n^2.

Lời giải

Đặt $A = m+n$ và $B = m^2+n^2$. Gọi d là ước chung lớn nhất của A và B với $d \ge 1$.

Khi đó ta có $A \vdots d; B \vdots d$ hay ta được $m+n \vdots d; m^2+n^2 \vdots d$.

Ta lại có $A^2 - B = (m+n)^2 - (m^2+n^2) = 2mn$. Mà $(A^2 - B) \vdots d$ nên suy ra $2mn \vdots d$.

Lại có $m+n \vdots d$ nên $2n(m+n) \vdots d \Rightarrow 2mn + 2n^2 \vdots d$

Kết hợp với $2mn \vdots d$ ta được $2n^2 \vdots d$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $2m^2 \vdots d$.

Theo bài ra thì m và n nguyên tố cùng nhau nên m và n không cùng tính chẵn. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ, khi đó $m+n$ là số lẻ nên từ $m+n$ chia hết cho d ta suy ra được d là số lẻ. Từ đó ta được m^2 và n^2 cùng chia hế cho d. Mà ta lại có m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d = 1$.
- Trường hợp 2: Cả hai số m và n đều là số lẻ, khi đó từ $m+n$ là số chẵn nên từ $m+n$ chia hết cho d với d lớn nhất ta suy ra được d là số chẵn.

Đặt $d = 2d'$, khi đó từ $2m^2 \vdots d$ và $2n^2 \vdots d$ ta được $m^2 \vdots d'$ và $n^2 \vdots d'$.

Do m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d' = 1$, do đó $d = 2$.

Vậy ta có kai kết quả như sau:

+ Nếu trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ thì $(m+n, m^2+n^2) = 1$

+ Nếu cả hai số m và n cùng lẻ thì $(m+n, m^2+n^2) = 2$.

Ví dụ 26. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $(ac+bd) \vdots (a^2+b^2)$.

Chứng minh rằng: $(a^2+b^2, c^2+d^2) > 1$.

Lời giải

Ta có $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Ta sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh bài toán.

Thật vậy, giả sử $(a^2+b^2, c^2+d^2) = 1$. Khi đó ta xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu a^2+b^2 không phải là số chính phương, khi đó tồn tại một ước p là số nguyên tố và có số mũ lẻ, chẳng hạn là $p^{2k+1}\ (k \in N)$. Do đó $a^2+b^2 \vdots p^{2k+1}$

Từ $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ và giả thiết ta suy ra được $(ad-bc)^2 \vdots (a^2+b^2)$

Do đó $(ad-bc)^2 \vdots p^{2k+1}$ nên $(ad-bc)^2 \vdots p^{2k+2}$

Lại có $(ac+bd) \vdots (a^2+b^2)$ nên $(ac+bd) \vdots p^{2k+1}$ nên $(ac+bd)^2 \vdots p^{4k+2}$

Từ đó suy ra $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 \vdots p^{2k+2}$ nên ta được $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \vdots p^{2k+2}$.

Từ $(a^2+b^2, c^2+d^2) = 1$ và p là số nguyên tố ta được $(p, c^2+d^2) = 1$ nên $(p^{2k+2}, c^2+d^2) = 1$.

Do đó ta được $a^2+b^2 \vdots p^{2k+2}$, điều này vô lí.

- Trường hợp 2: Nếu a^2+b^2 là một số chính phương, khi đó $a^2+b^2 = t^2\ (t \in N^*)$.

Ta có $(ac+bd)\vdots(a^2+b^2)$ nên $ac+bd\vdots t^2$ hay $ac+bd=t^2x\left(x\in N^*\right)$

Từ $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ ta suy ra $(ad-bc)^2\vdots t^2$ nên $ad-bc\vdots t$.

Đặt $ad-bc=ty\left(y\in N^*\right)$.

Như vậy ta được $\begin{cases}ac+bd=t^2x\\ad-bc=ty\end{cases}\Rightarrow d(ac+bd)-c(ad-bc)=dt^2x-cty=t(dtx-cy)$

Do đó $b(c^2+d^2)=t(dtx-cy)$ nên $b(c^2+c^2)\vdots t$.

Mà ta có $(a^2+b^2,c^2+d^2)=1$ nên $(t,c^2+d^2)=1$.

Do đó $b\vdots t$ hay $b\ge t=\sqrt{a^2+b^2}>b$, điều này vô lí.

Như vậy cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn. Do đó điều giả sử ban đầu là sai.

Từ đó ta có $(a^2+b^2,c^2+d^2)>1$, bai toán được chứng minh.

Ví dụ 27. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n=a^2+b^2$ với a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và ab chia hết cho số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh a và b bằng nhau hoặc là hai số nguyên dương liên tiếp.

Thật vậy, trước hết ta giả sử $a=b$, khi đó do $(a,b)=1$ nên suy ra $a=b=1$.

Với $a=b=1$ ta được $n=2$, khi đó không có số nguyên tố nào nhỏ hơn $\sqrt{2}$.
Như vậy $n=2$ là một giá trị cần tìm.

Bây giờ ta giả sử $a>b$, khi đó ta có $(a-b)^2<a^2+b^2=n$. Khi đó $a-b<\sqrt{n}$.

Từ đó nếu $a-b\ne 1$ thì $a-b$ có một ước số nguyên tố p và khi đó thì theo giả thiết $ab\vdots p$.

Mà $(a,b)=1$ nên suy ra a hoặc b chia hết cho p. Mà $a-b$ chia hết cho p nên cả a, b đều chia hết cho p. Từ đó suy ra p là một ước chung của a và b, điều này mâu thuẫn với $(a,b)=1$.

Từ đó ta suy ra được a, b là hai số nguyên dương liên tiếp hay $a=b+1$.

Mặt khác ta có $(b-1)^2<b^2<n$. Giả sử p là ước nguyên tố của $b-1$, khi đó $ab=b(b+1)$ chia hết cho mọi số nguyên tố p. Do $b-1$ và b nguyên tố cùng nhau nên b không thể chia hết cho p. Từ đó suy ra $b+1$ chia hết cho p, do đó ta được $p=2$. Ngoài ra nếu $b-1$ chia hết cho 4 thì $b(b+1)$ không chia hết cho 4 nên ta được $b-1\in\{0;1;2\}$ do đó $b\in\{1;2;3\}$.

Đến đây tương ứng ta tìm được $a\in\{2;3;4\}$. Do đó ta được các cặp số $(a;b)=(2;1),(3;2),(4;3)$.

Từ đó ta được $n\in\{5;13;25\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n\in\{2;5;13;25\}$.

Ví dụ 28. Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2b;\ b^2c;\ c^2a$.

Lời giải

Cách 1. Gọi $d=(a,b,c)$. Dễ thấy nếu bộ ba số nguyên $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì bộ ba số nguyên $\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d};\frac{c}{d}\right)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán với $(a,b,c)=1$. Giả sử $(a,b)=s>1$. Nếu p là một ước nguyên tố của s thì a và b chia hết cho p. Theo giả thiết thì $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2b;\ b^2c;\ c^2a$ nên $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho p.

Từ đó ta được c^3 chia hết cho p nên c chia hết cho p. Như vậy p là một ước chung của a, b, c. Điều này trái với giả thiết $(a,b,c)=1$. Như vậy ta được $(a,b)=1$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $(b,c)=1;(c,a)=1$

Do $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2b;\ b^2c;\ c^2a$ nên $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2;\ b^2;\ c^2$

Và từ $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ ta được $(a^2,b^2)=(b^2,c^2)=(c^2,a^2)=1$

Suy ra $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2b^2c^2$, do đó $a^3+b^3+c^3\ge a^2b^2c^2$.

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\le b\le c$.

Khi đó ta có $3c^3\ge a^3+b^3+c^3\ge a^2b^2c^2\Rightarrow c\ge\frac{a^2b^2}{3}$.

Giả sử $a>1$, khi đó $\frac{a^2b^2}{3}>b^2\ge b^2+a(a-b)=a^2-ab+b^2$ hay $c>a^2+b^2-ab$.

Mặt khác do $b\ge a\ge 2$ nên $b^2\ge 2b\ge a+b$. Mà ta có $c>b^2$ nên $c>a+b$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{c^2}=\frac{a^3+b^3}{c^2}<1$.

Điều này mâu thuẫn với $a^3+b^3\,\vdots\,c^2\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{c^2}$ là số nguyên.

Như vậy ta được $a=1$, khi đó ta được $1+b^3+c^3\,\vdots\,b^2c^2$ .Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $b=c$, ta suy ra được $b=c=1$. Do đó bộ số nguyên dương $(1;1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $b=1$, ta cũng được bộ số nguyên dương $(1;1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $b=2$, ta suy ra được $c=3$. Do đó bộ số nguyên dương $(1;2;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $c>b\ge 3$, khi đó từ $1+b^3+c^3\ge b^2c^2$ ta được $2c^3>1+b^3+c^3$, suy ra $2c>b^2$ hay $c>\frac{b^2}{2}$.

Từ $2c > b^2$ ta được $2c > b^2 - b + 1$ hay $\frac{b^2 - b + 1}{c} < 1$.

Mặt khác nếu $b \geq 5$ thì ta có $\frac{c}{2} > \frac{b^2}{4} > b + 1$ hay $\frac{b+1}{c} < \frac{1}{2}$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{(b+1)(b^2 - b + 1)}{c^2} < 1$, điều này mâu thuân với $\frac{b^3 + 1}{c^2}$ là số nguyên dương.

Từ đó ta được $b = 3$ hoặc $b = 4$. Thử trực tiếp ta thấy không có c nguyên dương thỏa mãn.

Như vậy bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán là $(k;k;k),(k;2k;3k)$ và các hoán vị của chúng với k là một số nguyên dương.

Cách 2. Gọi $d = (a,b)$, khi đó ta được $a^2b \vdots d^3$. Do đó $a^3 + b^3 + c^3 \vdots d^3$ và $c \vdots d$.

Suy ra $(a,b) = (b,c) = (c,a) = (a,b,c)$

Đặt $(m;n;l) = \left(\frac{a}{d};\frac{b}{d};\frac{c}{d}\right)$, thế thì bộ ba số $(m;n;l)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán và $(m,n,l) = 1$

Từ đó ta suy ra được $m^3 + n^3 + l^3 \vdots m^2n^2l^2$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $l \geq n \geq m$.

Ta có $3l^3 \geq m^3 + n^3 + l^3 \geq m^2n^2l^2$, do đó $l \geq \frac{m^2n^2}{3}$.

Mà ta có $m^3 + n^3 \vdots l^2$ nên ta cũng có $2n^3 \geq m^3 + n^3 \geq l^2 \geq \frac{m^4n^4}{9}$.

Nếu $m \geq 2$ thì $n \leq 2.\frac{9}{2^4} < 2 \leq m$, điều này mâu thuân với $n \geq m$. Do đó $m = 1$.

Nếu $n \geq 2$ thì $l > n$ vì n và l nguyên tố cùng nhau.

Do đó ta được $3l_3 > l^3 + n^3 + 1 \geq l^2n^2$ và $l > \frac{n^2}{2}$, do đó $n^3 + 1 \geq l^2 > \frac{n^2}{4}$ và $n \leq 4$.

Đến đây ta xét từng trường hợp của n thì thu được kết quả như trên.

Ví dụ 29. Tìm số nguyên dương n để phương trình sau có nghiệm hữu tỉ:
$x^n + (x+2)^n + (x-2)^n = 0$.

Lời giải

Để phương trình $x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$ có nghiệm thì n phải là số nguyên dương lẻ.

Ta xét hai trường hợp sau:

- Với $n = 1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $x + x + 2 + 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = -4$, thỏa mãn.
- Với $n > 1$. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}, p \in Z; q \in N^*$ và $(p,q) = 1$.

Thay $x=\dfrac{p}{q}$ vào phương trình đã cho ta được $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n+\left(\dfrac{p}{q}+2\right)^n+\left(2-\dfrac{p}{q}\right)^n=0$.

Hay ta được $p^n+\left(p+2q\right)^n+\left(2q-p\right)^n=0$.

Do n là số lẻ nê ta có $\left[\left(p+2q\right)^n+\left(2q-p\right)^n\right]\vdots\left[\left(p+2q\right)+\left(2q-p\right)\right]$

Hay ta được $\left[\left(p+2q\right)^n+\left(2q-p\right)^n\right]\vdots 4q$, từ đó suy ra $p^n\vdots 4q$.

Mà ta có $\left(p,q\right)=1$ nên từ $p^n\vdots 4q$ ta suy ra được $q=1; p=2m$ với m là số nguyên.

Thay vào $p^n+\left(p+2q\right)^n+\left(2q-p\right)^n=0$ ta được $\left(2m\right)^n+\left(2+2m\right)^n+\left(2-2m\right)^n=0$

Hay ta được $m^n+\left(1+m\right)^n+\left(1-m\right)^n=0$.

Lại do n là số lẻ nên $\left(1+m\right)^n+\left(1-m\right)^n\vdots 2$ nên $m^n\vdots 2$ nên m là số nguyên chẵn. Suy ra $m^n\vdots 4$.

Do n là số lẻ nên $\left(1+m\right)^n\equiv 1+m\left(\bmod 4\right);\left(1-m\right)^n\equiv 1-m\left(\bmod 4\right)$

Suy ra $\left(1+m\right)^n+\left(1-m\right)^n\equiv 2\left(\bmod 4\right)$. Điều này mâu thuẫn với $m^n+\left(1+m\right)^n+\left(1-m\right)^n=0$.

Do đó khi $n>1$ thì phương trình trên không có nghiệm hữu tỉ.

Vậy với $n=1$ thì phương trìn đãcho có nghiệm hữu tỉ.

Ví dụ 30. Cho m và n là hai số tự nhiên với $n>m\ge 1$. Biết rằng khi viết trong hệ thập phân thì ba chữ số tận cùng của 1978^n và 1978^m bằng nhau. Tìm m và n sao cho $m+n$ nhỏ nhất.

Lời giải

Do ba chữ số tận cùng của 1978^n và 1978^m bằng nhau, lại có $n>m\ge 1$ nên ta được

$$1978^n-1978^m=1978^m\left(1978^{n-m}-1\right)\vdots 1000$$

Chú ý là $1000=8.125$ và 1978^m là số chẵn nên $1978^{n-m}-1$ là số lẻ, do đó 1978^m chia hết cho 8 và $1978^{n-m}-1$ chia hết cho 125.

Dễ thấy $1978=2.989$ nên để 1978^m chia hết cho 8 thì $m\ge 3$.

Lại từ $1978^{n-m}-1$ chia hết cho 125 ta được $1978^{n-m}\equiv 1\left(\bmod 5\right)\Rightarrow\left(-2\right)^{n-m}\equiv 1\left(\bmod 5\right)$

Do đó $16^{\frac{n-m}{4}}\equiv 1\left(\bmod 5\right)$, suy ra $\dfrac{n-m}{4}\in N^*$ hay $n-m=4k, k\in N^*$.

Ta cần xác định k nhỏ nhất để $198^{4k}-1\vdots 125$.

Ta có $1978\equiv -22\left(\bmod 125\right)\Rightarrow 1978^4\equiv 22^4\left(\bmod 125\right)\Rightarrow 1978^4\equiv\left(121.4\right)^2\left(\bmod 5\right)$

Từ đó ta được $1978^4\equiv 6\left(\bmod 125\right)\Rightarrow 1978^{4k}\equiv 6^k\left(\bmod 125\right)$

Ta lại có $6^k=\left(5+1\right)^k\equiv 1+5k+\dfrac{k\left(k-1\right)}{2}.5^2\left(\bmod 125\right)$

Nên suy ra $1978^{n-m}-1\equiv 5k+\frac{k(k-1)}{2}.5^2\pmod{125}$.

Do đó từ $1978^{n-m}-1$ chia hết cho 125 ta được $5k+\frac{k(k-1)}{2}.5^2$ chia hết cho 125

Hay ta được k chia hết cho 25. Ta chọn k nhỏ nhất là 25. Từ đó ta suy ra được $n-m=100$.

Để tổng $m+n$ nhỏ nhất thì chọn m và n đồng thời nhỏ nhất. Do đó từ $n-m=100$ và $m\ge 3$ ta chọn được $m=3;n=103$ nên để tổng $m+n$ có giá trị nhỏ nhất là 106.

Ví dụ 31. Chữ số hàng đơn vị trong hệ thập phân của số $M=a^2+ab+b^2$ (với a, b là các số tự nhiên khác 0) là 0

a) Chứng minh M chia hết cho 20. b) Tìm chữ số hàng chục của M.

Lời giải

a) Vì chứ số tận cùng của M là 0 nên M chia hết cho 5. Xét các trường hợp sau

+ Cả a và b đều là số lẻ nên a^2 và b^2 đều là số lẻ, suy ra M là số lẻ, trường hợp này không xẩy ra

+ Một trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lẻ, b là số chẵn. Khi đó a^2 là số lẻ và b^2 là số chẵn nên M là số lẻ, trường hợp này cũng không xẩy ra.

Do đó cả hai số a và b đều là số chẵn. Khi đó M chia hết cho 4, từ đó suy ra M chia hết cho 20

b) Ta có $\left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)=a^3-b^3\,\vdots\,5\Rightarrow\left(a^3-b^3\right)\left(a^3+b^3\right)\vdots\,5$

Lại có $a^6-a^2=a^2(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)\vdots\,5$, tương tự ta có $b^6-b^2\,\vdots\,5$

Do đó ta được $a^2-b^2\,\vdots\,5$, từ đó ta được $ab(a-b)\,\vdots\,5$ nên ta có

$$ab(a-b)(a-b)\,\vdots\,5\Leftrightarrow ab\left(a^2-2ab+b^2\right)\vdots\,5$$

Suy ra $abM\,\vdots\,5$. Từ đó suy ra $ab.3ab\,\vdots\,5\Rightarrow ab\,\vdots\,5$

Ta có $M=a^2+ab+b^2\,\vdots\,5\Rightarrow bM=ab(a+b)+b^3\,\vdots\,5$ mà $ab(a+b)\,\vdots\,5$ nên $b^3\,\vdots\,5\Rightarrow b\,\vdots\,5$

Suy ra $a^2=M-b(a+b)\,\vdots\,5\Rightarrow a^2\,\vdots\,5\Rightarrow a\,\vdots\,5$ nên $M\,\vdots\,25$

Lại có 4 và 25 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $M\,\vdots\,100$ hay chứ số hàng chục của M là 0.

Ví dụ 32. Phân tích số tự nhiên 2003^{2004} thành tích của hai số tự nhiên a và b. Hỏi $a+b$ có chia hết cho 2004 không?

Lời giải

Do 2003 là số nguyên tố nên khi phân tích số 2003^{2004} thành tích của hai số a và b thì mỗi số là một lũy thừa của 2003. Điều này có nghĩa là $a=2003^m;b=2003^n$ với $m,n\in N^*$ và $m+n=2004$.

Do $m+n$ là số chẵn nên m bà n có cùng tính chẵn lẻ.

Lại thấy $2003.2003=2002.2004+1$ và tích $(2004x+1)(2004y+1)$ có dạng $2004z+1$ với x, y, z là số tự nhiên. Ta xét các trường hợp sau

• Trường hợp 1: Với m và n cùng là số chẵn, khi đó ta đặt $m=2k$ và $n=2l$, với k và l là các số tự nhiên. Ta có

$$a = 2003^m = 2003^{2k} = \left(2003^2\right)^k = \left(2002.2004+1\right)^k = 2004p+1$$

$$b = 2003^n = 2003^{2l} = \left(2003^2\right)^l = \left(2002.2004+1\right)^l = 2004q+1$$

Do đó $a+b = 2004\left(p+q\right)+2$ nên không chia hết cho 2004.

- Trường hợp 2: Với m và n cùng là số lẻ, khi đó đặt $m = 2k+1$ và $n = 2l+1$, với k và l là các số tự nhiên. Ta có

$$a = 2003^m = 2003^{2k+1} = 2003.\left(2003^2\right)^k = 2003.\left(2002.2004+1\right)^k = 2004p+2003$$

$$b = 2003^n = 2003^{2l+1} = 2003.\left(2003^2\right)^l = 2003.\left(2002.2004+1\right)^l = 2004q+2003$$

Do đó $a+b = 2004\left(p+q+1\right)+2002$ nên không chia hết cho 2004.

Vậy tổng $a+b$ không chia hết cho 2004.

Nhận xét: *Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát như sau: Cho p là số nguyên tố và n là số tự nhiên thỏa mãn* p^n *phân tích được thành tích của hai số tự nhiên a và b. Khi đó* $a+b$ *chia hết cho* $p+1$ *khi n là số chẵn và* $a+b$ *không chia hết cho* $p+1$ *khi n là số lẻ.*

Ví dụ 33. Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}=\frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Chứng minh rằng b chia hết cho 2431.

Lời giải

Do mẫu các số hạng của tổng là 2; 3; 4;…; 18. Gọi M là bội chung nhỏ nhất của 2; 3; 4;…; 18.

Đặt $M = k_1 = 2k_2 = 3k_3 = ... = 18k_{18}$.

Khi đó quy đồng mẫu các phân số ta được

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}=\frac{k_1+k_2+k_3+...+k_{18}}{M}=\frac{a}{b}$$

Do 11 là số nguyên tố và các các bội số khác 0 của nó đều lớn hơn 18 nên trong các số $k_1;k_2;...;k_{18}$ có duy nhất một số không chia hết cho 11 còn các số còn lại thì chia hết cho 11.

Từ đó suy ra $k_1+k_2+...+k_{18}$ không chia hết cho 11.

Từ đó lập luận tương tự ta cũng được $k_1+k_2+...+k_{18}$ không chia hết cho 13 và 17..

Mặt khác hiển nhiên M cia hết cho 11; 13; 17.

Do $\frac{k_1+k_2+k_3+...+k_{18}}{M}=\frac{a}{b}$ mà $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên ta được $\begin{cases} k_1+k_2+...+k_{18}=ta \\ M=tb \end{cases}$, với t là một số nguyên dương. Từ đó ta được t không chia hết cho 11; 13; 17.

Suy ra b chia hết cho 11; 13; 17. Do 11; 13; 17 là các số nguyên tố nên ta được b chia hết cho $11.13.17$ hat b chia hết cho 2431.

Nhận xét: *Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát như sau: Nếu p là một số nguyên tố và n là số tự nhiên thỏa mãn* $p < n < 2p$ *thỏa mãn* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=\frac{a}{b}$ *với* $\frac{a}{b}$ *là phân số tối giản thì b chia hết cho p.*

Ví dụ 34. Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Lời giải

Chú ý rằng $15 = 3.5$ và $(3,5) = 1$, nên ta quy bài toán về chứng minh x chia hết cho 3 và cho 5.

- Chứng minh x chia hết cho 3.

Đặt $y^5 = a$ với a là số nguyên dương. Khi đó ta có $2x^2 - 1 = a^3$ hay $2x^2 = (a+1)(a^2 - a + 1)$.

Gọi $d = (a+1, a^2 - a + 1)$, khi đó ta có $\begin{cases} a+1 \vdots d \\ a^2 - a + 1 \vdots d \end{cases}$

Từ đó ta được $a^2 - a + 1 - (a+1)(a-2) \vdots d$ nên $3 \vdots d$, suy ra $d = 1$ hoặc $d = 3$.

+ Nếu $d = 1$ thì từ $2x^2 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ ta được $\begin{cases} a+1 = 2 \\ a^2 - a + 1 = x^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+1 = x^2 \\ a^2 - a + 1 = 2 \end{cases}$

Dễ thấy $a^2 - a + 1 = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$ không có nghiệm nguyên dương.

Do đó ta có $\begin{cases} a+1 = 2 \\ a^2 - a + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x = 1 \end{cases}$, loại vì không thỏa mãn $x > 1$.

+ Nếu $d = 3$, khi đó từ $2x^2 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ ta được $2x^2 \vdots 9$ nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$.

- Chứng minh x chia hết cho 5.

Đặt $y^3 = b$, với b là số nguyên dương.

Khi đó ta có $2x^2 - 1 = b^5$ hay $2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$.

Gọi $d = (b+1, b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$. Do đó ta được $\begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots d \end{cases}$

Khi đó $(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b+1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) \vdots d$ nên $5 \vdots d$, suy ra $d = 1$ hoặc $d = 5$.

+ Nếu $d = 1$ thì từ $2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ ta được

$$\begin{cases} b+1 = 2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b+1 = x^2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = 2 \end{cases}$$

Dễ thấy $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = 2 \Leftrightarrow b^4 - b^3 + b^2 - b - 1 = 0$ không có nghiệm nguyên dương

Do đó ta có $\begin{cases} b+1 = 2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ x = 1 \end{cases}$, loại vì không thỏa mãn $x > 1$.

+ Nếu $d=5$, khi đó từ $2x^2=\left(b+1\right)\left(b^4-b^3+b^2-b+1\right)$ ta được $2x^2 \vdots 25$ nên $x \vdots 5$.

Vậy ta được $x \vdots 15$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 35. Cho a và b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện x^2+y^2+1 chia hết cho $2xy+1$. Chứng minh rằng: $xy\left(x-y\right)=0$.

Lời giải

Do x^2+y^2+1 chia hết cho $2x+1$ nên ta đặt $k=\dfrac{x^2+y^2+1}{2xy+1}$ với k là số nguyên dương.

Nhận thấy khi $x=y$ thì $k=1$ và ngược lại vẫn đúng. Do đó ta đi chứng minh $k=1$.

Giả sử cặp số nguyên dương $\left(a_0;b_0\right)$ với a_0+b_0 bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \ge b_0$.

Xét phương trình $k=\dfrac{x^2+b_0^2+1}{2xb_0+1}$ hay $x^2-2kb_0x+b_0^2+1-k=0$.

Khi đó ta có $\Delta^{'}=b_0^2k^2-b_0^2-1+k=\left(k-1\right)\left[b_0^2\left(k+1\right)+1\right]\ge 0$

Do đó phương trình luôn có nghiệm. Dễ thấy a_0 là một nghiệm của phương trình nên theo định lí Vi – et thì phương trình còn có thêm một nghiệm nữa. Gọi nghiệm đó là a_1.

Khi đó ta có $\begin{cases} a_0+a_1=2kb_0 \\ a_0.a_1=b_0^2-k+1 \end{cases}$

Từ hệ thức thứ nhất ta được a_1 là số nguyên.

Giả sử $a_1<0$, khi đó $a_1^2-2kb_0a_1+b_0^2+1-k>a_1^2+2kb_0+b_0^2+1-k>0$, điều này vô lí vì a_1 là một nghiệm của phương trình $x^2-2kb_0x+b_0^2+1-k=0$.

Từ đó suy ra $a_1 \ge 0$. Ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: Nếu $a_1=0$, khi đó ta được $a_1b_0=0$, điều này dẫn đến $xy=0$.
- Trường hợp 2: Nếu $a_1>0$, khi đó nếu $a_0>b_0$ thì ta được

$$a_1+b_0=\frac{b_0^2-k+1}{a_0}+b_0<\frac{a_0^2-1+1}{a_0}+b_0=a_0+b_0$$

Đều này mâu thuẫn với các chọn $\left(a_0;b_0\right)$ với a_0+b_0 bé nhất.

Từ đó ta được $a_0=b_0$. Khi đó ta được $k=\dfrac{2a_0^2+1}{2a_0^2+1}=1$. Từ đây ta suy ra được $x=y$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $xy\left(x-y\right)=0$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 36. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $\left(4a^2-1\right)^2$ chia hết cho $4ab-1$. Chứng minh rằng $a=b$.

Lời giải

Trong ví dụ trước các số hạng đều có bậc hai, khi đó ta đưa về phương trình bậc hai một cách dễ dàng. Trong ví dụ này có số hạng có bậc bốn nên ta không thể đưa trực tiếp về phương trình bậc hai. Do đó ta cần thay đổi điều kiện của bài toán để đưa về dạng tốt hơn.

Ta có $\left(4a^2-1\right)^2$ chia hết cho $4ab-1$ nên $b^2\left(4a^2-1\right)-4a^3b\left(4ab-1\right)$ chia hết cho $4ab-1$.

Từ đó suy ra

$$\left[b^2\left(16a^4-8a^2+1\right)-16a^3b^2+4a^3b\right]\vdots\left(4ab-1\right)$$
$$\Rightarrow\left(-8a^2b^2+b^2+4a^3b\right)\vdots\left(4ab-1\right)\Rightarrow\left[-8a^2b^2+b^2+4a^3b+2ab\left(4ab-1\right)\right]\vdots\left(4ab-1\right)$$
$$\Rightarrow\left(b^2-2ab+4a^3b\right)\vdots\left(4ab-1\right)\Rightarrow\left[b^2-2ab+4a^3b-a^2\left(4ab-1\right)\right]\vdots\left(4ab-1\right)$$
$$\Rightarrow\left(a^2-2ab+b^2\right)\vdots\left(4ab-1\right)$$

Thực chất của quá trình biến đổi trên là hạ các số hạng bằng cách triệt tiêu các số hạng có bậc lớn hơn 2.

Đến đây ta quy bài toán về chứng minh $a=b$ khi biết $\left(a^2-2ab+b^2\right)\vdots\left(4ab-1\right)$.

Đặt $k=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4ab-1}$, khi đó k là số tự nhiên.

+ Nếu $k=0$, khi đó ta được $\left(a-b\right)^2=0$ nên $a=b$

+ Nếu $k>0$, khi đó giả sử cặp số nguyên dương $\left(a_0;b_0\right)$ thỏa mãn bài toán và a_0+b_0 nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0\ge b_0$.

Xét phương trình $\dfrac{x^2-2b_0x+b_0^2}{4xb_0-1}=k$ hay $x^2-\left(2b_0+4kb_0\right)x+b_0^2+k=0$.

Khi đó a_0 là một nghiệm của phương trình trên. Do đó theo định lý Vi – et thì phương trình còn có một nghiệm nữa. Gọi nghiệm đó là a_1 thì ta được $\begin{cases}a_0+a_1=2b_0+4kb_0\\ a_0.a_1=b_0^2+k\end{cases}$

Từ đây ta được a_1 là số nguyên dương. Khi đó $a_1\ge a_0$ nên $\dfrac{b_0^2+k}{a_0}\ge a_0\Leftrightarrow k\ge a_0^2-b_0^2$.

Hay ta được $\dfrac{a_0^2-2a_0b_0+b_0^2}{4a_0b_0}\ge a_0^2-b_0^2$ nên $a_0-b_0\ge\left(a_0+b_0\right)\left(4a_0b_0-1\right)\ge a_0+b_0$, điều này là vô lí do a_0 và b_0 là các số nguyên dương.

Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét: *Đặt* $a=k;b=2n$ *với k và n là các số nguyên dương. Khi đó từ* $a=b$ *ta được* $k=2n$. *Từ đó ta phát biểu được bài toán: Cho k là số nguyên dương. Chứng minh rằng để tại số nguyên dương n sao cho* $\left(4k^2-1\right)^2$ *chia hết cho* $8kn-1$ *thì k phải là số chẵn.*

Ví dụ 37. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n > 4$ luôn tồn tại cặp số tự nhiên x, y với $\frac{n}{2} \le x < n$ và $\frac{n}{2} \le y < n$ thỏa mãn $x^2 - y$ chia hết cho n.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Với $5 \le n \le 8$ hay ta được $2^2 + 1 \le n < 3^2$, khi đó ta chọn $y = 2^2$ và $x = n - 2$.

Dễ thấy x và y thỏa mãn các điều kiện $\frac{n}{2} \le x < n$ và $\frac{n}{2} \le y < n$.

Ta có $x^2 - y = (n-2)^2 - 2^2 = n^2 - 4n + 4 - 4 = n^2 - 4n = n(n-4)$ chia hết cho n.

- Với $n = 9$, khi đó ta chọn $x = 5; y = 7$ thì x và y thỏa mãn $\frac{n}{2} \le x < n$ và $\frac{n}{2} \le y < n$.

Ta có $x^2 - y = 5^2 - 7 = 18$ chia hết cho 9.

- Với $n \ge 10$, khi đó luôn tồn tại số tự nhiên k sao cho $k^2 + 1 \le n \le (k+1)^2$.

Từ đó ta được $k \ge 3$ và do $2k < k^2 < n$ nên $k < \frac{n}{2}$.

Ta chọn $y = k^2$ và $x = n - k$, dễ thấy $\frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} < n - k < n$ hay ta được $\frac{n}{2} < x < n$.

Mặt khác $y = k^2 < k^2 + 1 \le n$.

Lại có $2y - n \ge 2y - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1 > 0 \Rightarrow y > \frac{n}{2}$

Như vậy các số x và y thỏa mãn các điều kiện $\frac{n}{2} \le x < n$ và $\frac{n}{2} \le y < n$.

Ta có $x^2 - y = (n-k)^2 - k^2 = n^2 - 2nk + k^2 - k^2 = n^2 - 2nk = n(n-2k)$ chia hết cho n.

Vậy với $n > 4$ ta luôn tìm được các số x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 38. Tìm bộ các số nguyên x, y, z lớn hơn 1 thỏa mãn các điều kiện:
$xy + 1 \vdots z;\ yz + 1 \vdots x;\ zx + 1 \vdots y$.

Lời giải

Cách 1. Từ $xy + 1 \vdots z;\ yz + 1 \vdots x;\ zx + 1 \vdots y$ ta suy ra được $(xy+1)(yz+1)(zx+1) \vdots xyz$

Hay ta được $\left[x^2y^2z^2 + xyz(x+y+z) + xy + yz + xz + 1\right] \vdots xyz$ nên $(xy + yz + xz + 1) \vdots xyz$.

Từ đó ta được $xy + yz + zx + 1 \ge xyz$

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge z \ge 2$.

Do đó $xyz \le xy + yz + zx + 1 \le 3xy + 1 < 3xy + xy = 4xy$ nên suy ra $2 \le z < 4$, suy ra $z \in \{2; 3\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $z = 2$, khi đó từ $(xy + yz + xz + 1) \vdots xyz$ ta được $xy + 2x + 2y + 1 \vdots 2xy$.

Do đó $xy+2x+2y+1\ge 2xz$ nên $xy\le 2x+2y+1\le 4x+1<5x\Rightarrow y<5$.

Do $y\ge z=2$ nên suy ra $y\in\{2;3;4\}$.

+ Khi $y=2$, thay vào $xy+2x+2y+1\vdots 2xy$ ta được $4x+5\vdots 4x\Rightarrow 5\vdots 4x$, không thỏa mãn.

+ Khi $y=3$, thay vào $xy+2x+2y+1\vdots 2xy$ ta được $5x+7\vdots 6x$, suy ra $5x+7\ge 6x\Rightarrow 7\ge x$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge y=3$ ta được $x\in\{3;4;5;6;7\}$. Thử lần lượt các trường hợp ta thấy $x=7$ thỏa mãn.

+ Khi $y=4$, thay vào $xy+2x+2y+1\vdots 2xz$ ta được $10x+9\vdots 8x\Rightarrow 10x+9\vdots 2x\Rightarrow 9\vdots 2x$, không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Với $z=3$, khi đó từ $(xy+yz+xz+1)\vdots xyz$ ta được $xy+3x+3y+1\vdots 3xz$

Do đó $xy+3x+3y+1\ge 3xz$ nên $2xy\le 3x+3y+1\le 6x+1<7x\Rightarrow 2y<7\Rightarrow y\le 3$.

Kết hợp với điều kiện $y\ge z=3$ ta suy ra được $y=3$.

thay vào $xy+3x+3y+1\vdots 3xz$ ta được $6x+10\vdots 9x\Rightarrow 6x+10\vdots 3x\Rightarrow 10\vdots 3x$, không thỏa mãn

Vậy bộ ba số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z)=(7;3;2)$ và các hoán vị.

Cách 2. Từ $xy+1\vdots z;\ yz+1\vdots x;\ zx+1\vdots y$ ta suy ra được $(xy+1)(yz+1)(zx+1)\vdots xyz$

Hay ta được $\left[x^2y^2z^2+xyz(x+y+z)+xy+yz+xz+1\right]\vdots xyz$ nên $(xy+yz+xz+1)\vdots xyz$.

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z\ge 2$.

Đặt $xy+yz+zx+1=kxyz\left(k\in N^*\right)$.

Ta có $kxyz=xy+yz+zx+1<xyz+xyz+xyz+xyz=4xyz\Rightarrow k<4$ nên ta được $k\in\{1;2;3\}$.

- Với $k=1$, khi đó ta được $xy+yz+zx+1=xyz$ nên

$$xyz=xy+yz+zx+1<4xy\Rightarrow z<4\Rightarrow z\in\{2;3\}$$

+ Thay $z=2$ vào $xy+yz+zx+1=xyz$ ta được $xy-2x-2y=1\Leftrightarrow(x-2)(y-2)=5$.

Để ý là $x-2\ge y-2\ge 0$ nên ta suy ra được $\begin{cases}x-2=5\\y-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$.

Do đó ta được bộ số $(x;y;z)=(7;3;2)$ thỏa mãn bài toán.

+ Thay $z=3$ vào $xy+yz+zx+1=xyz$ ta được $2xy-3x-3y=1\Leftrightarrow(2x-3)(2y-3)=11$.

Để ý là $2x-3\ge 2y-3\ge 0$ nên ta suy ra được $\begin{cases}2x-3=11\\2y-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$, loại do không thỏa mãn $y\ge z$.

- Với $k=2$, khi đó ta được $xy+yz+zx+1=2xyz$ nên $2xyz=xy+yz+zx+1<4xy\Rightarrow z<2$.

Trường hợp này loại do không thỏa mãn $z\ge 2$

- Với $k=3$, khi đó ta được $xy+yz+zx+1=3xyz$ nên $3xyz=xy+yz+zx+1<4xy\Rightarrow 3z<4$.

Trường hợp này loại do không thỏa mãn $z \ge 2$

Vậy bộ ba số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z)=(7;3;2)$ và các hoán vị.

Ví dụ 39. Gọi n là số nguyên dương thỏa mãn 2n có 8 ước dương, 3n có 12 ước dương. Hãy xác định số ước dương của 12n.

Lời giải

Ta có nhận xét: Giả sử $A=a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$ với a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in N; \alpha, \beta, ..., \gamma \ge 1$.

Khi đó số các ước dương của A là $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$.

Chú ý là $8=7+1=(3+1)(1+1)=(1+1)(1+1)(1+1)$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $2n=p^7$ với p là số nguyên tố. Khi đó ta được $p=2$ nên $n=2^6$.

Do đó $3n=3.2^6$ có số ước dương là $(1+1)(6+1)=14$, trường hợp này loại.

- Trường hợp 2: Nếu $2n=p^3.q$ với p, q là các số nguyên tố khác nhau.

+ Nếu $q=2<p$, khi đó với $p=3$ thì $3n=3^4$ có số ước dương là $4+1=5$ và $p>3$ thì $3n=3p^3$ có số ước dương là $(1+1)(3+1)=8$, cả hai khả năng đều không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=2<q$, thì khi đó với $q=3$ thì $3n=2^2.3^2$ có số ước dương là $(2+1)(2+1)=9$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $q>3$ thì $3n=2^2.3.q$ có số ước dương là $(2+1)(1+1)(1+1)=12$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó $12n=2^4.3.q$ có số ước dương là $(4+1)(1+1)(1+1)=20$.

- Trường hợp 3: Nếu $2n=p.q.r$ với p, q, r là các số nguyên tố khác nhau. Khi đó giả sử r nhỏ nhất trong ba số p, q, r thì ta được $r=2$. Ta giả sử $q<p$, khi đó với $q=3$ thì $3n=3^2p$ có số ước dương là $(2+1)(1+1)=6$ và với $q>3$ thì $3n=3.p.q$ có số ước dương là $(1+1)(1+1)(1+1)=8$, cả hai khả năng đều không thỏa mãn bài toán.

Vậy số ước dương của 12n là 20.

Ví dụ 40. Cho các số nguyên a và b thỏa mãn $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2013$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $a-b$ cho 5.

Lời giải

Ta có $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2013$ chia hết cho 5 nên ta được

$$4a^2+4b^2+4ab+12(a+b)+12 \vdots 5 \Leftrightarrow (2a+b+3)^2+3(b+1)^2 \vdots 5$$

Đặt $x=2a+b+3; y=b+1$ thì ta được $x^2+3y^2 \vdots 5$.

Ta biết rằng một số chính phương khi chia cho 5 có các số dư là 0; 1; 4. Do đó ta xét các trường hợp sau

+ Nếu y^2 chia hết cho 5, khi đó x^2 cũng chia hết cho 5. Từ đó ta được

$$\begin{cases}(2a+b+3)^2 \vdots 5 \\ (b+1) \vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3 \vdots 5 \\ b+1 \vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3 \vdots 5 \\ 3(b+1) \vdots 5\end{cases} \Rightarrow (2a+b+3)-(3b+3) \vdots 5$$

Từ đó ta được $2(a-b) \vdots 5 \Rightarrow a-b \vdots 5$ (vì 2 và 5 nguyên tố cùng nhau)

Do đó dư trong phép chia $a-b$ cho 5 là 0.

+ Nếu y^2 chia cho 5 dư 1, khi đó x^2 chia cho 5 dư 2. Trường hợp này loại.

+ Nếu y^2 chia cho 5 dư 4, khi đó x^2 chia cho 5 dư 3. Trường hợp này loại.

Vậy dư trong phép chia $a-b$ cho 5 là 0.

Ví dụ 41. Tìm số nguyên dương n sao cho n có tất cả k ước tự nhiên $d_1; d_2; d_3; ...; d_n$ thỏa mãn điều kiện $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_n < n \ (k \geq 15)$, đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ ii) $(d_5+1)^3 = d_{15}+1$

Lời giải

Vì d_{15} là ước của n nên tồn tại $d_i \in N^*$ với $i \in \{1; 2; ...; k\}$ sao cho $d_i.d_{15} = n$

Mà ta có $n = d_{13}+d_{14}+d_{15}$ nên suy ra $0 < (d_i - 1)d_{15} = d_{13}+d_{14} < 2d_{15}$.

Từ đó ta được $0 < d_i - 1 < 2 \Rightarrow d_i = 2$.

Vì $d_1 = 1$ nên từ $d_i = 2$ ta suy ra được $i = 2$ và $n = 2d_{15}$ nên ta được $d_{16} = n$ hay $k = 16$.

Từ đó suy ra $n = 2d_{15} = d_3.d_{14} = d_4.d_{13}$ nên ta được $2(d_{13}+d_{14}) = d_3.d_{14} = d_4.d_{13}$.

Gọi $d = (d_{13}, d_{14})$, khi đó tồn tại các số tự nhiên p, q thỏa mãn $d_{13} = pd; d_{14} = qd$ và $(p,q) = 1$.

Thay vào đẳng thức $2(d_{13}+d_{14}) = d_3.d_{14} = d_4.d_{13}$ ta được

$$2d(p+q) = dqd_3 = dpd_4 \Rightarrow 2(p+q) = qd_3 = pd_4$$

Từ đó suy ra $\begin{cases}2p = q(d_3-2) \\ 2q = p(d_4-2)\end{cases}$.

Vì $d_{13} < d_{14}$ nên $p < q$, do đó $0 < q(d_3-2) = 2p < 2q \Rightarrow 0 < d_3 - 2 < 2 \Rightarrow d_3 = 3$.

Do đó ta được $2(p+q) = 2q \Rightarrow q = 2p \Rightarrow d_4 = 6$.

Mặt khác từ $(d_5+1)^3 = d_{15}+1$ ta có $2(d_5+1)^3 = 2(d_{15}+1) = n+2$.

Do đó suy ra $2(d_5^3 + 3d_5^2 + 3d_5) = n$. Do $d_3 = 3$ nên $n \vdots 3$ suy ra $d_5 \vdots 3$, dẫn đến $n \vdots 9$.

Mà $d_5 > d_4 = 6 \Rightarrow d_5 = 9$. Do đó ta được $d_{15}+1 = (d_5+1)^3 = 1000 \Rightarrow d_{15} = 999$.

Suy ra $n = 2d_{15} = 1998$. Thử lại ta thấy $n = 1998$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 42. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2013 viết được thành $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2013 bằng số 2014.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A > 3)$ viết được thành tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A = 4a + r$, trong đó a là số nguyên dương và $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $r = 0$, khi đó $A = 4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n = a$
- Trường hợp 2: Nếu $r = 1$, khi đó $A = 4a + 1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 1 + 4 > 4a + 1 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 1 = 4(a-2) + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

- Trường hợp 3: Nếu $r = 2$, khi đó $A = 4a + 2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n \le a$.

Xét $n = a$ ta có $A = 4a + 2 = 4(a-1) + 6$ nên số n lớn nhất là $n = a$

- Trường hợp 4: Nếu $r = 3$, khi đó $A = 4a + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$.

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 3 + 2 > 4a + 3 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 3 = 4(a-3) + 15 = 4(a-3) + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A > 3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số.
Với số nguyên dương $A > 3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a - 1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.

Áp dụng: Với $A = 2013 = 4.503 + 1$ thì ta được n lớn nhất là 502 và $A = 2013 = 501.4 + 9$.

Với $A = 2014 = 4.503 + 2$ thì ta được n lớn nhất là 503 và $A = 2013 = 502.4 + 6$.

Ví dụ 43. Tìm tất cả các số nguyên dương thỏa mãn $(a+2) \vdots b$ và $(b+3) \vdots a$

Lời giải

Giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện bài toán, khi đó ta có $\begin{cases}(a+2)\vdots b\ (1)\\(b+3)\vdots a\ (2)\end{cases}$

Từ đó tồn tại các số nguyên dương m và n thỏa mãn $\begin{cases}a+2=mb\\b+3=na\end{cases}$.

Cũng từ trên ta suy ra được $a+2\geq b$ và $b+3\geq a$ nên $b\leq a+3\leq b+5$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $a+2=b$, khi đó từ (2) ta được $b+3=a+5$ chia hết cho a nên 5 chia hết cho a, suy ra a chỉ có thể là 1 hoặc 5.

Với $a=1$ thì ta được $b=3$, với $a=5$ thì $b=7$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Nếu $a+2=b+1$, khi đó từ (1) ta suy ra $b+1$ chia hết cho b nên 1 chia hết cho b, từ đó suy ra $b=1$ nên $a=0$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Nếu $a+2=b+2\Rightarrow a=b$, khi đó từ (1) ta suy ra được $b+2$ chia hết cho b nên 2 chia hết cho b, suy ra b chỉ có 1 hoặc 2

Với $b=1$ ta được $a=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, với $b=2$ ta được $a=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 4: Nếu $a+2=b+3\Rightarrow a=b+1$, khi đó từ (2) ta suy ra được $a+2$ chia hết cho a nên 2 chia hết cho a, do đó a chỉa có thể là 1 hoặc 2.

Với $a=1$ ta được $b=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán, với $a=2$ ta được $b=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 5: Nếu $a+2=b+4\Rightarrow a+1=b+3$, khi đó từ (2) ta suy ra được $a+1$ chia hết cho a nên 1 chia hết cho a, do đó $a=1$, suy ra $b=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 6: Nếu $a+2=b+5$, khi đó từ (1) ta suy ra được $b+5$ chia hết cho b nên 5 chia hết cho b, do đó b chỉ có thể là 1 hoặc 5

Với $b=1$ ta được $a=4$ và với $b=5$ ta được $b=8$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$(1;1),(1;3),(2;1),(4;1),(5;7),(8;5)$.

Ví dụ 44. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b thỏa mãn $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Lời giải

Giả sử các số nguyên dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta có $(4a+1,4b-1)=1$ và $16ab+1\vdots(a+b)$.

Ta có $(4a+1)(4b+1)=16ab+1+4(a+b)\vdots(a+b)$.

Lại có $4a+1+4b-1=4(a+b)\vdots(a+b)$. Mà $(4a+1,4b-1)=1$.

Nếu cả hai số $4a+1$ và $a+b$ cùng chia hết cho một số nguyên tố p nào đó, thì từ $4a+1+4b-1$ chia hết cho $(a+b)$ ta suy ra được $4b-1\vdots p$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $(4a+1,4b-1)=1$.

Từ đó suy ra $(4a+1,a+b)=1$.

Ta có $(4a+1)(4b+1)\vdots(a+b)$ và $(4a+1,a+b)=1$ nên suy ra $4b+1\vdots(a+b)$.

Ngược lại giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $4b+1\vdots(a+b)$

Khi đó từ $(4a+1)(4b+1)\vdots(a+b)$ ta suy được $16ab\vdots(a+b)$.

Nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho p thì p là số nguyên tố lẻ.

Ta lại có $4a+1+4b-1=4(a+b)\vdots(a+b)$, suy ra $4b+1\vdots p$.

Do đó ta được $4b+1-(4b-1)=2\vdots p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta được $(4a+1,4b-1)=1$.

Như vậy hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $(4a+1,4b-1)=1$ và $16ab\vdots(a+b)$ tương đương với hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $4b+1\vdots(a+b)$.

Chú ý là $4b+1$ là số lẻ và $4b+1<4(a+b)$ nên từ $4b+1\vdots(a+b)$ ta suy ra được

$$\left[\begin{array}{l}4b+1=a+b\\4b+1=3(a+b)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3b+1\\b=3a-1\end{array}\right.$$

Như vậy cặp số nguyên dương $(a;b)$ là $(c;3c-1),(3c+1;c)$ với $c\in N^*$.

Ví dụ 45. Tìm tất că các cặp số tự nhiên $(n;k)$ với $k>1$ sao cho $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ có thể phân tích được thành k số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải

Ta có nhận xét: Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp thì luôn chia hết cho 8 và trong bốn số tự nhiên liên tiếp có hai số chẵn liên tiếp.

Trước hết ta chứng minh $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ không thể phân tích được thành tích của bốn số tự nhiên liên tiếp trở lên.

+ Xét n là số chẵn, khi đó ta được $17^{2016n}=(16+1)^{2016n}=16a+1$ với a là một số tự nhiên. Do đó 17^{2016n} chia 8 dư 1. Tương tự ta có 4.17^{2n} chia 8 dư 4.

Lại có $7.19^{5n}=7.(16+3)^{5n}=7\left[16b+(3)^{5n}\right]=7\left[16b+(9)^{5n'}\right]=7(16b+8c+1)$ với b, c là các số tự nhiên, do đó 7.19^{5n} chia 8 dư 7.

Như vậy $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ chia 8 dư 12 hay $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ chia 8 dư 4.

+ Xét n là số chẵn, khi đó ta được $17^{2016n}=(16+1)^{2016n}=16a+1$ với a là một số tự nhiên. Do đó 17^{2016n} chia 8 dư 1. Tương tự ta có 4.17^{2n} chia 8 dư 4.

Lại có $7.19^{5n}=7.(16+3)^{5n}=7\left[16b+(3)^{5n}\right]=7\left[16b+3.(9)^{5n'}\right]=7(16b+3.8c+3)$ với b, c là các số tự nhiên, do đó 7.19^{5n} chia 8 dư 5.

Như vậy $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ chia 8 dư 10 hay $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}$ chia 8 dư 2.

Trong cả hai trương hợp A đều không chia hết cho 8 nên không thể phân tích được thành tích của bốn số tự nhiên liên tiếp trở lên.

Điều này có nghĩa là $k<4$, lại có $k>1$. Từ đó ta được $k=2$ hoặc $k=3$. Đến đây ta xét từng trường hợp cụ thể.

- Trường hợp 1. Với $k=2$, khi đó giả sử tồn tại số tự nhiên x để $A=x(x+1)$.

+ Nếu $n=0$ thì ta được $A=12$ và $x=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $n>0$ thì rõ ràng $17^{2008n}>4.17^{2n}+7.19^{5n}$

Do đó ta có $A=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}<17^{2016n}+17^{2008n}$

Mà ta lại có $A=x(x+1)=17^{2016n}+4.17^{2n}+7.19^{5n}>17^{2016n}$ nên $x>17^{2008n}$

Từ đó suy ra $x(x+1)>A$, điều này vô lí. Do đó không tồn tại n thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 2. Với $k=3$, khi đó giả sử tồn tại số tự nhiên x để $A=(x-1)x(x+1)$ với $x\ge 1$.

Khi đó nếu x là số lẻ thì A chia hết cho 8, điều này mâu thuẫn với A không chia hết cho 8. Do đó x phải là số chẵn. Khi đó ta thấy $x(x-1)(x+1)=x(x^2-1)$ chia cho 5 có các số dư là 0 hoặc 1 hoặc -1.

Mà ta lại có $17^{2006n}=(15+2)^{2006n}=15a+(2)^{2006n}=15a+(5-1)^{1003n}=15a+5b+(-1)^{1003n}$ với a và b là các số tự nhiên. Tương tự ta có $4.17^{2n}=4.15c+4.5d+4.(-1)^{n}$ với c, d là các số tự nhiên.

Lại có $7.19^{5n}=7.(20-1)^{5n}=7\left[20e+(-1)^{5n}\right]=7.20e+5.(-1)^{5n}+2.(-1)^{5n}$ với e là một số tự nhiên, Như vậy A chia 5 có số dư là $(-1)^{1003n}+4.(-1)^{n}+2.(-1)^{5n}$ hay là 2 hoặc -2

Do đó trong trường hợp này cũng không có n thỏa mãn bài toán.

Vậy cặp số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $(n;k)=(0;2)$.

Ví dụ 46. Tìm cặp các số nguyên $(a;b)$ sao cho $\dfrac{b^2+ab+a+b-1}{a^2+ab+1}$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $b^2+ab+a+b-1=(a+b)^2+a+b-(a^2+ab+1)$

Do đó $\dfrac{b^2+ab+a+b-1}{a^2+ab+1}$ là số nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{(a+b)^2+(a+b)}{a^2+ab+1}=\dfrac{x^2+x}{ax+1}$ là số nguyên với $x=a+b$

Với $a=0$ hoặc $x=0$ hoặc $x=-1$ thì hiển nhiên $k=\dfrac{b^2+ab+a+b-1}{a^2+ab+1}$ là số nguyên.

Ta xét $a \neq 0; x \notin \{0;-1\}$.

Ta có $\frac{ax^2+ax}{ax+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x(ax+1)+ax+1-x-1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$ hay $\frac{x+1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1. Với $a > 0$

+ Nếu $x < 0 \Rightarrow ax+1 < 0; x+1 < 0$ nên $\frac{x+1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$ thì ta được

$$-x-1 \geq -ax-1 \Leftrightarrow (a-1)x \geq 0 \Leftrightarrow a = 1$$

+ Nếu $x > 0 \Rightarrow ax+1 > 0; x+1 > 0$ nên $\frac{x+1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$ thì $x+1 \geq ax+1 \Leftrightarrow (a-1)x \leq 0 \Leftrightarrow a = 1$

- Trường hợp 2. Với $a < 0$

+ Nếu $x < 0 \Rightarrow ax+1 > 0; x+1 < 0$ nên $\frac{x+1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$ thì $-x-1 \geq ax+1 \Leftrightarrow (a+1)x+2 < 0$ vô lí

+ Nếu $x > 0 \Rightarrow ax+1 < 0; x+1 > 0$ nên $\frac{x+1}{ax+1} \in \mathbb{Z}$ thì

$$x+1 \geq -ax-1 \Leftrightarrow (a+1)x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (a;x) = (-1;x),(-2;1),(-2;2),(-3;1)$$

Tóm lại các có các trường hợp sau

+ $a = 0, b \in \mathbb{Z}$

+ $a+b = 0; a, b \in \mathbb{Z}$

+ $a+b = -1; a, b \in \mathbb{Z}$

+ $a = 1 \Rightarrow k = \frac{b^2+2b}{b+2} = b$

+ $a = -1 \Rightarrow k = \frac{b^2-2}{2-b} = -b-2+\frac{2}{2-b} \Rightarrow b-2 \in \{\pm1, \pm2\} \Rightarrow b \in \{0,1,3,4\}$

+ $(a;b) = (-2;3),(-2;4),(-3;4)$ thì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy các cặp $(a;b)$ cần tìm là

$$S = \{(0;t),(t;-t),(t;-1-t),(1;t),(-1;0),(-1;3),(-1;4),(-2;3),(-2;4),(-3;4)\} \text{ với } t \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 47. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương sao cho $k = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$ là số nguyên thì $k = 5$.

Lời giải

Đẳng thức đề bài tương đương với $a^2 - kab + b^2 + k = 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b$. Với $a = 2; b = 1$ ta có $k = 5$.

Xét $a+b>3$. Giả sử $(a_0;b_0)$ là cặp nghiệm có tổng nhỏ nhất. Xem $a^2-kab+b^2+k=0$ là phương trình bậc hai ẩn a thì theo định lí Vi–et thì phương trình trên còn có nghiệm kb_0-a_0 hay ta có còn có nghiệm $(kb_0-a_0;b_0)$. Theo điều giả sử ta có $a_0\le kb_0-a_0$ hay $\frac{a_0}{b_0}\le\frac{k}{2}$.

Từ $k=\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ ta suy ra $\frac{a_0}{b_0}+\frac{b_0}{a_0}+\frac{k}{a_0b_0}=k$.

Do $\frac{a_0}{b_0}\le\frac{k}{2}$ và $a_0b_0\ge 3$ nên $k\le\frac{k}{2}+1+\frac{k}{3}$ hay $k\le 6$.

Mặt khác $\frac{a_0}{b_0}+\frac{b_0}{a_0}\ge 2$ nên $k\ge 3$. Như vậy ta được $3\le k\le 6$

Với $a=3;b=1$ ta cũng tìm được $k=5$.

Với $a=b=2$ hay $a=4;b=1$ thì không tìm được k.

Xét $ab\ge 5$, lại dùng đánh giá tương tự như trên ta có $k\le 3$.

Xét $k=3$ thì $a^2+3ab+b^2=3$ suy ra $ab\ge 6$. Thử với $a=6;b=1$ hoặc $a=3;b=2$ đều không thỏa nên $ab\ge 7$. Lại dùng đánh giá như trên ta được suy ra $k\le\frac{14}{5}$ (mâu thuẫn với k nguyên lớn hơn 2).

Vậy chỉ có $k=5$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 48. Tính tổng tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 2016 sao cho bình phương của số đó chia 17 có số dư là 9.

Gọi x là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta được $x^2=17k+9$ với k là các số tự nhiên,

Khi đó ta được $k=\frac{x^2-9}{17}=\frac{(x-3)(x+3)}{17}$.

Do k là số tự nhiên và 17 là số nguyên tố nên suy ra $\frac{(x-3)(x+3)}{17}\in N$ khi xẩy ra $\left[\begin{array}{l}x-3=17n\\x+3=17n\end{array}\right.$, với n là số tự nhiên.

- Xét trường hợp $x-3=17n$, vì x phụ thuộc vào n nên ta kí hiệu x_n là các giá trị thỏa mãn $x-3=17n$.

Theo bài ra ta có $x<2016$ nên ta được $17n+3<2016\Rightarrow n\le 118$

Từ đó suy ra $n=1;2;3;...;118$, khi đó ta được $\begin{cases}x_1=17.1+3\\x_2=17.2+3\\\quad ...\\x_{118}=17.118+3\end{cases}$

Từ đó ta được $A=17(1+2+3+...+118)+3.118=\frac{17.(1+118).118}{2}+3.118$

- Xét trường hợp $x+3=17n$, vì x phụ thuộc vào n nên ta kí hiệu x_n là các giá trị thỏa mãn $x+3=17n$.

Theo bài ra ta có $x<10000$ nên ta được $17n-3<2016 \Rightarrow n \le 118$

Từ đó suy ra $n=1;2;3;...;118$, khi đó ta được $\begin{cases} x_1=17.1-3 \\ x_2=17.2=3 \\ \quad ... \\ x_{118}=17.118-3 \end{cases}$

Từ đó ta được $B=17(1+2+3+...+118)-3.118=\dfrac{17.(1+118).118}{2}-3.118$.

Như vậy tổng của các số tư nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$S=A+B=\frac{17.(1+118).118}{2}+3.118+\frac{17.(1+118).118}{2}-3.118=17.118.119$$

Ví dụ 49. Tìm tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của số đó.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A=\overline{abc}$ với $a \in \{1;2;...9\}; b,c \in \{0;1;2;...9\}$.

Do A chia hết cho 11 nên ta được $a-b+c$ chia hết cho 11.

Kết hợp với $a \in \{1;2;...9\}; b,c \in \{0;1;2;...9\}$ ta suy ra được $a-b+c=0$ hoặc $a-b+c=11$

- Với $a-b+c=0$, khi đó ta được $b=a+c$.

Ta có $A=100a+10b+c=99a+10b+a+c=99a+11b$.

Khi A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11}=a^2+b^2+c^2 \text{ hay ta được } 9a+b=a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với $b=a+c$ ta được $9a+(a+c)=a^2+(a+c)^2+c^2 \Leftrightarrow 10a+c=2a^2+2ac+2c^2$.

Do $a \ge 1$ nên ta được $10a+c \ge 2a^2+2c+2c^2 \Rightarrow 2c^2+c \le 10a-2a^2 \le \dfrac{25}{2}$

Do đó suy ra $2c^2+c \le 12 \Rightarrow c \le 2$

Cũng từ $10a+c=2a^2+2ac+2c^2$ ta suy ra được c là số chẵn. Từ đó ta được $c=0$ hoặc $c=2$.

+ Với $c=0$, khi đó ta được $a=b$ nên số cần tìm có dạng $A=\overline{aa0}$.

Do đó $\dfrac{A}{11}=50=2a^2 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a=b=5$. Từ đó ta tìm được $A=550$.

+ Với $c=2$, khi đó ta được từ $10a+c=2a^2+2ac+2c^2$ ta được $10a+2=2a^2+4ac+8$

Hay ta được $a^2-3a+3=0$. Nhận thấy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương nên không tồn tại số A thỏa mãn bài toán.

- Với $a-b+c=11$, khi đó ta được $b+11=a+c$.

Do a, b, c là các chữ số nên từ $b+11=a+c$ ta suy ra được $a\ge 2$

Ta có $A=100a+10b+c=99a+10b+a+c=99a+11b+11$.

+ Xét $a=2$, khi đó $c=9;b=0$. Ta được $A=209$ không thỏa mãn bài toán.

+ Xét $a=3$, khi đó ta được $c=8;b=0$ hoặc $c=9;b=1$. Ta được $A=308$ hoặc $A=319$ không thỏa

+ Xét $a\ge 4$. Khi đó A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11}=a^2+b^2+c^2 \text{ hay ta được } 9a+b+1=a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với $b=a+c-11$ ta được

$$9a+\left(a+c-11\right)+1=a^2+\left(a+c-11\right)^2+c^2 \Leftrightarrow 10a+c-10=2a^2+2ac+2c^2-22\left(a+c\right)+121$$

Thu gọn ta được $32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2$. Do $a\ge 4$ nên ta được

$$32a+23c-131\ge 2a^2+8c+2c^2 \Rightarrow 2c^2-15c\le 32a-2a^2-131\le -5$$

Do đó suy ra $2c^2-15c\le -5\Rightarrow c\le 7$. Từ $32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2$ ta suy ra được c là số lẻ. Do đó ta được $c=1;3;5;7$. Đến đây xét các trường hợp của c thì được $b=0;a=8$ thỏa mãn. Do đó số cần tìm là $A=803$.

Vậy các số thỏa mãn 550 và 803.

Ví dụ 50. a) Tìm tất cả số tự nhiên có thể viết thành tổng của hai số nguyên lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau.

b) Tìm tất cả số tự nhiên có thể viết thành tổng của ba số nguyên lớn hơn 1 và đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Trước hết ta có nhận xét: Với hai số nguyên dương a và b với $a>b$, nếu d là ước chung lớn nhất của a và b thì d là ước của $a-b$.

Ta cũng chứng minh được $\left(k,k+1\right)=1;\left(2k+1,2k+3\right)=1,\left(2k-1,2k+3\right)$ với k là số nguyên dương.

Lại có $\left(3k-2,3k+4\right)=1,\left(3k-4,3k+4\right)=1$ với k là số lẻ.

$\left(3k-5,3k+7\right)=1,\left(3k-7,3k+5\right)=1$ với k là số chẵn.

Số 3 nguyên tố cùng nhau với các số có dạng $3k+r;3k-r$ với $r=2;4;5;7$.

a) Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó $n=a+b$ với a, b là các số nguyên lớn hơn 1 và $\left(a,b\right)=1$.

Dễ thấy $n=5$ thì ta viết được $n=2+3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $n=6$ thì không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần xét với các số nguyên $n\ge 7$.

• Nếu $n = 2k+1$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta được $n = 2k+1 = k+(k+1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 4k$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta dược $n = 4k = (2k-1)+(2k+1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 4k+2$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta dược $n = 4k+2 = (2k-1)+(2k+3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó các số nguyên $n \ge 7$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số nguyên $n = 5$ và $n \ge 7$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó $n = a+b+c$ với a, b, c là các số nguyên lớn hơn 1 và $(a,b) = (b,c) = (c,a) = 1$. Khi đó ta được $n \ge 9$

Dễ thấy $n = 10 = 2+3+4$, $n = 12 = 2+3+7$, $n = 14 = 2+5+7$, $n = 15 = 3+5+7$, $n = 16 = 2+5+9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $n = 9;11;13;17$ thì không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần xét với các số nguyên $n \ge 18$.

• Nếu $n = 4k$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta được $n = 4k = 2+(2k-3)+(2k+1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 4k+2$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta được $n = 4k+2 = 2+(2k-1)+(2k+1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 6k+1$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta được $n = 6k+1 = 3+(3k-4)+(3k+2)$ với k là số lẻ và $n = 6k+1 = 3+(3k-7)+(3k+5)$ với k là số chẵn, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 6k+3$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó $n = 6k+3 = (2k-1)+(2k+1)+(2k+3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $n = 6k+5$ với k là số nguyên và $k \ge 3$, khi đó ta được $n = 6k+5 = 3+(3k-2)+(3k+4)$ với k là số lẻ và $n = 6k+1 = 3+(3k-5)+(3k+7)$ với k là số chẵn, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó với mọi $n \ge 18$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số nguyên $n = 10;12;14;15;16$ và $n \ge 18$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 51. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c nhỏ hơn 20 thỏa mãn $a(a+1)+b(b+1) = c(c+1)$ trong đó a là số nguyên tố và b chia hết cho 3.

Lời giải

Từ giả thiết $a(a+1)+b(b+1) = c(c+1)$ ta được $1 < a \le c; 0 \le b < c$.

Biến đổi giả thiết của bài toán ta được $a(a+1) = c^2 - b^2 + c - b = (c-b)(c+b+1)$.

Do a là số nguyên tố nên $c-b$ hoặc $c+b+1$ chia hết cho a.

+ Nếu $c-b$ chia hết cho a thì ta được $a \le c-b$ nên từ $a(a+1) = (c-b)(c+b+1)$ ta suy ra được $a+1 \ge b+c+1$. Do đó $b+c+1 \le a+1 \le c-b+1$, suy ra $b = 0$ và $a = c$.

Vậy bộ số tự nhiên $(a;b;c)$ thỏa mãn là $(a;0;a)$ với a là số nguyên tố nhỏ hơn 20.

+ Nếu $b+c+1$ chia hết cho a. Khi đó ta đặt $b+c+1=ka$ với k là số nguyên dương.
Do $a \le c$ và $b \ge 0$ nên $k \ge 2$.

Thay vào hệ thức $a(a+1)=(c-b)(c+b+1)$ ta được $a+1=k(c-b) \Rightarrow a=k(c-b)-1$

Thay tiếp vào $a(a+1)=(c-b)(c+b+1)$ ta được

$$b+c+1=k^2(c-b)-k \Leftrightarrow 2b=(k+1)\left[(k-1)(c-b)-1\right]$$

Vì $c-b \ge 1$ nên $(k+1)(k-2) \le 2b < 40$ nên suy ra được $k<7$.

Từ đó ta được $k \in \{2;3;4;5;6\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Với $k=2$, khi đó do b chia hết cho 3 nên ta đặt $b=3m$ với m là số tự nhiên khác 0.

Khi đó thay vào $2b=(k+1)\left[(k-1)(c-b)-1\right]$ ta được $c=5m+1$.

Khi $m \ge 4$ thì $c>20$ do đó ta xét $m=1;2;3$.

Chú ý đến a là số nguyên tố nhỏ hơn 20 nên ta được các bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn là

$(5;3;6),(13;9;16)$

- Với $k=3$ và $b=3m$ thì ta được $4c=15m+2$. Khi đó ta tìm được bộ số $(5;6;8)$ thỏa mãn bài toán.
- Với $k=4$ và $b=3m$ thì ta được $15c=51m-5$. Dễ thấy 15 và 51 chia hết cho 3, còn 5 không chia hết cho 3 nên trường hợp này không tồn tại bộ số thỏa mãn.
- Với $k=5$ và $b=3m$ thì ta được $4c=13m+1$, trường hợp này không tìm thấy bộ số nào thỏa mãn.
- Với $k=6$ và $b=3m$ thì ta được $35c=111m+7$, trường hợp này không tìm thấy bộ số nào thỏa mãn.

Vậy các bộ số tự nhiên $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán là: $(5;3;6),(13;9;16),(5;6;8)$ và $(a;0;a)$ với a là số nguyên tố nhỏ hơn 20.

Vậy các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$(1;1),(1;3),(2;1),(4;1),(5;7),(8;5)$.

Ví dụ 52. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 2^n-1 chia hết cho 2011.

Lời giải

Chú ý rằng $a \equiv b \pmod m$ có nghĩa là $a-b \,\vdots\, m$.

Vì 2011 là số nguyên tố và $(2,2011)=1$ nên theo định lí Fecmat nhỏ ta co $2^{2010}-1 \pmod{2011}$.

Hay $2^{2010}-1 \,\vdots\, 2011$.

Giả sử số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn 2^n-1 chia hết cho 2011. Khi đó $n \le 2010$.
Giả sử $2010=nq+r$ với q, r là số tự nhiên và $0 \le r < n$

Từ $2^n - 1(\bmod 2011)$ suy ra $2^{nq} \equiv 1(\bmod 2011)$

Mà ta có $2^{2010} - 1(\bmod 2011)$ nên ta được $2^{nq+r} - 1(\bmod 2011)$

Do đó ta được $2^{qn}\left(2^r - 1\right) \vdots 2011$. Mà do $\left(2^{qn}, 2011\right) = 1$ nên $\left(2^r - 1\right) \vdots 2011$.

Lại do $r < n$ và n là số nguyên dương nhỏ nhất nên từ $\left(2^r - 1\right) \vdots 2011$ ta được $r = 0$.

Từ đó suy ra n là ước của 2010. Mặt khác ta lại có $2^{10} - 1 = 1023 < 2011$ nên $n > 10$

Chú ý rằng $2010 = 2.3.5.67$ nên $n \in \{15; 30; 67; 134; 201; 335; 402; 670; 1005; 2010\}$.

Ta có $2^{15} \equiv 592(\bmod 2011)$ nên $2^{30} \equiv 592^2(\bmod 2011)$ hay $2^{30} \equiv 550^2(\bmod 2011)$

Từ đó ta lại được $2^{60} \equiv 550^2(\bmod 2011)$ hay $2^{60} \equiv 850(\bmod 2011)$

Do đó $2^{60}.2^7 \equiv 850.2^7(\bmod 2011)$ hay $2^{67} \equiv 206(\bmod 2011)$.

Nên ta được $2^{134} \equiv 206^2(\bmod 2011)$ hay $2^{134} \equiv 205(\bmod 2011)$

Và $2^{201} \equiv 206^3(\bmod 2011)$ hay $2^{201} \equiv 2010(\bmod 2011)$.

Ta cũng có $2^{335} \equiv 205.2010(\bmod 2011)$ nên $2^{335} \equiv 1806(\bmod 2011)$

Lại có $2^{402} \equiv 2010^2(\bmod 2011)$ hay $2^{402} \equiv 1(\bmod 2011)$, suy ra $\left(2^{402} - 1\right) \vdots 2011$

Vậy $n = 402$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 53. Cho a và b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + 1$ chia hết cho $2xy + 1$.

Chứng minh rằng $xy(x - y) = 0$

Lời giải

Do $x^2 + y^2 + 1$ chia hết cho $2xy + 1$ nên ta đặt $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{2xy + 1}$ với k là số nguyên dương.

Nhận thấy khi $x = y$ thì $k = 1$ và ngược lại vẫn đúng. Do đó ta đi chứng minh $k = 1$.

Giả sử cặp số nguyên dương $(a_0; b_0)$ với $a_0 + b_0$ bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \geq b_0$.

Xét phương trình $k = \dfrac{x^2 + b_0^2 + 1}{2xb_0 + 1}$ hay $x^2 - 2kb_0x + b_0^2 + 1 - k = 0$.

Khi đó ta có $\Delta' = b_0^2k^2 - b_0^2 - 1 + k = (k - 1)\left[b_0^2(k + 1) + 1\right] \geq 0$.

Do đó phương trình luôn có nghiệm. Dễ thấy a_0 là một nghiệm của phương trình nên theo định lí Vi – et thì phương trình còn có thêm một nghiệm nữa. Gọi nghiệm đó là a_1.

Khi đó ta có $\begin{cases} a_0 + a_1 = 2kb_0 \\ a_0.a_1 = b_0^2 - k + 1 \end{cases}$

Từ hệ thức thứ nhất ta được a_1 là số nguyên.

Giả sử $a_1 < 0$, khi đó $a_1^2 - 2kb_0a_1 + b_0^2 + 1 - k > a_1^2 + 2kb_0 + b_0^2 + 1 - k > 0$, điều này vô lí vì a_1 là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2kb_0x + b_0^2 + 1 - k = 0$.

Từ đó suy ra $a_1 \geq 0$. Ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 0$, khi đó ta được $a_1b_0 = 0$, điều này dẫn đến $xy = 0$.
- Trường hợp 2: Nếu $a_1 > 0$, khi đó nếu $a_0 > b_0$ thì ta được

$$a_1 + b_0 = \frac{b_0^2 - k + 1}{a_0} + b_0 < \frac{a_0^2 - 1 + 1}{a_0} + b_0 = a_0 + b_0$$

Đều này mâu thuẫn với các chọn $(a_0; b_0)$ với $a_0 + b_0$ bé nhất.

Từ đó ta được $a_0 = b_0$. Khi đó ta được $k = \dfrac{2a_0^2 + 1}{2a_0^2 + 1} = 1$. Từ đây ta suy ra được $x = y$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $xy(x - y) = 0$. Vậy bài toán được chứng minh.

Chủ đề 2
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG, SỐ LẬP PHƯƠNG

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Số chính phương.

• Định nghĩa: Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

• **Một số tính chất**

∘ Tính chất 1: Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9. Suy ra số có chữ số tận cùng bằng 2, 3, 7, 8 thì không phải là số chính phương

∘ Tính chất 2: Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

∘ Tính chất 3: Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 với n là số nguyên.

∘ Tính chất 4: Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 với n là số nguyên.

∘ Tính chất 5: Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2

Số chính phương tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

∘ Tính chất 6: Số chính phương chia hết cho số nguyên tố thì chia hết cho bình phương số nguyên tố đó

Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

∘ Tính chất 7: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đếu là số chính phương

∘ Tính chất 8: Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0

∘ Tính chất 9: Hai số chính phương a^2 và $\left(a+1\right)^2$ được gọi là hai số chính phương liên tiếp. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

∘ Tính chất 10: Nếu $a^2 = m.n$ với a, m, n là số tự nhiên và $\left(m,n\right)=1$ thì m, n là các số chính phương.

2. Số lập phương đúng

• Định nghĩa: Một số nguyên được gọi là số lập phương đúng nếu nó viết được thành lập phương của một số nguyên.

• Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1: Nếu số nguyên a chia 3 có số dư là 1 thì a^3 chia 9 có số dư là 1.
- Tính chất 2: Nếu số nguyên a chia 3 có số dư là -1 thì a^3 chia 9 có số dư là -1.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Bài tập về số chính phương, số lập phương đúng thường có một số dạng như sau:

- Chứng minh một số là số chính phương, số lập phương đúng hoặc không thể là số chính phương, số lập phương đúng.
- Tìm số nguyên để biểu thức có giá trị là một số chính phương, số lập phương đúng.
- Tìm số chính phương, số lập phương đúng thỏa mãn một số điều kiện nào đó.
- Sử dụng tính chất của số chính phương, số lập phương đúng để giải phương trình nghiệm nguyên, chứng minh bài toán chia hết, chứng minh hai số nguyên bằng nhau,…

Các dạng bài tập nêu trên được minh họa thông qua các ví dụ sau.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì $a_n = 1 + \dfrac{2.6.10...(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có

$$a_n = 1 + \frac{2^n.\left[1.3.5...(2n\text{-}1)\right].(n\text{-}4)!}{(2n)!} = 1 + \frac{2^n(n+4)!}{2.4.6....2n}$$
$$= 1 + \frac{2^n..1.2.3....n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^n.1.2.3.4...n}$$
$$= 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \left(n^2+5n+5\right)^2$$

Do đó ta được $a_n = \left(n^2+5n+5\right)^2$ là số chính phương.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 2016^3$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có $A = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2.4.1 + \left(\dfrac{2}{2}\right)^2.4.2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2.4.3 + \left(\dfrac{4}{2}\right)^2.4.4 + ... + \left(\dfrac{2016}{2}\right)^2.4.2016$

Từ đó $A = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(2^2-0^2\right) + \left(\dfrac{2}{2}\right)^2\left(3^2-1^2\right) + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\left(4^2-2^2\right) + ... + \left(\dfrac{2016}{2}\right)^2\left(2017^2-2015^2\right)$

Hay $A = \left(\dfrac{1.2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{0.1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2.3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1.2}{2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{2016.2017}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2015.2016}{2}\right)^2$

Suy ra $A = \left(\dfrac{2016.2017}{2}\right)^2 = (1008.2017)^2$. Vậy A là số chính phương.

Ví dụ 3. Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$ với n là số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Từ $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$ ta có

$$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)]$$
$$= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - ... + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$= n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Do đó ta được

$$4S + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$$
$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$$

Vậy $4S+1$ là số chính phương.

Ví dụ 4. Chứng minh $N = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi n là số nguyên dương.

Lời giải

Ta có 2012^4 có chữ số tận cùng bằng 6 nên 2012^{4n} có chữ số tận cùng bằng 6.

2013^4 có chữ số tận cùng bằng 1 nên 2013^{4n} có chữ số tận cùng bằng 1.

2014^2 có chữ số tận cùng bằng 6 nên 2014^{4n} có chữ số tận cùng bằng 6.

2015^{4n} có chữ số tận cùng bằng 5.

Do đó ta có $N = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ có chữ số tận cùng bằng 8.

Mặt khác, không có số chính phương nào có chữ số tận cùng bằng 8. Vậy N không phải là số chính phương.

Ví dụ 5. Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x = y$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy-1)^2 + 4xy - 7x + 7y - 1 > (2xy-1)^2$$
$$4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy+1)^2 - 4xy - 7x + 7y - 1 < (2xy+1)^2$$

Đặt $A = 4x^2y^2 - 7x + 7y$. Khi đó ta được $(2xy-1)^2 < A < (2xy+1)^2$

Suy ra $-4xy + 1 < -7x + 7y < 4xy + 1$

Nếu $x > y \geq 2$ thì $-7x + 7y < 0 < 4xy + 1$ và $-4xy + 1 \leq -8x + 1 < -7x + 7y$ nên ta suy ra được $A = 4x^2y^2$, điều này vô lí.

Tương tự nếu $y > x \geq 2$ ta được điều vô lí.

Do đó ta suy ra được $x = y$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow a^2+b^2+1-2ab+2a-2b=4a\Leftrightarrow (a-b+1)^2=4a$

là số chính phương suy ra a là số chính phương $a=x^2$ (x là số nguyên).

Khi đó ta được

$$(x^2-b+1)^2=4x^2\Leftrightarrow x^2-b+1=2x\Leftrightarrow b=(x-1)^2$$

Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp

Ví dụ 7. Tìm các số nguyên n sao cho $A=n^4+n^3+n^2$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $A=n^4+n^3+n^2=n^2(n^2+n+1)$.

Với $n=0$ ta được $A=0$ là số chính phương.

Với $A\neq 0$, khi đó để A là số chính phương thì n^2+n+1 phải là số chính phương.

Đặt $n^2+n+1=k^2\ (k\in N)$, suy ra

$$4(n^2+n+1)=4k^2\Leftrightarrow (2n+1)^2+3=(2k)^2\Leftrightarrow (2k-2n-1)(2k+2n+1)=3$$

Vì $2k+2n+1>2k-2n-1(k\in N;n\in Z)$ nên ta được

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2k-2n-1=1\\2k+2n+1=3\end{cases}\\\begin{cases}2k-2n-1=-3\\2k+2n+1=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=-1\\n=0\end{array}\right.$$

Vậy các giá trị cần tìm là $n=0;\ n=-1$.

Ví dụ 8. Tìm số nguyên $n>2008$ sao cho $2^{2008}+2^{2012}+2^{2013}+2^{2014}+2^{2016}+2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $A=2^{2008}+2^{2012}+2^{2013}+2^{2014}+2^{2016}+2^n$. Ta có

$$\begin{aligned}2^{2008}+2^{2012}+2^{2013}+2^{2014}+2^{2016}+2^n&=2^{2008}(1+2^4+2^5+2^6+2^8+2^{n-2008})\\&=2^{2008}(369+2^{n-2008})\end{aligned}$$

Khi đó A là số chính phương khi và chỉ khi $369+2^{n-2008}=b^2$ với $b\in\mathbb{N}^*$.

Đặt $a=n-2008$ là số nguyên dương, ta có phương trình $369+2^a=b^2$

Xét trong hệ đồng dư mod3 ta có: $369\equiv 0(\text{mod}\,3);2^a\equiv\{1;2\}(\text{mod}\,3);b^2\equiv\{0;1\}(\text{mod}\,3)$

Suy ra $2^a\equiv 1(\text{mod}\,3)$ suy ra a là số chẵn hay $a=2c,\ c\in\mathbb{N}^*$.

Phương trình trở thành $369 = b^2 - 2^{2c} \Leftrightarrow 41.3.3 = \left(b - 2^c\right)\left(b^2 + 2^c\right)$

Do $b + 2^c > b - 2^c$ suy ra

$\left(b+2^c; b-2^c\right) \in \left\{(41;9);(369;1);(41.3;3)\right\} \Leftrightarrow \left(b;2^c\right) \in \left\{(25;16);(185;184);(63;60)\right\} \Leftrightarrow (b;c) \in \left\{(25;4)\right\}$

Vậy $n = a + 2008 = 2c + 2008 = 2016$ là số cần tìm

Ví dụ 9. Tìm tất cả các bộ hai số chính phương $(n;\ m)$ mà mỗi số có đúng 4 chữ số, biết rằng mỗi chữ số của m bằng chữ số tương ứng của n cộng thêm với d, ở đây d là một số nguyên dương nào đó cho trước.

Lời giải

Đặt $n = x^2 = p.10^3 + q.10^2 + r.10 + s; m = y^2 = (p+d).10^3 + (q+d).10^2 + (s+d).10 + (s+d)$

Ở đây $x, y, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ và $1 \le p < p+d \le 9;\ 0 \le q < q+d \le 9;\ 0 \le r < r+d \le 9;\ 0 \le s < s+d \le 9$

Khi đó ta có $(y+x)(y-x) = y^2 - x^2 = d.1111 = d.11.101$ (1)

Từ (1) suy ra số nguyên tố 101 là ước của $y - x$ hoặc $y + x$.

Do $10^3 \le n < m < 10^4$ nên $32 \le x < y \le 99$. Do đó $64 \le x + y < 200;\ 0 < y - x \le 67$

$\Rightarrow y + x = 101$, $y - x = 11.d$. Do đó x và y khác tính chẵn lẻ, d lẻ.

Do $64 \le 2x = 101 - 11d$ nên $11d \le 37$. Suy ra $d \le 3$, vậy $d = 1$ hoặc $d = 3$.

\+ Với $d = 1$ thì $x + y = 101;\ y - x = 11$ suy ra $(x;y) = (45;56)$, do đó $(n;\ m) = (2025;\ 3136)$

\+ Với $d = 3$ thì $x + y = 101;\ y - x = 33$ suy ra $(x;y) = (34;67)$, do đó $(n;\ m) = (1156;\ 4489)$

Vậy có 2 bộ số thoả mãn $(2025;\ 3136)$ và $(1156;\ 4489)$.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các số hữu tỷ x sao cho $A = x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

Lời giải

Dễ thấy $x = 0,\ x = 1,\ x = -1$ không thỏa mãn. Với x khác các giá trị này, trước hết ta chứng minh x phải là số nguyên.

\+ Vì $x^2 + x + 6$ là một số chính phương nên $x^2 + x$ phải là số nguyên.

\+ Giả sử $x = \dfrac{m}{n}$ với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1.

Ta có $x^2 + x = \dfrac{m^2}{n^2} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{m^2 + mn}{n^2}$ là số nguyên khi $m^2 + mn$ chia hết cho n^2 nên $m^2 + mn$ chia hết cho n, vì mn chia hết cho n nên m^2 chia hết cho n và do m và n có ước nguyên lớn nhất là 1, suy ra m chia hết cho n (mâu thuẫn với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1). Do đó x phải là số nguyên.

Đặt $x^2 + x + 6 = k^2\ (k \in Z)$. Ta có

$$4x^2 + 4x + 24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 23 = 4k^2 \Leftrightarrow (2k + 2x + 1)(2k - 2x - 1) = 23$$

Đến đây ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} 2k+2x+1=23 \\ 2k-2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=6 \\ x=5 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} 2k+2x+1=1 \\ 2k-2x-1=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=6 \\ x=-6 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} 2k+2x+1=-23 \\ 2k-2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-6 \\ x=-6 \end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} 2k+2x+1=-1 \\ 2k-2x-1=-23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-6 \\ x=5 \end{cases}$

Thử lại ta được $x=-6;\ x=5$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 11. Giả sử m và n là các số nguyên dương với $n>1$. Đặt $S=m^2n^2-4m+4n$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $m>n$ thì $\left(mn^2-2\right)^2<n^2S<m^2n^4$.

b) Nếu S là số chính phương thì $m=n$.

Lời giải

a) Ta chứng minh $\left(mn^2-2\right)^2<n^2(m^2n^2-4m+4n)<m^2n^4$

Bằng cách xét hiệu

$$H=\left(mn^2-2\right)^2-n^2\left(m^2n^2-4m+4n\right)=m^2n^4-4mn^2+4-m^2n^4+4mn^2-4n^3=-4n^3<0$$

Mặt khác $n^2(m^2n^2-4m+4n)-m^2n^4=4n^2(m-n)>0$ vì $n>1;\ m>n$

Do đó ta được $\left(mn^2-2\right)^2<n^2(m^2n^2-4m+4n)<m^2n^4$

b) Nếu $m>n$ khi đó theo câu a ta được $\left(\dfrac{mn^2-2}{n}\right)^2<S<\left(mn\right)^2$

Mặt khác $\dfrac{mn^2-2}{n}-\left(mn-1\right)=\dfrac{n-2}{n}$.

Vì $m,n\in N^*, m>n>1$ nên ta được $0<mn-1\le\dfrac{nm^2-2}{n}$

Suy ra $\left(mn-1\right)^2<S<\left(mn\right)^2$ nên S không thể là số chính phương.

Nếu $m<n$ thì $S>m^2n^2$, lại thấy $S<\left(mn+2\right)^2$.

Do đó để S là số chính phương thì $S=\left(mn+1\right)^2$, khi đó ta được

$$m^2n^2-4m+4n=m^2n^2+2mn+1\Leftrightarrow 4n-4m+2mn=1$$

không tồn tại m,n thỏa mãn vì vế phải là số chẵn

Từ các lập luận đó ta được $m = n$.

Ví dụ 12. Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n + \left[\sqrt[3]{n - \frac{1}{27}} + \frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Lời giải

Ta có

$$\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right] = a \Rightarrow a \le \sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3} < a+1 \Leftrightarrow a^3 - a^2 + \frac{4a}{3} \le n < a^3 + 2a^2 + \frac{7a}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{4a}{3} \le n + a^2 < a^3 + 3a^2 + \frac{7a}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a^3 < n + a^2 < (a+1)^3$$

Suy ra $n + a^2$ không là lập phương của một số nguyên.

Ví dụ 13. Cho a, b, c, d là các số nguyên lẻ sao cho $0 < a < b < c < d$ và $ad = bc$. Chứng minh rằng nếu $a + d$ và $b + c$ là các lũy thừa của 2 thì $a = 1$.

Lời giải

Giả sử $a + d = 2^m$ và $b + c = 2^n$ với m và n là các số nguyên dương.

Ta có $a < c$ nên ta có $a(d-c) < c(d-c)$, suy ra $ad - ac = bc - ac < c(d-c)$

Từ đó ta được $b - a < d - c$ hay $a + d > b + c$ nên suy ra $m > n$.

Ta lại có $bc = b(b + c - b) = b(2^n - b)$ và $ad = a(a + d - a) = a(2^m - a)$

Do đó từ $ad = bc$ ta được $b(2^n - b) = a(2^m - a)$

Hay ta được $a.2^m - b.2^n = a^2 - b^2 \Rightarrow 2^n(b - a.2^{m-n}) = (b-a)(b+a)$.

Do đó ta có $(b-a)(b+a) \vdots 2^n$. Mặt khác nếu $a + b$ và $b - a$ cùng chia hết cho 4 thì b chia hết cho 2, điều này mâu thuẫn với b là số lẻ.

Từ đó ta suy ra được $b - a$ chia hết cho 2^{n-1} hoặc $a + b$ chia hết cho 2^{n-1}.

Gọi x là một trong hai số $a + b$ và $b - a$ thì ta có $0 < x \le b + a < b + c = 2^n$ nên ta suy ra được $x = 2^{n-1}$.

Gọi y là ước nguyên tố chung của a và b thì y là ước nguyên tố chung của $a + b$ và $b - a$. Từ đó ta suy ra được $y = 2$. Mặt khác do a, b là các số lẻ nên ta suy ra a, b nguyên tố cùng nhau.

Ta có $2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = b + c - (b \pm a) = c \pm a$ nên tương tự như trên ta suy ra được a và c nguyên tố cùng nhau.

Từ đó suy ra a và bc nguyên tố cùng nhau, mà $bc \vdots a$ nên ta suy ra được $a = 1$.

Ví dụ 14. Tìm các số nguyên a, b sao cho $a^4 + b^4 + (a+b)^4$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có nhận xét: Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4 và một số chính phương lẻ thì chia 4 dư 1.

Ta xét các trường hợp sau

- Trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử số chẵn là a và số lẻ là b. Khi đó a^4 chia hết cho 4, còn b^4 và $(a+b)^4$ chia 4 dư 1.

Từ đó suy ra $a^4+b^4+(a+b)^4$ chia 4 dư 2, nên $a^4+b^4+(a+b)^4$ không thể là số chính phương.

- Cả hai số a và b đều là số lẻ, khi đó $a+b$ là số chẵn. Từ đó ta được a^4 và b^4 chia 4 dư 1 và $(a+b)^4$ chia hết cho 4.

Từ đó suy ra $a^4+b^4+(a+b)^4$ chia 4 dư 2, nên $a^4+b^4+(a+b)^4$ không thể là số chính phương.

- Cả hai số a và b đều là số chẵn, khi đó ta đặt $a=2m; b=2n$ với m, n là các số nguyên.

Khi đó ta có $a^4+b^4+(a+b)^4=16m^4+16n^4+16(m+n)^4=16\left[m^4+n^4+(m+n)^4\right]$

Để $a^4+b^4+(a+b)^4$ là số chính phương thì $m^4+n^4+(m+n)^4$ phải là số chính phương.

Tiếp tục lý luận tương tự như trên ta suy ra được $a \vdots 2^k$ và $b \vdots 2^k$ với k là số tự nhiên bất kì, điều này chỉ xẩy ra khi $a=b=0$.

Vậy với $a=b=0$ thì $a^4+b^4+(a+b)^4$ là số chính phương.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu x^2+2y là một số chính phương với x và y là các số nguyên dương thì x^2+y là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Do x và y là các số nguyên dương, đồng thời x^2+2y là một số chính phương nên ta có $x^2+2y>x$

Từ đó ta suy ra được $x^2+2y=(x+t)^2$ với t là một số nguyên dương.

Do đó $x^2+2y=x^2+2xt+t^2 \Rightarrow t^2=2y-2xt=2(t-xt)$

Suy ra $t^2 \vdots 2 \Rightarrow t^2 \vdots 4 \Rightarrow t \vdots 2$. Đặt $t=2m$ với m một số nguyên dương.

Từ đó ta có $2y=t^2+2tx=4m^2+4mx \Rightarrow y=2m^2+2mx$

Suy ra $x^2+y=x^2+2m^2+2mx=x^2+(x+m)^2$.

Vậy x^2+y là tổng của hai số chính phương.

Ví dụ 16. Tìm tất cả các số nguyên m sao cho m^4+m^3+1 là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử m^4+m^3+1 là một số chính phương. Khi đó đặt $m^4+m^3+1=n^2$ với n là một số nguyên.

Ta có $m^4+m^3+1=n^2 \Leftrightarrow 64m^4+64m^3+64=(8n)^2 \Leftrightarrow (8m^2+4m-1)^2+8m+63=(8n)^2$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m=0$, khi đó rõ ràng $m^4+m^3+1=1$ là một số chính phương.
- Nếu $m\neq 0$ và $m>-8$

Khi đó từ $\left(8m^2+4m-1\right)^2+8m+63=\left(8n\right)^2$ ta có $\left(8n\right)^2>\left(8m^2+4m-1\right)^2$

Do $8m^2+4m-1\geq 0$ nên $\left(8n\right)^2\geq\left(8m^2+4m\right)^2$. Từ đó ta được

$$\left(8m^2+4m-1\right)^2+8m+63\geq\left(8m^2+4m\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(8m^2+4m\right)^2-2\left(8m^2+4m\right)+1+8m+63\geq\left(8m^2+4m\right)^2\Leftrightarrow -16m^2\geq -64\Leftrightarrow m^2\leq 4$$

Do m^2 là số chính phương nên ta được $m^2\in\left\{1;4\right\}\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;1;2\right\}$

Kiểm tra trực tiếp ta thấy $m\in\left\{-2;-1;2\right\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m\leq -8$, Khi đó từ $\left(8m^2+4m-1\right)^2+8m+63=\left(8n\right)^2$ ta có $\left(8n\right)^2<\left(8m^2+4m-1\right)^2$

Do $8m^2+4m-1\geq 0$ nên $\left(8n\right)^2\leq\left(8m^2+4m-2\right)^2$. Từ đó ta được

$$\left(8m^2+4m-1\right)^2+8m+63\leq\left(8m^2+4m-2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(8m^2+4m\right)^2-2\left(8m^2+4m\right)+1+8m+63\geq\left(8m^2+4m\right)^2-4\left(8m^2+4m\right)+4$$
$$\Leftrightarrow 4m^2+4m+15\leq 0$$

Điều này vô lí nên trong trường hợp này không có m nguyên thỏa mãn bài toán.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m\in\left\{-2;-1;0;2\right\}$.

Ví dụ 17. Cho a và b là các số nguyên sao cho tồn tại hai số nguyên liên tiếp c và d thỏa mãn điều kiện $a-b=a^2c-b^2d$. Chứng minh rằng $\left|a-b\right|$ là một số chính phương.

Lời giải

Do c và d là hai số nguyên liên tiếp nên ta có $d=c+1$. Từ đó ta được

$$a-b=a^2c-b^2d\Leftrightarrow a-b=a^2c-b^2\left(c+1\right)\Leftrightarrow a-b=c\left(a^2-b^2\right)-b^2$$
$$\Leftrightarrow a-b=c\left(a-b\right)\left(a+b\right)-b^2\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left[c\left(a+b\right)+1\right]=b^2$$

Gọi d là ước chung lớn nhất của $a-b$ và $c\left(a+b\right)+1$

Khi đó ta có $\begin{cases}a-b\,\vdots\, d\\ c\left(a+b\right)+1\,\vdots\, d\end{cases}$, nên ta được $\left(a-b\right).\left[c\left(a+b\right)+1\right]\vdots\, d^2$

Do đó từ $\left(a-b\right)\left[c\left(a+b\right)+1\right]=b^2$ ta suy ra được $b^2\,\vdots\, d^2\Rightarrow b\,\vdots\, d$

Mà ta có $a-b\,\vdots\, d$ nên suy ra được $a\,\vdots\, d$. Do đó $a+b\,\vdots\, d$

Kết hợp với $c\left(a+b\right)+1\,\vdots\, d$ ta suy ra được $1\,\vdots\, d$ nên $d=1$.

Từ đó ta có $\left(a-b,c\left(a+b\right)+1\right)=1$. Do đó $\left|a-b\right|$ là một số chính phương.

Ví dụ 18. Tìm tất cả các số nguyên dương a và b sao cho $a^2b^2-4(a+b)$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $a^2b^2-4(a+b)=x^2$, với $x\in N$. Từ đó ta được $x<ab$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x=ab-1$, khi đó ta được $a^2b^2-4(a+b)=(ab-1)^2$

Từ đó ta được $-4(a+b)=-2ab+1 \Leftrightarrow 4(a+b)=2ab-1$, điều này vô lí vì hai vế khác tính chẵn lẻ.

- Trường hợp 2: Nếu $x\le ab-2$, khi đó ta được $x^2\le(ab-2)^2$

Do đó $a^2b^2-4(a+b)\le(ab-2)^2 \Leftrightarrow ab\le a+b+1$.

Do vai trò của a và b như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\le b$.

Nếu $a\ge 3$, khi đó $ab\ge 3b\ge a+b+b>a+b+1$, trái với $ab\le a+b+1$.

Do đó suy ra $a<2$, mà a là số nguyên dương nên ta được $a=1$ hoặc $a=2$.

+ Với $a=1$, khi đó ta được $b^2-4(1+b)=x^2 \Leftrightarrow (b-2-x)(b-2+x)=8$

Để ý là $b-2-x$ và $b-2+x$ cùng tính chẵn lẻ, lại có $b-2+x>b-2-x>0$

Nên từ phương trình trên ta được $\begin{cases} b-2-x=2 \\ b-2-x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ x=1 \end{cases}$

+ Với $a=2$, khi đó ta được $4b^2-4(2+b)=x^2 \Leftrightarrow (2b-1-x)(2b-1+x)=9$

Để ý là $2b-1+x\ge 2b-1-x>0$

Từ đó ta được $\begin{cases} 2b-1-x=3 \\ 2b+1-x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ x=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2b-1-x=1 \\ 2b-1+x=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ x=4 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(a;b)=(1;5),(5;1),(2;2),(2;3),(3;2)$.

Ví dụ 19. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $p^2+3pq+q^2=k^2$ với p, q là các số nguyên tố và k là số nguyên dương.

Nếu $p=q=3$ thì ta có $p^2+3pq+q^2=9+3.9+9=45$ không phải là số chính phương.

Nếu p và q cùng khác 3, khi đó do p và q là các số nguyên tố nên p^2 và q^2 chia 3 dư 1.

Do đó $p^2+3pq+q^2$ chia 3 dư 2, điều này dẫn đến k^2 chia 3 dư 2, điều này vô lí vì số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1.

Như vậy trong hai số nguyên tố p và q có duy nhất một số là 3.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p=3$, khi đó ta có

$$q^2+9q+9=k^2 \Leftrightarrow 4q^2+36q+36=4k^2 \Leftrightarrow (2q+9-2k)(2q+9+2k)=45$$

Chú ý là $45=1.45=3.15=5.9$ và $k>1$ nên ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $\begin{cases} 2q+9-2k=1 \\ 2q+9+2k=45 \end{cases} \Rightarrow 4q+18=46 \Rightarrow 4q=28 \Rightarrow q=7$, thỏa mãn.
- Trường hợp 2: Nếu $\begin{cases} 2q+9-2k=3 \\ 2q+9+2k=15 \end{cases} \Rightarrow 4q+18=18 \Rightarrow q=0$, không thỏa mãn.
- Trường hợp 3: Nếu $\begin{cases} 2q+9-2k=5 \\ 2q+9+2k=9 \end{cases} \Rightarrow 4q+18=14 \Rightarrow q=-1$, không thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(p;q)=(3;7),(7;3)$.

Ví dụ 20. Tìm số tự nhiên bé nhất $n>1$ sao cho $\frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n}$ là một số chính phương.

Lời giải

Bằng quy nạp toán học ta chứng minh được $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với $n \in N^*$.

Do đó ta được $\frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Giả sử $\frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n}$ là một số chính phương khi đó $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ là một số chính phương.

Đặt $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=m^2$ với m là một số nguyên dương.

Khi đó ta được $(n+1)(2n+1)=6m^2$. Để ý là $2n+1$ là số lẻ, do đó $n+1 \vdots 2$, suy ra n là số lẻ.

Đặt $n=2k-1$ với $k \in N, k>1$. Khi đó từ $(n+1)(2n+1)=6m^2$ ta được $k(4k-1)=3m^2$.

Do 3 là số nguyên tố nên ta suy ra được $k \vdots 3$ hoặc $4k-1 \vdots 3$.

+ Xét $k \vdots 3$, khi đó ta đặt $k=3d, d \in N^*$. Do đó từ $k(4k-1)=3m^2$ ta được $d(12d-1)=m^2$.

Do k và $12k-1$ nguyên tố cùng nhau nên ta được $d=u^2; 12d-1=v^2$ với u, v là các số tự nhiên.

Dễ thấy $12d-1$ chia 3 dư 2 mà lại có v^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1 nên không thể $12d-1=v^2$.

+ Xét $4k-1 \vdots 3$, khi đó ta được $k-1 \vdots d$. Đặt $k=3d+1$.

Từ đó ta được $(3d+1)(4d+1)=m^2$.

Dễ thấy $(3d+1, 4d+1)=1$ nên ta có $3d+1=u^2; 4d+1=v^2$ với u, v là các số tự nhiên.

Nhận thấy v^2 là số lẻ ên v là số lẻ và $v>3$ nên ta cho v nhận các giá trị $3;5;7;9;11;13;15;...$, khi đó ta được các giá trị d tương ứng là $2;6;12;20;30;42;56;...$.

Do đó ta có $3d+1 \in \{7;19;37;61;91;127;169;...\}$.

Nhận thấy 169 là số chính phương và là số chính phương bé nhất trong dãy số trên.

Do đó n bé nhất tương ứng với k bé nhất là $k=3d+1=169$ nên $n=2.169-1=337$.

Vậy số tự nhiên bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 337$.

Ví dụ 21. Cho các số nguyên a, b và số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{a^2+b^2}{p} \in Z$. Cho biết p là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Đặt $p = c^2 + d^2$ với c, d là các số nguyên.

Ta có $\frac{a^2+b^2}{p} = \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{p^2} = \frac{(ad+bc)^2+(ac-bd)^2}{p^2} = \left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2$

Ta cũng có $\frac{a^2+b^2}{p} = \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{p^2} = \frac{(ad-bc)^2+(ac+bd)^2}{p^2} = \left(\frac{ad-bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac+bd}{p}\right)^2$

Mặt khác ta có $(ac+bd)(ac-bd) = a^2c^2 - b^2d^2 = a^2(c^2+d^2) - d^2(a^2+b^2)$

Do $p = c^2 + d^2$ và $\frac{a^2+b^2}{p} \in Z \Rightarrow a^2 + b^2 \vdots p$ nên $a^2(c^2+d^2) - d^2(a^2+b^2) \vdots p$

Do đó ta được $(ac+bd)(ac-bd) \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ac+bd \vdots p \\ ac-bd \vdots p \end{array}\right.$

- Trường hợp 1: Nếu $ac + bd \vdots p$, khi đó từ $\frac{a^2+b^2}{p} = \left(\frac{ad-bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac+bd}{p}\right)^2$ ta có $\frac{ac+bc}{p} \in Z$

Kết hợp với $\frac{a^2+b^2}{p} \in Z$ ta suy ra được $\frac{ad-bc}{p} \in Z$.

Do đó $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

- Trường hợp 2: Nếu $ac - bd \vdots p$, khi đó từ $\frac{a^2+b^2}{p} = \left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2 + \left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2$ ta có $\frac{ac-bd}{p} \in Z$

Kết hợp với $\frac{a^2+b^2}{p} \in Z$ ta suy ra được $\frac{ad+bc}{p} \in Z$.

Do đó $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $\frac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Chứng minh rằng các số $ab; bc; ca$ và $ab + bc + ca$ là các số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Suy ra $a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

Hay ta được $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$

Do đó $4(ab+bc+ca)$ là số chính phường, mà 4 là số chính phương nên suy ra $ab+bc+ca$ là số chính phương.

Cũng từ $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ ta được

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=4ab \Leftrightarrow (a+b-c)^2=4ab$$

Từ đó suy ra ab là số chính phương.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $bc;ca$ là các số chính phương.

Vậy các số $ab;bc;ca$ và $ab+bc+ca$ là các số chính phương.

Ví dụ 23. Tìm số nguyên tố p thỏa mãn p^3-4p+9 là số chính phương.

Lời giải

Đặt $p^3-4p+9=t^2$ với $t\in N$. Khi đó ta có $p^3-4p+9=t^2 \Leftrightarrow p(p^2-4)=t^2-9$

Hay ta được $p(p^2-4)=(t-3)(t+3)$.

Do p là số nguyên tố nên từ hệ thức trên ta suy ra được $t-3 \vdots p$ hoặc $t+3 \vdots p$.

- Trường hợp 1: Nếu $t-3 \vdots p$, ta đặt $t-3=pk, k\in N$.

Khi đó ta được $p(p^2-4)=pk(t+3) \Leftrightarrow p^2-4=kt+3k \Leftrightarrow p^2=kt+3k+4$.

Mặt khác ta lại có $t-3=pk \Leftrightarrow (t-3)^2=p^2k^2 \Leftrightarrow t^2-6t+9=p^2k^2$

Do đó suy ra $t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4) \Leftrightarrow t^2-(k^3+6)t+9-3k^3-4k^2=0$

Xem $t^2-(k^3+6)t+9-3k^3-4k^2=0$ là phương trình bậc hai ẩn ta.

Khi đó ta có $\Delta=k^2(k^4+24k+16)$.

Để phương trình trên có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương. Muốn vậy $k^4+24k+16$ phải là số chính phương.

+ Với $k=0$, khi đó ta có $t=3$, suy ra $p^3-4p+9=9 \Rightarrow p(p^2-4)=0 \Rightarrow p=2$

+ Với $k=1$, khi đó $\Delta=41$ không phải là số chính phương

+ Với $k=2$, khi đó $\Delta=320$ không phải là số chính phương

+ Với $k=3$, khi đó $\Delta=39^2$ là số chính phương.

Khi đó ta có phương trình $t^2-31t-108=0$, giải ra ta được $t=36$.

Từ đó có $p(p^2-4)=33.39$, từ đây ta tìm được $p=11$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $k > 3$, khi đó ta chứng minh được $\left(k^2\right)^2 < k^4 + 24k + 16 < \left(k^2 + 4\right)^2$

Từ đó ta có các trường hợp nhỏ sau

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k - 15 = 0$

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 + 2\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 6k - 3 = 0$

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 + 3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2 - 24k - 7 = 0$

Các trường hợp trên đều không cho k có giá trị nguyên.

- Trường hợp 2: Nếu $t + 3 \vdots p$, ta đặt $t + 3 = pk, k \in N$.

Khi đó ta được $p\left(p^2 - 4\right) = pk\left(t - 3\right) \Leftrightarrow p^2 - 4 = kt - 3k \Leftrightarrow p^2 = kt - 3k + 4$.

Mặt khác ta lại có $t + 3 = pk \Leftrightarrow \left(t + 3\right)^2 = p^2k^2 \Leftrightarrow t^2 + 6t + 9 = p^2k^2$

Do đó suy ra $t^2 + 6t + 9 = k^2\left(kt - 3k + 4\right) \Leftrightarrow t^2 + \left(6 - k^3\right)t + 9 + 3k^3 - 4k^2 = 0$

Xem $t^2 + \left(6 - k^3\right)t + 9 + 3k^3 - 4k^2 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn ta.

Khi đó ta có $\Delta = k^2\left(k^4 - 24k + 16\right)$.

Để phương trình trên có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương. Muốn vậy $k^4 - 24k + 16$ phải là số chính phương.

+ Với $k = 0$, khi đó $t = -3$ loại

+ Với $k = 1$, khi đó Δ nhận giá trị âm

+ Với $k = 2$, khi đó Δ nhận giá trị âm

+ Với $k = 3$, khi đó $\Delta = 15^2$ là số chính phương.

Khi đó ta có phương trình $t^2 - 21t + 54 = 0$, giải ra ta được $t = 3$ và $t = 18$.

Từ đó ta tìm được $p = 2$ và $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $k > 3$, khi đó ta chứng minh được $\left(k^2 - 4\right)^2 < k^4 - 24k + 16 < \left(k^2\right)^2$

Từ đó ta có các trường hợp nhỏ sau

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k + 15 = 0$

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 - 2\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 3 = 0$

- Nếu $k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 - 3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2 - 24k + 7 = 0$

Các trường hợp trên đều không cho k có giá trị nguyên.

Kết hợp cả hai trường hợp ta được $p \in \left\{2; 7; 11\right\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 24. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = c\left(a + b\right) + ab$. Chứng minh rằng $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có $3c^2 = c(a+b)+ab \Leftrightarrow 4c^2 = c^2+ab+bc+ca = (c+a)(b+c)$.

Gọi $(a+c, b+c) = d$, khi đó ta được $(a+c)-(b+c) \vdots d$ hay $a-b \vdots d$.

Do $a-b$ là số nguyên tố nên ta suy ra được $d=1$ hoặc $d=a-b$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $d=a-b$, khi đó từ $(a+c, b+c)=d$ hay $(a+c, b+c)=a-b$

Do đó ta được $a+c=(a-b)x; b+c=(a-b)y$ với x và y là các số tự nhiên.

Do đó $(a+c)-(b+c)=(a-b)x-(a-b)y=(a-b)(x-y)$ hay $a-b=(a-b)(x-y)$

Từ đó ta được $x-y=1 \Rightarrow x=y+1$.

Ta có $4c^2=(c+a)(b+c)=(a-b)^2xy=(a-b)^2y(y+1)$

Nhận thấy $4c^2$ và $(a-b)^2$ là số chính phương nên $y(y+1)$ là số chính phương.

Mà y và $y+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên ta suy ra được $y(y+1)=0$.

Do đó $4c^2=0 \Rightarrow c=0$. Từ đó ta được $8c+1=1$ là số chính phương.

- Trường hợp 2: Xét $d=1$, khi đó ta có $(a+c, b+c)=1$.

Mà ta có $4c^2=(c+a)(b+c)$ nên $a+c$ và $b+c$ đều là số chính phương.

Đặt $a+c=m^2; b+c=n^2$ với $m, n \in N$. Khi đó $(a+c)-(b+c)=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$

Hay ta được $a-b=(m-n)(m+n)$ và $a-b$ là số nguyên tố nên ta được $m-n=1 \Rightarrow m=n+1$.

Mặt khác $4c^2=(c+a)(b+c)=m^2n^2=n^2(n+1)^2$, do đó $2c=n(n+1)$.

Từ đó ta được $8c+1=4.2c+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$

Do đó $8c+1$ là số chính phương.

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $8c+1$ là số chính phương.

Ví dụ 25. Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$. Chứng minh rằng c là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Cách 1. Ta biến đổi giả thiết như sau

$$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b) \Leftrightarrow 2b^2+9cb+10c^2-c(ac+1)^2=0$$

Xem $2b^2+9cb+10c^2-c(ac+1)^2=0$ là phương trình bậc ha ẩn b, khi đó $\Delta_b=c\left[c+8(ac+1)^2\right]$.

Và phương trình có nghiệm nguyên nên ta có Δ_b phải là số chính phương.

Đặt $\Delta_b=c\left[c+8(ac+1)^2\right]=x^2, x \in N^*$.

Gọi $d=\left(c,c+8\left(ac+1\right)^2\right)$, khi đó ta có $\left[c+8\left(ac+1\right)^2\right]-c⋮d\Rightarrow 8\left(ac+1\right)^2⋮d$

Lại có $c⋮d$ nên ta suy ra được $\left(d,\left(ac+1\right)^2\right)=1$. Từ đó suy ra $8⋮d$ hay $d\in\{1;2;4;8\}$

Ta đi xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $d=8$, khi đó từ $d=\left(c,c+8\left(ac+1\right)^2\right)$ ta suy ra $\left(\frac{c}{8},\frac{c}{8}+\left(ac+1\right)^2\right)=1$

Lại có $c\left[c+8\left(ac+1\right)^2\right]=x^2$ nên $\frac{c}{8}\left[\frac{c}{8}+\left(ac+1\right)^2\right]=\left(\frac{x}{8}\right)^2$

Từ đó ta được $x⋮8$, ta đặt $x=8k,k\in N^*$. Từ đó suy ra $\frac{c}{8}\left[\frac{c}{8}+\left(ac+1\right)^2\right]=k^2$.

Từ đó dẫn đến $\frac{c}{8}=t^2$ và $\frac{c}{8}+\left(ac+1\right)^2=s^2$ với $t,s\in N^*$ và $\left(t,s\right)=1$

Suy ra $\begin{cases}c=8t^2\\ t^2+\left(8t^2a+1\right)^2=s^2\end{cases}$. Chú ý rằng $\left(8t^2a+1\right)^2<t^2+\left(8t^2a+1\right)^2<\left(8t^2a+2\right)^2$

Do đó ta được $\left(8t^2a+1\right)^2<s^2<\left(8t^2a+2\right)^2$, mà $\left(8t^2a+1\right)^2;\left(8t^2a+1\right)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Do đó không tồn tại s thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Với $d=4$, khi đó từ $d=\left(c,c+8\left(ac+1\right)^2\right)$ ta suy ra $\left(\frac{c}{4},\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2\right)=1$

Lại có $c\left[c+8\left(ac+1\right)^2\right]=x^2$ nên $\frac{c}{4}$ và $\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2$ là các số chính phương.

Nếu $\frac{c}{4}$ là số chẵn thì $\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2$ là số chẵn, do đó $\left(\frac{c}{4},\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2\right)=2$, điều này mâu thuẫn với $\left(\frac{c}{4},\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2\right)=1$.

Do đó $\frac{c}{4}$ là số lẻ, mà $\frac{c}{4}$ là số chính phương nên $\frac{c}{4}$ chia 4 có số dư là 1.

Mặt khác do c là số chẵn nên $ac+1$ là số lẻ, do đó ta được $\left(ac+1\right)^2$ chia 4 có số dư là 1.

Từ đó suy ra $\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2$ chia 4 có số dư là 3. Điều này vô lí vì $\frac{c}{4}+2\left(ac+1\right)^2$ là số chính phương.

Vậy trường hợp này loại.

- Trường hợp 3: Với $d=2$, khi đó hoàn toàn tương tự như trên ta xét $\frac{c}{2}$ là số lẻ, mà $\frac{c}{4}$ là số chính phương nên $\frac{c}{2}$ chia 4 có số dư là 1.

Mặt khác do c là số chẵn nên $ac+1$ là số lẻ, do đó ta được $\left(ac+1\right)^2$ chia 4 có số dư là 1.

Từ đó suy ra $\frac{c}{2}+4\left(ac+1\right)^2$ chia 4 có số dư là 5. Điều này vô lí vì $\frac{c}{2}+4\left(ac+1\right)^2$ là số chính phương.

Vậy trường hợp này loại.

- Trường hợp 4: Với $d=1$, khi đó hoàn toàn tương tự như trên ta xét c là số lẻ.

Và do $\left(\frac{c}{8},\frac{c}{8}+\left(ac+1\right)^2\right)=1$, lại có $c\left[c+8\left(ac+1\right)^2\right]=x^2$ nên c là số chính phương.

Như vậy từ các trường hợp trên ta được c là một số chính phương lẻ.

Cách 2. Gọi $d=\left(b,c\right)$, khi đó ta có $b=dn;c=dm$ với $m,n\in N^*$ và $\left(m,n\right)=1$.

Thay vào $c\left(ac+1\right)^2=\left(5c+2b\right)\left(2c+b\right)$ ta được $m\left(dam+1\right)^2=d\left(5m+2n\right)\left(2m+n\right)$

Từ đó suy ra $m\left(dam+1\right)^2\vdots d$. Mà ta có $\left(d,dam+1\right)=1$ nên dẫn đến $m\vdots d$.

Đặt $m=dk,k\in N^*$, khi đó $\left(n,k\right)=\left(d,n\right)=1$.

Khi đó từ $m\left(dam+1\right)^2=d\left(5m+2n\right)\left(2m+n\right)$ ta được $k\left(d^2ak+1\right)^2=\left(5dk+2n\right)\left(2dk+n\right)$

Do đó $\left(5dk+2n\right)\left(2dk+n\right)\vdots k$, mà ta có $\left(k,2dk+n\right)=1$ nên suy ra $5dk+2n\vdots k\Rightarrow 2n\vdots k$.

Lại có $\left(k,n\right)=1$ nên dẫn đến $2\vdots k$, do đó $k\in\left\{1;2\right\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét $k=2$, khi đó ta có

$$2\left(ad^2+1\right)=\left(10d+2n\right)\left(4d+n\right)\Leftrightarrow\left(ad^2+1\right)^2=\left(5d+n\right)\left(4d+n\right)$$

Do $\left(5d+n,4d+n\right)=\left(d,4d+n\right)=\left(d,n\right)=1$ nên $\begin{cases}5d+n=x^2\\4d+n=y^2\end{cases}$, với $x,y\in N^*$ và $\left(x,y\right)=1$.

Từ đó suy ra $d=x^2-y^2$. Do đó $2ad+1=xy\Leftrightarrow a=\frac{xy-1}{2d^2}\Leftrightarrow a=\frac{xy-1}{2\left(x^2-y^2\right)}$.

Để ý rằng $\left(x+y\right)^2\ge 4xy>xy-1$ và $2\left(x^2-y^2\right)^2-\left(x+y\right)^2=\left(x+y\right)^2\left[2\left(x-y\right)^2-1\right]>0$

Do đó $2\left(x^2-y^2\right)^2>\left(x+y^2\right)>xy-1$. Điều này dẫn đến $a<1$, vô lí.

Do đó trường hợp này loại.

- Trường hợp 2: Xét $k=1$, khi đó ta được $d=m$ nên $c=d^2;b=dn$. Do đó đẳng thức của bài toán trở thành $d^2\left(ad^2+1\right)^2=\left(5d^2+2dn\right)\left(2d^2+dn\right)\Leftrightarrow\left(ad^2+1\right)^2=\left(5d+2n\right)\left(2d+n\right)$ $\left(*\right)$.

Do $\left(5d+2n,2d+n\right)=\left(d,2d+n\right)=\left(d,n\right)=1$ nên $\begin{cases}5d+2n=x^2\\2d+n=y^2\end{cases}$, với $x,y\in N^*$ và $\left(x,y\right)=1$.

Từ đó ta được $\begin{cases} d = x^2 - 2y^2 \\ n = 5y^2 - 2x^2 \end{cases}$.

Nếu x là số chẵn thì $x = 2t, t \in N^*$, khi đó $\begin{cases} d = 4t^2 - 2y^2 \\ n = 5y^2 - 8t^2 \end{cases}$

Khi đó $(*)$ trở thành $(ad+1)^2 = 4t^2y^2 \Leftrightarrow a\left(4t^2 - 2y^2\right)^2 + 1 = 2ty$, rõ ràng phương trình này vô nghiệm do hai vế khác tính chẵn lẻ.

Điều này có nghĩa là x phải là số lẻ. Từ đó suy ra d là số lẻ nên do đó $c = d^2$ là số chính phương lẻ. Kết hợp hai trường hợp ta được c là một số chính phương lẻ.

Ví dụ 26. Cho dãy các số tự nhiên được xác định bởi công thức $u_n = 3\left(n^2 + n\right) + 7$ với $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số nào là một lập phương đúng.

Lời giải

Thử một số trường hợp ta thấy

+ Với $n = 1$ thì $u_1 = 3\left(1^2 + 1\right) + 7 = 13$ không phải là lập phương đúng.

+ Với $n = 2$ thì $u_2 = 3\left(2^2 + 2\right) + 7 = 25$ không phải là lập phương đúng.

+ Với $n = 3$ thì $u_3 = 3\left(3^2 + 3\right) + 7 = 43$ không phải là lập phương đúng.

Ta sẽ chứng minh với số tự nhiên n bất kì thì $u_n = 3\left(n^2 + n\right) + 7$ không phải là lập phương đúng.

Thật vậy, giả sử tồn tại số tự nhiên n để số $u_n = 3\left(n^2 + n\right) + 7$ là một lập phương đúng.

Khi đó ta đặt $u_n = 3\left(n^2 + n\right) + 7 = a^3$ với a là một số nguyên dương.

Do $3\left(n^2 + n\right) = 3n(n+1)$ là số chẵn nên suy ra a^3 là số lẻ hay a là số lẻ.

Đặt $a = 2k + 1, k \in N^*$, khi đó từ $3\left(n^2 + n\right) + 7 = a^3$ ta được

$$3\left(n^2 + n\right) + 7 = (2k+1)^3 \Leftrightarrow 3\left(n^2 + n + 2\right) = 8k^3 + 12k^2 + 6k$$

Do $3\left(n^2 + n + 2\right) \vdots 3$ và $\left(12k^2 + 6k\right) \vdots 3$ nên suy ra $8k^3 \vdots 3$.

Do $(3, 8) = 1$ và 3 là số nguyên tố nên ta được $k \vdots 3$. Đặt $k = 3m$ với m là số nguyên dương.

Khi đó thay vào $3\left(n^2 + n + 2\right) = 8k^3 + 12k^2 + 6k$ và ta được

$$3\left(n^2 + n + 2\right) = 8.27m^3 + 12.9m^2 + 6.3m \Leftrightarrow n^2 + n + 2 = 6\left(12m^3 + 6m^2 + m\right)$$

Nhận thấy nếu n chí hết cho 3 thì $n^2 + n + 2$ chia 3 có số dư là 2, nếu n chia 3 có số dư là 1 thì $n^2 + n + 2$ chia 3 có số dư là 1, nếu n chia 3 có số dư là 2 thì $n^2 + n + 2$ chia 3 có số dư là 2. Do đó $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3 nên không chia hết cho 6.

Từ đó ta thấy đẳng thức trên không thỏa mãn.

Vậy giả sử trên là sai hay $u_n = 3\left(n^2+n\right)+7$ không phải là lập phương đúng.

Ví dụ 27. Tìm các số tự nhiên x sao cho $\dfrac{x-3}{4x+6}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải

Giả sử $\dfrac{x-3}{4x+6}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, với a, b là các số tự nhiên trong đó $b>0$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $a=0$, khi đó $x-3=0 \Rightarrow x=3$.
- Xét $a \neq 0$, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $(a,b)=1$ nên $\left(a^2,b^2\right)=1$.

Do đó từ $\dfrac{x-3}{4x+6}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ ta suy ra được $\begin{cases} x-3=ka^2 \\ 4x+6=kb^2 \end{cases}$, với k là số tự nguyên.

Từ đó suy ra $(4x+6)-4(x-3)=b^2k-4a^2k \Leftrightarrow 18=k(b-2a)(b+2a)$.

Do đó $b+2a$ và $b-2a$ là các ước của 18

Chú ý rằng $b+2a>0; b+2a>b-2a$, lại thấy $b+2a$ và $b-2a$ cùng là số lẻ

Từ đó ta có bảng giá trị như sau

$b+2a$	$b-2a$	k	$4a$	a	$b>0$	x
1 1 1	−1 −3 −9	−18 −6 −2	2, loại 4 10, loại	1	−1 loại	
3 3 3	1 −1 −3	6 −6 −2	2, loại 4 6, loại	1	1	−3
9 9	1 −1	2 −2	8 10, loại	2	5	11

Như vậy ta được

+ Với $x=3$ thì $\dfrac{x-3}{4x+6}=0$

+ Với $x=-3$ thì $\dfrac{x-3}{4x+6}=\dfrac{-3-3}{4(-3)+6}=1=1^2$

+ Với $x=11$ thì $\dfrac{x-3}{4x+6}=\dfrac{11-3}{4.11+6}=\dfrac{8}{50}=\dfrac{4}{25}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

Ví dụ 28. Cho a, b, c, d là các số nguyên thực thỏa mãn $\frac{a^2-1}{5a}=\frac{b^2-1}{5b}=\frac{c^2-1}{4c}=\frac{d^2-1}{4d}=p$, trong đó p là số nguyên dương. Chứng minh rằng $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta được $a^2+5pa-1=b^2+5pb-1=0; c^2+4pc-1=d^2+4pd-1=0$.

Xét hai phương trình bậc hai ẩn x là $x^2+5px-1=0$ và $x^2+4px-1=0$.

Khi đó ta thấy a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2+5px-1=0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2+4px-1=0$.

Theo định lý Vi – te ta được $\begin{cases} a+b=-5p \\ ab=-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} c+d=-4p \\ cd=-1 \end{cases}$.

Ta có $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=\left[ab-(a+b)c+c^2\right]\left[ab+(a+b)d+d^2\right]$

Áp dụng các hệ thức Vi – et trên ta được

$$\left[ab-(a+b)c+c^2\right]\left[ab+(a+b)d+d^2\right]=(c^2+5pc-1)(d^2-9pd-1)$$

Chú ý rằng $(c^2+5pc-1)(d^2-9pd-1)=(c^2+4pc-1+pc)(d^2+4pd-1-9pd)$

Kết với $c^2+4pc-1=d^2+4pd-1=0$ ta được

$$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=-9p^2cd=9p^2=(3p)^2$$

Vậy $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

Nhận xét: Ta có thể phát biểu một số bài tương tự như sau:

Bài 1. Cho p, q là một số nguyên dương. Giả sử phương trình $x^2+5px-1=0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$ và phương trình $x^2+4px-1=0$ có hai nghiệm $x_3; x_4$.

Chứng minh rằng $(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)$ là một số chính phương.

Bài 2. Cho p là một số nguyên dương. Giả sử phương trình $x^2+px+1=0$ có hai nghiệm là $a_1; a_2$ và phương trình $x^2+qx+1=0$ có hai nghiệm $b_1; b_2$.

Chứng minh rằng $(a_1-b_1)(a_2-b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)$ là hiệu của hai số chính phương.

Ví dụ 29. Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2}=x^2$ và $\frac{p^2+1}{2}=y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p+1=2x^2 \quad (1) \\ p^2+1=2y^2 \quad (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ (3)

Suy ra ta được $2(y+x)(y-x)\vdots p$ (4).

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x>1$. Ta có $p+1=2x^2=x^2+x^2>x+1\Rightarrow p>x$.

Từ (2) ta lại có $y>1$ nên $p^2+1=2y^2=y^2+y^2>y^2+1\Rightarrow p>y$.

Từ (3) ta suy ra được $y>x$. Từ đó ta được $0<y-x<p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x+y\vdots p$.

Mà ta lại có $0<x+y<2p$ nên ta được $x+y=p$. Thay vào (3) ta được $p-1=2(y-x)$.

Từ đó suy ra $y-x=\frac{p+1}{2}$ nên ta được $x=\frac{p+1}{4};y=\frac{3p-1}{4}$.

Thay $x=\frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p+1=2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2\Leftrightarrow p=7$.

Thay $p=7$ vào (2) ta được $7^2+1=2y^2\Rightarrow y=5$.

Vậy $p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p: Với p chẵn không xẩy ra, với $p=4k+1$ khi đó ta được $\frac{p^2+1}{2}=\frac{(4k\pm1)^2+1}{2}=8k^2\pm4k+1$. Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2\pm4k+1$ là các số chính phương.

Ví dụ 30. Cho số nguyên dương a_1. Ta lập các số nguyên dương $a_2;a_3;a_4;...;a_{2015}$ thỏa mãn điều kiện $a_{n+1}=a_n^3+2013$, với $n=1;2;3;...;2014$. Hỏi trong 2015 số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_{2015}$ có bao nhiêu số chính phương.

Lời giải

Ta có nhận xét: Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 8 hoặc chia 8 dư 4. Một số chính phương lẻ thì chia 8 dư 1.

Gọi n là số nhỏ nhất để a_n là số chính phương. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với a_n là số chẵn.

Khi đó ta được $a_n^3\vdots 8$ nên a_n^3+2013 chia 8 dư 5.

Nếu $n<2013$ thì $a_{n+1}=a_n^3+2013$ chia 8 dư 5. Vì 5^3+2013 chia 8 dư 2 nên a_{n+1}^3+2013 chia 8 dư 2.

Do đó nếu $n<2012$ thì $a_{n+2}=a_{n+1}^3+2013$ chia 8 dư 2.

Lập luận tương tự như trên thì khi $n<2011$ thì $a_{n+3}=a_{n+3}^3+2013$ chia 8 dư 5.

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta được với $m\in N^*$ và $m>n$ thì a_m chia 8 dư 2 hoặc dư 5. Do đó a_m không thể là số chính phương.

- Trường hợp 2: Với a_n là số lẻ.

Khi đó a_n chia 8 dư 1.

Vì $1^3 + 2013$ chia 8 dư 6 nên với $n < 2013$ thì $a_{n+1} = a_n^3 + 2013$ chia 8 dư 6, do đó a_{n+1} không thể là số chính phương.

Cũng từ a_{n+1} là số chẵn nên lập luận tương tự như trường hợp 1 ta được với $m > n+1$ thì a_m không thể là số chính phương.

Như vậy trong dãy số $a_1; a_2; a_3; ...; a_{2015}$ có không qua một số chính phương và nếu có thì a_1 là số chính phương duy nhất.

Ví dụ 31. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p - 2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p = 2$, khi đó ta được $n = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p > 2$, khi đó ta có $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)$.

Từ đó ta được $n + 1 \vdots p$ hoặc $n^2 - n + 1 \vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n + 1 \vdots p$ thì ta được $n + 1 \ge p$. Từ đó ta được $2(n^2 - n + 1) \ge n^2 + (n-1)^2 + 1 > n > p - 1$.

Từ đó ta được $p(p-1) < 2(n+1)(n^2 - n + 1)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2 - n + 1 \vdots p$, khi đó ta đặt $n^2 - n + 1 = kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)$ ta được $p = 2(n+1)k + 1$.

Từ đó suy ra $n^2 - n + 1 = 2(n+1)k^2 + k$ hay $n^2 - (2k^2 + 1)n - (2k^2 + k - 1) = 0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2 + 1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta = (2k^2 + 1)^2 + 4(2k^2 + k - 1)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $(2k^2 + 1)^2 < \Delta < (2k^2 + 4)^2$. Do đó $\Delta = (2k^2 + 1)^2 + 4(2k^2 + k - 1) = (2k^2 + 3)^2$.

Từ đó ta tính được $k = 3$ suy ra $n = 20$ nên $p = 127$. Thử lại ta thấy $p = 127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p = 2$ và $p = 127$.

Ví dụ 32. Giả sử K là tích của tám số tự nhiên liên tiếp và Q là là một số chính phương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $Q > K$. Chứng minh rằng $Q - K$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $K=a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)(a+6)(a+7)$ với $a\in N$.

Hay ta được $K=(a^2+7a)(a^2+7a+6)(a^2+7a+10)(a^2+7a+12)$

Khi đó ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: Nếu $a=0$, khi đó $K=0$ nên $Q=1$, suy ra $Q-K=1$ là một số chính phương.
- Trường hợp 2: Nếu $a=1$, khi đó $k=8!=40320$ nên suy ra $200<\sqrt{K}<201$.

Ta chọn $Q=201^2$ khi đó $Q-K=201^2-40320=81=9^2$ là một số chính phương.

- Trường hợp 3: Nếu $a\ge 2$, khi đó đặt $x=a^2+7a$ nên $x\ge 18$.

Ta được $K=x(x+6)(x+10)(x+12)=(x^2+6x)(x^2+22x+120)=x^4+28x^3+252x^2+720x$.

Ta xét $(x^2+14x+26)^2=x^4+28x^3+248x^2+728x+676$. Do đó ta được

$$\begin{aligned}K-(x^2+14x+26)^2&=(x^4+28x^3+252x^2+720x)-(x^4+28x^3+248x^2+728x+676)\\&=(2x-2)^2-680\ge(2.18-2)^2-680>0\end{aligned}$$

Do đó $K>(x^2+14x+26)^2$

Lại xét $(x^2+14x+28)^2=x^4+28x^3+252x^2+784x+784$. Do đó ta được

$$\begin{aligned}(x^2+14x+28)^2-K&=(x^4+28x^3+252x^2+784x+784)-(x^4+28x^3+252x^2+720x)\\&=64x+784>0\end{aligned}$$

Do đó $(x^2+14x+28)^2>K$. Như vậy ta được $(x^2+14x+26)^2<K<(x^2+14x+28)^2$.

Từ đó ta chọn $Q=(x^2+14x+27)^2$ hoặc $Q=(x^2+14x+28)^2$.

+ Với $Q=(x^2+14x+27)^2$ khi đó ta được $Q-K=36x+729-2x^2>0$.

Từ đó ta được $(x-9)^2<446\Rightarrow x\le 30$ nên ya được $18\le x\le 30$.

Đến đây ta suy ra được $a=2$ hoặc $a=3$.

Khi $a=2$ thì $x=18$ suy ra $Q-K=27^2$ là số chính phương và khi $a=3$ thì $x=30$ suy ra $Q-K=9^2$ là số chính phương.

+ Với $Q=(x^2+14x+28)^2$ khi đó $Q-K=64x+784=64(a^2+7a)+784=(8a+28)^2$ là số chính phương.

Vậy trong mọi trương hợp xẩy ra ta luôn có $Q-K$ là một số chính phương.

Ví dụ 33. Cho x, y, z là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một và thỏa mãn điều kiện $(x-z)(y-z)=z^2$. Chứng minh rằng tích xyz là một số chính phương.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $x-z$ và $y-z$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, gọi d là ước chung lớn nhất của $x-z$ và $y-z$, khi đó ta được $\begin{cases} x-z \vdots d \\ y-z \vdots d \end{cases}$

Từ đó ta được $(x-z)(y-z) \vdots d^2$. Mà ta có $(x-z)(y-z)=z^2$ nên suy ra $z^2 \vdots d^2 \Rightarrow z \vdots d$.

Cũng từ $\begin{cases} x-z \vdots d \\ y-z \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \vdots d \\ y \vdots d \end{cases}$.

Mà theo bài ra thì $(x, y)=1$, từ đó ta được $d=1$. Do đó $x-z$ và $y-z$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lại từ $(x-z)(y-z)=z^2$ nên ta được $x-z$ và $y-z$ là hai số chính phương.

Đặt $\begin{cases} x-z=m^2 \\ y-z=n^2 \end{cases}$, $m; n \in N$. Nên ta được $(x-z)(y-z)=m^2.n^2=z^2 \Rightarrow z=mn$.

Ta có $x+y=(x-z)+(y-z)+2z=m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$.

Cũng từ $(x-z)(y-z)=z^2$ ta suy ra được $xy=z(x+y)$, do đó $xyz=z^2(x+y)=\left[z(m+n)\right]^2$

Hay tích xyz là một số chính phương.

Ví dụ 34. Tìm số tự nhiên lẻ nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Giả sử n^2 biểu diễn được thành tổng của $2k+1, k \in N^*$ số chính phương liên tiếp.

Khi đó ta có $n^2=(a-k)^2+(a-k+1)^2+...+a^2+...+(a+k)^2$ với a là số tự nhiên.

Suy ra ta được $n^2=(2k+1)a^2+2(1+2^2+3^2+...+k^2)$

Hay ta được $3n^2=3(2k+1)a^2+k(k+1)(2k+1)$.

Chú ý rằng n là số tự nhiên lẻ, nên ta đặt $n=2t+1$, do đó $n=(2t+1)^2=4t(t+1)=8s+1$ với s và t là các số tự nhiên. Ta cũng có a là số lẻ nên $a=8r+1$, với r là số tự nhiên.

Do đó từ $3n^2=3(2k+1)a^2+k(k+1)(2k+1)$ ta được

$$3(8s+1)=3(2k+1)(8r+1)+k(k+1)(2k+1)$$

Dễ thấy $3(8s+1)$ và $3.2k(8r+1)$ chia 8 dư 1 nên suy ra $6k+k(k+1)(2k+1)$ chia hết cho 8

Suy ra ta được $k\left[(k+1)(2k+1)+6\right] \vdots 8$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu k là số chẵn thì $(k+1)(2k+1)+6$ là số lẻ nên để $k\left[(k+1)(2k+1)+6\right] \vdots 8$ thì k phải cha hết cho 8.

+ Với $k=8$, khi đó từ $3n^2=3(2k+1)a^2+k(k+1)(2k+1)$ ta được $n^2=17a^2+17.24$.

Nếu n chia hết cho 3 thì a chia hết cho 3, khi đó n^2 và a^2 chia hết cho 9 nhưng $17a^2 + 17.24$ không chia hết cho 9. Còn nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 chia 3 dư 1 và do đó a không chí hết cho 3 nên a^2 chia 3 dư 1, suy ra $17a^2 + 17.24$ chia 3 dư 3. Do đó với $k = 8$ thì không tồn tại a thỏa mãn phương trình.

+ Với $k = 8p \geq 16$, khi đó ta được $n^2 > 77^2$

• Trường hợp 2: Nếu k là số lẻ thì ta đặt $k = 8p + q$ với p, q là số tự nhiên và $q \in \{1;3;5;7\}$

Khi đó thay vào $k\left[(k+1)(2k+1)+6\right] \vdots 8$ ta được $\left[8p+6+(q+1)(2q+1)\right] \vdots 8$

Thử từng trường hợp cụ thể ta được $q = 5$ thỏa mãn, do đó $k = 8p + 5$.

+ Với $k = 5$, khi đó từ $3n^2 = 3(2k+1)a^2 + k(k+1)(2k+1)$ ta được $n^2 = 11a^2 + 110$

Hay $n^2 = 11(a^2 + 10)$. Do n^2 là số chính phương và 11 là số nguyên tố nên $a^2 + 10 \vdots 11$

Ta có $a^2 + 10 = a^2 - 1 + 11 = (a-1)(a+1) + 11$ nên suy ra $(a-1)(a+1) \vdots 11$.

Chú ý rằng số lẻ $a > k = 5$ nên ta thử với $a = 21; 23; \ldots$ thì được $a = 23$ thỏa mãn.

Khi đó ta được $n = 77$. Thử lại ta được $77^2 = 18^2 + 19^2 + \ldots + 27^2 + 28^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với + Với $k = 8p + 5 \geq 13$, khi đó ta được $n^2 \geq (2k+1)k^2 + \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{3} > 77^2$.

Vậy số tự nhiên lẻ nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 77$.

Ví dụ 35. Xét phương trình $x^2 + ky^3 - 2kxy^2 - k = 0$ với k là số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0; y > 1$ khi và chỉ khi k là một số chính phương.

Lời giải

• Điều kiện cần: Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được $x^2 - 2kxy^2 + k(y^3 - 1) = 0$.

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn x thì ta có $\Delta = 4k^2y^4 - 4k(y^3 - 1)$.

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0; y > 1$.

Khi đó $\Delta = 4k^2y^4 - 4k(y^3 - 1)$ phải là số chính phương.

Do $y > 1$ nên $y^3 - 1 > 0$ và k là số nguyên dương nên ta được $\Delta > 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta - (2ky^2 - y - 1)^2 &= 4k^2y^4 - 4k(y^3 - 1) - (2ky^2 - y - 1)^2 = 4k + 4ky^2 - y^2 - 1 - 2y \\ &= (y^2 + 1)(4k - 1) - 2y > y^2 + 1 - 2y = (y-1)^2 > 0\end{aligned}$$

Do đó ta được $\Delta > (2ky^2 - y - 1)^2$. Lại có

$$\begin{aligned}(2ky^2 - y + 1)^2 - \Delta &= (2ky^2 - y - 1)^2 - \left[4k^2y^4 - 4k(y^3 - 1)\right] = 4ky^2 - 4k + y^2 + 1 - 2y \\ &= 4k(y^2 - 1) + (y-1)^2 > (y-1)(4ky + y + 4k - 1) > 0\end{aligned}$$

Do đó $\Delta < \left(2ky^2 - y + 1\right)^2$. Từ đó ta được $\left(2ky^2 - y - 1\right)^2 < \Delta < \left(2ky^2 - y + 1\right)^2$.

Do Δ là số chính phương nên suy ra $4k^2y^4 - 4k\left(y^3 - 1\right) = \left(2ky^2 - y\right)^2$.

Khi đó ta có $4k^2y^4 - 4ky^3 + 4k = 4k^2y^4 - 4ky^3 + y^2 \Rightarrow 4k = y^2$.

Do y, k là số nguyên dương nên ta suy ra $y = 2a$ với a là số nguyên dương, do đó $k = a^2$ hay k là số chính phương.

- Điều kiện đủ: Giả sử k là số chính phương, khi đó đặt $k = t^2$ với t là số nguyên dương.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $x^2 + 2t^2xy^2 + t^2y^3 - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - t^2 + t^2y^2\left(t - 2x\right) = 0$

Khi đó phường trình có nghiệm nguyên là $\left(x; y\right) = \left(t; 2t\right)$ với t là số nguyên dương lớn hơn 1.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 36. Tìm số nguyên dương n để $\left(5n + 5\right)\left(4n + 2\right)$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử số nguyên dương n thỏa mãn $\left(5n + 5\right)\left(4n + 2\right)$ là một số chính phương.

Khi đó ta đặt $\left(5n + 5\right)\left(4n + 2\right) = a^2$ với a là một số nguyên dương .

Để ý là $\left(5n + 5\right)\left(4n + 2\right) = 10\left(n + 1\right)\left(2n + 1\right)$ nên suy ra a^2 chia hết cho 10 hay a^2 chia hết cho 2 và 5. Do 2 và 5 là số nguyên tố nên a chia hết cho 2 và 5. Từ đó suy ra $a = 10m$ với là số nguyên dương.

Do đó từ phương trình $\left(5n + 5\right)\left(4n + 2\right) = a^2$ ta được $\left(n + 1\right)\left(2n + 1\right) = 10m^2$

Từ phương trình trên ta suy ra n phải là số lẻ, khi đó ta đặt $n = 2k + 1$ với $k \in N$.

Khi đó từ $\left(n + 1\right)\left(2n + 1\right) = 10m^2$ ta được $\left(2k + 2\right)\left(4k + 3\right) = 10m^2 \Rightarrow \left(k + 1\right)\left(4k + 3\right) = 5m^2$

Gọi $d = \left(k + 1, 4k + 3\right)$, suy ra $4\left(k + 1\right) - \left(4k + 3\right) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Nên từ $\left(k + 1\right)\left(4k + 3\right) = 5m^2$ ta được $\begin{cases} k + 1 = 5p^2 \\ 4k + 3 = q^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k + 1 = q^2 \\ 4k + 3 = 5p^2 \end{cases}$, với $p; q \in N^*$.

- Với $\begin{cases} k + 1 = 5p^2 \\ 4k + 3 = q^2 \end{cases}$, ta thấy $4k + 3 = q^2$ không xẩy ra vì số chính phương chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1. Nên hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên.

- Với $\begin{cases} k + 1 = q^2 \\ 4k + 3 = 5p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k + 4 = 4q^2 \\ 4k + 3 = 5p^2 \end{cases} \Rightarrow 4q^2 - 1 = 5p^2$, khi đó từ ta thấy p là số lẻ.

Đặt $p = 2b + 1$ với $b \in N$, thay vào trên ta được $4q^2 - 5\left(2b + 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\left(q^2 - 5b^2 - 5b\right) = 3$, rõ ràng phương trình này cũng không có nghiệm nguyên nên hệ trên không có nghiệm nguyên.

Vậy không có số nguyên dương n thỏa mãn bài toán.

Nhận xét: Ta có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng phương trình nghiệm nguyên là:

+ Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+1)(2x+1)=10y^2$

+ Bài toán tổng quát của bài toán trên: Phương trình $(x+1)(2x+1)=2p.y^2$, trong đó $p=4k+1$ là số nguyên tố, không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 37. Cho $m>n$ là các số nguyên dương lẻ và n^2-1 chia hết cho m^2-n^2+1. Chứng minh rằng m^2-n^2+1 là một số chính phương.

Lời giải

Theo giả thiết ta có n^2-1 chia hết cho m^2-n^2+1 nên ta được $m^2-(m^2-n^2+1)$ chia hết cho m^2-n^2+1. Từ đó ta được $m^2 \vdots (m^2-n^2+1)$.

Từ đó tồn tại số nguyên dương k để $m^2=k(m^2-n^2+1)$

Chú ý rằng $m^2=\left(\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\right)^2$ và $m^2-n^2+1=4.\frac{m+n}{2}.\frac{m-n}{2}-1$

Do m và n là các số nguyên dương lẻ, lại có $m>n$ nên $\frac{m+n}{2};\frac{m-n}{2}$ là các số nguyên dương.

Đặt $x=\frac{m+n}{2};y=\frac{m-n}{2}$, khi đó ta được $(x+y)^2=k(4xy+1)$.

Để chứng minh được $4xy+1$ là số chính phương ta cần chứng minh k là số chính phương.

Thật vậy, giả sử cặp số nguyên dương $(x_0;y_0)$ với x_0+y_0 nhỏ nhất thỏa mãn thỏa đẳng thức trên.

Khi đó ta được $(x_0+y_0)^2=k(4x_0y_0+1)$.

Xét phương trình bậc hai ẩn x là $x^2-(4k-2)y_0x+y_0^2-k=0$.

Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình trên. Như vậy theo hệ thức Vi – et thì phương trình còn có một nghiệm nữa là x_1. Khi đó ta được $\begin{cases} x_0+x_1=(4k-2)y_0 \\ x_0.x_1=y_0^2-k \end{cases}$.

Từ hệ thức thứ nhất $x_0+x_1=(4k-2)y_0$ ta suy ra được x_1 là số nguyên. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x_1<0$ thì từ hệ thức thứ hai $x_0.x_1=y_0^2-k$ ta được $y_0^2-k<0 \Rightarrow y_0^2<k$.

Khi đó ta có $x_1^2-(4k-2)y_0x_1+y_0^2-k=(x_1+y_0)^2+k(-4x_1-1)>0$, điều này mâu thuẫn vì x_1 là nghiệm của phương trình.

- Nếu $x_1=0$, khi đó từ $x_0.x_1=y_0^2-k$ ta được $y_0^2-k=0 \Rightarrow k=y_0^2$ là số chính phương.

- Nếu $x_1>0$ thì ta được $y_0^2-k>0 \Rightarrow k>y_0^2$. Khi đó $(x_1;y_0)$ là một nghiệm của phương trình $(x+y)^2=k(4xy+1)$.

Theo cách chọn cặp số $(x_0;y_0)$ ta được $x_0+y_0\le x_1+y_0\Rightarrow y_0\le x_0\le x_1$.

Từ đó dẫn đến $y_0^2-(4k-2)y_0^2+y_0^2-k=(4-4k)y_0^2-k\ge 0$, điều này vô lí vì k là số nguyên dương.

Vậy ta được k là số chính phương nên dẫn đến m^2-n^2+1 là số chính phương.

Ví dụ 38. Tìm các cặp số nguyên $(a;b)$ sao cho hai số a^2+4b và b^2+4a đều là số chính phương.

Lời giải

Cách 1. Ta sẽ chứng minh các cặp số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(a;b)=(0;k^2),(k^2;0),(-4;-4),(-5;-6),(-6-5),(k;1-k),(1-k,k),k\in Z$$

Thật vậy, do vai trò của a và b như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $|a|\ge|b|$.

+ Nếu $b=0$, khi đó để a^2+4b và b^2+4a đều là số chính phương thì $a=k^2$ với $k\in Z$.

+ Nếu $b\ne 0$, khi đóta xét phương trình $x^2+ax-b=0$ có $\Delta=a^2+4b$.

Do a^2+4b đều là số chính phương nên phương trình trên sẽ có hai nghiệm nguyên là x_1 và x_2.

Mặt khác kết hợp với hệ thức $Vi-et$ ta được $\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}\ge\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|\ge 1$

Từ đó suy ra một trong hai nghiệm nguyên của phương trình trên, chẳng hạn x_1 thỏa mãn $|x_1|\le 2$

.

Từ đó ta được $x_1\in\{-2;-1;1;2\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $x_1=2$, khi đó từ phương trình $x^2+ax-b=0$ ta được $b=2a+4$.

Từ đó $b^2+4a=(2a+4)^2+4a=4a^2+20a+16=(2a+5)^2-9$ là số chính phương

Đặt $(2a+5)^2-9=y^2$ với $y\in N$, từ đó ta được $(2a+5-y)(2a+5+y)=9$.

Suy ra $\begin{cases}2a+5-y=1\\2a+5+y=9\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2a+5-y=-9\\2a+5+y=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2a+5-y=3\\2a+5+y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2a+5-y=-3\\2a+5+y=-3\end{cases}$

Giải các hệ trên ta thu được $a=-4$ và $a=-1$

Với $a=-4$, khi đó $b=-4$. Từ đó ta được $(a;b)=(-4;-4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $a=-1$, khi đó $b=2$. Trường hợp này loại do không thỏa mãn $|a|\ge|b|$.

- Trường hợp 2: Nếu $x_1=-2$, khi đó từ phương trình $x^2+ax-b=0$ ta được $b=4-2a$.

Từ đó $b^2+4a=(4-2a)^2+4a=4a^2-12a+16=(2a-3)^2+7$ là số chính phương

Đặt $(2a-3)^2+7=y^2$ với $y\in N$, từ đó ta được $(y-2a-3)(y-2a+3)=7$.

Giải phương trình trên ta được $(a;b)=(3;-2),(0;4)$, trong đó nghiệm $(0;4)$ bị loại do không thỏa mãn $|a|\ge|b|$. Chú ý là $(3;-2)$ có dạng $(k;1-k)$.

- Trường hợp 3: Nếu $x_1 = 1$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = a + 1$.

Từ đó $b^2 + 4a = (a+1)^2 + 4a = a^2 + 6a + 1 = (a+3)^2 - 8$ là số chính phương

Đặt $(a+3)^2 - 8 = y^2$ với $y \in N$, từ đó ta được $(a+3-y)(a+3+y) = 8$.

Giải phương trình trên ta được $(a;b) = (-6;-5),(0;1)$, trong đó nghiệm $(0;1)$ bị loại do không thỏa mãn $|a| \ge |b|$.

- Trường hợp 4: Nếu $x_1 = -1$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = 1 - a$.

Từ đó $b^2 + 4a = (1-a)^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ là số chính phương

Và $a^2 + 4b = a^2 + 4(1-a) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$ là số chính phương.

Do đó $(a;b) = (k;1-k)$ với k là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý với $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $(b;a)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy kết hợp các trường hợp lại ta được các cặp số nguyên $(a;b)$ như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

+ Nếu $a = 0$, khi đó để $a^2 + 4b$ và $b^2 + 4a$ đều là số chính phương thì $b = k^2$ với $k \in Z$.

+ Nếu $b = 0$, khi đó để $a^2 + 4b$ và $b^2 + 4a$ đều là số chính phương thì $a = k^2$ với $k \in Z$.

Ta xét trường hợp $ab \ne 0$, khi đó ta thấy a^2 và $a^2 + 4b$ cùng tính chẵn lẻ, b^2 và $b^2 + 4a$ cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $b > 0$, khi đó ta có $a^2 + 4b \ge (|a| + 2)^2 = a^2 + 4|a| + 4 \Rightarrow |b| \ge |a| + 1$

Nếu $b < 0$, khi đó ta có $a^2 + 4b \le (|a| - 2)^2 = a^2 - 4|a| + 4 \Rightarrow |b| \ge |a| - 1$

Hoàn toàn tương tự ta có với $a > 0$ thì $|a| \ge |b| + 1$ và với $a < 0$ thì $|a| \ge |b| - 1$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a < b$, khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu a và b cùng dương, khi đó từ trên ta suy ra được $a \ge b + 1$ và $b \ge a + 1$, điều này mâu thuẫn.
- Trường hợp 2: Nếu a và b cùng âm, khi đó từ trên ta được $a = b$ hoặc $a = b - 1$.

+ Nếu $b < -5$, khi đó $(b+4)^2 < b^2 + 4a < (b+2)^2$ nên $b^2 + 4a$ không thể là số chính phương.

+ Nếu $b \ge -5$, khi đó ta được $b \in \{-1;-2;-3;-4;-5\}$

Xét các trường hợp cụ thể ta được $(a;b) = (-4;-4),(-6;-5)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Nếu a âm và b dương, khi đó từ $|b| \ge |a| + 1$ và $|a| \ge |b| - 1$ ta suy ra được $b = 1 - a$.

Từ đó $b^2+4a=(1-a)^2+4a=a^2+2a+1=(a+1)^2$ là số chính phương

Và $a^2+4b=a^2+4(1-a)=a^2-4a+4=(a-2)^2$ là số chính phương.

Do đó $(a;b)=(k;1-k)$ với k là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(a;b)=(0;k^2),(k^2;0),(-4;-4),(-5;-6),(-6-5),(k;1-k),(1-k,k),k\in Z.$$

Ví dụ 39. Tìm số tự nhiên n để số 3^n-1 là lập phương của một một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $3^n-1=a^3$ với a là số tự nhiên. Khi đó ta được $3^n=a^3+1\Leftrightarrow 3^n=(a+1)(a^2-a+1)$

Do đó $a+1$ và a^2-a+1 là các ước của 3^n. Suy ra $\begin{cases}a+1=3^x\\ a^2-a+1=3^y\end{cases}$, trong đó $x,y\in N$ và $x+y=n$.

Từ $a+1=3^x\Rightarrow a=3^x+1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$(3^x+1)^2-(3^x+1)+1=3^y\Leftrightarrow 3^{2x}-3^{x+1}+3=3^y$$

- Nếu $x\ge 2$, khi đó $3^{2x}-3^{x+1}$ chia hết cho 9, do đó $3^{2x}-3^{x+1}+3$ chia 9 dư 3 nên 3^y chia 9 dư 3.

Do $x\ge 2$ nên $a=3^x-1\ge 8$. Do đó từ $a^2-a+1=3^y$ ta được $3^y=a(a-1)+1\ge 8.7+1=57$

Suy ra $y\ge 4$, do đó 3^y chia hết cho 9. Mâu thuẫn với trên.

Như vậy trường hợp này không có n thỏa mãn.

- Nếu $x=1$, khi đó từ $a+1=3^x$ ta được $a=2$, do đó $3^n=a^3+1=2^3+1=9$ nên $n=2$
- Nếu $x=0$, khi đó từ $a+1=3^x$ ta được $a=0$, do đó $3^n=a^3+1=0^3+1=1$ nên $n=0$

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n=0$ và $n=2$.

Ví dụ 40. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ nhận giá trị nguyên dương. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ có thể biểu diễn được thành tổng của hai số chính phương.

Phân tích và hướng dẫn giải

Cũng tương tự như các ví dụ trên ta đặt $n=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ và cần chứng minh được n là tổng của hai số chính phương. Ta viết lại đẳng thức trên như sau $x^2+y^2+z^2=n(xyz+1)$.

Giả sử $(x_0;y_0;z_0)$ là một bộ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán, điều đó có nghĩa là $x_0^2+y_0^2+z_0^2=n(x_0y_0z_0+1)$ hay ta viết lại được $x_0^2-nx_0y_0z_0+y_0^2+z_0^2-n=0$.

Xét phương trình bậc hai $x^2-nxy_0z_0+y_0^2+z_0^2-n=0$, khi đó ta thấy x_0 là một nghiệm của phương trình. Theo định lí Vi – et thì ngoài nghiệm x_0 phương trình còn có một nghiệm đó là x_1.

Như vậy theo định lia Vi – et ta có $\begin{cases} x_1+x_0=ny_0z_0 \\ x_1x_0=y_0^2+z_0^2-n \end{cases}$

Từ hệ thức trên ta suy ra được x_1 nhận giá trị nguyên.

Không mất tính tổng quát ta chọn $x_0+y_0+z_0$ bé nhất và $x_0\ge y_0\ge z_0$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $y_0^2+z_0^2<n$, khi đó x_1 là số nguyên âm

Từ đó $0=x_1^2-ny_0z_0x_1+y_0^2+z_0^2-n\ge x_1^2+n+y_0^2+z_0^2-n=x_1^2+y_0^2+z_0^2>0$, điều này vô lí.

- Trường hợp 2: Nếu $y_0^2+z_0^2>n$, khi đó x_1 là số nguyên dương.

Khi đó $\left(x_1;y_0;z_0\right)$ là một bộ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Theo cách chọn $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ ta suy ra được $x_0\le x_1$. Khi đó từ hệ thức Vi – et ta có

$$y_0^2+z_0^2-n-ny_0z_0=\left(x_0-1\right)\left(x_1-1\right)-1\ge\left(x_0-1\right)^2-1$$

+ Nếu $x_0>y_0$ thì ta được $\left(x_0-1\right)^2-1\ge y_0^2-1$. Do đó $y_0^2+z_0^2-n-ny_0z_0\ge y_0^2-1$

Từ đó ta được $z_0^2+1\ge ny_0z_0+n\ge n\left(z_0^2+1\right)$ nên suy ra $n=1$.

+ Nếu $x_0=y_0$, khi đó ta được $2y_0^2+z_0^2=n\left(y_0^2z_0+1\right)$

Do đó $z_0^2=y_0^2\left(nz_0-2\right)+n\ge z_0^2\left(nz_0-2\right)+n>z_0^2\left(nz_0-2\right)$

Từ đâu ta suy ra được $nz_0<3$ nên $n=1$ hoặc $n=2$.

Chú ý rằng $n=1=0^2+1^2$ và $n=2=1^2+1^2$.

- Trường hợp 3: Nếu $y_0^2+z_0^2=n$ thì có nghĩa là n viết được thành tổng của hai số chính phương.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Chủ đề 3
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa.

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

2. Một số tính chất.

- Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q thì $p = q$.
- Nếu tích abc chia hết cho số nguyên tố p thì ít nhất một thừa số của tích abc chia hết cho số nguyên tố p.
- Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p .

3. Cách nhận biết một số nguyên tố.

a) Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố đã biết từ nhỏ đến lớn.

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không phải là số nguyên tố.
- Nếu chia cho đến lúc số thương nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn còn số dư thì số đó là số nguyên tố.

b) Một số có 2 ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.

4. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó.

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố

Chẳng hạn $A = a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in N^*$

Khi đó số các ước số của A được tính bằng $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng $\dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1}...\dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

5. Số nguyên tố cùng nhau.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a, b) = 1$.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a, b, c) = 1$.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Bài toán liên quan đến số nguyên tố, hợp số thường có dạng như tìm số nguyên tố, hợp số thỏa mãn tính chất nào đó, chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số, chứng minh các quan hệ chia hết, sử dụng tính chất về số nguyên tố để giải các phương trình nghiệm nguyên,…

Ví dụ 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố do đó ta được $4p^2+1>5$ và $6p^2+1>5$

Đặt $x=4p^2+1=5p^2-(p-1)(p+1)$; $y=6p^2+1\Rightarrow 4y=25p^2-(p-2)(p+2)$

Khi đó

- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5

Suy ra x chia hết cho 5 mà $x>5$ nên x không là số nguyên tố.

- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5

Suy ra 4y chia hết cho 5 mà $(4,5)=1$ nên y chia hết cho 5 mà $y>5$

Do đó y không là số nguyên tố

Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố nên $p=5$.

Thử với $p=5$ thì $x=101$; $y=151$ là các số nguyên tố

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Lời giải

Xét ba số tự nhiên liên tiếp là $2^n-1; 2^n; 2^n+1$.

Trưng ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3.

Do $n>2$ nên $2^n-1>3$, mà theo giả thiết thì 2^n-1 là số nguyên tố, do đó 2^n-1 không chia hết cho 2. Lại có 2^n không chia hết cho 3. Do đó suy ra 2^n+1 chia hết cho 3.

Mà do $n>2$ nên $2^n+1>3$. Từ đó ta được 2^n+1 là hợp số.

Ví dụ 3. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Suy ra ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p-1)p(p+1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3.

Để ý là $(3;8)=1$ nên ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2-1; r^2-1; s^2-1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2-q^2+r^2-s^2=\left(p^2-1\right)-\left(q^2-1\right)+\left(r^2-1\right)-\left(s^2-1\right)$.

Do đó ta được $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $\left(p;q\right)$ sao cho $p^2-2q^2=1$.

Lời giải

Từ $p^2-2q^2=1$ ta được $p^2=2q^2+1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p=2k+1$ với $k\in N^*$.

Khi đó ta được $\left(2k+1\right)^2=2q^2+1\Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2q^2+1\Leftrightarrow 2k\left(k+1\right)=q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q=2$.

Thay vào $p^2-2q^2=1$ ta suy ra được $p=3$.

Vậy cặp số nguyên tố $\left(p;q\right)=\left(3;2\right)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho trong dãy $n+1;n+2;...;n+10$ có nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải

Cách 1. Ta thấy $n+1;n+2;...;n+10$ là 10 số tự nhiên liên tiếp. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Với $n=0$, khi đó dãy số trên trở thành 1; 2; 3; …; 10. Trong dãy số này có các số nguyên tố là 2; 3; 5; 7.

+ Trường hợp 2: Với $n=1$, khi đó dãy số trên trở thành 2; 3; …; 11. Trong dãy số này có các số nguyên tố là 2; 3; 5; 7; 11.

+ Trường hợp 3: Với $n>1$, khi đó dãy số trên gồm 10 số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 3. Chú ý là trong các số lớn hơn 3 không có số chẵn nào là số nguyên tố, ngoài ra trong năm số tự nhiên lẻ liên tiếp có ít nhất một số là bội của 3.

Như vậy trong các dãy số như vậy không có quá 4 số nguyên tố.

Vậy với $n=1$ thì dãy số $n+1;n+2;...;n+10$ có nhiều số nguyên tố nhất.

Cách 2. Gọi S_n là số các số nguyên tố tương ứng với n.

Khi đó ta được $S_0=4;S_1=5;S_2=4$.

Xét $n\ge 3$, khi đó dãy số $n+1;n+2;...;n+10$ có 5 số chẵn lớn hơn 3 nên năm số chẵn này không phải là số nguyên tố. Trong năm số lẻ còn lại có ít nhất một số chia hết cho 4. Từ đó suy ra với các giá trị $n\ge 3$ thì $S_n\le 4$.

Vậy với $n=1$ thì dãy số $n+1;n+2;...;n+10$ có nhiều số nguyên tố nhất.

Ví dụ 6. Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số sau đây đều là nguyên tố.

$$n+1,\ n+5,\ n+7,\ n+13,\ n+17,\ n+25,\ n+37$$

Lời giải

Ta có $n+37=n+2+7.5;n+17=n+3+7.2;n+25=n+4+7.3;n+13=n+6+7.1$

Như vậy các số $n+1, n+5, n+7,\ n+13, n+17, n+25, n+37$ khi chia cho 7 sẽ có 7 số dư khác nhau. Do đó trong 7 số trên có một số chia hết cho 7.

Vì $n+1, n+5, n+7, n+13, n+17, n+25, n+37$ đều là số nguyên tố và trong đó các số nguyên tố $n+7, n+13, n+17, n+25, n+37$ đều lớn hơn 7. Do đó chỉ có thể $n+1$ hoặc $n+5$ chia hết cho 7.

- Nếu $n+1 \vdots 7$ và $n+1$ là số nguyên tố, khi đó $n+1=7 \Rightarrow n=6$. Khi đó tất cả các số đã cho đều là số nguyên tố.
- Nếu $n+5 \vdots 7$ và $n+5$ là số nguyên tố, khi đó $n+5=7 \Rightarrow n=2$. Khi đó $n+25=27$ không phải lầ số nguyên tố.

Vậy số cần tìm là $n=6$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải

Do p là số nguyên tố nên khi p là số chẵn thì $p=2$, còn nếu p là số lẻ thì p có các dạng $p=4k+1$ hoặc $p=4k+3$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$ suy ra $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2: Nếu $p=4k+1$, khi đó ta được $p^3+\dfrac{p-1}{2}=(4k+1)^3+2k$ là số lẻ nên $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.
- Trường hợp 3: Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3+\dfrac{p-1}{2}=x(x+1) \Leftrightarrow 2p(2p^2+1)=(2x+1)^2+1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2+1 \vdots p$ vô lí vì $p=4k+3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho 2^p+p^2 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=2$, khi đó ta được $2^p+p^2=2^2+2^2=8$ là hợp số.
- Nếu $p=3$, khi đó ta được $2^p+p^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.
- Nếu $p>3$, khi đó do p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3.

Ta có $2^p+p^2=\left(2^p+1\right)+\left(p^2-1\right)$. Khi đó ta được $2^p+1=\left(2+1\right)\left(2^{p-1}+2^{p-2}+...+1\right)$ chia hết cho 3. Lại có $\left(p-1\right)p\left(p+1\right)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ chia hết cho 3.

Từ đó suy ra $2^p+p^2=\left(2^p+1\right)+\left(p^2-1\right)$ chia hết cho 3 nên 2^p+p^2 là hợp số.

Vậy với $p=3$ thì $2^p+p^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr = p+q+r+200$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q \le r$. Viết lại phương trình đã cho về dạng

$$(rq-1)(p-1)+(r-1)(q-1)=202 \quad (1)$$

Nếu p lẻ thì q, r cũng lẻ, do đó $\left[(rq-1)(p-1)+(r-1)(q-1)\right] \vdots 4$, nhưng 202 không chia hết cho 4, vô lý. Vậy $p=2$.

Với $p=2$. thì (1) trở thành $2rq-r-q=202 \Leftrightarrow 4rq-2r-2q+1=405 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1)=5\cdot 3^4$

Do $3 \le 2q-1 \le 2r-1$ nên $9 \le (2q-1)^2 \le (2q-1)(2r-1)=405 \Rightarrow 3 \le 2q-1 \le 20$

Từ đó, do $2q-1$ là ước của $5\cdot 3^4$ nên $2q-1 \in \{3;5;9;15\}$

Nếu $2q-1=3$ thì $q=2$ và $r=68$ không là số nguyên tố, loại.

Nếu $2q-1=5$ thì $q=3$ và $r=41$

Nếu $2q-1=9$ thì $q=5$ và $r=23$

Nếu $2q-1=15$ thì $q=8$ không là số nguyên tố, loại.

Vậy tất cả các bộ ba số nguyên tố phải tìm là $(2;5;23),(2;3;41)$ và các hoán vị

Ví dụ 10. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp nhau sao cho tổng bình phương của ba số đó cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

Gọi ba số nguyên tố liên tiếp nhau cần tìm là x, y, z và $x<y<z$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $x=2; y=3; z=5$. Khi đó $x^2+y^2+z^2=38 \vdots 2$ là hợp số. Trường hợp này không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Với $x=3; y=5; z=7$. Khi đó $x^2+y^2+z^2=83$ là số nguyên tố.

Vậy bộ ba số $(3;5;7)$ là bộ ba số nguyên tố liên tiếp cần tìm. 0,5đ

- Trường hợp 3: Với $x>3$. Khi đó $y>5$ và $z>7$. Từ đó suy ra x, y, z chia 3 có số dư là 1 hoặc -1

Do đó $x=3k\pm 1; y=3l\pm 1; z=3m\pm 1$ với $k,l,m \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $x^2;y^2;z^2$ chia 3 dư 1 nên $(x^2+y^2+z^2) \vdots 3$ nên là hợp số.

Vậy bộ ba số $(3;5;7)$ là bộ ba số nguyên tố liên tiếp cần tìm.

Ví dụ 11. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^q+q^p=r$

Lời giải

Do p và q là các số nguyên tố nên $p;q \ge 2$, do đó suy ra $r \ge 3$, mà r là số nguyên tố nên r là số lẻ.

Từ đó suy ra p^q và q^p khác tính chẵn lẻ nên p và q khác tính chẵn lẻ.

Như vậy trong hai số p, q có một số chẵn, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là q.

Khi đó $q=2$ nên ta được $p^2+2^p=r$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=3$, khi đó ta có $3^2+2^3=r$ hay $r=17$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p>3$, do p là số nguyên tố nên có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với k là số nguyen dương.

Từ đó suy ra p^2 chia 3 dư 1 hay $p^2=3n+1\left(n\in N^*\right)$.

Lại có p là số lẻ nên $2^p=\left(3-1\right)^p=3m-1\left(m\in N^*\right)$.

Từ đó ta được $p^2+2^p=3n+1+3m-1=3\left(m+n\right)\vdots 3$ nên là hợp số. Do đó trường hợp này loại.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $\left(p;q;r\right)=\left(2;3;17\right),\left(3;2;17\right)$.

Ví dụ 12. Tìm các số nguyên tố p,q,r thỏa mãn các điều kiện sau:

$$5\le p<q<r;49\le 2p^2-r^2;2q^2-r^2\le 193$$

Lời giải

Từ $49\le 2p^2-r^2;2q^2-r^2\le 193$ ta có $2q^2-193\le r^2\le 2p^2-49$, do đó $q^2-p^2\le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5\le p<q<r$ ta được $r\ge 11$, do đó $2p^2\ge 49+121=170$ hay $p\ge 11$.

Vì $\left(q-p\right)\left(q+p\right)\le 72$ nên $q-p=2$ hoặc $q-p\ge 4$. Xét hai trường hợp sau:

- Với $q-p=2$ và $q+p\le 36$, khi đó ta được $p=11;q=13$ hoặc $p=17;q=19$.

+ Nếu $p=11;q=13$ thì $145\le r^2\le 193$, suy ra $r=13=q$ (loại)

+ Nếu $p=17;q=19$ thì $529\le r^2\le 529$, suy ra $r=23$ (nhận).

- Với $q-p\ge 4$ và $q+p\le 18$, không tồn tại vì $p\ge 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p=17;q=19;r=23$.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a,b,c đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$20abc<30\left(ab+bc+ca\right)<21abc$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a>b>c>1$.

Suy ra $\frac{2}{3}<\frac{3}{c}\Rightarrow 2c<9$, do đó $c\in\left\{2;3\right\}$

- Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$

Do đó $b\in\left\{7;11\right\}$

+ Với $b=7$, khi đó từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42}<\frac{1}{a}<\frac{2}{35}\Rightarrow a\in\{19;23;29;31;37;41\}$

+ Với $b=11$ từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66}<\frac{1}{a}<\frac{6}{55}\Rightarrow a=13$, do $a>b$

• Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<6\Rightarrow b=5$ (do $b>c$)

Thay $b=5$ vào $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}$ ta được $6<a<\frac{15}{2}\Rightarrow a=7$.

Vậy có các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a;b;c)$ thoả mãn là:

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 14. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số tự nhiên m thỏa mãn $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$.

Lời giải

• Nếu $p=q$ thì từ $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$ ta được $p=\frac{2\left(m^2+1\right)}{m+1}=2m-2+\frac{4}{m+1}$.

Do $m\in\mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4\,\vdots\,(m+1)\Rightarrow m=0;m=1;m=3$

Từ đố ta được $p=2;\ p=5$.

• Nếu $p\neq q$ thì pq và $p+q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p+q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1$, khi đó $\left[(m+1)(m-1)\right]\vdots\, r\Rightarrow\left(m^2-1\right)\vdots\, r$

Do đó $\left[\left(m^2+1\right)-\left(m^2-1\right)\right]\vdots\, r\Rightarrow 2\,\vdots\, r$ suy ra $r=1$ hoặc $r=2$.

+ Với $r=1$ suy ra $\begin{cases}p+q=m+1\\pq=m^2+1\end{cases}$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-(m+1)x+m^2+1=0$$

Ta có $\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-\left(2m^2+2\right)<0$ nên phương trình trên vô nghiệm

+ Với $r=2$ suy ra $\begin{cases}2pq=m^2+1\\2(p+q)=m+1\end{cases}$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình

$$2x^2-(m+1)x+m^2+1=0$$

Ta có $\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-\left(6m^2+6\right)<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy bộ các số nguyên tố cần tìm là $(p;q)=(2;2),(5;5)$

Ví dụ 15. Tìm các số nguyến tố p, q và số nguyên x thỏa mãn $x^5 + px + 3q = 0$.

Lời giải

Ta có $x^5 + px + 3q = 0 \Leftrightarrow x\left(x^4 + p\right) = -3q$.

Vì q là số nguyên tố và x là số nguyên nên từ phương trình trên suy ra $x \in \left\{-1; -3; -q; -3q\right\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x = -1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1 + p = 3q$. Do q là số nguyên tố nên

- Khi $q = 2$ thì ta được $p = 5$
- Khi $q > 2$ thì $3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn, do đó $p = 2$ nên $q = 1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x = -3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p + 81 = q$, do đó p là số nguyên tố chẵn và q là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p = 2; q = 83$.

+ Nếu $x = -q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p + p^4 = 3$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p + q^4 > 3$.

+ Nếu $x = -3q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p + 81p^4 = 1$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p + 81q^4 > 1$.

Vậy các bộ số $\left(x; p; q\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(-1; 5; 2\right), \left(-3; 2; 83\right)$.

Nhận xét: Từ phương trình $x\left(x^4 + p\right) = -3q$ ta suy ra được x chia hết cho 3 hoặc $x^4 + p$ chia hết cho 3. Đến đây ta xét các trường hợp như trên. Tuy nhiên với cách làm này việc lý luận sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ 16. Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2} = x^2$ và $\frac{p^2+1}{2} = y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p + 1 = 2x^2 & (1) \\ p^2 + 1 = 2y^2 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p\left(p - 1\right) = 2\left(y + x\right)\left(y - x\right)\ (3)$

Suy ra ta được $2\left(y + x\right)\left(y - x\right) \vdots p\ (4)$.

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x > 1 >$ Ta có $p + 1 = 2x^2 = x^2 + x^2 > x + 1 \Rightarrow p > x$.

Từ (2) ta lại có $y > 1$ nên $p^2 + 1 = 2y^2 = y^2 + y^2 > y^2 + 1 \Rightarrow p > y$.

Từ (3) ta suy ra được $y > x$. Từ đó ta được $0 < y - x < p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x = y \vdots p$.

Mà ta lại có $0 < x + y < 2p$ nên ta được $x + y = p$. Thay vào (30 ta được $p - 1 = 2(y - x)$.

Từ đó suy ra $y - x = \frac{p+1}{2}$ nên ta được $x = \frac{p+1}{4}; y = \frac{3p-1}{4}$.

Thay $x = \frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p + 1 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow p = 7$.

Thay $p = 7$ vào (2) ta được $7^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow y = 5$.

Vậy $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p: Với p chẵn không xẩy ra, với $p = 4k + 1$ khi đó ta được $\frac{p^2+1}{2} = \frac{(4k \pm 1)^2 + 1}{2} = 8k^2 \pm 4k + 1$. Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2 \pm 4k + 1$ là các số chính phương.

Ví dụ 17. Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương thì x là hợp số.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q để $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = q^2$ hay $(x+1)(2x+1) = 2012q^2$.

Vì 2012 chia hết cho 4 nên $(x+1)(2x+1) \vdots 4$. Mà $2x + 1$ là số lẻ nên $x + 1 \vdots 4$.

Từ đó ta được $x = 4k - 1$ với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình trên ta được $4k(8k-1) = 2012q^2 \Leftrightarrow k(8k-1) = 503q^2$.

Để ý là $(k, 8k-1) = 1$ và 503 là số nguyên tố. Nên tồn tại các số nguyên dương a và b sao cho $q = ab$ và $(a, b) = 1$. Từ đó ta có các hệ $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm vì b^2 chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4.

+ Với $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$. Khi đó ta được $x = 4k - 1 = 4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$.

Nếu $a = 1$ thì $x = 3$, khi đó ta được $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = \frac{7}{503}$ không phải là số nhính phương.

Nếu $a \geq 2$ khi đó $x = (2a-1)(2a+1)$ là một hợp số. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 18. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p=2$, khi đó ta được $n=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p>2$, khi đó ta có $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3 \Leftrightarrow p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$.

Từ đó ta được $n+1 \vdots p$ hoặc $n^2-n+1 \vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n+1 \vdots p$ thì ta được $n+1 \geq p$. Từ đó ta được $2(n^2-n+1) \geq n^2+(n-1)^2+1>n>p-1$.

Từ đó ta được $p(p-1)<2(n+1)(n^2-n+1)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2-n+1 \vdots p$, khi đó ta đặt $n^2-n+1=kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$ ta được $p=2(n+1)k+1$.

Từ đó suy ra $n^2-n+1=2(n+1)k^2+k$ hay $n^2-(2k^2+1)n-(2k^2+k-1)=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2+1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $(2k^2+1)^2<\Delta<(2k^2+4)^2$. Do đó $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)=(2k^2+3)^2$.

Từ đó ta tính được $k=3$ suy ra $n=20$ nên $p=127$. Thử lại ta thấy $p=127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p=2$ và $p=127$.

Ví dụ 19. Tìm tất cả các số nguyên tố p và số nguyên dương x, y thoả mãn:

$$\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$$

Lời giải

Dễ thấy từ hệ trên ta được $y>x$.

Từ $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases} \Rightarrow p^2-p=2y^2+4y-2x^2-4x \Rightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)$

Ta có $p-1=2(x^2+2x) \Rightarrow p+1=2(x+1)^2<2p^2 \Rightarrow x+1<2p$

Lại có $p^2-1=2y(y+2) \Rightarrow p^2+1=2(y+1)^2<2p^2 \Rightarrow y+1<p$

Từ đó ta được $\begin{cases} y-x<p \\ x+y+2<2p \end{cases}$. Do đó từ phương trình $p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)$ ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $2 \vdots p \Rightarrow p=2$, khi đó $1=2x^2+4x$, trường hợp này loại.
- Trường hợp 2: Nếu $y-x \vdots p$, điều này mâu thuẫn vì $y-x<p$
- Trường hợp 3: Nếu $x+y+2 \vdots p$, khi đó kết hợp với $x+y+2<2p$ ta suy ra được $x+y+2=p$.

Do đó ta được $p(p-1)=2(y-x)p \Rightarrow p-1=2(y-x)$

Khi đó ta có $\begin{cases} p=x+y+2 \\ p-1=2y-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p=2y+2x+4 \\ p-1=2y-2x \end{cases} \Rightarrow p+1=4x+4 \Rightarrow p-1=4x+2$

Thay vào $p-1=2(x^2+2x)$ ta được $4x+2=2x^2+4x \Rightarrow x=1$.

Từ đó ta tính được $p=7$ và $y=4$. Vậy bộ số $(p;x;y)$ cần tìm là $(7;1;4)$

Ví dụ 19. Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a,b,c,a+b+c,a+b-c,a+c-b,b+c-a$ trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể nhận là bao nhiêu.

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

Khi đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$.

Do đó ta được $d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$, nên để có d lán nhất ta cần chọn được số nguyên tố c lớn nhất.

Chú ý rằng a, b, c là các số nguyên tố lẻ vì nếu $a=2$ thì khi đó $b+c-a$ là số chẵn lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Do đó cả bảy số nguyên tố đã cho đều là số lẻ.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $a+b=800$, khi đó số nguyên tố $a+b-c \ge 3$ nên ta được $c \le 797$. Vì 797 là số nguyên tố và ta cần lấy c lớn nhất nên ta chọn $c=797$.

Khi đó ta được $a+b+c=1597$ và $a+b-c=3$. Vì 1597 và 3 đều là các số nguyên tố nên ta cần chọn các số nguyên tố a, b sao cho $797+a-b$ và $797+b-a$ là các số nguyên tố.

La chọn $a=13$ thì ta được $b=787$ và $797+a-b=23; 797+b-a=1571$ đều là các số nguyên tố.

Lúc đó ta được $d=2c=2.797=1594$.

- Trường hợp 2: Nếu $b+c=800$, khi đó $c<800$. Nếu ta chọn $c=797$ thì ta được $b=3$.

Mà ta lại có $a<b$ nên $a=2$ không thỏa mãn. Do đó $c<797$ nên $d<2.797=1594$.

- Trường hợp 3: Nếu $a+c=800$, khi đó $c<800$. Nếu ta chọn $c=797$ thì ta được $a=3$.

Từ đó ta được $a+b-c \ge 5$ nên suy ra $b \ge 799$, do đó $b>c$ không thỏa mãn.

Do đó $c<797$ nên $d=2c<1594$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là 1594 với các số nguyên tố được chọn trong trường hợp 1 và $a+b=800$.

Ví dụ 20. Cho số nguyên tố p. Giả sử x và y là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2+py^2}{xy}=p+1$.

Lời giải

Gọi $UCLN\left(x,y\right)=d\left(d\in N^*\right)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x=da; y=db$ và $\left(a,b\right)=1$.

Ta có $\frac{x^2+py^2}{xy}=\frac{d^2a^2+pd^2a^2}{d^2ab}=\frac{a^2+pb^2}{ab}\in N^*$.

Từ đó ta được $a^2+pb^2 \vdots ab \Rightarrow a^2+pb^2 \vdots b \Rightarrow a^2 \vdots b$.

Do $\left(a,b\right)=1$ nên ta suy ra được $b=1$. Suy ra $a^2+p \vdots a \Rightarrow p \vdots a$.

Do p là số nguyên tố nên ta được $a=1$ hoặc $a=p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a=1$, khi đó ta được $x=y=d$ nên suy ra $\frac{x^2+py^2}{xy}=\frac{d^2+pd^2}{d^2}=p+1$.
- Với $a=p$, khi đó ta được $x=dp; y=d$ nên suy ra $\frac{x^2+py^2}{xy}=\frac{d^2p^2+d^2p}{d^2p}=p+1$.

Vậy ta luôn có $\frac{x^2+py^2}{xy}=p+1$.

Ví dụ 21. Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c(có thể bằng nhau) thỏa mãn $a\left(a+1\right)+b\left(b+1\right)=c\left(c+1\right)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta nhận thấy $a<c; b<c$. Khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $2\le b\le a<c$.

Từ giả thiết ta có $a\left(a+1\right)=c\left(c+1\right)-b\left(b+1\right)=c\left(c+b+1\right)-b\left(c+b+1\right)=\left(c-b\right)\left(c+b+1\right)$

Do $a+1<c+b+1$ nên từ $a\left(a+1\right)=\left(c-b\right)\left(c+b+1\right)$ ta suy ra được $c-b<a$.

Do đó $c<a+b$ nên $c+b+1<a+2b+1$, do đó ta được $c+b+1<3a+1$.

Lại có $a<c$ nên từ $c+b+1<3a+1$ ta suy ra được $c+b+1=3a$ hoặc $c+b+1=2a$.

Vì a, b, c là các số nguyên tố nên ta suy ra c là số nguyên tố lẻ. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $c+b+1=2a$. Do $2a$ và $c+1$ là các số chẵn nên b là số nguyên tố chẵn, từ đó ta được $b=2$ nên $c=2a-3$.

Thay $c=2a-3$ vào đẳng thức $a\left(a+1\right)=\left(c-b\right)\left(c+b+1\right)$ và rút gọn ta được $a+1=2\left(2a-5\right)$ hay $3a=11$, khi đó a không phải là số nguyên.

- Trường hợp 2: Nếu $c+b+1=3a$ thay vào đẳng thức $a(a+1)=(c-b)(c+b+1)$ và thu gọn ta được $a+1=3(c-b)$ hay $c=3a-b-1$.

Từ đó suy ra $a+1=3(3a-2b-1)$ hay $3b=4a-2$. Do đó b là số nguyên tố chẵn hay $b=2$, suy ra ta được $a=2$ và $c=3a-b-1=3$.

Vậy các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=b=2$ và $c=3$.

Ví dụ 22. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2016 viết được thành $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2016 bằng số 2017.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A>3)$ viết được thành tổng $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A=a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A=4a+r$, trong đó a là số nguyên dương và $r\in\{0;1;2;3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $r=0$, khi đó $A=4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n=a$
- Trường hợp 2: Nếu $r=1$, khi đó $A=4a+1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n\le a$

Xét $n=a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i=1;2;...;n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1\ge 9$. Khi đó

$$a_1+a_2+...+a_n\ge 9+4(a-1)=4a+1+4>4a+1=A$$

Xét $n=a-1$, khi đó ta có $A=4a+1=4(a-2)+9$. Do đó n lớn nhất là $n=a-1$

- Trường hợp 3: Nếu $r=2$, khi đó $A=4a+2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n\le a$.

Xét $n=a$ ta có $A=4a+2=4(a-1)+6$ nên số n lớn nhất là $n=a$

- Trường hợp 4: Nếu $r=3$, khi đó $A=4a+3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n\le a$.

Xét $n=a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i=1;2;...;n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1\ge 9$. Khi đó

$$a_1+a_2+...+a_n\ge 9+4(a-1)=4a+3+2>4a+3=A$$

Xét $n=a-1$, khi đó ta có $A=4a+3=4(a-3)+15=4(a-3)+6+9$. Do đó n lớn nhất là $n=a-1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A>3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số.
Với số nguyên dương $A>3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a-1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.
Áp dụng: Với $A=2016=4.504$ thì ta được n lớn nhất là 504 và $A=2016=504.4$.
Với $A=2017=4.504+1$ thì ta được n lớn nhất là 503 và $A=2017=502.4+9$.

Ví dụ 23. Tìm tất cả số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Lời giải

Giả sử p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Ta có $p,q,r\ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $r=2$, khi đó phương trình trên trở thành $5(p+1)(q+2)=8pq$.

Do $(5,8)=1$ và 5 là ước nguyên tố của pq nên ta được $p=5$ hoặc $q=5$.

+ Với $p=5$, khi đó ta được $5(5+1)(q+2)=8.5q\Rightarrow q=6$ không phải là số nguyên tố.

+ Với $q=5$, khi đó ta được $5(p+1)(5+2)=8.5p\Rightarrow p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r=3$, khi đó phương trình trên trở thành $(p+1)(q+2)=2pq$

Từ đó ta được $(p-1)(q-2)=4=1.4=2.2$. Do p và q là các số nguyên tố nên $q-2\ne 2;q-2\ne 4$.

Nên từ đó ta suy ra được $\begin{cases}p-1=4\\q-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=5\\q=3\end{cases}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r>3$, khi đó ta có $4pqr=(p+1)(q+2)(r+3)<2r(p+1)(p+2)$

Hay ta được $2pq<(p+1)(q+2)\Rightarrow(p-1)(q-2)<4$.

Do đó $p-1<4;q-2<4$ và p là số nguyên tố nên ta được $p=2$ hoặc $p=3$.

+ Với $p=2$ thì từ phương trình đã cho ta được $3(q+2)(r+3)=8qr$.

Do $(3,8)=1$ nên 3 phải là ước nguyên tố của qr, mà q và r là các số nguyên tố, lại có $r>3$ nên suy ra được $q=3$. Từ đó ta được $r=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3$ thì từ phương trình đã cho ta được $(q+2)(r+3)=3qr$

Hay ta được $2qr-3q-2r=6\Leftrightarrow(q-1)(2r-3)=9=1.9=3.3$.

Lại có $r>3$ nên $2r-3>3$, do đó từ phương trình trên ta được $\begin{cases}2r-3=9\\q-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=6\\q=2\end{cases}$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(7;5;2),(5;3;3),(2;3;5)$.

Ví dụ 24. Cho số tự nhiên $n \ge 2$, xét các số $a_1; a_2; ...; a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1; p_2; ...; p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1|$. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Lời giải

Đặt $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1| = k$ với k là một số không âm.

Khi đó ta được $|a_1 - a_2| = \dfrac{k}{p_1}; |a_2 - a_3| = \dfrac{k}{p_2}; ...; |a_n - a_1| = \dfrac{k}{p_n}$

Hay $a_1 - a_2 = \dfrac{kt_1}{p_1}; a_2 - a_3 = \dfrac{kt_2}{p_2}; ...; a_n - a_1 = \dfrac{kt_n}{p_n}$ với $t_1; t_2; ...; t_n$ nhận giá trị là 1 hoặc -1.

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được $k\left(\dfrac{t_1}{p_1} + \dfrac{t_2}{p_2} + \dfrac{t_3}{p_3} + ... + \dfrac{t_n}{p_n}\right) = 0$

Đặt $M = \dfrac{t_1}{p_1} + \dfrac{t_2}{p_2} + \dfrac{t_3}{p_3} + ... + \dfrac{t_n}{p_n} \Rightarrow M - \dfrac{t_1}{p_1} = \dfrac{t_2}{p_2} + \dfrac{t_3}{p_3} + ... + \dfrac{t_n}{p_n} = \dfrac{Q}{p_2.p_3...p_n}$. Suy ra Q là một số nguyên. Từ đó ta được $p_2.p_3...p_n(Mp_1 - t_1) = Qp_1$. Hay ta được

$p_1(p_2.p_3...p_n.M - Q) = t_1.p_2.p_3...p_n$

Nếu M là số nguyên thì từ đẳng thức trên suy ra vế trái chia hết cho p_1 còn vế phải không chia hết cho p_1, điều này vô lí. Do đó M không thể là số nguyên, suy ra $M \ne 0$.

Do đó từ $k\left(\dfrac{t_1}{p_1} + \dfrac{t_2}{p_2} + \dfrac{t_3}{p_3} + ... + \dfrac{t_n}{p_n}\right) = 0$ ta suy ra được $k = 0$

Điều này dẫn đến $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1| = 0$

Hay suy ra được $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = ... = |a_n - a_1| = 0$ nên $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ví dụ 25. Tồn tại hay không số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$.

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c = 2$, khi đó $a^b + 2011 = 2$, điều này vô lí do a, b lớn hơn 1.
- Nếu $c > 3$, khi đó do c là số nguyên tố nên c là số lẻ.

Từ $a^b + 2011 = c$ ta suy ra được $a^b + 2011$ là số lẻ nên a^b là số chẵn hay a là số chẵn.

Do a là số nguyên tố nên ta được $a = 2$. Như vậy $2^b + 2011$ là số nguyên tố. Ta xét các khả năng sau

+ Khi $b = 2$ thì ta được $2^b + 2011 = 2015$ là một hợp số.

+ Khi $b \ge 3$, do b là số nguyên tố nên b là số lẻ. Ta đặt $b = 2k + 1, k \in N^*$.

Khi đó ta có $2^b + 2011 = 2^{2k+1} + 2011 = 2.2^{2k} + 2011 = 2.4^k + 2011 = 2.(3+1)^k + 2011$

Dễ thấy $2(3+1)^k$ chia 3 dư 2 và 2011 chia 3 dư 2 nên ta được $2.(3+1)^k+2011$ chia hết cho 3.

Do đó 2^b+2011 chia hết cho 3. Suy ra 2^b+2011 là một hợp số.

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, c để $a^b+2011=c$.

Ví dụ 26. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng $a^n+b^n+c^n+d^n$ là một bợp số.

Lời giải

Đặt $A=a^n+b^n+c^n+d^n$. Gọi $k=(a,c)$ với $k\ge 1$.

Khi đó tồn tại các số nguyên dương $a_1;c_1$ để $a=ka_1;c=kc_1$ và $(a_1,c_1)=1$.

Từ đẳng thức $ab=cd$ ta được $a_1.b=c_1.d$, kết hợp với $(a_1,c_1)=1$ ta được $b\,\vdots\,c_1$ và $d\,\vdots\,a_1$.

Từ đó suy ra $b=c_1s;d=sa_1$ với $s\in N^*$. Do đó ta được

$$A=a^n+b^n+c^n+d^n=a_1^n.k^n+c_1^ns^n+c_1^n.k^n+a_1^ns^n=(a_1^n+c_1^n)(k^n+s^n).$$

Dễ thấy $a_1^n+c_1^n>1;k^n+s^n>1$. Do đó suy ra A là một hợp số.

Ví dụ 27. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mỗi số nguyên tố p đó luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Với $p=2$, khi đó tồn tại $n=1$ và $x=y=1$ để $2^1=1^3+1^3$.
- Với $p=3$, khi đó tồn tại $n=2$ và $x=1;y=2$ để $3^2=1^3+2^3$.
- Với $p>3$, khi đó giả sử tồn tại các số nguyên dương n, x, y với n bé nhất thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Do $p>3$ nên suy ra $(x;y)\ne(1;1)$, do đó $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy>1$ và $x+y>1$.

Ta có $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ nên $(x^3+y^3)\,\vdots\,(x+y)$ và $(x^3+y^3)\,\vdots\,(x^2-xy+y^2)$.

Do đó suy ra $(x+y)$ và (x^2-xy+y^2) phải cùng chia hết cho p.

Suy ra $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$ chia hết cho p. Do p là số nguyên tố và $p^n=x^3+y^3$ nên ta được x và y chia hết cho p.

Từ đó suy ra $n>3$, khi đó chia cả hai vế của $p^n=x^3+y^3$ cho p^3 ta được $p^{n-3}=\left(\frac{x}{p}\right)^3+\left(\frac{y}{p}\right)^3$.

Từ đó suy ra tồn tại số tự các số nguyên dương $n-3;\frac{x}{p};\frac{y}{p}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Tuy nhiên điều này lại mâu thuẫn với việc nhọn n nhỏ nhất.

Vậy với $p > 3$ thì không tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Do đó các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p = 2$ và $p = 3$.

Ví dụ 28. Cho a, b, c là các số nguyên khác không và $a \neq c$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2} \Leftrightarrow a\left(c^2 + b^2\right) = c\left(a^2 + b^2\right) \Leftrightarrow (a - c)\left(b^2 - ac\right) = 0$.

Do $a \neq c$ nên ta được $b^2 - ac = 0 \Rightarrow b^2 = ac$. Từ đó ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - ac = (a + c)^2 - b^2 = (a - b + c)(a + b + c)$$

Do a, b, c là các số nguyên và $a \neq c$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là một số nguyên tố thì có bốn trường hợp sau xẩy ra:

- Trường hợp 1: Với $a - b + c = 1$ và $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$

Khi đó ta được $a + c = b + 1$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

Từ đó ta suy ra $(a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = c = 1$, điều này trái với giả thiết $a \neq c$

- Trường hợp 2: Với $a + b + c = 1$ và $a - b + c = a^2 + b^2 + c^2$.

Khi đó ta được $a + c = -b + 1$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

Từ đó ta suy ra $(a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = c = 1$, điều này trái với giả thiết $a \neq c$

- Trường hợp 3: Với $a - b + c = -1$ và $-(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

Khi đó ta được $a + c = b - 1$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

Từ đó ta suy ra $(a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = c = -1$, điều này trái với giả thiết $a \neq c$

- Trường hợp 4: Với $a + b + c = -1$ và $-(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

Khi đó ta được $a + c = -b - 1$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

Từ đó ta suy ra $(a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = c = -1$, điều này trái với giả thiết $a \neq c$

Như vậy nếu nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là một số nguyên tố thì tất cả các trường hợp đều mâu thuẫn với giả thiết $a \neq c$. Do đó $a^2 + b^2 + c^2$ không thể là một số nguyên tố.

Ví dụ 29. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Đặt $A = \frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} = \frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3} + \frac{1}{3n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $n = 3k$ với k là một số nguyên dương, khi đó ta được $A = 3k^3 + 8k + \frac{1}{9k}$

Dễ thấy $3k^2 + 8k < A < 3k^2 + 8k + 1$ nên suy ra $\left[A\right] = \left[3k^2 + 8k + \frac{1}{9k}\right] = 3k^2 + 8k = k\left(3k + 8\right)$.

Để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k = 1$, khi đó $\left[A\right] = 11$ là đó nguyên tố. Từ đó ta tìm được $n = 3$

- Trường hợp 2: Nếu $n = 3k + 1$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A = 3k^2 + 2k + \frac{1}{3} + 8k + \frac{8}{3} + \frac{1}{9k + 3} = 3k^2 + 10k + 3 + \frac{1}{9k + 3}$$

Dễ thấy $3k^2 + 10k + 3 < A < 3k^2 + 10k + 3 + 1$ nên suy ra

$$\left[A\right] = \left[3k^2 + 10k + 3 + \frac{1}{9k + 3}\right] = 3k^2 + 10k + 3 = \left(k + 3\right)\left(3k + 1\right).$$

Như vậy để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k + 3 = 1$ hoặc $3k + 1 = 1$, từ đó ta tìm được $k = 1$.

Khi đó $\left[A\right] = 3$ là một số nguyên tố và $n = 1$.

- Trường hợp 2: Nếu $n = 3k + 2$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A = 3k^2 + 4k + \frac{4}{3} + 8k + \frac{16}{3} + \frac{1}{9k + 6} = 3k^2 + 12k + 6 + \frac{1}{9k + 3} + \frac{2}{3}$$

Ta thấy $0 < \frac{1}{9k + 3} + \frac{2}{3} < 1$ nên suy ra

$$\left[A\right] = \left[3k^2 + 12k + 6 + \frac{1}{9k + 3} + \frac{2}{3}\right] = 3k^2 + 12k + 6 = 3\left(k^2 + 4k + 2\right)$$

Suy ra với mọi k thì $\left[A\right]$ luôn là số nguyên tố.

Vậy để $\left[A\right]$ là số nguyên tố thì $n = 1$ hoặc $n = 3$.

Ví dụ 30. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a > b > c > d$ và $ac + bd = \left(b + d + a - c\right)\left(b + d - a + c\right)$. Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Biến đổi tương đương giả thiết của bài toán ta được

$$ac + bd = \left(b + d + a - c\right)\left(b + d - a + c\right)$$
$$\Leftrightarrow ac + bd = \left(b + d\right)^2 - \left(a - c\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$$

Khi đó ta được $\left(ab + cd\right)\left(ad + bc\right) = ac\left(b^2 + bd + d^2\right) + bd\left(a^2 - ac + c^2\right)$

Hay ta được $\left(ab + cd\right)\left(ad + bc\right) = \left(ac + bd\right)\left(a^2 - ac + c^2\right)$

Từ đó suy ra $\left(ab + cd\right)\left(ad + bc\right)$ chia hết cho $ac + bd$

Giả sử $ab + cd$ là số nguyên tố, Khi đó từ $a > b > c > d$ ta được $ab + cd > ac + bd > ad + bc$.

Từ đó suy ra $(ab+cd, ac+bd)=1$ nên từ $(ab+cd)(ad+bc)$ chia hết cho $ac+bd$ ta suy ra được $ad+bd$ chia hết cho $ac+bd$, điều này là vô lí vì $ac+bd > ad+bc > 0$.

Vậy $ab+cd$ không phải là số nguyên tố.

Ví dụ 31. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+11 có đúng 6 ước phân biệt(kể cả 1 và chính nó).

Lời giải

+ Nếu $p=2$, khi đó ta có $p^2+11=4+11=15$ có đúng bốn ước phân biệt là 1; 3; 5; 15,

+ Nếu $p=3$, khi đó ta có $p^2+11=9+11=20$ có đúng sáu ước phân biệt là 1; 2; 4; 5; 10; 20. Do đó ta có $p=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p>3$. Khi đó p là số nguyên tố lẻ. Ta thấy p^2 là một số chính phương lẻ nên $(p^2-1)\,\vdots\,4$, do đó ta suy ra được $(p^2+11)\,\vdots\,4$.

Lại thấy p không chia hết cho 3 nên p^2 chia 3 dư 1, do đó ta được $(p^2-1)\,\vdots\,3$ nên $(p^2+11)\,\vdots\,3$.

Do 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $(p^2+11)\,\vdots\,12$.

Lại thấy 12 có đúng sáu ước là 1; 2; 3; 4; 6; 12. Mà do $p>3$ nên $p^2+11>12$.

Ta thấy p^2+11 là bội của 12 và lớn hớn 12 nên p^2+11 phải có nhiều hơn sáu ước phân biệt.

Vậy với $p=3$ thì p^2+11 có đúng sáu ước phân biệt.

Ví dụ 32. Cho p là một số nguyên tố. Tìm các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $p=2$, khi đó ta có $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k^2-2k}=\sqrt{(k^2-2k+1)-1}=\sqrt{(k-1)^2-1}$

Để $\sqrt{(k^2-2k+1)-1}$ thì $(k-1)^2-1$ là một số chính phương.

Như vậy $(k-1)^2-1$ và $(k-1)^2$ là hai số tự nhiên liên tiếp. Từ đó ta được $(k-1)^2-1=0$ và $(k-1)^2=1$. Trường hợp này loại.

+ Nếu $p>2$, khi đó p là số nguyên tố lẻ. Nếu k chia hết cho p, khi đó tồn tại số nguyên dương n để $k=np$. Từ đó ta được $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{np^2(n-1)}$, như vậy để $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương thì $p^2n(n-1)$ phải là số chính phương, mà $(n,n-1)=1$ nên n và $n-1$ phải là hai số chính phương. Điều này không thể xẩy ra. Do đó k không thể chia hết cho p.

Từ đó ta được k và p là hai số nguyên tố cùng nhau, điều này dẫn đến k và $k-p$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Từ đó để $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k\left(k-p\right)}$ là một số nguyên dương thì k và $k-p$ phải là hai số chính phương. Đặt $k=m^2$ và $k-p=n^2$ với $m,n\in N^*$

Khi đó ta được $p=m^2-n^2=\left(m-n\right)\left(m+n\right)$. Do p là số nguyên tố nên ta được $p=m+n$ và $m-n=1$. Do đó ta tính được $k=\dfrac{\left(p+1\right)^2}{4}$.

Vậy với $k=\dfrac{\left(p+1\right)^2}{4}$ và p là số nguyên tố lẻ thì $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương.

Ví dụ 33. Cho p là một số nguyên tố. Giả sử $a_1;a_2;...;a_m$ là các số nguyên đương đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=1$. Biết rằng số nguyên dương lớn nhất trong các số $a_1;a_2;...;a_m$ là 2p. Tìm các số nguyên $a_1;a_2;...;a_m$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1=2p$, khi đó a_1 là số nguyên dương lớn nhất trong các số nguyên đã cho $a_1;a_2;...;a_m$.

Từ $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=1$ ta có $\dfrac{2p-1}{2p}=1-\dfrac{1}{2p}=1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+...+\dfrac{1}{a_m}=\dfrac{b}{a_2a_3...a_m}$ với b là số nguyên dương.

Suy ra $2pb=\left(2p-1\right)a_2a_3...a_m$, do đó ta được $\left(2p-1\right)a_2a_3...a_m$ chia hết cho p.

Do $2p-1$ không chia hết cho p và p là số nguyên tố nên trong tích $a_2a_3...a_m$ có một số a_i chia hết cho p với $i\ge 2$. Không mất tính tổng quát ta giả sử a_2 chi hết cho p. Khi đó trong các số nguyên dương trên có a_1 và a_2 là bội của p, mà số lớn nhất $a_1=2p$ nên ta được $a_2=p$, đồng thời các số $a_3;a_4;...;a_m$ không chia hết cho p.

Từ đó ta lại có $\dfrac{2p-3}{2p}=1-\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_3}+...+\dfrac{1}{a_m}=\dfrac{c}{a_3a_4...a_m}$ với c là số nguyên dương.

Suy ra ta được $2pc=\left(2p-3\right)a_3a_4...a_m$ nên ta được $\left(2p-3\right)a_3a_4...a_m$ chia hết cho p. Nhưng do các số $a_3;a_4;...;a_m$ không chia hết cho p. Nên $2p-3$ phải chia hết cho p. Từ đó ta tính được $p=3$.

Như vậy ta có $a_1=2p=6$ và $a_2=p=3$ nên các số $a_3;a_4;...;a_m$ phải nhỏ hơn 6 và không chia hết cho 3. Từ đó ta được $a_3;a_4;...;a_m\in\left\{1;2;4;5\right\}$.

Cũng từ $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=1$ suy ra $a_3;a_4;...;a_m\in\left\{2;4;5\right\}$

Ta thấy $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ nên ta suy ra được $a_2=2$. Tức là ta có $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$.

Vậy các số nguyên dương cần tìm là $a_1=6;a_2=3;a_3=2$.

Ví dụ 34. Tìm tất cả các số nguyên tố $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7;p_8$ thỏa mãn điều kiện:

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=p_8^2$$

Lời giải

Ta có nhận xét: Với p là số nguyên tố thì: Nếu p là số chẵn thì $p^2=4$ và nếu p là số lẻ thì $\left(p^2-1\right)\vdots 8$.

Do $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7;p_8$ là các số nguyên tố nên $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7;p_8\ge 2$

Từ giả thiết $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=p_8^2$ ta suy ra được $p_8^2\ge 28$ nên p_8 là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $\left(p_8^2-1\right)\vdots 8$.

Gọi k là số các số chẵn trong dãy $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7$ với $0\le k\le 7$.

Khi đó ta được $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=4k+A$ trong đó A là tổng bình phương của $7-k$ số lẻ trong dãy $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7$.

Từ đó ta được $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\right)-\left[4k-\left(7-k\right)\right]$ chia hết cho 8

Hay ta được $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2\right)-3k-7$ chia hết cho 8

Mà ta lại có $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=p_8^2$ nên p_8^2-3k-7 chia hết cho 8

Lai có $\left(p_8^2-1\right)\vdots 8$ nên suy ra $3k+6$ chia hết cho 8, mà $0\le k\le 7$ nên ta được $k=6$.

Điều đó có nghĩa là trong dãy $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7$ có 6 số nguyên tố chẵn, không mất tính tổng quát các số đó là $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=2$.

Từ đó ta được $24+p_7^2=p_8^2\Leftrightarrow\left(p_8-p_7\right)\left(p_8+p_7\right)=24$.

Do $p_7;p_8$ đều là số lẻ và $p_8-p_7<p_8+p_7$ nên ta được

$$\begin{cases}p_8-p_7=2\\p_8+p_7=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_8=7\\p_7=5\end{cases}\text{(nhận) hoặc }\begin{cases}p_8-p_7=4\\p_8+p_7=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_8=5\\p_7=1\end{cases}\text{(loại)}$$

Vậy bộ các số nguyên tố cần tìm là $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7;p_8\right)$ trong đó $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6;p_7\right)$ là các hoán vị của $\left(2;2;2;2;2;2;5\right)$ còn $p_8=7$ cố định.

Ví dụ 35. Tìm bốn số tự nhiên $x_1<x_2<x_3<x_4$ sao cho tất cả các số $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ đều là số nguyên tố với $p_1=x_4-x_3;p_2=x_3-x_2;p_3=x_2-x_1;p_4=x_4-x_2;p_5=x_3-x_1;p_6=x_4-x_1$.

Lời giải

Từ giả thiết $p_1 = x_4 - x_3; p_2 = x_3 - x_2; p_3 = x_2 - x_1; p_4 = x_4 - x_2; p_5 = x_3 - x_1; p_6 = x_4 - x_1$ ta được $p_4 = p_1 + p_2; p_5 = p_2 + p_3; p_6 = p_1 + p_2 + p_3$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét các số $p_1; p_2; p_3$ cùng là số lẻ hoặc cùng là số chẵn. Khi đó $p_4; p_5$ cùng là số chẵn và lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Trường hợp này loại.
- Trường hợp 2: Xét các số $p_1; p_2; p_3$ có một số chẵn và hai số lẻ. Khi đó p_6 là số chẵn và lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Trường hợp này loại.
- Trường hợp 2: Xét các số $p_1; p_2; p_3$ có một số lẻ và hai số chẵn. Khi đó có các khả năng sau:

+ Nếu p_1 là số lẻ thì $p_2; p_3$ là số chẵn, khi đó $p_2 = p_3 = 2$. Khi đó $p_5 = 4$ là hợp số, loại

+ Nếu p_3 là số lẻ thì $p_1; p_2$ là số chẵn, khi đó $p_1 = p_2 = 2$. Khi đó $p_4 = 4$ là hợp số, loại

+ Nếu p_2 là số lẻ thì $p_1; p_3$ là số chẵn, khi đó $p_1 = p_3 = 2$. Khi đó ta được $p_4 = p_5 = p_2 + 2$ và $p_6 = p_2 + 4$.

Như vậy ta cần tìm số nguyên tố lẻ p_2 để $p_4 = p_5 = p_2 + 2$ và $p_6 = p_2 + 4$ cũng là số nguyên tố.

Hoàn toàn dễ dàng ta tìm được $p_2 = 3; p_4 = 5; p_6 = 7$.

Như vậy các số nguyên tố lần lượt là $p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 2; p_4 = 5; p_5 = 5; p_6 = 7$.

Từ đó ta được $2 = x_4 - x_3; 3 = x_3 - x_2; 2 = x_2 - x_1; 5 = x_4 - x_2; 5 = x_3 - x_1; 6 = x_4 - x_1$

Suy ra $x_2 = x_1 + 2; x_3 = x_1 + 5; x_4 = x_1 + 7$ với x_1 là số tự nhiên tùy ý.

Ví dụ 36. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd \Leftrightarrow (a + b)^2 - ab = (c + d)^2 - cd$.

Hay ta được $(a + b)^2 - (c + d)^2 = ab - cd \Leftrightarrow (a + b + c + d)(a + b - c - d) = ab - cd$.

Để chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số ta sử dụng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử $a + b + c + d$ là số nguyên tố. Đặt $a + b + c + d = p$.

Khi đó $p(a + b - c - d) = ab - cd$ nên ta suy ra được $(ab - cd) \vdots p$

Do đó ta được $(ab - cd) + c(a + b + c + d) \vdots p$ hay $ab + c(a + b + c) \vdots p \Leftrightarrow (a + c)(b + c) \vdots p$.

Mặt khác do p là số nguyên tố và $a, b, c, d > 0$ nên $0 < c + a, c + b < p$.

Từ đó ta được $(c + a, p) = (b + c, p) = 1$, điều này làm cho $(a + c)(b + c) \vdots p$ mâu thuẫn.

Do đó điều giả sử trên là sai hay $a + b + c + d$ là hợp số.

Ví dụ 37. Tìm các số nguyên dương m và n sao cho $p = m^2 + n^2$ là số nguyên tố và $m^3 + n^3 - 4$ chia hết cho p.

Lời giải

Giả sử $(m;n)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn $p=m^2+n^2$ là số nguyên tố và m^3+n^3-4 chia hết cho p. Khi đó ta có

$$(m^3+n^3-3)\,\vdots\,(m^2+n^2)\Leftrightarrow(m+n)(m^2+n^2-4)\,\vdots\,(m^2+n^2)$$
$$\Leftrightarrow[-mn(m+n)-4]\,\vdots\,(m^2+n^2)\Leftrightarrow[3mn(m+n)+12]\,\vdots\,(m^2+n^2)$$

Từ đó ta được $\left[(m^3+n^3-4)+3mn(m+n)+12\right]\vdots(m^2+n^2)\Rightarrow\left[(m+n)^3+8\right]\vdots(m^2+n^2)$.

Hay ta được $(m+n+2)\left[m^2+n^2+2mn-2(m+n)+4\right]\vdots\, p$

Do p là số nguyên tố nên ta có hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $m+n+2\,\vdots\, p$ hay $(m+n+2)\,\vdots\,(m^2+n^2)$

Từ đó ta được $m+n+2\le m^2+n^2\Leftrightarrow m(m-1)+n(n-1)\le 2$

Chú ý rằng m và n là các số nguyên dương nên ta có

$$m(m-1)+n(n-1)\le 2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m(m-1)+n(n-1)=2\\ m(m-1)+n(n-1)=1\\ m(m-1)+n(n-1)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1;n=2\\ m=2;n=1\\ m=n=1\end{array}\right.$$

Thử lại các cặp số trên ta thấy $(m;n)=(1;2),(2;1),(1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Nếu $\left[m^2+n^2+2mn-2(m+n)+4\right]\vdots\, p$

Hay ta được $\left[m^2+n^2+2mn-2(m+n)+4\right]\vdots(m^2+n^2)\Rightarrow\left[2mn-2(m+n)+4\right]\vdots(m^2+n^2)$

Ta có $2mn-2(m+n)+4=2(m-1)(n-1)+2>0$

Do đó ta đươc có $2mn-2(m+n)+4\ge m^2+n^2\Leftrightarrow 4mn-2(m+n)+4\ge(m+n)^2$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có $(m+n)^2\ge 4mn$.

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases}(m+n)^2=4mn\\ 2(m+n)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$

Thử lại ta được $(m;n)=(1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các cặp số cần tìm là $(m;n)=(1;2),(2;1),(1;1)$.

Ví dụ 38. Tìm số nguyên tố bé nhất sao cho p viết được thành 10 tổng có dạng:

$$p=x_1^2+y_1^2=x_2^2+2y_2^2=x_3^2+3y_3^2=...=x_{10}^2+10y_{10}^2$$

Trong đó $x_1;x_2;...;x_{10}$ và $y_1;y_2;...y_{10}$ là các số nguyên dương.

Lời giải.

Do $p=x_1^2+y_1^2=x_2^2+2y_2^2=x_3^2+3y_3^2=...=x_{10}^2+10y_{10}^2$, với $x_1;x_2;...;x_{10}$ và $y_1;y_2;...y_{10}$ là các số nguyên dương nên ta được $p>10$.

- Từ $p = x_{10}^2 + 10y_{10}^2$ suy ra số dư $r(0 \le r \le 9)$ khi chia p cho 10 chính là số dư của x_{10}^2 khi chia cho 10. Do x_{10}^2 số chính phương nên có chữ số tận cùng có thể $0;1;4;5;6;9$ nên khi chia x_{10}^2 cho 10 ta được $r \in \{0;1;4;5;6;9\}$. Do p là số nguyên tố lớn hơn 10 nên $r \in \{1;9\}$.

- Từ $p = x_3^2 + 3y_3^2$ suy ra số dư của p khi chia cho 3 chỉ có thể là 1.

- Từ $p = x_8^2 + 8y_8^2$ suy ra số dư $s(0 \le s \le 7)$ khi chia p cho 8 chính là số dư của x_8^2 khi chia cho 8.

Do x_8^2 số chính phương nên $s \in \{0;1;4\}$. Do p là số nguyên tố lớn hơn 10 nên $s = 1$.

Như vậy p chia 3 và 8 cùng có số dư là 1 nên $p-1$ chia hết cho cả 3 và 8. Mà 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên suy ra $p-1 \vdots 24$. Đặt $p = 24m$, với n là số nguyên dương.

Mặt khác do p chia 10 có số dư $r \in \{1;9\}$ nên $p-1$ chia 10 có số dư là 0 hoặc 8. Suy ra $24m$ chia 10 có số dư 0 hoặc 8 hay $24m$ có chữ số tận cùng là 0 hoặc 8, do đó m có chữ số tận cùng là 0 hoặc 2 hoặc 7. Ta đặt $m = 10a + u$ với $a, u \in N$ và $u \in \{0;2;7\}$.

- Từ $p = x_7^2 + 7y_7^2$ suy ra số dư $t(0 \le t \le 6)$ khi chia p cho 7 chính là số dư của x_7^2 khi chia cho 7.

Do x_7^2 số chính phương nên $t \in \{0;1;2;4\}$. Do p là số nguyên tố lớn hơn 10 nên $t \in \{1;2;4\}$.

Từ đó ta được $p-1$ chia 7 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 3. Do đó $24m$ chia 7 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 5. Do đó m chia 7 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 5. Đặt $m = 7b + v$ với $b, v \in N$ và $v \in \{0;1;5\}$.

Từ $p - 1 = 24m$ ta được $p = 24m + 1$. Do cần tìm p nhỏ nhất nên ta tìm m nhỏ nhất.

Ta tìm các số $m < 50$ thỏa mãn đồng thời cả $m = 10a + u$ và $m = 7b + v$. Khi cho $0 \le a \le 4$ và $0 \le b \le 6$ thì ta được $m \in \{7;12;22;40;42;47\}$. Từ đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $m = 7$ thì $p = 24.7 + 1 = 169 = 13^2$ là hợp số

+ Với $m = 12$ thì $p = 24.12 + 1 = 289 = 17^2$ là hợp số

+ Với $m = 22$ thì $p = 24.22 + 1 = 529 = 23^2$ là hợp số

+ Với $m = 40$ thì $p = 24.40 + 1 = 961 = 31^2$ là hợp số

+ Với $m = 42$ thì $p = 24.42 + 1 = 1009$ là số nguyên tố.

Khi đó ta kiểm tra xem 1009 có phân tích được về dạng $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + 2y_2^2 = ... = x_{10}^2 + 10y_{10}^2$ không.

$$1009 = 15^2 + 28^2 = 19^2 + 2.18^2 = 31^2 + 3.4^2 = 15^2 + 4.14^2 = 17^2 + 5.12^2$$
$$= 25^2 + 6.8^2 = 1^2 + 7.12^2 = 19^2 + 8.9^2 = 28^2 + 9.5^2 = 3^2 + 10.10^2$$

Vậy $p = 1009$ là số nguyên tố nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 39. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Lời giải

Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^3 - q^5 = (p+q)^2$. Khi đó ta được $p^3 - q^5 > 0$.

Từ đó ta được $p^3 > q^5 \ge 2^5$ nên ta được $p > 3$.

Suy ra p không chia hết cho 3. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $q = 3$, khi đó $p^3 - 3^5 = (p+3)^2 \Leftrightarrow p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0 \Leftrightarrow (p-7)(p^2 + 6p + 36) = 0$.

Do $p^2 + 6p + 36 > 0$ nên ta được $p - 7 = 0 \Rightarrow p = 7$.

- Nếu $q \ne 3$ khi đó $p = 3m \pm 1; q = 3n \pm 1$ với m, n là các số nguyên dương.

+ Với $p = 3m + 1$ và $q = 3n + 1$ thì $p^5 - q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p = 3m + 1$ và $q = 3n - 1$ thì $p^5 - q^3$ chia 3 dư 2 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p = 3m - 1$ và $q = 3n + 1$ thì $p^5 - q^3$ chia 3 dư 1 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p = 3m - 1$ và $q = 3n - 1$ thì $p^5 - q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(3; 7)$.

Ví dụ 40. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + 1$ chia hết cho ab. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ là số nguyên tố.

Lời giải

Do $a^2 + b^2 + 1$ chia hết cho ab nên tồn tại số nguyên dương k để $\dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k(1)$.

Ta cần chứng minh k là một số nguyên tố.

Giả sử cặp số nguyên dương $(a_0; b_0)$ thỏa mãn (1) và $a_0 + b_0$ nhỏ nhất .

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \ge b_0$.

Xét phương trình $\dfrac{x^2 + b_0^2 + 1}{xb_0} = k \Leftrightarrow x^2 - kb_0x + b_0^2 + 1 = 0$ có ẩn x.

Khi đó a_0 là một nghiệm của phương trình trên. Do đó theo định lý Vi – et thì phương trình còn có một nghiệm nữa. Gọi nghiệm đó là a_1 thì ta được $\begin{cases} a_0 + a_1 = kb_0 \\ a_0.a_1 = b_0^2 + 1 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra được a_1 nguyên dương và $a_1 = kb_0 - a_0 = \dfrac{b_0^2 + 1}{a_0}$

Nếu $a_0 > b_0 \ge 1$ thì ta có $a_1 = \dfrac{b_0^2 + 1}{a_0} \le \dfrac{a_0^2 - 2a_0 + 2}{a_0} = a_0 - 2 + \dfrac{2}{a_0} < a_0$

Do đó $a_1 + b_0 < a_0 + b_0$, điều này trái với cách chọn $a_0 + b_0$ nhỏ nhất.

Do đó ta suy ra được $a_0 = b_0$, khi đó ta được $\left(2a_0^2 + 1\right) \vdots a_0^2 \Rightarrow 1 \vdots a_0^2 \Rightarrow a_0 = 1$.

Từ đó suy ra $k = 3$ là số nguyên tố.

Ví dụ 41. Cho $x = a + b - c; y = c + a - b; z = b + c - a$ với a, b, c là các số nguyên tố. Giả sử rằng $x^2 = y$ và $\sqrt{z} - \sqrt{y}$ là bình phương của một số nguyên tố.

Tìm giá trị của $T = (a+2)(b-10)(c+2)$.

Lời giải

Do $x = a + b - c; y = c + a - b; z = b + c - a$ với a, b, c là các số nguyên tố nên x, y, z là các số nguyên.

Cũng từ giả thiết trên và $x^2 = y$ ta được $\begin{cases} 2a = x + y \\ 2b = x + z \\ 2c = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = x + x^2 \\ 2b = x + z \\ 2c = x^2 + z \end{cases}$.

Xét phương bậc hai $x^2 + x = 2a \Leftrightarrow x^2 + x - 2a = 0$.

Dễ thấy $\Delta = 8a + 1 > 0$ nên nên phương trình có hai nghiệm.

Gọi hai nghiệm đó là x_1 và x_2. Nếu một trong hai nghiệm là số nguyên thì nghiệm còn lại cũng nguyên.

Theo định lí Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1.x_2 = -2a \end{cases}$.

Do 2 và a là số nguyên tố nên từ $x_1.x_2 = -2a$ ta được $x_1 \in \{-2; -a; 2; a\}$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x_1 = -2$, khi đó ta tìm được $a = 1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x_1 = -a$, khi đó ta được $a^2 - 3a = 0$, do a là số nguyên tố nên $a = 3$. Từ đó ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x_1 = -3$ $x_2 = 2$.

+ Nếu $x_1 = 2$, khi đó ta tìm được $a = 3$, từ dó ta tìm được hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

+ Nếu $x = a$, khi đó ta được $a^2 - a = 0$ nên $a = 0$ và $a = 1$, loại vì không phải là số nguyên tố.

Tóm lại phương trình trên có hai nghiệm nguyên là $x = 2$ và $x = -3$, đồng thời ta có $a = 3$.

- Với $x = 2$ khi đó ta được $y = 4$. Do đó $\sqrt{z} - 2 = p^2$ với p là số nguyên tố.

Do x là số chẵn và $2b = x + z$ nên z là số chẵn. Khi đó p là số chẵn, dẫn đến $p = 2$.

Khi đó ta được $z = 36$, suy ra $c = 20$, loại do c không phải là số nguyên tố.

- Với $x = -3$, khi đó ta được $y = 9$. Do đó $\sqrt{z} - 3 = p^2$ với p là số nguyên tố.

Do x là số lẻ và $2b = x + z$ nên z là số chẵn. Khi đó p là số chẵn, dẫn đến $p = 2$.

Khi đó ta được $z = 49$, suy ra $c = 29$ và $c = 23$ là các số nguyên tố.

Từ đó ta được $T=(a+2)(b-10)(c+2)=(3+2)(23-10)(29+2)=2015$.

Ví dụ 42. Tìm số nguyên tố p sao cho $2005^{2005}-p^{2006}$ chia hết cho $2005+p$.

Lời giải

Ta có $2005^{2005}-p^{2006}=\left(2005^{2005}+p^{2005}\right)-\left(p^{2006}+p^{2005}\right)$

Dễ thấy $2005^{2005}+p^{2005}$ chia hết cho $2005+p$.

Do đó để $2005^{2005}-p^{2006}$ chia hết cho $2005+p$ thì $p^{2006}+p^{2005}$ phải chia hết cho $2005+p$.

Hay ta cần có $p^{2005}(p+1)$ chia hết cho $2005+p$. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu p là ước của 2005, khi đó $p=5$ hoặc $p=401$.

+ Với $p=5$ thì ta được $p^{2005}(p+1)=6.5^{2005}$ không chia hết cho 4 và $p+2005=2005+5=3000$ chia hết cho 4, do đó $p=5$ không thỏa mãn.

+ Với $p=401$ thì ta được $p^{2005}(p+1)=402.401^{2005}$ và $p+2005=401+2005=2406=6.401$.

Do đó ta được $p^{2005}(p+1)$ chia hết cho $p+2005$ nên $p=401$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu p không phải là ước của 2005, khi đó $(p,5)=(p,401)=1$.

Từ đó ta được $\left(p^{2005},2005+p\right)=1$ và $p+1<p+2005$.

Do đó $p^{2005}(p+1)$ không chia hết cho $2005+p$.

Vậy chỉ có $p=401$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét:

+ Có thể lý luận theo cách khác để bỏ qua hai trường hợp trên như sau:

$$p^{2005}(1+p)=p^{2005}(2005+p-2004)$$

Do đó $p^{2005}(1+p)\vdots(2005+p)\Leftrightarrow 2004p^{2005}\vdots(2005+p)$.

Mà ta có $2004<2005+p$ nên p^{2005} và $2005+p$ có một ước chung khác 1. Do đó p là ước của 2005.

+ Chú ý rằng $2005+p$ không phải là số nguyên tố nên $2005+p$ có thể chia hết cho p hoặc có ước chung với $p+1$. Do đó không được lý luận kiểu như: Từ $p^{2005}(1+p)\vdots(2005+p)$ ta suy ra được $p^{2005}\vdots(2005+p)$ hoặc $p+1\vdots(2005+p)$

Ví dụ 43.

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên tố a, m, n thỏa mãn $a^2=m^2+n^2$

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên tố a, b, m, n, p thỏa mãn $a^2+b^2=m^2+n^2+p^2$

Lời giải

a) Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, m thỏa mãn $a^2 = m^2 + n^2$

Khi đó dễ thấy a là số lẻ, như vậy trong hai số m và n có một số lẻ và một số chẵn.

Không mất tính tổng quát ta giả sử m là số chẵn, do m là số nguyên tố nên ta suy ra được $m = 2$.

Từ đó ta được $a^2 = 4 + n^2 \Leftrightarrow a^2 - n^2 = 4 \Leftrightarrow (a-n)(a+n) = 4$

Chú ý rằng a và n là các số nguyên tố và $a > n$ nên từ trên ta được $\begin{cases} a - n = 1 \\ a + n = 4 \end{cases}$

Do đó ta được $a = \dfrac{5}{2}$, không phải là số nguyên tố,

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, m, n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, m, n, p thỏa mãn $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

Nhân thấy mỗi số ở vế trái khác mỗi số ở vế phải vid giả sử nếu $p = b$, khi đó ta có $a^2 = m^2 + n^2$.

Tuy nhiên không tồn tại các số nguyên tố thỏa mãn $a^2 = m^2 + n^2$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lẻ.

Khi đó do a là số nguyên tố nên ta được $a = 2$. Do b là số nguyên tố lẻ nên b^2 chia 4 dư 1. Từ đó ta được $a^2 + b^2$ chia 4 dư 1. Mặt khác do $a^2 + b^2$ là số lẻ nên $m^2 + n^2 + p^2$ là số lẻ nên m, n, p đồng thời là số lẻ.

Khi đó $m^2; n^2; p^2$ chia 4 cùng có số dư là 1 nên $m^2 + n^2 + p^2$ chia 4 có số dư là 3.

Do đó trong trường hợp này không tồn tại các số nguyên tố thỏa mãn.

- Cả hai số nguyên tố a và b đều là số lẻ, khi đó đặt $a = 2m + 1; b = 2n + 1$ với m và n là số nguyên dương. Khi đó ta có $a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m(m+1) + 4n(n+1) + 2$

Suy ra $a^2 + b^2$ chia 8 có số dư là 2.

Lại có $a^2 + b^2$ là số chẵn nên $m^2 + n^2 + p^2$ là số chẵn, do đó trong ba số m, n, p có một số chẵn và hai số lẻ hoặc cả ba số m, n, p đều là số chẵn.

+ Nếu trong ba số m, n , p có một số chẵn và hai số lẻ, ta giả sử p là số chẵn nên $p = 2$. Khi đó m và n là số nguyên tố lẻ, suy ra $m^2 + n^2$ chia 8 có số dư là 1, suy ra $m^2 + n^2 + p^2$ chia 8 có số dư là 6.

+ Nếu cả ba số m, n, p đều là số chẵn, khi đó $m = n = p = 2$, suy ra $m^2 + n^2 + p^2 = 12$ nên chia 8 có số dư là 4.

Như vậy $a^2 + b^2$ chia 8 có số dư là 2 còn $m^2 + n^2 + p^2$ chia 8 có số dư là 4 hoặc 6

Do đó trong trường hợp này không tồn tại các số nguyên tố thỏa mãn.

Như vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, m, n, p thỏa mãn $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

Ví dụ 44. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng $a+b$ không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu $c>1$ thì $a+c$ và $b+c$ không đồng thời là số nguyên tố.

Lời giải

a) Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ ta được $c(a+b)=ab$ do đó $ab \vdots (a+b)$.

Giả sử $a+b$ là số nguyên tố, vì $a<a+b$ nên $(a,\ a+b)=1$ mà $ab \vdots (a+b)$ nên $a \vdots (a+b)$, điều này vô lí. Do đó $a+b$ không thể là số nguyên tố.

b) Ta có

$$c(a+b)=ab \Rightarrow bc=ab-ac \Rightarrow ab+bc=2ab-ac \Rightarrow b(a+c)=a(2b-c) \Rightarrow b(a+c) \vdots a$$

Tương tự ta cũng có $a(b+c)=b(2a-c) \Rightarrow a(b+a) \vdots b$.

Giả sử $a+b$ và $b+c$ đều là số nguyên tố $a<a+c$ nên $(a,a+c)=1$, tương tự $(b,b+c)=1$ mà $b(a+c) \vdots a \Rightarrow b \vdots a$.

Tương tự ta được $a \vdots b$ do đó $a=b$. Suy ra $a+c=b+c=3c$ nên không thể là số nguyên tố do $c>1$.

Vậy $c>1$ thì $a+c$ và $b+c$ không đồng thời là số nguyên tố.

Ví dụ 45. Cho dãy số tự nhiên 2; 6; 30; 210; ... được xác định như sau: số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên $(k=1;2;3;...)$. Biết rằng có hai số hạng của dãy số đó có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Lời giải

Xét dãy số có dạng $2;\ 2.3;\ 2.3.5;\ \ldots$. Giả sử hai số cần chọn là $a=2.3.5...p_n$; $b=2.3.5...p_m$ với $p_n;\ p_m\ (n<m)$ là các số nguyên tố thứ n và thứ m.

Ta có $b-a=2.3.5...p_m-2.3.5...p_n=30000 \Leftrightarrow 2.3.5.p_n\left(p_{n+1}.p_{n+2}...p_m-1\right)=2.3.5.1000$

Ta thấy $2.3.5.1000$ tồn tại ước của 3 nên a và b có chữa số nguyên tố 3 nên $p_n \ge 3$ và 1000 không có ước nguyên tố khác 2 và 5 nên a không có ước khác 2 và 5 nên $p_n \le 5$. Từ đó ta được

+ Nếu $p_n=3$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=10000$, không tồn tại p_m thỏa mãn

+ Nếu $p_n=5$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=1001=7.11.13 \Rightarrow p_m=13$, từ đó ta được

$$a=2.3.5=30;\ b=2.3.5.7.11.13=30030$$

Ví dụ 46. Tìm số nguyên tố p để p^2-p+1 là lập phương của một số nguyên tố khác.

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn bài toán, khi đó tồn tại số nguyên tố q để $p^2-p+1=q^3$.

Biến đổi đẳng thức trên ta được $p(p-1)=(q-1)(q^2+q+1)$.

Từ đó suy ra $(q-1)(q^2+q+1)\vdots p$. Chú ý rằng p là số nguyên tố nên ta suy ra được $q-1\vdots p$ hoặc $q^2+q+1\vdots p$.

Nếu $q-1\vdots p$ thì do q là số nguyên tố nên $q-1\ge p$ hay $q>p$.

Điều này dẫn đến $p^2-p+1=q^3>p^3$ hay $p(p-1)>(p-1)(p^2+p+1)$, đến đây ta thấy $p>p^2+p+1$, điều này vô lí do p là số nguyên tố.

Như vậy ta phải có $q^2+q+1\vdots p$. Tức là tồn tại số nguyên dương k để $q^2+q+1=kp$.

Khi đó từ $p(p-1)=(q-1)(q^2+q+1)$ ta được $p-1=k(q-1)$

Kết hợp với $q^2+q+1=kp$ ta được $q^2+(1-k^2)q+(k^2-k+1)=0$.

Ta thấy $q^2+(1-k^2)q+(k^2-k+1)=0$ là một phương trình bậc hai có ẩn là q. Để tìm được q ta cần xác định được giá trị của k.

Có hai hướng để xác định k đó là sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai và sử dụng hệ thức Vi – et.

- Hướng thứ nhất là để phương trình có nghiệm nguyên dương thì Δ phải là số chính phương.

Chú ý rằng $\Delta=(k^2-1)^2-4(k^2-k+1)<(k^2-1)^2$. Lại thấy Δ có cùng số dư khi chia cho 2. Do đó ta suy ra được $\Delta\le(k^2-3)^2$, đến đây thì ta được

$$(k^2-1)^2-4(k^2-k+1)\le(k^2-3)^2\Rightarrow k\le 3$$

Do k là số nguyên dương nên $k\in\{1;2;3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp thì thu được $k=3$ thỏa mãn Δ là số chính phương và từ đó ta được $p=19;q=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Hướng thứ hai là sử dụng hệ thức Vi – et để xác định các giá trị k hoặc q.

Nếu q là số nguyên tố thỏa mãn bài toán thì q là nghiệm của phương trình

$$q^2+(1-k^2)q+(k^2-k+1)=0$$

Như vậy phương trình trên có một nghiệm nữa và ta gọi là q_1.

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $q+q_1=k^2-1$ và $q.q_1=k^2-k+1$.

Từ các hệ thức trên ta suy ra được q_1 là số nguyên dương.

Nếu $q_1\ge 2$ khi đó dễ thấy $q.q_1\ge q+q_1$ nên $k^2-k+1\ge k^2-1$ hay $k\le 2$. Tương tự như trên ta thấy $k=1$ hoặc $k=2$ không thỏa mãn.

Từ đó dẫn đến trong hai số q và q_1 có một số là 1. Do q là số nguyên tố nên $q_1=1$.

Thay vào phương trình trên ta được $1^2+(1-k^2).1+(k^2-k+1)=0\Rightarrow k=3$.

Đến đây ta suy ra được $q=7$ và $p=19$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét: Từ bài toán trên ta có một số điểm chú ý như sau:

• Do q là một số nguyên tố nên ta có $q-1\geq p$ hay $q>p$, từ đây ta thấy được trường hợp $q-1\vdots p$ không thỏa mãn. Mở rộng bài toán trên ta có bài toán: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2-p+1 là lập phương đúng của một số tự nhiên. Chú ý rằng lúc này q không còn là số nguyên tố thì cách giải thích như trên không còn hợp lí.

• Trong hai hướng tìm số k thì hướng thứ nhất có vẻ tự nhiên hơn, tuy nhiên trong hướng thứ hai ta lại thấy được cái đẹp của định lí Vi – et trong bài toán số học.

Ví dụ 47. Giả sử bốn số nguyên a, b, c, d đôi một khác nhau và thoả mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} a^2-2ac-5d=b^2-2bc-5d=0 \\ c^2-2ca-5b=d^2-2bd-5b=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là một hợp số.

Lời giải

Bài toán yêu cầu cầu chứng minh $a+b+c+d$ là một hợp số, như vậy ta sẽ đi chứng minh tổng đó chia hết cho một số nguyên khác 1 nào đó hoặc đi tìm giá trị của tổng. Quan sát giả thiết ta nhận thấy có dạng bậc hai nên ta sẽ quy về phương trình bậc hai để sử dụng định lí Vi – et.

Từ hệ thức $a^2-2ac-5d=b^2-2bc-5d=0$, nếu xét phương trình bậc hai có ẩn x là $x^2-2cx-5d=0$ thì ta được a, b là nghiệm.

Hoàn toàn tương tự ta xét phương trình $x^2-2ax-5b$, khi đó c, d là ngiệm của phương trình.

Từ đó theo định lí Vi – et ta có $\begin{cases} a+b=2c \\ ab=-5d \end{cases}$ và $\begin{cases} c+d=2a \\ cd=-5b \end{cases}$

Kết hợp hai hệ thức trên ta được $abcd=25bd$ nên suy ra $ac=25$

Đồng thời ta có $a+b+c+d=2\left(a+c\right)$ hay $a+c=b+d$.

Mặt khác từ giả thiết ta có $a^2-2ca-5d=0\Rightarrow a^2-5d=50$ và $c^2-2ca-5b=0\Rightarrow c^2-5b=50$

Từ các hệ thức trên ta có

$$a^2+c^2-5(b+d)=100\Leftrightarrow (a+c)^2-2ac-5(a+c)=100$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2-5(a+c)-150=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+c=15 \\ a+c=-10 \end{array}\right.$$

• Nếu $a+c=15$, mà $a+c=b+d$ nên ta được $a+b+c+d=30$.

• Nếu $a+c=-10$, khi đó kết hợp với $ac=25$ ta được $a=c=-5$ trái với giả thiết

Vậy từ đó ta được $a+b+c+d=30$. Do đó suy ra $a+b+c+d$ là hợp số.

Chủ đề 4

CÁC BÀI TOÁN VỀ CẤU TẠO SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Số tự nhiên $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}$ được biểu diễn dưới dạng tổng các lũy thừa như sau:

$$A=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}=a_n.10^n+a_{n-1}.10^{n-1}+...+a_0$$

Trong đó $a_n;a_{n-1};...;a_0$ là các chữ số và a_n khác 0.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Các bài toán về chữ số thường liên quan đến tìm các chữ số của một số thỏa mãn các tính chất chia hết, thỏa mãn là số chính phương và số lập phương đúng hoặc thỏa mãn một tính chất nào đó.

Ví dụ 1. Tìm các số $\overline{abcdmn}$ biết rằng $\overline{abcdmn}.2=\overline{cdmnab}$.

Lời giải

Từ $\overline{abcdmn}.2=\overline{cdmnab}$ ta được $\left(\overline{ab}.10000+\overline{cdmn}\right).2=\overline{cdmn}.100+\overline{ab}$

Hay ta được $20000\overline{ab}+2\overline{cdmn}=100\overline{cdmn}+\overline{ab}\Rightarrow 19999\overline{ab}=98\overline{cdmn}\Rightarrow 2857.\overline{ab}=14.\overline{cdmn}$.

Từ đó ta được $14.\overline{cdmn}\,\vdots\,2857$. Mà ta thấy $\left(14,2857\right)=1$ nên suy ra $\overline{cdmn}\,\vdots\,2857$.

Từ đó ta được $\overline{cdmn}\in\left\{2857;5714;8571\right\}$. Đến đây ta xét các trường hợp cụ thể như sau:

+ Nếu $\overline{cdmn}=2857$, khi đó từ $2857.\overline{ab}=14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab}=14$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn}=142857$

+ Nếu $\overline{cdmn}=5714$, khi đó từ $2857.\overline{ab}=14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab}=28$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn}=285714$

+ Nếu $\overline{cdmn}=8571$, khi đó từ $2857.\overline{ab}=14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab}=42$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn}=428571$.

Ví dụ 2. Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Lời giải

Cách 1. Ta có $99=9.11$ và $\left(9,11\right)=1$ nên ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 và chia hết cho 11.

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $\left(6+2+a+b+4+2+7\right)\vdots\,9$ hay $\left(a+b+3\right)\vdots\,9$

Từ đó ta được $\left(a+b+3\right)\in\left\{9;18\right\}$ nên suy ra $\left(a+b+3\right)\in\left\{6;15\right\}$

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $\left(6+a+4+7\right)-\left(2+b+2\right)\vdots\,11$ hay $\left(a-b+2\right)\vdots\,11$

Từ đó ta được $\left(a-b+2\right)\in\left\{0;11\right\}$ nên suy ra $\left(a-b\right)\in\left\{-2;9\right\}$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=6 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Cách 2. Ta có $\overline{62ab427}=62.100000+\overline{ab}.1000+427=62630.99+\overline{ab}.990+10.\overline{ab}+57$

Suy ra $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $10.\overline{ab}+57$ chia hết cho 99.

Từ đó ta được $10.\overline{ab}+57=99.k$ với k là một số tự nhiên.

Dễ thấy $10.\overline{ab}+57$ có chữ số tận cùng là 7, do đó $99.k$ phải có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $k=3$

Từ đó suy ra $10.\overline{ab}+57=99.3 \Rightarrow \overline{ab}=24$

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Ví dụ 3. Tìm các số $\overline{abc}$ biết rằng $\left(\overline{abc}+\overline{cba}\right)\vdots 68$ (các chữ số a, b, c có thể giống nhau)

Lời giải

Để ý là $68=4.17$ và $\left(4,17\right)=1$ nên $\left(\overline{abc}+\overline{cba}\right)\vdots 68$ khi và chỉ khi $\left(\overline{abc}+\overline{cba}\right)\vdots 4;17$

Ta xét $\left(\overline{abc}+\overline{cba}\right)\vdots 4$, khi đó ta được $\left(100a+10b+c+100c+10b+a\right)=101\left(a+c\right)+20b$ chia hết cho 4 hay ta được $101\left(a+b\right)$ chia hết cho 4. Vì $\left(4,101\right)=1$ nên suy ra $a+c\vdots 4$.

Từ đó suy ra $a+c \in \left\{4;8;12;16\right\}$ (1)

Xét $\left(\overline{abc}+\overline{cba}\right)\vdots 17$, khi đó ta được $\left(100a+10b+c+100c+10b+a\right)=101\left(a+c\right)+20b$ chia hết cho 17 hay ta được $102\left(a+b\right)+17b+3b-\left(a+b\right)$ chia hết cho 17. Suy ra $3b-\left(a+c\right)$ chia hết cho 17.

Từ đó ta được $3b-\left(a+c\right) \in \left\{0;17\right\}$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $3b-\left(a+c\right)=0 \Rightarrow 3b=a+b$ nên ta được

- Với $a+c=4$ suy ra $3b=4$, trường hợp này loại.
- Với $a+c=8$ suy ra $3b=8$, trường hợp này loại.

- Với $a+c=12$ suy ra $3b=12$ hay $b=4$. Khi đó với $a+c=12$ ta được các cặp chữ số $(a;c)$ thỏa mãn là $(3;9),(4;8),(5;7),(6;6),(7;5),(8;4),(9;3)$.

Từ đó ta suy ra được $\overline{abc}\in\{349;448;547;646;745;844;943\}$.

- Với $a+c=16$ suy ra $3b=16$, trường hợp này loại.

+ Nếu $3b-(a+c)=17$, suy ra $3b>17\Rightarrow b\in\{6;7;8;9\}$. Khi đó ta có

- Với $b=6$, từ $3b-(a+c)=17$ suy ra $a+c=1$, trường hợp này loại.
- Với $b=7$, từ $3b-(a+c)=17$ suy ra $a+c=4$, trường hợp này có các cặp số $(a;c)$ thỏa mãn là $(1;3),(2;2),(3;1)$. Từ đó ta suy ra được $\overline{abc}\in\{173;272;371\}$.
- Với $b=8$, từ $3b-(a+c)=17$ suy ra $a+c=7$, trường hợp này loại.
- Với $b=9$, từ $3b-(a+c)=17$ suy ra $a+c=10$, trường hợp này loại.

Vậy ta được các số thỏa mãn bài toán là $\overline{abc}\in\{173;272;371;349;448;547;646;745;844;943\}$.

Ví dụ 4. Tìm số $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=4574$.

Lời giải

Từ giả thiết $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=4574$ ta viết được lại thành $1000a+200b+30c+4d=4574$

Từ đó suy ra $4d$ có chữ số tận cùng là 4, nên ta được $d=1$ hoặc $d=6$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $d=1$, khi đó ta được $1000a+200b+30c+4=4574$

Do đó $100a+20b+3c=457$, suy ra $3c$ có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $c=9$.

Từ đó ta lại có $10a+2b=43$, rõ ràng phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không tồn tại số $\overline{abcd}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $d=6$, khi đó ta được $1000a+200b+30c+24=4574$

Do đó Do đó $100a+20b+3c=455$, suy ra $3c$ có chữ số tận cùng là 5 nên ta được $c=5$.

Từ đó ta lại có $10a+2b=44$, nên $2b$ có chữ số tận cùng là 4, suy ra $b=2$ hoặc $b=7$.

Với $b=2$ ta được $a=4$ và với $b=7$ ta được $a=3$.

Như vậy ta được hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}=4256$ và $\overline{abcd}=3756$.

Ví dụ 5. Tìm các chữ số a, b, c biết $\dfrac{1}{\overline{ab}.\overline{bc}}+\dfrac{1}{\overline{bc}.\overline{ca}}+\dfrac{1}{\overline{ca}.\overline{ab}}=\dfrac{11}{3321}$.

Lời giải

Quy đồng mẫu số ta được $81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$.

Từ đó ta được $11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$ chia hết cho 41, mà 41 là số nguyên tố nên trong các số $\overline{ca};\ \overline{ab};\ \overline{bc}$ có một số chia hết cho 41. Không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là $\overline{ca}$, khi đó $\overline{ca}\in\{41;82\}$.

Ta xét các trường hợp sau

- Với $\overline{ca}=41$, khi đó ta được $c=4$ và $a=1$. Thay vào đẳng thức
$81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$

Ta thu được $81.41\left(41+\overline{1b}+\overline{b4}\right)=11.41.\overline{1b}.\overline{b4}$ hay $81.\left(41+\overline{1b}+\overline{b4}\right)=11.\overline{1b}.\overline{b4}$.

Từ đó suy ra $11.\overline{1b}.\overline{b4}$ chia hết cho 81, mà ta có $\left(11,81\right)=1$ nên $\overline{1b}.\overline{b4}$ chia hết cho 81.

Chú ý là $\overline{1b}$ không chia hết 27 nên $\overline{1b}$ chia hết cho 3 hoặc 9, khi đó $\overline{1b}=12;15;18$ nên tương ứng ta được $b=2;5;8$. Từ các trường hợp cụ thể ta thấy $b=5$ yêu cầu bài toán.

Do đó ta được bộ chữ số $\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn yêu cầu là $\left(1;5;4\right)$.

- Với $\overline{ca}=82$, khi đó ta được $c=8$ và $a=2$. Thay vào đẳng thức
$81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$

Ta thu được $81.41\left(82+\overline{2b}+\overline{b8}\right)=11.82.\overline{2b}.\overline{b8}$ hay $81.\left(82+\overline{2b}+\overline{b8}\right)=22.\overline{2b}.\overline{b8}$.

Từ đẳng thức trên ta được b là số chẵn. Mà do $\left(22,81\right)=1$ nên $\overline{2b}.\overline{b8}$ chia hết cho 81.

Ta lại thấy $\overline{2b}$ không chia hết cho 81 nên suy ra $\overline{b8}$ chia hết cho 3, do b là số chẵn nên ta được $b=4$.
Từ đó ta được 24.48 chia hết cho 81, điều này vô lí nên trong trường hợp này không tồn tại chữ số b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Hoàn toàn tương tự với các trường hợp $\overline{ab}$; $\overline{bc}$ có một số chia hết cho 41.

Vậy bộ các chữ số $\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn yêu cầu là $\left(1;5;4\right),\left(4;1;5\right),\left(5;4;1\right)$.

Ví dụ 6. Tìm số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $\overline{abcd}+72$ là một số chính phương và $\overline{abd}=\left(b+d-2a\right)^2$

Lời giải

Ta có $1\le a\le 9$ và $0\le b,c,d\le 9$. Từ đó suy ra $b+d-2a\le 16$.

Mà ta lại có $\overline{abd}=\left(b+d-2a\right)^2$ nên suy ra $10^2\le \overline{abd}\le 16^2$.

Suy ra ta được $\overline{abd}\in\left\{10^2;11^2;12^2;13^2;14^2;15^2;16^2\right\}$.

Hay ta được $\overline{abd}\in\left\{100;121;144;169;196;225;256\right\}$

Do $\overline{abcd}+72$ là một số chính phương nên đặt $\overline{abcd}+72=k^2$ với $k\in N^*$.
Các số chính phương có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên suy ra $d\in\left\{2;3;4;7;8;9\right\}$.

Kết hợp với $\overline{abd}\in\left\{100;121;144;169;196;225;256\right\}$ ta suy ra được $\overline{abd}=144$ hoặc $\overline{abd}=169$.

+ Với $\overline{abd}=144$, khi đó ta được $a=1;b=d=4$. Mà ta lại thấy $144\ne\left(4+4-2.1\right)^2$ nên $\overline{abd}=144$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $\overline{abd}=169$, khi đó ta được $a=1;b=6;d=9$. Mà ta lại thấy $169=\left(6+9-2.1\right)^2$ nên $\overline{abd}=169$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ đó ta được $\overline{16c9}+72=k^2$ nên k^2 là số lẻ, do đó k là số lẻ.

Mặt khác ta có $1609+72\le\overline{16c9}+72\le1699+72$ nên suy ra $41^2\le k^2\le43^2$.

Từ đó suy ra $k^2=41^2$ hay $\overline{16c9}+72=41^2\Rightarrow\overline{16c9}=1609\Rightarrow c=0$.

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd}=1609$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có bốn chữ sô cần tìm là $\overline{abcd}$ với $a,b,c,d\in N$ và $1\le a\le9;0\le b,c,d\le9$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcd}=\left(a+b+c+d\right)^3$.

Ta có nhận xét: Một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư.

Đặt $m=a+b+c+d\left(m\in N^*\right)$, khi đó $\overline{abcd}$ và m có cùng số dư khi chia cho 9.

Từ đó ta được $\overline{abcd}-m\,\vdots\,9$ hay ta được $\overline{abcd}-m=9k\left(k\in N^*\right)$.

Mà ta có $\overline{abcd}=\left(a+b+c+d\right)^3$ nên ta được $m^3-m=9k\Leftrightarrow\left(m-1\right)m\left(m+1\right)=9k$

Do đó $\left(m-1\right)m\left(m+1\right)\vdots\,9$.

Ta biết rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có duy nhất một số chia hết cho 3 mà tích của chúng chia hết cho 9 nên trong ba số đó có duy nhất một số chia hết cho 9.

Ta có $1000\le\overline{abcd}\le9999\Rightarrow1000\le m^3\le9999\Rightarrow10\le m\le21$

Do đó ta được $9\le m-1\le20;11\le m+1\le22$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m\,\vdots\,9$, khi đó $m=18$. Do đó ta được $abcd=18^3=5832$.

Thử lại ta thấy $5832=\left(5+8+3+2\right)^3$ đúng.

- Nếu $m+1\,\vdots\,9$, khi đó $m+1=18\Rightarrow m=17$. Do đó ta được $abcd=17^3=4813$.

Thử lại ta thấy $4913=\left(4+9+1+3\right)^3$ đúng.

- Nếu $m-1\,\vdots\,9$, khi đó $m-1=18\Rightarrow m=19$. Do đó ta được $abcd=19^3=6859$.

Thử lại ta thấy $6859=\left(6+8+5+9\right)^3$ không đúng. Do đó trường hợp này loại.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5832 và 4913.

Ví dụ 8. Tìm số chính phương có bốn chữ số khác nhau sao cho khi viết số đó theo thứ tự ngược lại ta được một số có bốn chữ số cũng là số chính phương và chia hết cho số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd} = x^2$ với a, b, c, d là các chữ số và x là một số tự nhiên. Số viết theo chiều ngược lại là $\overline{dcba} = y^2$ với y là một số tự nhiên. Vì cả hai số đều có bốn chữ số nên ta suy ra được $a > 0; d > 0$.

Theo bài ra ta có $y^2 = kx^2$ với k là một số tự nhiên lớn hơn 1.

Vì a, d là các chữ số tận cùng của số chính phương nên $a, d \in \{1;4;5;6;9\}$ $(*)$.

Mặt khác do $k \geq 2$ và $\overline{dcba} = y^2$ có bốn chữ số nên $a = 1$ hoặc $a = 4$. Ta xét các trường hợp sau

- Với $a = 1$, khi đó ta được $\overline{dcb1} = k.\overline{1bcd}$. Từ đó suy ra cả d và k đều là số lẻ. kết hợp với (*) ta suy ra được $d = 9$ và $k = 9$.

Do đó ta có $\overline{9cb1} = 9.\overline{1bc9}$ nên $c = 89b + 8 \Rightarrow b = 0; c = 8$.

Do đó số cần tìm là $\overline{abcd} = 1089 = 33^2$ và $\overline{dcba} = 9801 = 99^2; 9801 = 9.1089$.

- Với $a = 4$, khi đó ta được $\overline{dcb4} = k.\overline{4bcd}$. Nhận thấy không tồn tại chữ số tận cùng d thỏa mãn (*) và đẳng thức $\overline{dcb4} = k.\overline{4bcd}$. Vậy trường hợp này không có số nào thỏa mãn.

Kết luận số cần tìm là 1089.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các số nguyên dương N có ba chữ số sao cho tổng của N với các chữ số của N và số viết được bởi các chữ số của N nhưng theo thứ tự ngược lại thì ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N = \overline{abc}$ với $1 \leq a, c \leq 9; 0 \leq b \leq 9$.

Khi đó theo bài toán ta có $\overline{abc} + a + b + c + \overline{cba}$ là một số chính phương.

Đặt $\overline{abc} + a + b + c + \overline{cba} = m^2$, khi đó ta được $102(a + b + c) - 81b = m^2$

Từ đó ta được $m^2 \vdots 3 \Rightarrow m \vdots 3 \Rightarrow m^2 \vdots 9$ nên suy ra $a + b + c \vdots 3$.

Đặt $m = 3k, a + b + c = 3h$ với $k, h \in N; 1 \leq h \leq 9$.

Khi đó từ $102(a + b + c) - 81b = m^2$ ta được $34h - 9b = k^2$.

Suy ra k^2 và $34h$ có cùng số dư khi chia cho 9 hay k^2 và $7h$ có cùng số dư khi chia cho 9.

Xét khi k chia cho 9 có số dư lần lượt là $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$ thì k^2 chia cho 9 có số dư lần lượt là $0;1;4;7$ nên $7h$ có số dư khi chia cho 9 lần lượt là $0;1;4;7$, từ đó h chia cho 9 có số dư lần lượt là $1;4;7;9$. Vì $1 \leq h \leq 9$ nên suy ra $h \in \{1;4;7;9\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $h = 1$, khi đó ta được $a + b + c = 3$. Do $a + c \geq 2$ nên ta được $b \leq 1$.

Từ đó ta tìm được $a = b = c = 1$ thỏa mãn. Do đó ta được $N = 111$.

- Trường hợp 2: Với $h = 4$, khi đó ta được $a + b + c = 12$.

Từ $34h - 9b = k^2$ ta được $k^2 = 136 - 9b$. Với $0 \leq b \leq 9$ ta được $k^2 \in \{64;100\}$.

Từ đó ta được $k = 8$ hoặc $k = 10$.

+ Với $k = 8$ thì ta được $8^2 = 136 - 9b \Rightarrow b = 8$ nên $a + c = 4$

+ Với $k=10$ thì ta được $10^2=136-9b\Rightarrow b=4$ nên $a+c=4$

Từ đây ta được các số N là $183;381;282;147;741;246;642;345;543;444$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Với $h=7$, khi đó ta được $a+b+c=21$.

Từ $34h-9b=k^2$ ta được $k^2=238-9b$. Với $0\le b\le 9$ ta không tìm được $k^2\in\{64;100\}$.

- Trường hợp 4: Với $h=9$, khi đó ta được $a+b+c=27\Rightarrow a=b=c=9$.

Do đó $N=999$.

Vậy các số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$N\in\{111;183;381;282;147;741;246;642;345;543;444;999\}$

Ví dụ 10. Tìm số tự nhiên có 2n chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+...+\overline{a_{2n-1}a_{2n}}+2006$$

Lời giải

Đặt $T=\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$ và $P=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+...+\overline{a_{2n-1}a_{2n}}+2006$.

Ta thấy $T>a_1.10^{2n-1}\ge 10^{2n-1}$ và $P\le 81n+2006<100n+2100=100(n+21)$

Mà do $T=P$ nên ta suy ra được $10^{2n-1}<100(n+21)$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $10^{2n-1}<100(n+21)$ không đúng với $n\ge 3$. Từ đó suy ra $n\le 2$, khi đó ta được $\overline{a_1a_2a_3a_4}=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+2006$.

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a_1=1$, khi đó $\overline{a_1a_2a_3a_4}<2000$ và $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+2006>2000$, điều này dẫn đến mâu thuẫn.
- Nếu $a_1=3$, khi đó $\overline{a_1a_2a_3a_4}>3000$ và $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+2006<3000$, điều này dẫn đến mâu thuẫn.
- Nếu $a_1=2$, khi đó từ $\overline{a_1a_2a_3a_4}=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+2006$ ta được $\overline{a_2a_3a_4}=2a_2+\overline{a_3a_4}+6$.

Hay ta được $98a_2+a_3(10-a_4)+a_4=6$, nên ta được $a_2=0$.

Lúc này ta được $a_3(10-a_4)+a_4=6$. Nếu $a_3\ge 1$ thì $a_3(10-a_4)+a_4>10$, mâu thuẫn.

Từ đó ta được $a_3=0$ và $a_4=6$.

Vậy số cần tìm là 2006.

Ví dụ 11. Tìm các chữ số a, b, c, d thỏa mãn $\overline{aa...abb...bcc...c}+1=(\overline{dd...d}+1)^3$, biết rằng số lần xuất hiện của a, b, c, d trong các biểu thức trên là như nhau.

Lời giải

Gọi số lần xuất hiện của các chữ số a, b, c, d trong đẳng thức trên là n. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n = 1$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{abc} + 1 = (d+1)^3$.

Vì $101 \le (d+1)^3 \le 1000$ nên ta suy ra được $4 \le d \le 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị 4; 5; 6; 7; 8; 9 thì ta được các số $\overline{abc}$ tương ứng bởi bảng sau

d	4	5	6	7	8	9
$\overline{abc}+1$	125	216	343	512	729	1000
$\overline{abc}$	124	215	342	511	728	999

- Trường hợp 2: Nếu $n = 2$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{aabbcc} + 1 = (\overline{dd}+1)^3$

Vì $100001 \le (\overline{dd}+1)^3 \le 1000000$ nên ta suy ra được $5 \le d \le 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị 5; 6; 7; 8; 9 thì ta thấy chỉ có $d = 9$ thỏa mãn. Từ đó ta được $a = b = c = 9$.

- Trường hợp 3: Nếu $n \ge 3$, khi đó ta đặt $x = \underbrace{111...1}_{n} \Rightarrow 9x + 1 = 10^n$. Từ đó ta được

$$\overline{aa...abb...bcc...c} + 1 = a.x.10^{2n} + b.x.10^n + c.x + 1 = d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx + 1$$
$$\Leftrightarrow ax(9x+1)^2 + bx(9x+1) + cx = d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx$$
$$\Leftrightarrow \left[81ax^2 + (18a+9b)x\right] - (d^3x^2 + 3d^2x) = 3d - (a+b+c)$$

Từ đó suy ra $3d - (a+b+c) \,\vdots\, x$.

Mà ta lại có $x \ge 111$ và $3d - (a+b+c) \le 26$. Từ đó ta được $3d - (a+b+c) = 0$.

Lập luận tương tự ta được $3d^2 - (18a+9b) = 0$ và $d^3 - 81a = 0$.

Từ đó ta được $d^3 \,\vdots\, 81 \Rightarrow d = 9$. Đến đây ta suy ra được $a = b = c = 9$.

Vậy các bộ số (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài là

$(1,2,4,4);(2,1,5,5);(3,4,2,6);(5,1,1,7);(7,2,8,8)$ khi mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện một lần và $(9,9,9,9)$ với mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện n nguyên dương lần.

Ví dụ 12. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu nhân số đó với 2 thì được một số có 6 chữ số đôi một khác nhau và khác chữ số 0, nếu đem nhân số đó với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số nhận được khi nhân nó với 2 nhưng viết theo một thứ tự khác.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $N = \overline{abcde}$ với a, b, c, d, e là các chữ số và $2N = \overline{mpqrst}$ với các chữ số m, p, q, r s, t là các chữ số khác nhau từng đôi một và khác 0.

Do đem nhân N với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số 2N nhưng viết theo một thứ tự khác. Do đó các chữ số của $5N; 6N; 7N; 8N; 11N$ khác nhau từng đôi một và khác 0.

Ta có $2N \le 2.99999 = 199998$ nên suy ra $m = 1$. Ta xét các chữ số của N như sau:

+ Xét chữ số e ta được

- Nếu e là chữ số chẵn thì tận cùng của $5N$ là 0, điều này trái với giả thiết các các chữ số của 5N khác 0.
- Nếu $e = 5$ thì chữ số tận cùng 2N là 0, điều này trái với giả thiết các các chữ số của 2N khác 0.
- Nếu $e = 1$ thì các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 2; 5; 6; 7; 8; 1.

Khi đó các số $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ đều được viết bởi các chữ số 2; 5; 6; 7; 8; 1 nhưng viết theo thứ tự khác nhau. Dễ thấy 6N chia hết cho 3 nhưng tổng các chữ số của 6N là $2+5+6+7+8+1=29$ không chia hết cho 3, điều này mâu thuẫn.

- Nếu $e = 7$ thì các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 4; 5; 2; 9; 6; 7.

Khi đó các số $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ đều được viết bởi các chữ số 4; 5; 2; 9; 6; 7, tuy nhiên trong các chữ số đó không có chữ số 1. Do đó trường hợp này loại.

- Nếu $e = 9$ thì các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 8; 5; 2; 3; 2; 9.

Khi đó các số $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ đều được viết bởi các chữ 8; 5; 2; 3; 2; 9, tuy nhiên trong các chữ số đó không có chữ số 1. Do đó trường hợp này loại.

Như vậy ta được $e = 3$, khi đó các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 6; 5; 8; 1; 4; 3.

Từ đó ta suy ra được $t = 6$.

+ Xét chứ số p ta được

Do $2N < 5N < 6N < 7N < 8N < 11N$ nên các chữ số đầu tiên của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 1; 3; 4; 5; 6; 8. Từ đó suy ra $8N > 610000$ nên $2N > 152500$. Lại có $11N < 870000$ nên $2N < 159000$

Như vậy ta được $152500 < 2N < 159000$ nên suy ra $p = 5$.

+ Xét chữ số s ta được

- Nếu $s = 3$ thì $2N = \overline{15qr36}$, khi đó $6N = 3.2N$ có tận cùng là $\overline{08}$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác 0.
- Nếu $s = 8$ thì $2N = \overline{15qr86}$, khi đó $8N = 4.2N$ có tận cùng là $\overline{44}$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác nhau từng đôi một.

Do vậy ta được $s = 4$.

+ Xét chứ số q và r ta được

- Nếu $q = 8; r = 3$ thì $2N = \overline{158346}$, khi đó $8N = 4.2N = 633384$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác nhau từng đôi một.

Do vậy ta được $q = 3; r = 8$ và $2N = 153846$.

Từ đó ta suy ra số phải tìm là $N = 76923$. Thử lại ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của số đó.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A = \overline{abc}$ với $a \in \{1;2;...9\}; b,c \in \{0;1;2;...9\}$.

Do A chia hết cho 11 nên ta được $a-b+c$ chia hết cho 11.

Kết hợp với $a\in\{1;2;...9\};b,c\in\{0;1;2;...9\}$ ta suy ra được $a-b+c=0$ hoặc $a-b+c=11$

- Với $a-b+c=0$, khi đó ta được $b=a+c$.

Ta có $A=100a+10b+c=99a+10b+a+c=99a+11b$.

Khi A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11}=a^2+b^2+c^2 \text{ hay ta được } 9a+b=a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với $b=a+c$ ta được $9a+(a+c)=a^2+(a+c)^2+c^2 \Leftrightarrow 10a+c=2a^2+2ac+2c^2$.

Do $a\ge 1$ nên ta được $10a+c\ge 2a^2+2c+2c^2 \Rightarrow 2c^2+c\le 10a-2a^2\le \frac{25}{2}$

Do đó suy ra $2c^2+c\le 12\Rightarrow c\le 2$

Cũng từ $10a+c=2a^2+2ac+2c^2$ ta suy ra được c là số chẵn. Từ đó ta được $c=0$ hoặc $c=2$.

+ Với $c=0$, khi đó ta được $a=b$ nên số cần tìm có dạng $A=\overline{aa0}$.

Do đó $\frac{A}{11}=50=2a^2\Rightarrow a=5\Rightarrow a=b=5$. Từ đó ta tìm được $A=550$.

+ Với $c=2$, khi đó ta được từ $10a+c=2a^2+2ac+2c^2$ ta được $10a+2=2a^2+4ac+8$

Hay ta được $a^2-3a+3=0$. Nhận thấy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương nên không tồn tại số A thỏa mãn bài toán.

- Với $a-b+c=11$, khi đó ta được $b+11=a+c$.

Do a, b, c là các chữ số nên từ $b+11=a+c$ ta suy ra được $a\ge 2$

Ta có $A=100a+10b+c=99a+10b+a+c=99a+11b+11$.

+ Xét $a=2$, khi đó $c=9;b=0$. Ta được $A=209$ không thỏa mãn bài toán.

+ Xét $a=3$, khi đó ta được $c=8;b=0$ hoặc $c=9;b=1$. Ta được $A=308$ hoặc $A=319$ không thỏa

+ Xét $a\ge 4$. Khi đó A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11}=a^2+b^2+c^2 \text{ hay ta được } 9a+b+1=a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với $b=a+c-11$ ta được

$$9a+(a+c-11)+1=a^2+(a+c-11)^2+c^2 \Leftrightarrow 10a+c-10=2a^2+2ac+2c^2-22(a+c)+121$$

Thu gọn ta được $32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2$. Do $a\ge 4$ nên ta được

$$32a+23c-131\ge 2a^2+8c+2c^2\Rightarrow 2c^2-15c\le 32a-2a^2-131\le -5$$

Do đó suy ra $2c^2-15c\le -5\Rightarrow c\le 7$. Từ $32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2$ ta suy ra được c là số lẻ.

Do đó ta được $c = 1;3;5;7$. Đến đây xét các trường hợp của c thì được $b = 0; a = 8$ thỏa mãn. Do đó số cần tìm là $A = 803$.

Vậy các số thỏa mãn 550 và 803.

Ví dụ 14. Tìm các chữ số a, b, c, d, e thỏa mãn điều kiện $\overline{ab} + \overline{cde} = \sqrt{\overline{abcde}}$.

Lời giải

Đặt $x = \overline{ab}$ và $y = \overline{cde}$ với $a, b \in N$ và $10 \le a \le 99; 100 \le b \le 999$.

Theo bài ra ta có $x + y = \sqrt{1000x + y}$ hay ta được $(x+y)^2 = 100x + y$.

Từ đó ta được $(x+y)^2 - 1000(x+y) - 999y = 0$.

Đặt $t = x + y$ thì $t \in N$ và $110 \le t \le 1089$.

Từ đó ta được $t^2 - 1000t + 999y = 0$.

Phương trình bậc hai ẩn t phải có nghiệm nên $\Delta^{'} = 250000 - 999y \ge 0$, do đó $y \le 250$.

Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Khi đó theo định lí Vi – te ta được $\begin{cases} t_1 + t_1 = 1000 \\ t_1 t_2 = 999y \end{cases}$

Từ hệ thức trên ta suy ra được $t_1 > 0; t_2 > 0$ và nếu $t_1 \in N$ thì $t_2 \in N$.

Như vậy từ $t_1 t_2 = 999y$ ta được $t_1 t_2 \vdots 3$, đồng thời ta lại có $t_1 + t_2$ chia 3 dư 1. Như vậy trong hai số tự nhiên t_1 và t_2 thì có một số chia hết cho 3, còn một số không chia hết cho 3.

Giả sử t_1 chia hết cho 3 và t_2 không chia hết cho 3. Ta có $999 = 27.37$ và $(27, 37) = 1$.

Từ đó ta được t_1 chia hết cho 27 và t_2 không chia hết cho 3.

Nếu $t_1 \vdots 37$, khi đó ta được $t_1 \vdots 999$, do đó $t_1 = 999; t_2 = 1$. Khi đó thay vào hệ thức Vi – et trên ta được $b = 1$, điều này vô lí. Do đó $t_1 \vdots 27$ và t_1 không chia hết cho 37.

Từ đó ta có $\begin{cases} t_1 = 27m \\ t_2 = 37n \end{cases}, m; n \in N^*$.

Như vậy ta được $27m + 37n = 1000$ hay $n = 999 - 27m - 36n + 1$.

Do đó n chia 9 có số dư là 1. Đặt $n = 9k + 1$ với k là số nguyên dương.

Đến đây ta được $27m + 37(9k+1) = 1000$ hay $273k = 1000 - 27m - 37 \le 936$.

Từ đó dẫn đến $k \le 3$. Mặt khác cũng từ $273k = 1000 - 27m - 37$ ta được k chia 3 dư 3.

Do đó suy ra $k = 2$, suy ra $n = 19; 27m = 297$ nên $37n = 703$.

Vậy ta được $t_1 = 297; t_2 = 703$, dẫn đến $y = 209.4$

+ Nếu $x + y = 297$ thì ta được $x = 88$

+ Nếu $x + y = 703$ thì ta được $x = 494$, trường hợp này loại.

Vậy các chữ số cần tìm là $a = b = 8; c = 2; d = 0; e = 9$

Ví dụ 15. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng số đó bằng tổng bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu với số tạo bởi hai chữ số sau và hai chữ số cuối cùng bằng nhau.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên có bốn chữ số cần tìm có dạng $\overline{abcc}$ với $a,b,c \in N$ và $1 \le a \le 9; 0 \le b,c \le 9$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2$. Đặt $x = \overline{ac}; y = \overline{cc}\left(x,y \in N\right)$.

Suy ra $10 \le x \le 99; 0 \le y \le 99$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 \Leftrightarrow 100\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 \Leftrightarrow 100x + y = x^2 + y^2$

Ta viết lại phương trình trênvề dạng phương trình bậc hai ẩn x là $x^2 - 100x + \left(y^2 - y\right) = 0$

Khi đó ta có $\Delta' = 2500 - \left(y^2 - y\right)$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 2500 - \left(y^2 - y\right) \ge 0$

Khi đó ta được $y\left(y-1\right) \le 2500$ nên $\left(y-1\right)^2 \le y\left(y-1\right) \le 2500 \Rightarrow y - 1 \le 50 \Rightarrow y \le 51$.

Do y là số có hai chữ số giống nhau nên ta được $y \in \left\{11; 22; 33; 44\right\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $y = 11$, khi đó ta thấy $\Delta' = 2390$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.
- Nếu $y = 22$, khi đó ta thấy $\Delta' = 2038$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.
- Nếu $y = 33$, khi đó ta thấy $\Delta' = 1444 = 38^2$ là số chính phương.

Khi đó thay vào phương trình $x^2 - 100x + \left(y^2 - y\right) = 0$ ta được $x^2 - 100x + 1056 = 0$

Giải phương trình trên ta đươc $x = 12$ và $x = 88$.

Thử lại ta thấy $1233 = 12^2 + 33^2$ và $8833 = 88^2 + 33^2$ đều đúng.

- Nếu $y = 44$, khi đó ta thấy $\Delta' = 608$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là 1233 và 8833.

Ví dụ 16. Tìm các chữ số a, b, c với $a \ge 1$ sao cho $\sqrt{\overline{abc}} = \left(a+b\right)\sqrt{c}$

Lời giải

Từ $\sqrt{\overline{abc}} = \left(a+b\right)\sqrt{c}$ ta được $\overline{abc} = \left(a+b\right)^2 c$.

Từ đó suy ra $100a + 10b + c = \left(a+b\right)^2 c \Leftrightarrow 10\left(10a+b\right) = c\left[\left(a+b\right)^2 - 1\right]$

Do $a \ge 1$ nên $10\left(10a+b\right) \ge 100$ do đó $c\left[\left(a+b\right)^2 - 1\right] \ge 100$

Do đó ta được $c \ge 1$ và $a + b \ge 4$.

Nếu $a + b$ không chia hết cho 3 thì ta có $\left(a+b\right)^2$ chia 3 dư 1. Do đó ta suy ra được $10a + b$ chia hết cho 3 hay $a + b$ chia hết cho 3, điều này vô lí.

Như vậy $a+b$ chia hết cho 3 nên $10a+b$ chia hết cho 3.

Như vậy từ $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta suy ra được c chia hết cho 3. Do c là chữ số nên suy ra c không chia hết cho 5. Do đó ta lại suy ra được $(a+b)^2-1$ chia hết cho 5.

Mà ta có $(a+b-1)(a+b+1)$ và 5 là số nguyên tố nên $a+b-1$ hoặc $a+b+1$ chia hết cho 5.

Kết hợp với $a+b$ chia hết cho 3 ta được $a+b=6$ hoặc $a+b=9$.

- Trường hợp 1: Với $a+b=6$, thay vào hệ thức $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta được

$$10(9a+6)=24c \Leftrightarrow 5(3a+2)=4c$$

Từ đó ta suy ra được c chia hết cho 5, điều này trái với c không chia hết cho 5. Nên trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b, c thỏa mãn.

- Trường hợp 1: Với $a+b=9$, thay vào hệ thức $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta được

$$10(9a+9)=80c \Leftrightarrow 9(a+1)=8c$$

Từ đó suy ra c chia hết cho 9, nên ta được $c=9$, do đó $a+1=8 \Rightarrow a=7 \Rightarrow b=2$.
Vậy các chữ số cần tìm là $a=7; b=2; c=9$.

Ví dụ 17. Tìm các số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$.

Lời giải

Ta có $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{ab}.100+\overline{cd}=\left(\overline{ab}+\overline{ca}\right)^2$. Đặt $x=\overline{ab}; y=\overline{cd}$.

Ta có $1000 \le \overline{abcd} \le 9999$ nên suy ra $32 \le \overline{ab}+\overline{cd} \le 99$ hay $32 \le x+y \le 99$

Khi đó ta được

$$100x+y=(x+y)^2 \Leftrightarrow 99x=(x+y)^2-(x+y) \Leftrightarrow 99x=(x+y)(x+y-1)$$

Từ đó suy ra $(x+y)(x+y-1)$ chia hết cho 99. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Trong hai thừa số $(x+y)$ và $(x+y-1)$ có một thừa số chia hết cho 99.

Do $32 \le x+y \le 99$ nên $31 \le x+y-1 \le 98$, do đó $x+y \vdots 99$ và $x+y=99$

Tờ đó ta được $\overline{abcd}=99^2=9801=(98+1)^2$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Cả hai thừa số $(x+y)$ và $(x+y-1)$ không có thừa số nào hết cho 99.

Chú ý rằng $(x+y)$ và $(x+y-1)$ nguyên tố cùng nhau và $(9,11)$ nguyên tố cùng nhau.

Do đó $(x+y)$ và $(x+y-1)$ chia hết cho 9 hoặc cho 11. Do đó ta có bảng sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y \vdots 11 \\ x+y-1 \vdots 9 \end{cases}$

$x+y$	33	44	55	66	77	88
$x+y-1$	32	43	54	65	76	87
			Đúng			

Với $x+y=55$, khi đó $\overline{abcd}=55^2=3025=(30+25)^2$ thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y \vdots 9 \\ x+y-1 \vdots 11 \end{cases}$

$x+y$	34	45	56	67	78	89
$x+y-1$	33	44	55	66	77	88
		Đúng				

Với $x+y=45$, khi đó $\overline{abcd}=45^2=2025=(20+25)^2$ thỏa mãn.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2025; 3025, 9801.

Ví dụ 18. Tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ thỏa mãn điều kiện:

$$a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$$

Lời giải

Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với a, b là các số tự nhiên.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$ nên ta được $a>b$.

Do a^2 và b^2 là các số chính phương có bốn chữ số nên $1000 \le a^2; b^2 \le 9999$

Từ đó ta được $32 \le b < a < 100$.

Đặt $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4=c>0, c \in N$. Khi đó ta có

$$\overline{a_1a_2a_3a_4}-\overline{b_1b_2b_3b_4}=1000(a_1-b_1)+100(a_2-b_2)+10(a_3-b_3)+(a_4-b_4)=1111c$$

Mà ta lại có $\overline{a_1a_2a_3a_4}-\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Từ đó ta được $(a-b)(a+b)=1111c=11.101c$.

Do 11 và 101 là các số nguyên tố, lại có $a+b<200; a-b<100$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} a+b=101 \\ a-b=11c \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a+b=101c \\ a-b=11 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases} a+b=101 \\ a-b=11c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=101+11c \\ 2b=101-11c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{101+11c}{2} \\ b=\dfrac{101-11c}{2} \end{cases}$

Do $b \ge 32$ nên từ $b=101-11c$ suy ra $c \le 3$ và chú ý rằng $a+b=101$ là số lẻ nên ta suy ra được c là số lẻ. Từ đó ta có $c=1$ hoặc $c=3$.

+ Với $c=1$ ta được $\begin{cases} a=\dfrac{101+11}{2}=56 \\ b=\dfrac{101-11}{2}=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_1a_2a_3a_4}=3135 \\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=2025 \end{cases}$

+ Với $c=3$ ta được $\begin{cases} a=\dfrac{101+11}{2}=67 \\ b=\dfrac{101-11}{2}=34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_1a_2a_3a_4}=4489 \\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=1156 \end{cases}$

- Trường hợp 2: Với $\begin{cases} a+b=101c \\ a-b=11 \end{cases}$, khi đó do $a+b<200; a-b<100$ nên ta được $c=1$

Suy ra $\begin{cases} a+b=101 \\ a-b=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{101+11}{2}=56 \\ b=\dfrac{101-11}{2}=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_1a_2a_3a_4}=3135 \\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=2025 \end{cases}$

Vậy các cặp số chính phương cần tìm là 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Ví dụ 19. Tìm số tự nhiên $\overline{abc}$ thoả mãn điều kiện $\overline{abc}=(a+b)^2\,4c$.

Lời giải

Từ giả thiết bài toán ta có:

$$100a+10b+c=4c(a+b)^2 \Leftrightarrow c=\frac{100a+10b}{4(a+b)^2-1}=\frac{10(10a+b)}{4(a+b)^2-1}=\frac{10\left[(a+b)+9a\right]}{4(a+b)^2-1}$$

Ta có $4(a+b)^2-1$ là số lẻ và do $0<c\le 9$ nên $4(a+b)^2-1 \vdots 5$.

Mà $4(a+b)^2$ là số chẵn nên $4(a+b)^2$ phải có tận cùng là 6 suy ra $(a+b)^2$ phải có tận cùng là 4 hoặc 9. (*)

Mặt khác $c=\dfrac{2.5\overline{ab}}{4(a+b)^2-1}$ và $4(a+b)^2-1$ là số lẻ

$$\Rightarrow 4(a+b)^2-1<500 \Leftrightarrow (a+b)^2<125,25 \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có $(a+b)^2 \in \{4;\ 9;\ 49;\ 64\} \Rightarrow a+b \in \{2;\ 3;\ 7;\ 8\}$

+ Nếu $a+b\in\{2;\ 7;\ 8\}$ thì $a+b$ có dạng $3k\pm 1\,(k\in N)$ khi đó $4(a+b)^2-1$ chia hết cho 3 mà $(a+b)+9a=3k\pm 1+9a$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow 10\left[(a+b)+9a\right]$ không chia hết cho 3 nên c không thuộc tập hợp N.

+ Nếu $a+b=3$ ta có $c=\dfrac{10(3+9a)}{35}=\dfrac{6(1+3a)}{7}$. Vì $0<a<4$ và $1+3a \vdots 7$ suy ra $a=2$, khi đó $c=6;\ b=1$. Ta có số 216 thoả mãn.

Vậy số 216 là số cần tìm.

Ví dụ 20. Cho số có bốn chữ số 2012. Ta tách số 2012 thành hai số theo ba cách là $2|012; 20|12; 201|2$. Nếu ta đem nhân hai số trong mỗi cánh tách rồi cộng ba tích lại thì được $2.012+20.12+201.2=666$. Hãy tìm tất cả các số có bốn chữ số sao cho khi ta làm theo cánh như trên với số đó thì cũng được kết quả là 666.

Lời giải

Gọi số có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d là các chữ số và a khác 0.

Khi đó ta thực hiện các cách tách số $\overline{abcd}$ thành hai số là $a|\overline{bcd}; \overline{ab}|\overline{cd}; \overline{abc}|d$. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}&a.\overline{bcd}+\overline{ab}.\overline{cd}+\overline{abc}.d=666\\ \Leftrightarrow\ &a\left(100b+10c+d\right)+\left(10a+b\right)\left(10c+d\right)+d\left(100a+10b+c\right)=666\\ \Leftrightarrow\ &100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666\end{aligned}$$

Do đó ta được d khác 0 và $ad\le 6$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $ad=6$, khi đó $111ad=666$.

Mà ta lại có $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666$, suy ra $ab=ac=bc=bd=cd=0$.

Từ đó ta được $b=c=0$ nên ta có các số thỏa mãn là 1006; 2003; 3002; 6001.

- Trường hợp 2: Nếu $ad=5$, khi đó $111ad=555$ và $a=1;d=5$ hoặc $a=5;d=1$.

Khi đó từ $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666$ ta được $\left[\begin{array}{l}511b+551c+10bc=111\\155b+115c+10bc=111\end{array}\right.$.

Ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn một trong hai đẳng thức trên. Do đó trường hợp này không có số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Nếu $ad=4$, khi đó $111ad=444$ và $a=1;d=4$ hoặc $a=4;d=1$ hoặc $a=d=2$.

+ Nếu $a=1;d=4$ khi đó ta được $144b+114c+10bc=222$, ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn.

+ Nếu $a=4;d=1$ khi đó ta được $411b+441c+10bc=222$, ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn.

+ Nếu $a=d=2$ khi đó ta được $222b+222c+10bc=222$ suy ra ta được $b=0;c=1$ hoặc $b=1;c=0$ thỏa mãn. Vậy ta được các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2102; 2012.

- Trường hợp 4: Nếu $ad=3$, khi đó $111ad=333$ và $a=1;d=3$ hoặc $a=3;d=1$.

Khi đó từ $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666$ ta được $\left[\begin{array}{l}311b+331c+10bc=333\\133b+113c+10bc=333\end{array}\right.$.

Ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn một trong hai đẳng thức trên. Do đó trường hợp này không có số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 5: Nếu $ad=2$, khi đó $111ad=222$ và $a=1;d=2$ hoặc $a=2;d=1$.

Khi đó từ $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666$ ta được $\left[\begin{array}{l}211b+221c+10bc=444\\122b+112c+10bc=444\end{array}\right.$.

+ Nếu $211b+221c+10bc=444$, khi đó ta được $b\le 2;c\le 2$. Thử các khả năng ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn.

+ Nếu $122b+112c+10bc=444$, khi đó ta được $b\le 2;c\le 2$. Thử các khả năng ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn.

Do đó trường hợp này không có số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 6: Nếu $ad=1$, khi đó $111ad=111$ và $a=d=1$.

Khi đó từ $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd=666$ ta được $111b+111c+10bc=555$

Từ đẳng thức trên ta thấy $b=0;c=5$ hoặc $b=5;c=0$ thỏa mãn.

Do đó ta được các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1051; 1501.

Vậy các số có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1006; 2003; 3002; 6001; 2102; 2012; 1051; 1501.

Ví dụ 21. Tìm tất cả các số có bón chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $\overline{abcd}=a^2+2b^2+3c^2+4d^2+2006$.

Lời giải

Từ $\overline{abcd}=a^2+2b^2+3c^2+4d^2+2006$ nên ta suy ra được $a\ge 2$.

Mặt khác do b, c, d đều không lớn hơn 9 nên ta suy ra được

$$\overline{abcd}=a^2+2b^2+3c^2+4d^2+2006\le 2006+9^2\left(1+2+3+4\right)=2816$$

Từ đó ta được $a=2$, khi đó thay vào giả thiết của bài toán ta được $\overline{bcd}=2b^2+3c^2+4d^2+10$

Lập luận tương tự như trên ta được $\overline{bcd}\le 739$ nên ta được $b\le 7$.

- Nếu $b=7$, khi đó ta được $\overline{7cd}=108+3c^2+4d^2\le 108+9^2\left(3+4\right)=675$, điều này vô lí.

- Nếu $b=6$, khi đó ta được $\overline{6cd}=3c^2+4d^2+82\le 9^2.7+82=649$.

Từ đó ta được $c\le 4$, khi đó ta lại có $\overline{6cd}=3c^2+4d^2+82\le 3.4^2+4.9^2+82=454$, điều này vô lí.

Do đó với $b=6$ không tồn tại số thỏa mãn yêu cầu bài toán

Từ đây về sau ta luôn gặp đẳng thức

$$\overline{bcd}=2b^2+3c^2+4d^2+10\Leftrightarrow 3c^2+4d^2-10c-d=100b-2b^2-10$$

Hay ta được $c\left(3c-10\right)+d\left(4d-1\right)=100b-2b^2-10$.

Do đó để tiện cho việc kiểm tra sau này ta lập bảng sau đây

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c\left(3c-10\right)$	0	–7	–8	–3	8	5	6	7	8	9
d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d\left(4d-1\right)$	0	3	14	33	60	95	138	189	248	315

Chú ý rằng từ $\overline{bcd}=2b^2+3c^2+4d^2+10$ ta suy ra được c và d cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu $b=5$, khi đó từ $\overline{bcd}=2b^2+3c^2+4d^2+10$ ta được $3c^2+4d^2-10c-d=440$

Với $d\le 7$ thì ta được $3c^2\ge 244$, điều này không xẩy ra với $c\le 9$.

Do đó $d=8$ hoặc $d=9$, khi đó từ kết quả trong bảng trên ta suy ra $3c^2+4d^2-10c-d=440$ vô nghiệm.

- Nếu $b\in\{0;3;4\}$, lập luận tương tự như bảng trên cũng dẫn đến vô nghiệm.

- Nếu $b=2$, khi đó $3c^2+4d^2-10c-d=182$, lập luận tương tự như trên ta được $d=7;c=1$ thỏa mãn.

- Nếu $b=1$, khi đó $3c^2+4d^2-10c-d=88$, lập luận tương tự như trên ta được $d=5;c=1$ thỏa mãn.

Vậy các số cần tìm là $\overline{abcd}=2217;2115$.

Ví dụ 22. Tìm số có sáu chữ số $\overline{abcdeg}$ biết rằng $\overline{abcdeg}=\left(\overline{abc}+\overline{deg}\right)^2$.

Lời giải

Đặt $x=\overline{abc};y=\overline{deg}\left(100\le x\le 999;y\le 999\right)$.

Khi đó ta có $1000x+y=\left(x+y\right)^2$ hay ta được $999x=\left(x+y\right)\left(x+y-1\right)$.

Do $x\le 999$ nên $\left(x+y\right)\left(x+y-1\right)\le 999^2$ do đó $x+y\le 999$.

- Nếu $x+y=999$ thì từ $999x=\left(x+y\right)\left(x+y-1\right)$ ta được $x=998$ và $y=1$.

Khi đó số cần tìm là $\overline{abcdeg}=998001$.

- Nếu $x+y<999$. Ta có $999=27.37$ và $\left(x+y,x+y-1\right)=1$, để ý rằng 37 là số nguyên tố.

Khi đó trong hai số $x+y$ và $x+y-1$ có một số cia hết cho 27 và một số chia hết cho 37. Ta có các trường hợp sau.

+ Trường hợp $x+y$ chia hết cho 27 và $x+y-1$ chia hết cho 37.

Khi đó ta được $x+y-1=37m,m\in N^*$, suy ra $x+y=37m+1$.

Từ $x+y$ chia hết cho 27 ta được $37m+1\vdots 27$

Do đó $10m+1\vdots 27\Rightarrow 80m+8\vdots 27\Rightarrow 81m-\left(m-8\right)\vdots 27\Rightarrow m-8\vdots 27$.

Do đó ta lại được $m=27n+8,n\in N$

Từ đó suy ra $x+y-1=37\left(27n+8\right)=999n+296$.

Nhưng do $0<x+y-1\le 997$ nên ta được $x+y-1=296$.

Kết hợp với $999x=\left(x+y\right)\left(x+y-1\right)$ ta được $x=88$, loại.

+ Trường hợp $x+y$ chia hết cho 37 và $x+y-1$ chia hết cho 27.

Khi đó ta có $x+y=37m,m\in N^*$, suy ra $x+y-1=37m-1$.

Từ $x+y-1$ chia hết cho 27 ta được $37m-1\vdots 27$

Do đó $10m-1\vdots 27\Rightarrow 80m-8\vdots 27\Rightarrow 81m-\left(m+8\right)\vdots 27\Rightarrow m+8\vdots 27$.

Do đó ta lại được $m = 27n - 8, n \in N^*$

Từ đó suy ra $x + y = 37(27n - 8) = 999n - 296$.

Nhưng do $0 < x + y \le 998$ nên ta được $n = 1$, do đó $x + y = 703$.

Kết hợp với $999x = (x + y)(x + y - 1)$ ta được $x = 494; y = 209$.

Kho đó số cần tìm là $\overline{abcdeg} = 494209$.

Vậy các số có sau chữ số hỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcdeg} = 494209; 998001$.

Chủ đề 5
PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN.

Phương pháp 1. Sử dụng các tính chất về quan hệ chia hết.

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các ẩn số cũng như các biểu thức chứa ẩn trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn..

- Xét số dư hai vế của phương trình để chỉ ra phương trình không có nghiệm, tính chẵn lẻ của các vế, …
- Đưa phương trình về dạng phương trình ước số.
- Phát hiện tính chia hết của các ẩn.
- Sử dụng tính đồng dư của các đại lượng nguyên.

Ví dụ 1. Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Lời giải

a) Dễ dàng chứng minh được $x^2; y^2$ chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Dễ dàng chứng minh được x^2; y^2 chia cho 4 có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có các số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$

Lời giải

Biến đổi phương trình: $9x + 2 = y\left(y+1\right)$

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia hết cho 3 dư 2 nên $y\left(y+1\right)$ chia cho 3 dư 2.

Như vậy chỉ có thể $y = 3k+1$ và $y+1 = 3k+2$ với k là một số nguyên.

Khi đó ta được $9x + 2 = \left(3k+1\right)\left(3k+2\right) \Leftrightarrow 9x = 9k\left(k+1\right) \Leftrightarrow x = k\left(k+1\right)$

Thử lại ta thấy $x = k\left(k+1\right)$ và $y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = k\left(k+1\right) \\ y = 3k+1 \end{cases}$ với k là số nguyên tùy ý.

Ví dụ 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 5y^2 = 27$

Lời giải

Một số nguyên x bất kì chỉ có thể biểu diễn dưới dạng $x = 5k$ hoặc $x = 5k \pm 1$ hoặc $x = 5k \pm 2$, trong đó k là một số nguyên. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x = 5k$, khi đó từ $x^2 - 5y^2 = 27$ ta được $(5k)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5(5k^2 - y^2) = 27$. Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5
- Nếu $x = 5k \pm 1$, khi đó từ $x^2 - 5y^2 = 27$ ta được

$$(5k \pm 1)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5(5k^2 \pm 2k - y^2) = 26$$

Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

Nếu $x = 5k \pm 2$, khi đó từ $x^2 - 5y^2 = 27$ ta được

$$(5k \pm 2)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 25k^2 \pm 20k + 4 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5(5k^2 \pm 4k - y^2) = 23$$

Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm là số nguyên

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $19x^2 + 28y^2 = 729$.

Lời giải

Cách 1. Viết phương trình đã cho dưới dạng $(18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) = 729$

Từ phương trình trên suy ra $x^2 + y^2$ chia hết 3

Chú ý là một số chính phương khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Nên từ $x^2 + y^2$ chia hết 3 ta suy ra được x và y đều chia hết cho 3.

Đặt $x = 3u; y = 3v\ (u; v \in Z)$. Thay vào phương trình đã cho ta được $19u^2 + 28v^2 = 81$

Từ phương trình $19u^2 + 28v^2 = 81$, lập luận tương tự trên ta suy ra $u = 3s; v = 3t\ (s; t \in Z)$

Thay vào phương trình $19u^2 + 28v^2 = 81$ ta được $19s^2 + 28t^2 = 9$

Từ phương trình $19s^2 + 28t^2 = 9$ suy ra s, t không đồng thời bằng 0

Do đó ta được $19s^2 + 28t^2 \ge 19 > 9$. Vậy phương trình $19s^2 + 28t^2 = 9$ vô nghiệm và do đó phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Cách 2. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm

Dễ thấy $28y^2$ chia hết cho 4 và 729 chia 4 dư 1. Từ đó ta suy ra $19x^2$ chia 4 dư 1.

Mặt khác một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1, do đó $19x^2$ chia 4 có số dư là 0 hoặc 3, điều này mâu thuẫn với $19x^2$ chia 4 dư 1. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5. Xác định tất cả các cặp nguyên dương $(x; n)$ thỏa mãn phương trình: $x^3 + 3367 = 2^n$

Lời giải

Để sử dụng được hằng đẳng thức $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ta chứng minh n chia hết cho 3.

Nhận thấy 3367 chia hết cho 7 nên từ phương trình $x^3 + 3367 = 2^n$ suy ra x^3 và 2^n có cùng số dư khi chia cho 7(hay $x^3 \equiv 2^n$ (mod 7)).

Nếu n không chia hết cho 3 thì 2^n khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0 hoặc 2 hoặc 4, trong khi đó x^3 khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0 hoặc 1 hoặc 6. Do đó để x^3 và 2^n có cùng số ư khi chia cho 7 thì n phải chia hết cho 3.

Đặt $n = 3m\left(m \in N^*\right)$. Thay vào phương trình đã cho ta được $x^3 + 3367 = 2^{3m}$

Hay ta được $\left(2^m - x\right)\left(\left(2m - x\right)^2 + 3x.2^m\right) = 3367$

Từ phương trình trên ta suy ra $2^m - x$ là ước nguyên dương của 3367

Hơn nữa $\left(2^m - x\right)^3 < 2^{3m} - x^3 = 3367$ nên $\left(2^m - x\right) \in \left\{1;7;13\right\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $2^m - x = 1$, thay vào $x^3 + 3367 = 2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m - 1\right) = 2.561$, phương trình vô nghiệm.
- Xét $2^m - x = 7$, thay vào $x^3 + 3367 = 2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m - 13\right) = 2.15$, phương trình vô nghiệm.
- Xét $2^m - x = 13$, thay vào $x^3 + 3367 = 2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m - 7\right) = 24.32$. Từ đó ta có $m = 4$ nên ta suy ra được $n = 12$ và $x = 9$.

Vậy cặp số nguyên dương $\left(x;n\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(9;12\right)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ra được

$$2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2 = 3\left(7 - y^2\right)$$

Ta thấy $3\left(7 - y^2\right) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow$ y là số lẻ

Ta lại có $7 - y^2 \ge 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$. Khi đó ta được $2\left(x+1\right)^2 = 18$

Từ đó ta được $x = 2$ và $x = -4$

Suy ra các cặp số $\left(2;1\right),\left(2;-1\right),\left(-4;1\right),\left(-4;-1\right)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2x - 11 = y^2$

Lời giải

Cách 1. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^2 - 2x - 11 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow \left(x - 1 + y\right)\left(x - 1 - y\right) = 12$$

Ta có các nhận xét:

+ Vì phương trình đã cho chứa y có số mũ chẵn nên có thể giả sử $y \ge 0$. Thế thì $x - 1 + y \ge x - 1 - y$

+ Ta có $\left(x - 1 + y\right) - \left(x - 1 - y\right) = 2y$ nên $x - 1 + y$ và $x - 1 - y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng là số chẵn.

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp

- Trường hợp 1: Ta có $\begin{cases} x-1+y=6 \\ x-1-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$
- Trường hợp 1: Ta có $\begin{cases} x-1+y=-2 \\ x-1-y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$

Cách 2. Viết thành phương trình bậc hai đối với x là $x^2-2x-(11+y^2)=0$

Khi đó ta có $\Delta^{'}=1+11+y^2=12+y^2$

Điều kiện cần để bậc hai có nghiệm nguyên $\Delta^{'}$ là số chính phương.

Từ đó ta đặt $12+y^2=k^2\,(k\in\mathbb{N})$ hay ta được $k^2-y^2=12 \Leftrightarrow (k+y)(k-y)=12$

Giả sử $y\ge 0$ thì $k+y\ge k-y$ và $k+y\ge 0$ lai có $(k+y)-(k-y)=2y$ nên $k+y$ và $k-y$ cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn.

Từ các nhận xét trên ta có $\begin{cases} k+y=6 \\ k-y=2 \end{cases}$

Do đó ta được $y=2$, khi đó ta được $x^2-2x-15=0$, suy ra $x=3$ hoặc $x=5$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^2+y^2+z^2=1999$

Lời giải

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.

Tổng $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2;y^2;z^2$ phải có một số lẻ và hai số chẵn hoặc cả ba số đều lẻ.

+ Trường hợp trong ba số $x^2;y^2;z^2$ có một số lẻ và hai số chẵn thì vế trái của phương trình đã cho chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999 chia cho 4 dư 3, trường hợp này loại.

+ Trường hợp ba số $x^2;y^2;z^2$ đều lẻ thì vế trái của phương trình chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, trường hợp này loại.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{6xy}=\dfrac{1}{6}$

Lời giải

Nhân hai vế của phương trình với 6xy ta được $6y+6x+1=xy$

Đưa về phương trình ước số ta được $x(y-6)-6(y-6)=37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37$

Do vai trò bình đẳng của x và y nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge 1$, thế thì do x và y nguyên dương nên ta được $x-6 \ge y-6 \ge -5$.

Do đó chỉ có một trường hợp xảy ra $\begin{cases} x-6=37 \\ y-6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=43 \\ y=7 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(43;7),(7;43)$

Ví dụ 10. Tìm các số tự nhiên x và các số nguyên y sao cho: $2^x+3=y^2$

Lời giải

Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x như sau

+ Nếu $x=0$ thì $y^2=4$ nên $y=\pm 2$

+ Nếu $x=1$ thì $y^2=5$, phương trình không có nghiệm nguyên

Nếu $x \ge 2$, khi đó 2^x+3 là số lẻ nên y là số lẻ. Lại có $2^x \,\vdots\, 4$ nên 2^x+3 chia cho 4 dư 3, còn y^2 chia cho 4 dư 1. Do đó phương trình không có nghiệm.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;2),(0;-2)$

Ví dụ 11. Giải phương trình với nghiệm nguyên dương: $2^x+57=y^2$

Lời giải

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Nếu x là số nguyên lẻ. Đặt $x=2n+1\left(n \in \mathbb{N}\right)$. Khi đó ta có

$2^x=2^{2n+1}=2.4^n=2\left(3+1\right)^n=2\left(3a+1\right)=6a+2$ với a là một số nguyên dương.

Khi đó vế trái của phương trình là số chia cho 3 dư 2, còn vế phải là số chính phương chia cho 3 không dư 2. Do đó trường hợp này loại.

- Trường hợp 1 : Nếu x là số nguyên chẵn. Đặt $x=2n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Khi đó ta có

$$y^2-2^{2n}=57 \Leftrightarrow \left(y+2^n\right)\left(y-2^n\right)=3.19$$

Ta thấy $y+2^n>0$ nên $y-2^n>0$ và $y+2^n>y-2^n$

Do đó có các trường hợp như sau

$y+2^n$	57	19
$y-2^n$	1	3
2^n	28(loại)	8
n		3
y		11
$x=2n$		6

Thử lại ta thấy $2^6+57=11^2$ đúng. Vậy nghiệm của phương trình là $(6;11)$.

Ví dụ 12. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3=6xy-1$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được $x^3+y^3=6xy-1 \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=6xy-1$

Đặt $a=x+y; b=xy$ với a, b là các số nguyên.

Khi đó phương trình trên trở thành $a^3-3ab=6b-1 \Leftrightarrow a^3+1=3b(a+2)$

Từ đó ta suy ra được $a^3+1 \vdots a+2$ hay ta được $(a^3+8-7) \vdots (a+2)$ nên $7 \vdots a+2$

Suy ra $a+2$ là ước của 7, ta cũng có $b=\dfrac{a^3+1}{3(a+2)}$, nên ta có bảng giá trị như sau

$a+2$	1	-1	7	
a	-1	-3	5	
$b=\dfrac{a^3+1}{3(a+2)}$	0	Không nguyên	6	Không nguyên

Từ đó ta có các nghiệm của phương trình $a^3-3ab=6b-1$ là $(a;b)=(-1;0),(5;6)$

- Với $(a;b)=(-1;0)$ ta được $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=-1 \\ x=-1; y=0 \end{array}\right.$
- Với $(a;b)=(5;6)$ ta được $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=3 \\ x=3; y=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-1),(-1;0),(2;3),(3;2)$.

Ví dụ 13. Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0$.

Lời giải

Phương trình tương đương với i

$$(3x^2-6xy)+(-2y^2+xy)+(x-2y)=7 \Leftrightarrow 3x(x-2y)+y(x-2y)+(x-2y)=7$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(3x+y+1)=7=1.7=7.1=-1.(-7)=-7.(-1)$$

Do đó ta có 4 trường hợp sau:

+Trường hợp 1: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{7} \\ y=\dfrac{3}{7} \end{cases}$,(loại).

+Trường hợp 2: $\begin{cases} x-2y=7 \\ 3x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$,(nhận).

+trường hợp 3: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+y+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{17}{7} \\ y=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$,(loại).

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{7} \\ y=\dfrac{19}{7} \end{cases}$,(loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(1;-3)$.

Phương pháp 2. Đưa hai vế về tổng các bình phương.

Ý tưởng của phương pháp là biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bình phương và vế phải là tổng của các số chính phương.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-x-y=8$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^2+y^2-x-y=8 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x-4y=32$$
$$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x+1\right)+\left(4y^2-4y+1\right)=34 \Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2+\left(2y-1\right)^2=34$$

Để ý là $34=3^2+5^2$. Do đó từ phương trình trên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} (2x-1)^2=3^2 \\ (2y-1)^2=5^2 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} (2x-1)^2=5^2 \\ (2y-1)^2=3^2 \end{cases}$$

Khi đó ta được $\begin{cases} |2x-1|=3 \\ |2y-1|=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |2x-1|=5 \\ |2y-1|=3 \end{cases}$

Giải lần lượt các phương trình trên ta thu được các nghiệm nguyên là
$(2;3), (3;2), (-1;-2), (-2;-1)$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=3x+y-1$

Lời giải

Biến đổi phương trình ta được

$$x^2+xy+y^2=3x+y-1 \Leftrightarrow 2x^2+2xy+2y^2=6x+2y-2$$
$$\Rightarrow (x+y)^2+(x-3)^2+(y-1)^2=8=0^2+2^2+2^2$$

Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x+y=0$, ta được $(-y-3)^2+(y-1)^2=8 \Rightarrow y=-1, x=1.$

+ Với $x-3=0$, ta được $(-y-3)^2+(y-1)^2=8 \Rightarrow y=-1, x=1.$

+ Với $y-1=0$, ta được $(x+1)^2+(x-3)^2=8 \Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(1;-1)$, $(3;-1)$, $(1;1)$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $4x^2+y^2+4x-6y-24=0$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$4x^2+y^2+4x-6y-24=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2+(y-3)^2=34$$

Chú ý là $34=3^2+5^2$ nên ta có các trường hợp $\begin{cases}(2x+1)^2=3^2\\(y-3)^2=5^2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}(2x+1)^2=5^2\\(y-3)^2=3^2\end{cases}$

Ta xét bảng giá trị tương ứng như sau

$2x+1$	3	3	-3	-3	5	5	-5	-5
$y-3$	5	-5	5	-5	3	-3	3	-3
x	1	1	-2	-2	2	2	-3	-3
y	8	-2	8	-2	6	0	6	0

Từ đó ta có các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y)=(1;8),(1;-2),(-2;8),(-2;-2),(2;6),(2;0),(-3;6),(-3;0)$$

Ví dụ 4. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^6-2x^3y+y^2=128$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$2x^6-2x^3y+y^2=128 \Leftrightarrow (x^3-y)^2+(x^3)^2=8^2+8^2=(-8)^2+8^2=8^2+(-8)^2=(-8)^2+(-8)^2$$

Từ đó ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x^3-y=8\\x^3=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\x^3=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\x=2\end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x^3-y=-8\\x^3=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=16\\x^3=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=16\\x=2\end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}x^3-y=8\\x^3=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-16\\x^3=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-16\\x=-2\end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}x^3-y=-8\\x^3=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\x^3=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\x=-2\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;\ y)=(2;\ 0)$, $(2;\ 16)$, $(-2;\ -16)$, $(-2;\ 0)$.

Cách khác 1: Đặt $t=x^3$, khi đó phương trình trở thành

$$2t^2-2yt+y^2=128 \Leftrightarrow 4t^2-4yt+2y^2=256 \Leftrightarrow (2t-y)^2+y^2=16^2+0^2=0^2+16^2$$

Cách khác 2: Đặt $t=x^3$, khi đó phương trình trở thành

$$2t^2 - 2yt + y^2 = 128 \Leftrightarrow 2t^2 - 2yt + y^2 - 128 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình ẩn t, ta có $\Delta_t^{'} = -y^2 + 256$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_t^{'} \ge 0 \Leftrightarrow -y^2 + 256 \ge 0 \Leftrightarrow -16 \le y \le 16$

Đến đây xét các trường hợp của y thế vào phương trình ta tìm được x.

Phương pháp 3. Sử dụng các tính chất của số chính phương.

Một số tính chất của số chính phương thường được dùng trong giải phương trình nghiệm nguyên

- Một số tính chất về chia hết của số chính phương
- Nếu $a^2 < n < (a+1)^2$ với a là số nguyên thì n không thể là số chính phương.
- Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương
- Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên đó bằng 0.

Ví dụ 1. Tồn tại hay không số nguyên dương x sao cho với k là số nguyên thì ta có $x(x+1) = k(k+2)$.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên.

Ta có $x^2 + x = k^2 + 2k \Rightarrow x^2 + x + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Do x là số nguyên dương nên $x^2 < x^2 + x + 1 = (k+1)^2$ (1)

Cũng do x là số nguyên dươg nên $(k+1)^2 = x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Từ đó ta được $x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2$, điều này vô lý

Vậy không tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1) = k(k+2)$

Ví dụ 2. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$

Lời giải

Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ với y là một số tự nhiên.

Ta thấy $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$

Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ với $a = x^2 + x$

Thật vậy, ta có $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$. Lại có

$$\left(a+2\right)^2-y^2=\left(x^2+x+2\right)^2-x^4+2x^3+2x^2+x+3$$

$$=3x^2+3x+1=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$$

Do $a^2<y^2<\left(a+2\right)^2$ nên $y^2=\left(a+1\right)^2$ hay ta được

$$x^4+2x^3+2x^2+x+3=\left(x^2+x+1\right)^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Với $x=1$ hoặc hoặc $x=-2$ biểu thức đã cho bằng $9=3^2$

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

Lời giải

Thêm xy vào hai vế ta được $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=xy\left(xy+1\right)$

Ta thấy xy và $xy+1$ là hai số nguyên liên tiếp, tích của là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

+ Xét $xy=0$. Khi đó từ $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$ ta được $x^2+y^2=0$ nên $x=y=0$

+ Xét $xy+1=0$. Khi đó ta được $xy=-1$ nên $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$(-1 ; 1)

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $\left(0;0\right),\left(1;-1\right),\left(-1;1\right)$.

Ví dụ 4. Tìm các cặp số nguyên $\left(a;\ b\right)$ thỏa mãn $\left(a-1\right)^2\left(a^2+9\right)=4b^2+20b+25$.

Lời giải

Ta có $\left(a-1\right)^2\left(a^2+9\right)=4b^2+20b+25\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2\left(a^2+9\right)=\left(2b+5\right)^2$

Do đó a^2+9 là số chính phương. Do $\left|a\right|^2<a^2+9\le\left(\left|a\right|+3\right)^2$, nên ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: $a^2+9=\left(\left|a\right|+3\right)^2\Leftrightarrow a=0\Rightarrow 9=\left(2b+5\right)^2\Leftrightarrow b=-1;\ b=-4$.

- Trường hợp 2: $a^2+9=\left(\left|a\right|+2\right)^2\Leftrightarrow 4\left|a\right|=5$, không có số nguyên thỏa mãn.

- Trường hợp 3: $a^2+9=\left(\left|a\right|+1\right)^2\Leftrightarrow\left|a\right|=4\Leftrightarrow a=4;\ a=-4$.

+ Với $a=4$ ta được $9.25=\left(2b+5\right)^2\Leftrightarrow b=5;\ b=-10$

+ Với $a=-4$ ta được $25.25=\left(2b+5\right)^2\Leftrightarrow b=10;\ b=-15$

Vậy ta có các cặp số nguyên thỏa mãn bài toán là

$$\left(a;\ b\right)=\left(0;\ -1\right),\left(0;\ -4\right),\left(4;\ 5\right),\ \left(4;\ -10\right),\ \left(-4;\ 10\right),\left(-4;\ -15\right)$$

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4-2y^2=1$

Lời giải

Do x và y trong phương trình đều có số mũ chẵn nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge 0; y \ge 0$.

Từ phương trình ta suy ra được x là số lẻ. Do đó x^4 chia 4 dư 1 nên ta suy ra $2y^2$ chia hết cho 4 hay y là số chẵn.

Đặt $x = 2m+1; y = 2n$ với m, n là các số tự nhiên. Khi đó ta được

$$(2m+1)^4 - 2(2n)^2 = 1 \Leftrightarrow (4m^2+4m+1)^2 - 1 = 8n^2 \Leftrightarrow (4m^2+4m)(4m^2+4m+2) = 8n^2$$

Thu gọn ta được $(m^2+m)(2m^2+2m+1) = n^2$.

Đặt $m^2+n^2 = a$ suy ra $2m^2+2m+1 = 2a+1$, khi đó phương trình trở thành $a(2a+1) = n^2$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m = 0$, khi đó ta suy ra được $x = 1; y = 0$
- Nếu $m \ge 1$, khi đó a và $2a+1$ là hai số nguyên dương và chúng nguyên tố cùng nhau.

Do tích của a và $2a+1$ là một số chính phương nên cả a và $2a+1$ cùng là số chính phương.

Đặt $a = k^2, k \in N$ thì ta được $m^2+m = k^2$, ta có

$$m^2 < m^2+m < m^2+2m+1 = (m+1)^2 \text{ nên } m^2 < k^2 < (m+1)^2$$

Suy ra k^2 nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên k^2 không thể là số chính phương.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y) = (1;0), (-1;0)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $9x^2 - 6x = y^3$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được $9x^2 - 6x = y^3 \Leftrightarrow (3x-1)^2 = y^3 + 1$

Từ đó ta suy ra được $y^3 + 1 \ge 0 \Rightarrow y^3 \ge -1 \Rightarrow y \ge -1$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $y = -1$, khi đó thay vào phương trình ta được $(3x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, loại.
- Xét $y = 0$, khi đó thay vào phương trình ta được $9x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Xét $y = 1$, khi đó thay vào phương trình ta được $(3x-1)^2 = 2$, loại.
- Xét $y \ge 2$, khi đó từ phương trình trên ta được $(3x-1)^2 = (y+1)(y^2-y+1)$

Gọi $d = (y+1, y^2-y+1)$, khi đó ta có $\begin{cases} y+1 \,\vdots\, d \\ y^2-y+1 \,\vdots\, d \end{cases}$

Từ đó suy ra $y^2 - y + 1 = y(y+1) - 2(y+1) + 3 \,\vdots\, d$ nên $3 \,\vdots\, d$.

Mặt khác $(3x-1)^2$ không chia hết cho 3 nên ta suy ra được $d = 1$.

Do đó hai số nguyên dương $y+1$ và y^2-y+1 nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là một số chính phương. Do đó mỗi số là một số chính phương.

Tuy nhiên $(y-1)^2 < y^2-y+1 < y^2$ nên y^2-y+1 không thể là một số chính phương.

Do đó trong trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;0)$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$2xy+6yz+3zx-|x-2y-z|=x^2+4y^2+9z^2-1$$

Lời giải

Đẳng thức dẫ cho tương đương với $2x^2+8y^2+18z^2-4xy-12yz-6zx=2(1-|x-2y-z|)$

Hay ta được $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=2(1-|x-2y-z|)$

Do $(x-2y)^2 \ge 0;(2y-3z)^2 \ge 0;(3z-x)^2 \ge 0$ nên suy ra $1 \ge |x-2y-z|$.

Do x, y, z là các số nguyên nên ta suy ra được $|x-2y-z|=0$ hoặc $|x-2y-z|=1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $|x-2y-z|=1$, khi đó từ $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=2(1-|x-2y-z|)$

Ta được $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=0$ nên $(x-2y)^2=(2y-3z)^2=(3z-x)^2=0$

Suy ra $x=2y=3z$, thay vào $|x-2y-z|=1$ ta được $|z|=1$, điều này dẫn đến x, y không nhận giá trị nguyên.

- Nếu $|x-2y-z|=0$ thì ta được $x-2y-z=0$.

Khi đó ta có phương trình $z^2+(2y-3z)^2+4(z-y)^2=2$.

Do $z^2 \ge 0$ và $(2y-3z)^2 \ge 0$ nên ta được $0 \le 4(y-z)^2 \le 2$.

Mà ta thấy $4(y-z)^2 \vdots 4$ nên suy ra $4(y-z)^2=0$ do đó $y=z$.

Thay vào phương trình $z^2+(2y-3z)^2+4(z-y)^2=2$ ta được $z^2=1$ hay $z=\pm 1$.

+ Nếu $z=1$ thì ta được $x=3;y=1$

+ Nếu $z=-1$ thì ta được $x=-3;y=-1$.

Thử lại vào phương trình ta được các nghiệm là $(x;y;z)=(3;1;1),(-3;-1;-1)$.

Phương pháp 4. Phương pháp đánh giá.

Trong khi giải các phương trình nghiệm nguyên rất cần đánh giá các miền giá trị của các ẩn, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều có thể dùng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra. Để đánh giá được miền giá trị của biến số cần vận dụng linh hoạt các tính chất chia hết, đồng dư, bất đẳng thức …

- Phương pháp sắp thứ tự các ẩn.
- Xét khoảng giá trị của các ẩn.
- Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki.

Ví dụ 1. Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Lời giải

Cách 1. Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Khi đó ta có $x+y+z=x.y.z$ (1)

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể sắp xếp thứ tự giá trị của các ẩn, chẳng hạn $1\le x\le y\le z$

Do đó ta được $xyz=x+y+z\le 3z$

Chia hai vế của bất đảng thức $xyz\le 3z$ cho số dương z ta được $xy\le 3$

Từ đó suy ra $xy\in\{1;2;3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Với $xy=1$, khi đó ta có $x=y=1$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z+2=z$, vô nghiệm
- Với $xy=2$, khi đó ta có $x=1;y=2$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z=3$
- Với $xy=3$, khi đó ta có $x=1;y=3$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z=2$, trường hợp này loại vì $y\le z$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

Cách 2. Chia hai vế của phương trình $x+y+z=x.y.z$ cho $xyz\ne 0$ ta được $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z\ge 1$. Khi đó $1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\le\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{3}{z^2}$

Suy ra $1\le\frac{3}{z^2}$, do đó ta được $z^2\le 3$ nên $z=1$. Thay $z=1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$x+y+1=xy\Leftrightarrow xy-x-y=1\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=2$$

Từ $x\ge y$ nên ta có $x-1\ge y-1\ge 0$. Do đó từ $(x-1)(y-1)=2$ ta được $\begin{cases}x-1=2\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$.

Lời giải

Vì vai trò của x, y, z, t như nhau nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge t$.

Khi đó ta được $2xyzt=5(x+y+z+t)+10\le 20x+10$

Suy ra ta được $yzt\le 15\Rightarrow t^3\le 15\Rightarrow t\le 2$. Suy ra ta được $t\in\{1;2\}$

+ Với $t=1$, khi đó ta có $2xyz=5(x+y+z)+15\le 15x+15$

Suy ra $2yz \le 30 \Rightarrow 2z^2 \le 30 \Rightarrow z \le 3$. Do đó $z \in \{1;2;3\}$

- Nếu $z = 1$, khi đó ra được $2xy = 5(x+y)+20 \Leftrightarrow 4xy = 10(x+y)+40 \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5) = 65$

Giải phương trình trên ta được $x = 35;\ y = 3$ hoặc $x = 9;\ y = 5$.

Do đó trường hợp này ta được hai nghiệm là $(x;y;z;t) = (35;3;1;1),(9;5;1;1)$

- Nếu $z = 2$, khi đó ta được $5(x+y)+25 = 4xy \Leftrightarrow 4xy - 5x - 5y = 25$

Giải tương tự cho các trường còn lại và trường hợp t = 2. Cuối cùng ta tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là và các hoán vị của các bộ số này.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

Lời giải

Do vai trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y$.

Khi đó hiển nhiên ta có $\frac{1}{y} < \frac{1}{3}$ nên $y > 3$

Mặt khác do $x \ge y \ge 1$ nên $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$. Do đó ta được $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ nên $y \le 6$

Ta xác định được khoảng giá tri của y là $4 \le y \le 6$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $y = 4$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, suy ra $x = 12$

+ Với $y = 5$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, loại vì x không là số nguyên

+ Với $y = 6$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, suy ra $x = 6$

Vậy các nghiệm của phương trình là $(4;12),(12;4),(6;6)$

Ví dụ 4. Tìm ba số nguyên dương đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^2$

Lời giải

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử $x < y < z$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \ge \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ ta có $\frac{(x+y+z)^2}{3} \ge \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

Từ đó với mọi $x;y;z \ge 0$ ta suy ra $x+y+z \le 9$.

Dấu bằng không xảy ra vì x, y, z đôi một khác nhau. Do đó ta được $x+y+z \le 8$

Mặt khác x, y, z là các số nguyên dương khác nhau nên $x+y+z \ge 1+2+3 = 6$

Từ đó ta được $6 \le x+y+z \le 8$ nên ta suy ra $x+y+z \in \{6;7;8\}$

Từ đây kết hợp với phương trình ban đầu ta tìm được x, y, z

Vậy bộ ba số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z)=(1;2;3)$ và các hoán vị của bộ ba số này.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $7\left(x^2+xy+y^2\right)=39(x+y)$.

Lời giải

Từ phương trình ta thấy $39(x+y)\vdots 7$, mà 7 và 39 nguyên tố cùng nhau nên $x+y\vdots 7$.

Đặt $x+y=7m\,(m\in Z)$ thì ta được phương trình $x^2+xy+y^2=39m$

Từ đó suy ra $(x+y)^2-\left(x^2+xy+y^2\right)=(7m)^2-39m$ hay $xy=49m^2-39m$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta được $49m^2-39m\le\frac{1}{4}(x+y)^2$

Hay ta được $49m^2\ge 4\left(49m^2-39m\right)\Leftrightarrow m(52-49m)\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{52}{49}$.

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=0$ hoặc $m=1$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2+xy+y^2=0\Leftrightarrow(x+y)^2-xy=0\Leftrightarrow xy=0\Leftrightarrow x=y=0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=7$, khi đó ta được phương trình

$$x^2+xy+y^2=39\Leftrightarrow(x+y)^2-xy=39\Leftrightarrow xy=10$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}x+y=7\\ xy=10\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;y=5\\ x=5;y=2\end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(0;0),(2;5),(5;2)$

Ví dụ 6. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\frac{x}{y}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x}=\frac{5}{2}$

Lời giải

Giả sử $(x;y;z)$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{z+1}+\frac{z+1}{x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z+1}\cdot\frac{z+1}{x}}=3$$

Suy ra $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2}$ hay $x\le 2$. Do x nguyên dương nên ta được $x=1$ và $x=2$

- Với $x=2$, khi đó trong bất đẳng thức trên phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là $\frac{x}{y}=\frac{y}{z+1}=\frac{z+1}{x}$

Giải hệ điều kiện trên ta thu được $(x;y;z)=(2;2;1)$

- Với $x=1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{y}+\frac{y}{z+1}+z=\frac{5}{2}$

Khi đó $z\le\frac{1}{y}+\frac{y}{z+1}+z=\frac{5}{2}\Rightarrow z\le 2$

+ Với $z=1$ thay vào phương trình trên ta được $y^2-3y+2=0\Leftrightarrow y=1;y=2$

+ Với $z=2$ thay vào phương trình trên ta được $2y^2-3y+6=0$

Phương trình này có biệt thức $\Delta=-39<0$ nên không có nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z)=(2;2;1),(1;1;1),(1;2;1)$.

Phương pháp 5. Sử dụng tính chất của phương trình bậc hai.

Ý tưởng của phương pháp là quy phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai một ẩn, các ẩn còn lại đóng vai trò tham số. Khi đó các tính chất của phương trình bậc hai thường được sử dụng dưới các dạng như sau:

- Sử dụng điều kiện có nghiệm $\Delta\ge 0$ của phương trình bậc hai.
- Sử dụng hệ thức $\text{Vi}-\text{et}$.
- Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x+y+xy=x^2+y^2$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đường với $x^2-(y+1)x+(y^2-y)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số. Khi đó điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $\Delta\ge 0$ hay $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)=-3y^2+6y+1\ge 0\Leftrightarrow 3(y-1)^2\le 4$

Do đó ta được $(y-1)^2\le 1$. Để ý là để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

Do đó từ $(y-1)^2\le 1$ ta suy ra được $(y-1)^2=0;1$ nên $y-1=-1;0;1$

Đến đây ta xét từng trường hợp cụ thể

+ Với $y=0$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

+ Với $y=1$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

+ Với $y=1$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình đã cho là $(0;0),(1;0),(0;1),(2;1),(1;2),(2;2)$.

Ví dụ 2. Tìm các số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp

Lời giải

Cách 1. Giải sử $9x+5=n\left(n+1\right)$ với n nguyên thì:

$$36x+20=4n^2+4n\Rightarrow 36x+21=4n^2+4n+1\Rightarrow 3\left(12x+7\right)=\left(2n+1\right)^2$$

Số chính phương $\left(2n+1\right)^2$ chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9. Mà ta lại có $12x+7$ không chia hết cho 3 nên $3\left(12x+7\right)$ không chia hết cho 9. Điều này mâu thuẫn nên không tồn tại số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Giải sử $9x+5=n\left(n+1\right)$ với n nguyên

Khi đó ta được $n^2+n-9x-5=0$

Để phương trình bậc hai đối với n có nghiệm nguyên, điều kiện cần là Δ là số chính phương.

Nhưng $\Delta=1+4\left(9x+5\right)=36x+21$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Vậy không tồn tại số nguyên n nào để $9x+5=n\left(n+1\right)$, tức là không tồn tại số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$

Lời giải

Viết thành phương trình bậc hai đối với x: $x^2+\left(3y-1\right)x+\left(2y^2-y+3\right)=0$ (2)

Ta có $\Delta'=\left(3y-1\right)^2-4\left(2y^2-y+3\right)=y^2-2y-11$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (2) có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương

Từ đó ta đặt $y^2-2y-11=k^2\left(k\in\mathbb{N}\right)$ (3)

Giải (3) với nghiệm nguyên ta được $y=5$ hoặc $y=-3$

+ Với $y=5$, thay vào phương trình (2) được $x^2+14x+48=0\Leftrightarrow x=-8;\ x=-6$

+ Với $y=-3$ thay vào phương trình (2) được $x^2-10x+24=0\Leftrightarrow x=6;x=4$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right)=\left(-8;5\right),\left(-6;5\right),\left(6;-3\right),\left(4;-3\right)$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$.

Lời giải

Phương trình đã cho được viết lại thành $x^2+\left(3y-1\right)x+\left(2y^2-y+3\right)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x có y là tham số, khi đó ta có

$$\Delta=\left(3y-1\right)^2-4\left(2y^2-y+3\right)=y^2-2y-11$$

Để phương trình bậc hai có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

Đặt $y^2-2y-11=k^2\left(k\in N\right)$. Khi đó ta có

$$y^2-2y-11=k^2\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2-k^2=12\Leftrightarrow\left(y-1-k\right)\left(y-1+k\right)=12$$

Do đó $y-1-k$ và $y-1+k$ là các ước của 12. Lại có $y-1-k$ và $y-1+k$ cùng tính chẵn.

Lại thấy $y-1+k > y-1-k$ nên có bảng giá trị của chứng minh sau:

$y-1+k$	6	-2
$y-1-k$	2	-6
$y-1$	4	-4
y	5	-3

+ Với $y=5$ thay vào phương trình đã cho ta được $x^2+14x+48=0 \Leftrightarrow x=-6; x=-8$.

+ Với $y=-3$ thay vào phương trình đã cho ta được $x^2-10x+24=0 \Leftrightarrow x=4; x=6$

Ví dụ 5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+y^3=x^2+2xy+y^2$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2-xy+y^2-x-y=0 \end{array}\right.$$

+ Nếu $x+y=0$, khi đó phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)=(t;-t), t\in Z$

+ Nếu $x^2-xy+y^2-x-y=0 \Leftrightarrow x^2-(y+1)x+y^2-y=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x, khi đó ta có

$$\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)=-3y^2+6y+1$$

Để phương trình trên có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 3y^2-6y-1\le 0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \le 4$.

Do y là số nguyên nên $(y-1)^2$ là số chính phương nên ta được $(y-1)^2 \in \{0;1\}$

Từ đó ta suy ra được $y-1\in\{-1;0;1\}$, do đó $y\in\{0;1;2\}$.

- Với $y=0$, thay vào phương trình $x^2-xy+y^2-x-y=0$ ta được $x^2-2x=0 \Rightarrow x=0; x=2$
- Với $y=1$, thay vào phương trình $x^2-xy+y^2-x-y=0$ ta được $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1; x=2$
- Với $y=2$, thay vào phương trình $x^2-xy+y^2-x-y=0$ ta được $x^2-x=0 \Rightarrow x=0; x=1$.

Vậy phương trình đã cho các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;1),(1;2),(2;1),(2;2),(1;0),(t,-t)$ với t là một số nguyên bất kì.Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(-8;5),(-6;5),(6;-3),(4;-3)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

Lời giải

Từ phương trình $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ ta có $7(x+2y)\vdots 5 \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$

Đặt $x+2y=5t, t\in Z$, khi đó phương trình trên trở thành $x^2+xy+y^2=7t$

Từ $x+2y=5t\Rightarrow x=5t-2y$ thay vào $x^2+xy+y^2=7t$ ta được $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$

Coi đây là phương trình bậc hai đối với y, ta có $\Delta=84t-75t^2$

Để phương trình bậc hai có nghiệm thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 84t-75t^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le t\le\dfrac{28}{25}$

Vì $t\in Z\Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$. Thay vào $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$

+ Với $t=0$ ta được $y=0$ do đó $x=0$

+ Với $t=1$ ta được $y=3\Rightarrow x=-1$ hoặc $y=2\Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;0),(-1;3),(1;2)$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x+y)+xy=x^2+y^2$.

Lời giải

Phương trình đã cho trở thành $x^2-(y+2)x+y^2-2y=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x co y là tham số. Do đó để phương trình có nghiệm thì ta cần có

$$\Delta=(y+2)^2-4(y^2-2y)=-3y^2+12y+4\ge 0\Leftrightarrow \frac{6-4\sqrt{3}}{3}\le y\le\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$$

Mà y nguyên nên ta có $y\in\{0;1;2;3;4\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

+ Với $y=0\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0;x=2$.

+ Với $y=1\Rightarrow x^2-3x-1=0$, phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $y=2\Rightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x=0;x=4$.

+Với $y=3\Rightarrow x^2-5x+3=0$, phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $y=4\Rightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=2;x=4$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;0),(2;0),(0;2),(4;2),(2;4),(4;4)$.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2+y^2+x+y=kxy$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Giả sử k là một giá trị sao cho phương trình $x^2+y^2+x+y=kxy$ có nghiệm nguyên dương. Khi đó tồn tại nghiệm $(x_0;y_0)$ của phương trình với x_0+y_0 nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0\ge y_0$. Xét phương trình bậc hai $x^2-(ky_0-1)x+{y_0}^2+y_0=0$

Theo giả sử ở trên thì x_0 là một nghiệm của $x^2-(ky_0-1)x+{y_0}^2+y_0=0$. Theo định lý Viet thì

$x_1 = ky_0 - 1 - x_0 = \dfrac{y_0^2 + y_0}{x_0}$ cũng là một nghiệm của $x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0{}^2 + y_0 = 0$.

Dễ thấy x_1 là một số nguyên dương, vì thế $(x_1; y_0)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của đã cho. Từ giả thiết $x_0 + y_0$ nhỏ nhất ta suy ra $x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0$

Tức là $\dfrac{y_0^2 + y_0}{x_0} \geq x_0$, suy ra $y_0^2 + y_0 \geq x_0^2$. Từ đây ta có bất đẳng thức kép

$$y_0^2 \leq x_0^2 \leq y_0^2 + y_0 \leq (y_0 + 1)^2$$

Suy ra $x_0 = y_0$. Thay vào phương trình $x^2 + y^2 + x + y = kxy$ ta được $2 + \dfrac{2}{x_0} = k$. Suy ra x_0 chỉ có thể bằng 1 hoặc 2, tương ứng k bằng 4 hoặc 3.

Với $k = 3$ thì phương trình có nghiệm $(2;2)$ và với $k = 4$ thìa phương trình có nghiệm $(1;1)$.

Vậy $k = 3$ và $k = 4$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Nhận xét: Ta cũng có thể đánh giá k khác một chút, như sau:

Cách 1. Từ đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 + x_0 + y_0 = kx_0y_0$, chia hai vế cho x_0y_0 ta được

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0} = k$$

Mặt khác, cũng theo lý luận ở trên thì $ky_0 - 1 - x_0 \geq x_0$ nên suy ra $\dfrac{x_0}{y_0} \leq \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2y_0}$.

Từ đó ta có $k \leq \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2y_0} + \dfrac{y_0}{x_0} + \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2y_0} + \dfrac{y_0}{x_0} + \dfrac{1}{x_0} \leq \dfrac{k}{2} + \dfrac{5}{2}$

Từ đó suy ra $k \leq 5$. Hơn nữa k chỉ có thể bằng 5 khi $x_0 = y_0 = 1$,trường hợp này dẫn đến mâu thuẫn. Với $k = 3$ thì phương trình có nghiệm $(2;2)$ và với $k = 4$ thìa phương trình có nghiệm $(1;1)$.

Trường hợp $k \leq 2$ rõ ràng là vô nghiệm.

Cách 2. Lý luận như trên thì $x_0 \leq x_1 = \dfrac{y_0^2 + y_0}{x_0} \leq y_0 + 1$. Như vậy $y_0 + 1$ nằm ngoài hai nghiệm của tam thức $f(x) = x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0^2 + y_0$, suy ra $f(y_0 + 1) \geq 0$.

Từ đó ta được $k \leq \dfrac{2(y_0 + 1)}{y_0} = 2 + \dfrac{2}{y_0} \leq 4$. Đến đây ta xét tương tự như trên

Phương pháp 6. Phương pháp lùi dần vô hạn.

Ý tưởng của phương pháp lùi dần vô hạn có thể hiểu như sau:

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của $f(x; y; z) = 0$. Nhờ những biến đổi và suy luận số học ta tìm được một nghiệm khác $(x_1; y_1; z_1)$ sao cho các nghiệm quan hệ với bộ nghiệm đầu tiên bởi một tỉ số k nào đó, chẳng hạn $x_0 = kx_1; y_0 = ky_1; z_0 = kz_1$. Lập luận tương tự ta lại được bộ số nguyên $(x_2; y_2; z_2)$ thỏa mãn $x_1 = kx_2; y_1 = ky_1; z_1 = kz_2$. Quá trình cứ tiếp tục dẫn đến $x_0; y_0; z_0$ cùng chia hết cho k^n với n là một số tự nhiên tuỳ ý. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$. Để rõ ràng hơn ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + 2y^3 = 4z^3$

Lời giải

Từ phương trình $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ (1) ta thấy

Hiển nhiên $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào phương trình (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3 \qquad (2)$$

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Thay vào phương trình (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3 \qquad (3)$$

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào phương trình (3) rồi chia hai vế cho 2 được:

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3 \qquad (4)$$

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của phương trình (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình (1) trong đó $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$.

Lập luận hoàn toán tương tự như trên ta được $(x_2; y_2; z_2)$ cũng là nghiệm của phương trình (1) trong đó $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z cùng chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chia xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$.

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho.

Nhận xét: *Từ phương trình đã cho ta phát hiện ra các biến x, y, z cùng chia hết cho 2, khi đó thực hiện phép đặt* $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ *và thay vào phương trình ban đầu ta được* $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$*, từ phương trình này lại thấy các biến* $x_1; y_1; z_1$ *cũng chia hết cho 2. Từ đó ta được* $x; y; z$ *cùng chia hết cho* 2^2*. Quá trình được thực hiện như vậy liên tục thì ta được* $x; y; z$ *cùng chia hết cho* 2^k *với k là số nguyên dương bất kì. Từ đây ta suy ra được* $x = y = z = 0$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = 7z^2$

Lời giải

Ta biết rằng một số chính phương khi chia cho 7 có số dư là 0; 1; 2; 4.

Do đó từ phương trình trên ta suy ra được $x^2 + y^2$ chia hết cho 7, do đó x^2 và y^2 cùng chia hết cho 7.

Do 7 là số nguyên tố nên suy ra x^2 và y^2 cùng chia hết cho 49.

Từ đó ta được $7z^2$ chia hết cho 49 nên z^2 chia hết cho 7, suy ra z chia hết cho 7.

Đặt $x = 7x_2; y = 7y_1; z = 7z_1$ và thay vào phương trình đã cho ta thu được $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$.

Lặp lại các chứng minh như trên ta suy ra được $x_1; y_1; z_1$ chia hết cho 7, do đó x; y; z chia hết cho 7^2.

Tiếp tục các suy luận ta suy ra được x; y; z chia hết cho $7^k, k \in N$.

Từ đó suy ra $x = y = z = 0$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = az^2$, với $a = 4k - 1\left(k \in N^*\right)$

Lời giải

Ta viết lại phương trình là $x^2 + y^2 = (4k-1)z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4kz^2$

Do đó suy ra $x^2 + y^2 + z^2$ là số chẵn, khi đó có hai trường hợp xẩy ra

- Trường hợp 1: Trong ba số x, y, z có hai số lẻ và một số chẵn. Nên trong ba số x^2, y^2, z^2 coa hai số lẻ và một số chẵn.

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4 và số chính phương lẻ thì chia 4 dư 1.

Do đó $x^2 + y^2 + z^2$ chia 4 dư 2, mà $4kz^2$ chia hết cho 4.

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

- Trường hợp 2: Cả ba số x, y, z đều là số chẵn. Khi đó ta đặt $x = 2x_1; y = 2y_1; z = 2z_1$ và thay vào phương trình đã cho ta được $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4kz_1^2$

Lặp lại các chứng minh như trên ta suy ra được $x_1; y_1; z_1$ chia hết cho 2, do đó x; y; z chia hết cho 2^2.

Tiếp tục các suy luận ta suy ra được x; y; z chia hết cho $2^k, k \in N$.

Từ đó suy ra $x = y = z = 0$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$

Lời giải

Ta có nhận xét: Một số chính phương lẻ khi chia cho 4 có số dư là 1 và một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4.

Do x^2y^2 là số chính phương nên khi chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1.

- Nếu x^2y^2 là số lẻ thì x và y cùng là số lẻ, khi đó x^2 và y^2 chia cho 4 có số dư là 1.

Từ đó $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 có số dư là 2 hoặc 3, điều này vô lí.

- Nếu x^2y^2 là số chẵn, khi đó có hai trường hợp xẩy ra

+ Trường hợp 1: Trong hai số x và y có một số chẵn và một số lẻ. hông mất tính tổng quát ta giả sử x là số chẵn và y là số lẻ. Khi đó $x^2 + y^2$ chia 4 dư 1 nên $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 1, điều này vô lí.

+ Trường hợp 2: Cả hai số x và y đều là số chẵn, khi đó x^2+y^2 và x^2y^2 cùng chia hết cho 4, do đó z^2 phải chia hết cho 4 hay z là số chẵn.

Đặt $x=2x_2; y=2y_1; z=2z_1$ với $x_1; y_1; z_1$ là số nguyên và thay vào phương trình ban đầu ta được

$$4x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=16x_1^2y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2$$

Đến đây lập luận tương tự như trên ta được $x_1; y_1; z_1$ là các số chẵn. Do đó bằng phương pháp lùi dần vô hạn ta chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhấ là $(x; y; z)=(0;0;0)$.

Ví dụ 5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3+15y^3=18z^3$

Lời giải

Giả sử bộ ba số nguyên $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là nghiệm của phương trình.

Dễ thấy nếu một trong ba số trên bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0 nên $(0;0;0)$ là một nghiệm của phương trình.

Xét cả ba số đều khác 0, đặt $d=(x_0; y_0; z_0)$, khi đó ta có $x_0=dx_1; y_0=dy_1; z_0=dz_1$ với $x_1; y_1; z_1$ nguyên và $(x_1; y_1; z_1)=1$.

Ta được $x_1^3+15y_1^3=18z_1^3$. Từ đó suy ra x_1 chia hết cho 3.

Đặt $x_1=3x_2$ và thay vào phương trình $x_1^3+15y_1^3=18z_1^3$ ta được $9x_2^3+5y_1^3=6z_1^3$, suy ra y_1 chia hết cho 3. Đặt $y_1=3y_2$, ta lại được $3x_2^3+45y_2^3=2z_1^3$. Suy ra z_1 chia hết cho 3.

Suy ra $x_1; y_1; z_1$ có ước chung là 3, mâu thuẫn $(x_1; y_1; z_1)$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất là $(0;0;0)$

III. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN.

Phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng và phong phú, nó có thể là phương trình một ẩn hay nhiều ẩn. Nó có thể là phương trình bậc nhất hoặc bậc cao. Cũng có những phương trình dạng đa thức hoặc dạng lũy thừa. Ta có thể chia phương trình nghiệm nguyên thành một số dạng như sau.

1. Phương trình nghiệm nguyên dạng đa thức.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $6x+15y+10z=3$

Lời giải

Dễ thấy 6x và 15y chia hết cho 3 nên từ phương trình ta được $10z \vdots 3$ nên $z \vdots 3$.

Đặt $z=3k$ với k là một số nguyên. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$6x+15y+10.3k=3 \Leftrightarrow 2x+5y+10k=1$$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau

$$2x+5y=1-10k \Leftrightarrow x=\frac{1-10k-5y}{2}=-5k-2y+\frac{1-y}{2}$$

Do x, y, k là các số nguyên nên $\frac{1-y}{2}$ là số nguyên. Đặt $t=\frac{1-y}{2}$ với t nguyên.

Từ đó ta được $\begin{cases} y=1-2t \\ x=-5k-2(1-2t)+t=5t-5k-2 \\ z=3k \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z)=(5t-5k-2;1-2t;3k)$ với t, k là các số nguyên tùy ý.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+y^2-xy=2x-3y-2$.

Lời giải

Cách 1. Phương trình đã cho được viết lại thành $y^2+(3-x)y+(x^2-2x+2)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x có y là tham số, khi đó ta có

$$\Delta=(3-x)^2-4(x^2-2x+2)=-3x^2+2x+1$$

Để phương trình $y^2+(3-x)y+(x^2-2x+2)=0$ có nghiệm thì $\Delta\ge 0$ hay ta có

$$-3x^2+2x+1\ge 0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le x\le 1$$

Do x nhận các giá trị nguyên nên ta được $x=0$ hoặc $x=1$

+ Với $x=0$, thay vào phương đã cho ta được $y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow y=-1; y=-2$

+ Với $x=1$, thay vào phương đã cho ta được $y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;-1),(0;-2),(1;-1)$.

Cách 2. Phương trình đã cho được viết lại thành $(x-y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2=9$

Ta thấy 9 có hai cách viết thành tổng của ba số chính phương đó là $9=0+0+9$ hoặc $9=1+4+4$.

Khi đó ta xét các giá trị của $|x-y|;|x-2|;|y+3|$ bằng bảng sau:

$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert y+3\rvert$	Nhận xét
3	0	0	$x=2; y=-3$ và $\lvert x-y\rvert=3$
0	3	0	$x=y=-3$ và $\lvert x-2\rvert=3$
0	0	3	$x=y=2$ và $\lvert 3+3\rvert=3$
1	2	2	$x\in\{0;4\}, y\in\{-1;-5\}$ và $\lvert x-y\rvert=1$ Khi đó chỉ có $x=0; y=-1$ thỏa mãn
2	1	2	$x\in\{1;34\}, y\in\{-1;-5\}$ và $\lvert x-y\rvert=2$ Khi đó chỉ có $x=1; y=-1$ thỏa mãn
2	2	1	$x\in\{0;4\}, y\in\{-2;-4\}$ và $\lvert x-y\rvert=2$

			Khi đó chỉ có $x=0; y=-2$ thỏa mãn

Từ bảng trên ta được các nghiêm của phương trình là $(x;y)=(0;-1),(0;-2),(1;-1)$.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1)$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1) \Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$$

Đặt $t=2x-y-2$ với t nguyên, khi đó phương trình trên trở thành $2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0$.

Đến đây ta có thể giải quyết phương trình theo hai cách sau:

Cách 1. Tiếp biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0 \Leftrightarrow 16t^2-56t+49+7(16y^2+24y+9)=112$$

Hay ta được $(4t-7)^2+7(4y+3)^2=112$. Do t nguyên nên $(4t-7)^2>0$.

Suy ra ta được $7(4y+3)^2<112$ nên $-4<4y+3<4 \Leftrightarrow -7<4y<1$

Do y nhận giá trị nguyên nên ta được $y \in \{-1;0\}$.

- Với $y=-1$, thay vào phương trình $2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$ ta được phương trình $(2x-1)^2=7x$, suy ra $x \geq 0$ và $(2x-1)^2 \vdots x$.

Dễ thấy $(x,2x-1)=1$ nên từ $(2x-1)^2 \vdots x$ ta được $x=1$.

Thay $(x;y)=(1;-1)$ vào phương trình ban đầu ta thấy không thỏa mãn.

- Với $y=0$, thay vào phương trình $2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$ ta được phương trình $4(x-1)^2-7(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x-11)=0$. Từ đây ta được $x=1$

Thay $(x;y)=(1;0)$ vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x;y)=(1;0)$.

Cách 2. Ta xét các trường hợp sau:

- Với $y=-1$, thay vào phương trình $2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$ ta được phương trình $(2x-1)^2=7x$, suy ra $x \geq 0$ và $(2x-1)^2 \vdots x$.

Dễ thấy $(x,2x-1)=1$ nên từ $(2x-1)^2 \vdots x$ ta được $x=1$.

Thay $(x;y)=(1;-1)$ vào phương trình ban đầu ta thấy không thỏa mãn.

- Với $y \leq -2$ hoặc $y \geq 0$, khi đó ta được $2y^2+3y=y(2y+3) \geq 0$

Do đó từ phương trình $2t^2-7t+7\left(2y^2+3y\right)=0$ ta suy ra được $2t^2-7t\le 0$ hay $t\left(2t-7\right)\le 0$.

Từ đó ta được $0\le t\le 3$.

Mặt khác cũng từ phương trình $2t^2-7t+7\left(2y^2+3y\right)=0$ ta suy ra được $t^2\,\vdots\,7$ nên $t\,\vdots\,7$.

Do đó ta suy ra được $t=0$, suy ra $7\left(2y^2+3y\right)=0\Rightarrow y\left(2y+3\right)=0\Rightarrow y=0$.

Từ đó ta tìm được $x=1$. Thay $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$ vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2xyz=x+y+z+16$

Lời giải

Do vai trò của x, y, z trong phương trình như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $1\le x\le y\le z$.

Khi đó ta được $2xyz\le 3z+16$.

Do z nhận giá trị nguyên dương nên ta có $2xyz\le 3z+16\Leftrightarrow 2xy\le 3+\dfrac{16}{z}\le 19$

Từ đó ta được $xy\le 9$. Lại do $1\le x\le y$ nên suy ra $xy\ge x^2$

Từ đó ta được $x^2\le 9$. Do x nguyên dương nên ta được $x\in\left\{1;2;3\right\}$.

+ Với $x=1$ thay vào phương trình ban đầu ta được $2yz=y+z+17$ hay ta được

$$2yz-y-z=17\Leftrightarrow\left(2y-1\right)\left(2z-1\right)=35$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases}2y-1=1\\2z-1=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\z=18\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}2y-1=5\\2z-1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$$

+ Với $x=2$ thay vào phương trình ban đầu ta được $4yz=y+z+18$ hay ta được

$$4yz-y-z=18\Leftrightarrow\left(4y-1\right)\left(4z-1\right)=73$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có $\begin{cases}4y-1=1\\4z-1=73\end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên dương.

+ Với $x=3$ thay vào phương trình ban đầu ta được $6yz=y+z+19$ hay ta được

$$6yz-y-z=19\Leftrightarrow\left(6y-1\right)\left(6z-1\right)=115$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có các trường hợp sau $\begin{cases}6y-1=1\\6z-1=115\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}6y-1=5\\6z-1=23\end{cases}$

Ta thấy $\begin{cases}6y-1=1\\6z-1=115\end{cases}$ không có nghiệm nguyên dương và $\begin{cases}6y-1=5\\6z-1=23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\z=4\end{cases}$ loại do $x\le y$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(1;1;18),(1;3;4)$ và các hoán vị của chúng.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình: $7y^2-6x^2=x-y$, với $x>y>0$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$7y^2-6x^2=x-y \Leftrightarrow y^2=6x^2-6y^2+x-y \Leftrightarrow y^2=(x-y)(6x+6y+1)$$

Gọi $d=(x,y)$, khi đó ta được $x=dm;y=dn$ với $m,n\in N^*$ và $(m,n)=1$.

Từ đó suy ra $x-y=d(m-n)$. Đặt $m-n=k$, do $x>y>0$ nên $k=m-n>0$.

Thay $x-y=dk$ vào phương trình $y^2=(x-y)(6x+6y+1)$ ta được

$$(dn)^2=dk.(6dm+6dn+1) \text{ hay } dn^2=k(6dm+6dn+1) \Leftrightarrow dn^2=6dmk+6dnk+k$$

Ta có $(m,n)=1$ nên $(n,m-n)=1$ hay $(n,k)=1$. Lại có $dn^2 \vdots k$ nên suy ra $d \vdots k$.

Mặt khác từ $dn^2=6dmk+6dnk+k$ suy ra $6dmk+6dnk+k$ chia hết cho d nên ta được k chia hết cho d. Như vậy ta suy ra được $k=d$ hay $d=m-n$.

Do đó ta suy ra được $x-y=d^2 \Rightarrow x=d^2+y=d^2+dn$. Suy ra $dm=dn+d^2$

Do $d=k$ nên từ $dn^2=6dmk+6dnk+k$ ta có $n^2=6dm+6dn+1$.

Từ đó ta được $n^2=6(dn+d^2)+6nd+1=6d^2+12nd+1$ hay $n^2-12nd-(6d^2+1)=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n thì giải ra ta được $n=6d+\sqrt{42d^2+1}$.

Từ nghiệm trên ta suy ra được d nhỏ nhất thì n nhỏ nhất, từ đó dẫn đến x và y nhỏ nhất.

+ Khi $d=1$ ta được $n=6+\sqrt{43}$, loại.

+ Khi $d=2$ ta được $n=6.2+\sqrt{42.4+1}=12+13=25$

Từ đó ta được $x=dn+d^2=2.25+2^2=54$ và $y=dn=2.25=50$.

Vậy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là $(x;y)=(54;50)$.

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $4xyz=x+2y+4z+3$.

Lời giải

Do x, y, z là các giá trị nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau

- Với $x=1$ thì từ phương trình đã cho ta có phương trình $4yz=2y+4z+4$

Hay ta được $2yz-y-2z=2 \Leftrightarrow (y-1)(2z-1)=3$.

Từ đó suy ra $y-1$ và $2z-1$ là các ước của 3. Chú ý là y, z nguyên dương nên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y-1=3 \\ 2z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=1 \end{cases}$$

- Với $x \ge 2$ thì phương trình đã cho ta được $2y+4z+3=x(4yz-1)\ge 2(4yz-1)=8yz-2$

Hay ta được $8yz-2y-4z\le 5 \Leftrightarrow (2y-1)(4z-1)\le 6$.

Do y và z nguyên dương nên $4z-1\ge 3$ nên $2y-1\le 2 \Rightarrow 2y\le 3\Rightarrow y=1$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $4xz=x+4z+5 \Leftrightarrow 4xz-x-4z=5 \Leftrightarrow (x-1)(4z-1)=6$

Do đó $x-1$ và $4z-1$ là các ước của 6. Chú ý là $4z-1$ là số lẻ và $4z-1\ge 3$ nên ta được

$$\begin{cases}4z-1=3\\x-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1\\x=3\end{cases}$$

Vậy phương trình có các ngiệm nguyên dương là $(x;y;z)=(1;2;2),(1;4;1),(3;1;1)$.

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz=2(x+y+z)$.

Lời giải

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\le y\le z$.

Khi đó từ phương trình $xyz=2(x+y+z)$ ta được $xyz\le 3.2z\Rightarrow xy\le 6$.

Do x, y nguyên dương nên ta suy ra được $xy\in\{1;2;3;4;5;6\}$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $xy=1$, ta có $x=y=1$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z=-4$, loại.

+ Với $xy=2$, ta có $x=1;y=2$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $2z=2z+6$, loại.

+ Với $xy=3$, ta có $x=1;y=3$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z=8$, nhận.

+ Với $xy=4$, ta có $x=1;y=4$ hoặc $x=y=2$. Thay vao phương trình ban đầu ta được

Khi $x=1;y=4$ thì $z=5$ và khi $x=y=2$ thì $z=4$.

+ Với $xy=5$, ta có $x=1;y=5$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z=4$, loại do không thỏa mãn điều kiện $y\le z$.

+ Với $xy=6$, ta có $x=1;y=6$ hoặc $x=2;y=3$. Thay vao phương trình ban đầu ta được

Khi $x=1;y=6$ thì $2z=7$ (loại) và khi $x=2;y=3$ thì $2z=7$ (loại).

Vậy bộ ba số cần tìm là $(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$.

Cách 2. Do x, y, z nguyên dương nên ta biến đổi tương đương phương trình thành $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{2}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\le x\le y\le z$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2}$ suy ra $x^2\le 6$ nên $x^2\in\{1;4\}\Rightarrow x\in\{1;2\}$

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x=1$, thay vào phương trình $xyz=2(x+y+z)$ ta được

$$2(1+y+z)=yz\Leftrightarrow (y-2)(z-2)=6$$

Chú ý là $y-2\le z-2$ nên ta được $\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-2=2 \\ z-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=5 \end{cases}$

+ Với $x=2$, thay vào phương trình $xyz=2(x+y+z)$ ta được

$$2(2+y+z)=2yz \Leftrightarrow (y-1)(z-1)=3$$

Chú ý là $y-1\le z-1$ nên ta được $\begin{cases} y-1=1 \\ z-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases}$

Vậy bộ ba số cần tìm là $(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$.

Ví dụ 8. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $6x^3-xy(11x+3y)+2y^3=6$.

Lời giải

Biến đổi tương đường phương trình như sau:

$$6x^3-xy(11x+3y)+2y^3=6 \Leftrightarrow 6x^3-12x^2y+x^2y-2xy^2+2y^3=6$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(6x^2+xy-y^2)=6=(x-2y)(2x+y)(3x-y)=6$$

Từ đó ta được $x-2y; 2x+y; 3x-y$ là các ước số của 6.

Mặt khác ta lại thấy $x-2y+2x+y=3x-y$ nên chỉ xẩy ra các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x-2y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x-2y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ x-2y=-3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ x-2y=2 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 5: $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ x-2y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 6: $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ x-2y=2 \\ 2x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(1;1),(-1;-1)$

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$

Lời giải

Cách 1. Biến đổi tương đương ta được $x^3 - y^3 = xy + 8 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 8 + xy$

Từ đó ta được $|x-y|.|x^2+xy+y^2| = |xy+8|$

Dễ thấy $x \neq y$, vì nếu $x = y$ thì phương trình đã cho trở thành $0 = x^2 + 8$, loại.

Do x, y là các số nguyên nên $|x-y| \geq 1$. Từ đó suy ra $|x^2+xy+y^2| \leq |xy+8|$

Hay ta được $x^2+xy+y^2 \leq |xy+8|$. Xét hai trường hợp:

+ Nếu $xy + 8 < 0$. Khi đó $x^2+xy+y^2 \leq |xy+8|$ trở thành

$$x^2+xy+y^2 \leq -xy-8 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq -8$$

Trường hợp này loại

+ Nếu $xy + 8 \geq 0$. Khi đó $x^2+xy+y^2 \leq |xy+8|$ trở thành

$$x^2+xy+y^2 \leq xy+8 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 8$$

Từ đó ta suy ra $x^2;\ y^2 \in \{0;1;4\}$

- Nếu $x = 0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $y^3 = -8 \Rightarrow y = -2$
- Nếu $y = 0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
- Nếu x và y khác 0, khi đó thì $x^2;\ y^2 \in \{1;4\}$.

Do $x \neq y$ nên chỉ có các khả năng là $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Từ đó ta thấy trong hai số x và y có một số chẵn và một số lẻ. Khi đó vế trái của phương trình đã cho lẻ còn vế phải của phương trình đã cho chẵn, do đó các khả năng trênkhông xảy ra.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y) = (0;-2),(2;0)$.

Cách 2. Biến đổi tương đương phưng trình ta được

$$x^3 - y^3 - xy = 8 \Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 27xy = 216 \Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 215$$

Hay ta được $(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 - 3.3x.(-3y)(-1) = 215$. Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c).\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

Với $a = 3x; b = -3y, c = -1$, ta biến đổi phương trình trên thành

$$(3x-3y-1).\left[\frac{(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2}{2}\right] = 215$$

Đặt $A = \frac{(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2}{2}$ nên ta được $(3x-3y-1).A = 215$

Dễ thấy $A > 0$ nên A và $3x-3y-1$ là ước tự nhiên của 215. Phân tích ra thừa số nguyên tố thì 215 có bốn ước tự nhiên là 1; 5; 43; 215.

Do $3x-3y-1$ chi cho 3 dư 2 nên $3x-3y-1 \in \{5; 215\}$. Từ đó ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases} 3x-3y-1=5 \\ A=43 \end{cases}$.

Khi đó từ $3x-3y-1=5$ $x-y=2$. Thay $y=x-2$ vào $A=43$ ta được

$$\left[3x+3(x-2)\right]^2 + \left[1-3(x-2)\right]^2 + (3x+1)^2 = 86$$

Rút gọn ta được $x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0;\ x=2$. Từ đó tìm được các nghiệm là $(0;-2),(2;0)$

- Trường hợp 2: Với $\begin{cases} 3x-3y-1=215 \\ A=1 \end{cases}$

Khi đó ta được $(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2 = 2$

Nhận thấy tổng của ba số chính phương bằng 2 nên có một số bằng 0, hai số bằng số 1. Số bằng 0 không thể là $1-3y$ hoặc $1+3x$, do đó ta có $3x+3y=0$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} 3x+3y=0 \\ (1-3y)^2=1 \\ (3x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, nghiệm bên không thỏa mãn $3x-3y-1=215$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-2),(2;0)$.

Cách 3. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^3 - y^3 = xy + 8 \Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8$$

Đặt $a = x-y; b = xy$, khi đó từ phương trình trên ta được

$$a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a-1)$$

Từ đó suy ra $(a^3-8) \vdots (3a-1)$ nên $27(a^3-8) \vdots (3a-1)$ hay $(27a^3-1-215) \vdots (3a-1)$

Do $(27a^3-1) \vdots (3a-1)$ nên ta được $215 \vdots (3a-1)$ hay $3a-1$ là ước của 215

Do đó ta được $3a-1 \in \{\pm1; \pm5; \pm43; \pm215\}$

Do $3a-1$ chia cho 3 dư 2 nên $3a-1 \in \{-1; 5; -43; 215\}$. Từ đó ta có bảng sau

$3a-1$	-1	5	-43	215
a	0	2	-14	72

$b=\dfrac{a^3-8}{1-3a}$	-8	0	-64	-1736

Chú ý rằng $(x-y)^2+4xy\ge 0$ nên $a^2+4b\ge 0$, do đó trong bốn trường hợp trên chỉ có $a=2;b=0$ thỏa mãn. Do đó ta được $x-y=2;\ xy=0$

Từ đó ta có các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-2),(2;0)$.

Ví dụ 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3(x^2-xy+y^2)=7(x+y)$

Lời giải

Cách 1. Từ phương trình ta được $7(x+y)\vdots 3$, mà $(3,7)=1$ nên suy ra $x+y\vdots 3$.

Đặt $x+y=3m, m\in Z$, khi đó phương trình trở thành $x^2+y^2-xy=7m$.

Từ đó suy ra $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=(3m)^2-7m$ hay $3xy=9m^2-7m$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $xy\le\dfrac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta được $9m^2-7m\le\dfrac{3}{4}(x+y)^2$

Hay ta được $3.9m^2\ge 4(9m^2-7m)\Leftrightarrow m(28-9m)\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{28}{9}$.

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=\{0;1;2;3\}$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=0\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=0\Leftrightarrow 3xy=0\Leftrightarrow x=y=0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=3$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=7\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=7\Leftrightarrow 3xy=2$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=2$ suy ra $x+y=6$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=14\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=7\Leftrightarrow 3xy=22$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=3$ suy ra $x+y=9$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=21\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=21\Leftrightarrow 3xy=60\Leftrightarrow xy=20$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}x+y=9\\ xy=20\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4;y=5\\ x=5;y=4\end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(0;0),(4;5),(5;4)$

Cách 2. Từ phương trình ta được $7(x+y)\vdots 3$, mà $(3,7)=1$ nên suy ra $x+y\vdots 3$.

Đặt $x+y=3m, m\in Z$, khi đó phương trình trở thành $x^2+y^2-xy=7m$.

Từ đó ta có $\begin{cases} x+y=3m \\ xy=\dfrac{9m^2-7m}{3} \end{cases}$.

Theo định lí Viet thì x và y là nghiệm của phương trình $3X^2-9mX+\left(9m^2-7m\right)=0$

Ta có $\Delta=-27m^2+84m$. Để phương tình có nghiệm thì $\Delta=-27m^2+84m\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \dfrac{28}{9}$

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=\{0;1;2;3\}$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=0 \Leftrightarrow 3xy=0 \Leftrightarrow x=y=0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=3$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=7 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=7 \Leftrightarrow 3xy=2$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=2$ suy ra $x+y=6$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=14 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=7 \Leftrightarrow 3xy=22$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=3$ suy ra $x+y=9$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=21 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=21 \Leftrightarrow 3xy=60 \Leftrightarrow xy=20$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=5 \\ x=5; y=4 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(0;0),(4;5),(5;4)$

Ví dụ 11. Tìm các số nguyên dương m để phương trình $x^2-mxy+y^2+1=0$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Trong tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình, giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm thỏa mãn x_0+y_0 nhỏ nhất.

Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0\leq y_0$.

Xét phương trình bậc hai có ẩn y là $y^2-mx_0y+x_0^2+1=0$ (*).

La có y_0 là một nghiệm của phương trình (*). Ta gọi nghiệm còn lại là y_1.

Khi đó theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} y_0+y_1=mx_0 \\ y_0.y_1=x_0^2+1 \end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy y_1 có giá trị nguyên và từ cách chọn $\left(x_0;y_0\right)$ ta suy ra được $y_0 \le y_1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x_0 = y_0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $m = 2 + \frac{1}{x_0^2}$. Nên để m và x_0 có giá trị nguyên thì $x_0 = 1$ và $m = 3$.

Với $m = 3$ ta thấy $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

- Trường hợp 2: Nếu $y_0 = y_1$ thì từ $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ hay ta được $\left(y_0 - x_0\right)\left(y_0 + x_0\right) = 1$.

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases} y_0 - x_0 = 1 \\ y_0 + x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$. Trường hợp này loại vì $\left(x_0;y_0\right)$ nguyên dương.

- Trường hợp 3: Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ khi đó ta được $y_0 \ge x_0 + 1;\ y_1 \ge x_0 + 2$.

Kết hợp với $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ ta được $x_0^2 + 1 \ge x_0^2 + 3x_0 + 2 \Rightarrow 3x_0 + 1 \le 0$, điều này vô lí vì $x_0 > 0$.

Như vậy để phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương thì $m = 3$ và khi đó phương trình có nghiệm nguyên dương là $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Ví dụ 12. Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $2xy - 1 = z\left(x-1\right)\left(y-1\right)$.

Lời giải

Cách 1. Với các số nguyên dương x, y, z thì ta có $2xy - 1$ là số lẻ, do đó $z\left(x-1\right)\left(y-1\right)$ cũng là số lẻ. Từ đó ta được x, y là số chẵn và z là số lẻ. Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$.

Đặt $a = x - 1; b = y - 1$ nên a, b là các số nguyên lẻ và $a \ge b$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$2\left(a+1\right)\left(b+1\right) - 1 = zab \Leftrightarrow 2\left(ab + a + b + 1\right) - 1 = zab \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} = z$$

Do đó $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab}$ là số tự nhiên khác 0. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a = b$, khi đó $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{4a+1}{a^2}$ là số tự nhiên khác 0 hay $\frac{a\left(4a+1\right)}{a^2} \in N^* \Rightarrow 4 + \frac{1}{a} \in N^*$

Từ đó ta được $a = b = 1$. Suy ra $y = z = 2$. Thay vào phương trình đã cho ta được $z = 7$.

Thử vào phương trình ta được $\left(x;y;z\right) = \left(2;2;7\right)$ thỏa mãn.

- Nếu $a > b \ge 1$, khi đó ta xét các khả năng sau

+ Với $b \ge 4$ thì $a \ge 5$ khi đó $0 < \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab} \le \frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$ nên $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab}$ không là số tự nhiên khác. Do đó khả nằng này loại. Từ đó suy ra $b < 4$, mà b là số lẻ nên $b = 3$ hoặc $b = 1$.

+ Với $b = 1$, khi đó từ $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{ab}$ là số tự nhiên khác 0 ta được $\frac{3}{a} \in N^*$ và $a > 1$ ta được $a = 3$.

Từ đó suy ra $x = 4; y = 2$, thay vào phương trình đã cho ta được $z = 5$

Thử vào phương trình ta được $(x;y;z)=(4;2;5)$ thỏa mãn.

+ Với $b=3$, khi đó từ $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}$ là số tự nhiên ta được $\frac{2}{3}+\frac{7}{3a}\in N^*$ và $a>3$ ta được $a=7$.

Từ đó suy ra $x=8; y=4$, thay vào phương trình đã cho ta được $z=3$

Thử vào phương trình ta được $(x;y;z)=(8;4;3)$ thỏa mãn.

Xét đến vai trò của x và y ta được các nghiệm của phương trình là

$$(x;y;z)=(2;2;7),(2;4;5),(4;2;5),(4;8;3),(8;4;3)$$

Cách 2. Với các số nguyên dương x, y, z thì ta có $2xy-1$ là số lẻ, do đó $z(x-1)(y-1)$ cũng là số lẻ. Từ đó ta được x, y là số chẵn và z là số lẻ. Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x\ge y\ge 2$.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2xy-1=z(x-1)(y-1)\Leftrightarrow\left[(z-2)x-z\right]\left[(z-2)y-z\right]=z+2$$

Nếu $z=1$, khi đó từ phương trình trên ta được $(x+1)(y+1)=3$. Điều này mâu thuẫn với $x\ge y\ge 2$. Do đó ta được $z\ge 3$. Khi đó ta lại có

$(z-2)x-z\ge(z-2)y-z\ge 2(z-2)-z=z-4>0$

Kết hợp với phương trình trên ta được $z+2\ge(z-4)^2\Leftrightarrow(z-2)(z-7)\le 0\Leftrightarrow 2\le z\le 7$.

Từ đó ta được $3\le z\le 7$, mà z là số lẻ nên ta xét các trường hợp sau

- Nếu $z=3$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(x-3)(y-3)=5$. Kết hợp với $x\ge y\ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases}x-3=5\\y-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8\\y=4\end{cases}$

- Nếu $z=5$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(3x-5)(3y-5)=7$. Kết hợp với $x\ge y\ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases}3x-5=7\\3y-5=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

- Nếu $z=7$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(5x-7)(5y-7)=9$. Kết hợp với $x\ge y\ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases}5x-7=9\\3y-7=1\end{cases}$(vô nghiệm) hoặc $\begin{cases}5x-7=3\\3y-7=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

Xét đến vai trò của x và y ta được các nghiệm của phương trình là

$$(x;y;z)=(2;2;7),(2;4;5),(4;2;5),(4;8;3),(8;4;3)$$

Ví dụ 13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x^2-y^2)^2=10y+9$.

Lời giải

Ta thấy $10y+9\ge 0\Leftrightarrow y\ge-\frac{9}{10}$, do y nguyên nên ta được $y\ge 0$.

Chú ý là khi thay x bằng $-x$ thìa phương trình dã cho không đổi, do đó ta có thể giả sử $x \ge 0$

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $y = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $x^4 = 9$, trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $x = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $y^4 = 10y + 9 \Leftrightarrow y\left(y^3 - 10\right) = 9$. Suy ra 9 chia hết cho y, kết hợp với $y > 0$ ta được $y \in \{1;3;9\}$. Thay lần lượt các giá trị đó vào $y\left(y^3 - 10\right) = 9$ ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

+ Nếu $x \ge 1$ và $y \ge 1$, khi đó ta được $x + y \ge 2$.

Phương trình đã cho được viết lại thành $\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2 = \dfrac{10y+9}{x+y}$

Do $x + y \ge 2$ nên ta được $\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2 \ge 2\left(x-y\right)^2$.

Do $x \ge 1$ nên ta được $10x \ge 10 > 9$, do đó suy ra $\dfrac{10y+9}{x+y} < \dfrac{10y+10x}{x+y} = 10$.

Từ các kết quả trên ta suy ra được $2\left(x-y\right)^2 < 10 \Rightarrow \left(x-y\right)^2 < 5$

Ta lại có $\left(x-y\right)^2$ là ước của $10y+9$ nên $\left(x-y\right)^2$ là số lẻ.

Từ đó ta được $\left(x-y\right)^2 = 1$, thay vào phương trình đã cho ta được $\left(x+y\right)^2 = 10y+9$.

Cũng từ $\left(x-y\right)^2 = 1$ ta được $x - y = 1$ hoặc $x - y = -1$

- Với $x - y = 1$ ta được $x = y + 1$ thay vào phương trình $\left(x+y\right)^2 = 10y + 9$ ta được

$$\left(2y+1\right)^2 = 10y + 9 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 4 = 0$$

Phương trình trên không có nghiệm nguyên.

- Với $x - y = -1$ ta được $x = y - 1$ thay vào phương trình $\left(x+y\right)^2 = 10y + 9$ ta được

$$\left(2y-1\right)^2 = 10y + 9 \Leftrightarrow 2y^2 - 7y - 4 = 0$$

Giải phương trình trên ta được nghiệm nguyên là $y = 4$, từ đó ta được $x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right) = \left(3;4\right), \left(-3;4\right)$.

Ví dụ 14. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2 + x\right)^2 + 3x^2 + 4x + 1 = \left(2y+1\right)^2$$

- Với $x = -1$, thay vào phương trình ta được $y = -1$.

- Xét $x \neq -1$, ta sẽ chứng minh $\left(2x^2+x\right)^2 < \left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2 + 4x + 1 < \left(2x^2+x+2\right)^2$

Thật vậy, dễ thấy $3x^2+4x+1 = (3x+1)(x+1)$ do đó

+ Khi $x > -\frac{1}{3}$ thì ta được $(3x+1)(x+1) > 0$

+ Khi $x < -1$ thì $(3x+1)(x+1) > 0$

Từ đó ta được $\left(2x^2+x\right)^2 < \left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}&\left(2x^2+x+2\right)^2 - \left[\left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1\right]\\ &= \left(2x^2+x\right)^2 + 4\left(2x^2+x\right) + 4 - \left(2x^2+x\right) - 3x^2 - 4x - 1 = 5x^2 + 3 > 0\end{aligned}$$

Như vậy ta có $\left(2x^2+x\right)^2 < \left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1 < \left(2x^2+x+2\right)^2$

Do $\left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1$ là số chính phương nên ta suy ra được

$$\begin{aligned}&\left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1 = \left(2x^2+x+1\right)^2\\ &\Leftrightarrow \left(2x^2+x\right)^2 + 3x^2+4x+1 = \left(2x^2+x\right)^2 + 2\left(2x^2+x\right) + 1\\ &\Leftrightarrow 3x^2+4x+1 = 2\left(2x^2+x\right)+1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

+ Với $x = 0$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0; y = -1$

+ Với $x = 2$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y^2 + y = 30 \Rightarrow y = 5; y = -6$

Thử lại ta được các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y) = (0;0),(0;-1),(2;5),(2;-6),(-1;0),(-1;-1)$$

Ví dụ 15. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện $\left(x^2-9y^2\right)^2 = 33y+16$.

Lời giải

Do y là số nguyên dương nên $33y+16>0$. Khi đó ta được

$$\left(x^2-9y^2\right)^2 = 33y+16 \Leftrightarrow x^2 - (3y)^2 = \pm\sqrt{33y+16} \Leftrightarrow x^2 = (3y)^2 \pm \sqrt{33y+16}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Xét $y = 1$, khi đó ta được $\left[\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 4 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$. Do x là số nguyên dương nên suy ra $x = 4$.

- Xét $y \geq 2$. Khi đó dễ thấy $6y+1 > 6y-1 > \sqrt{33y+16}$

Thật vậy, ta có $6y-1>0$ khi đó

$$(6y-1)^2 > 33y+16 \Leftrightarrow 36y^2-12y+1 > 33y+16 \Leftrightarrow 9y(4y-5)-15>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $y \ge 2$.

Từ đó ta có $(3y)^2 - \sqrt{33y+16} > (3y)^2 - (6y-1) = (3y-1)^2$

Do đó $(3y-1)^2 < (3y)^2 - \sqrt{33y+16} < (3y)^2$ và $(3y)^2 + \sqrt{33y+16} < (3y)^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2$.

Suy ra ta được $(3y)^2 < (3y)^2 + \sqrt{33y+16} < (3y+1)^2$.

Như vậy $(3y)^2 \pm \sqrt{33y+16}$ bị kép giữa hai số chính phương liên tiếp nên $(3y)^2 \pm \sqrt{33y+16}$ không thể là số chính phương. Do đó phương trình $x^2 = (3y)^2 \pm \sqrt{33y+16}$ không có nghiệm nguyên.

Do đó khi $y \ge 2$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Vậy phương trình có một cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(x;y) = (4;1)$.

Nhận xét: *Ngoài cách giải như trên ta có thể giải bài toán theo các cách sau:*

Cách 1*. Xác định giới hạn giá trị của x rồi xét từng giá trị để tìm y*

Dễ thấy $x - 3y \ne 0$ *do đó* $(x-3y)^2 \ge 1$

Từ đó suy ra $(x^2-9y^2)^2 = (x-3y)^2(x+3y)^2 \ge (x+3y)^2$

Lại thấy với $x \ge 6$ *thì* $(x+3y)^2 \ge (6+3y)^2 = 9y^2+36y+36 > 33y+16$

Do đó với $x \ge 6$ *thì* $(x^2-9y^2)^2 > 33y+16$. *Đến đây ta suy ra được* $x < 6$ *nên* $x = 1;2;3;4;5$.

Xét từng giá trị của x để tìm y tương ứng.

Cách 2. *Xác định giới hạn giá trị của y rồi xét từng giá trị để tìm x.*

Cũng từ $(x^2-9y^2)^2 = (x-3y)^2(x+3y)^2 \ge (x+3y)^2 \ge (1+3y)^2 > 9y^2+6y$

Suy ra ta được $33y+16 > 9y^2+6y \Leftrightarrow 9y^2-27y-16<0 \Leftrightarrow (y+1)(y-4)<0 \Rightarrow y<4$

Từ đó ta được $y = 1;2;3$. *Đến đây xét các giá trị của y để kiểm tra* $33y+16$ *có phải là số chính phương không.*

Ví dụ 16. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình: $x^4 + y^3 = xy^3 + 1$.

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^4+y^3 = xy^3+1 \Leftrightarrow x^4 - 1 + (y^3 - xy^3) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x+1) + y^3(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x+1-y^3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3+x^2+x+1-y^3=0 \end{array}\right.$$

- Với $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, khi đó thay vào phương trình ban đầu ta được $1+y^3=y^3+1$, phương trình này có nghiệm với mọi y nguyên. Do đó phương trình có các nghiệm $(x;y)=(1;t)$ với $t \in Z$.

- Với $x^3+x^2+x+1-y^3=0 \Leftrightarrow x^3+x^2+x+1=y^3$.

Ta có $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ nên từ phương trình trên ta suy ra được $x^3<y^3$.

Lại có với mọi x nguyên ta luôn có $x(x+1)\geq 0$. Do đó ta được

$$x^3+x^2+x+1\leq x^3+x^2+x+1+2x(x+1)=(x+1)^3$$

Từ đó suy ra $y^3\leq (x+1)^3$. Kết hợp lại ta được $x^3<y^3\leq (x+1)^3$ nên ta suy ra $y^3=(x+1)^3$.

Do đó ta được $x(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

+ Khi $x=0$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y=1$.

+ Khi $x=-1$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y=0$.

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình là $(x;y)=(0;1), (-1;0), (1;t)$ với $t \in Z$.

Ví dụ 17. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4+y^2+13y+1\leq (y-2)x^2+8xy$

Lời giải

Cách 1. Biết đổi tương đương bất phương trình trên ta được

$$x^4+y^2+13y+1\leq (y-2)x^2+8xy \Leftrightarrow (x^4+2x^2+1)-x^2y+y^2+13y-8xy\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4+2x^2+1)-2y(x^2+1)+y^2+x^2y-8xy+13y\leq 0 \Leftrightarrow (x^2-y+1)^2+y(x^2-8x+13)\leq 0$$

Dễ thấy $(x^2-y+1)^2\geq 0$ nên từ bất phương trình trên ta được $y(x^2-8x+13)\leq 0$.

Mà ta có y là số nguyên dương nên từ $y(x^2-8x+13)\leq 0$ ta được $x^2-8x+13\leq 0$.

Ta có $x^2-8x+13\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5)\leq 0 \Leftrightarrow 3\leq x\leq 5$.

Mà ta lại có x là số nguyên dương nên $x \in \{3;4;5\}$, đến đây ta xét các trường hợp cụ thể

- Với $x=3$, thay vào $(x^2-y+1)^2+y(x^2-8x+13)\leq 0$ ta được $(10-y)^2\leq 0 \Rightarrow y=10$.

- Với $x=4$, thay vào $(x^2-y+1)^2+y(x^2-8x+13)\leq 0$ ta được

$$(17-y)^2-y\leq 0 \Leftrightarrow y^2-35y+289\leq 0 \Leftrightarrow \left(y-\frac{35}{2}\right)^2\leq \frac{69}{4} \Leftrightarrow \frac{35-\sqrt{69}}{2}\leq y\leq \frac{35+\sqrt{69}}{2}$$

Do y là số nguyên dương nên suy ra $y \in \{14;15;16;17;17;18;19;20;21\}$.

- Với $x=5$, thay vào $\left(x^2-y+1\right)^2+y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$ ta được $\left(26-y\right)^2\le 0\Rightarrow y=26$.

Vậy các cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn bất phương trình là

$$\left(3;10\right),\left(4;14\right),\left(4;15\right),\left(4;16\right),\left(4;17\right),\left(4;18\right),\left(4;19\right),\left(4;20\right),\left(4;21\right),\left(5;26\right)$$

Cách 2. Biến đổi tương đương bất phương trình trên ta được

$$x^4+y^2+13y+1\le\left(y-2\right)x^2+8xy\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2+y^2+13y\le x^2y+8xy$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta được $\left(x^2+1\right)^2+y^2\ge 2y\left(x^2+1\right)$

Kết hợp với $\left(x^2+1\right)^2+y^2+13y\ge x^2y+8xy$ ta được $2y\left(x^2+1\right)+13y\le x^2y+8xy$

Hay ta được $yx^2+15y-8xy\le 0\Leftrightarrow y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$

Do y là số nguyên dương nên ta có $x^2-8x+13\le 0\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(x-5\right)\le 0\Leftrightarrow 3\le x\le 5$.

Mà ta lại có x là số nguyên dương nên $x\in\left\{3;4;5\right\}$, đến đây ta xét các trường hợp cụ thể như trên ta được các giá trị y tương ứng.

Ví dụ 18. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^5-y^5-xy=32$.

Lời giải

Từ phương trình $x^5-y^5-xy=32$ ta suy ra được x và y đều là số chẵn.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^5-y^5-xy=32\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)=32+xy$$

Lại có $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=\left(x+y\right)\left(x^3+y^3\right)+x^2y^2=\left(x+y\right)^2\left(x^2-xy+y^2\right)+x^2y^2\ge 0$

Do đó từ $\left(x-y\right)\left(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)=32+xy$ ta suy ra được

$$\left|x-y\right|\left(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)=\left|32+xy\right|$$

Dễ thấy nếu $x=y$ thì từ phương trình trên ta được $32+x^2=0$ vô nghiệm. Do đó suy ra $x\ne y$.

Từ đó suy ra $\left|x-y\right|\ge 1$, nên từ phương trình trên ta được $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le\left|32+xy\right|$.

Nếu $32+xy<0$ thì từ bất đẳng thức trên ta được $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le -32-xy$

Hay ta được $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x+y\right)^2+\left(x^2y^2+xy+32\right)\le 0$, tuy nhiên bất đẳng thức này không đúng.

Do vậy ta suy ra được $32+xy\ge 0$. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra được

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le 32+xy$$

Hay ta được $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x+y\right)^2+\left(x^2y^2-xy\right)\le 32$.

Do $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x+y\right)^2\ge 0$ nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra được $xy\left(xy-1\right)\le 32$.

Từ đây ta suy ra được $-6 < xy < 7$. Mà x và y là các số chẵn khác nhau nên ta được $xy = 0$ hoặc $xy = -4$.

+ Với $xy = 0$, khi đó ta suy ra được $x = 0$ hoặc $y = 0$. Đến đây ta tìm được các nghiệm của phương trình là $(x; y) = (0; -2)$ hoặc $(x; y) = (2; 0)$

+ Với $xy = -2$, khi đó ta suy ra được $x = 2; y = -2$ hoặc $x = -2; y = 2$. Thay vào phương trình đã cho ta thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x; y) = (0; -2), (2; 0)$.

Ví dụ 19. Tìm sáu số nguyên dương sao cho tổng của sáu số đó bằng tích của chúng.

Lời giải

Gọi các số nguyên dương cần tìm là a, b, c, d, e, g.

Theo bài ra ta có $a + b + c + d + e + g = abcdeg$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c \le d \le e \le g$.

Khi đó từ $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $abcdeg = a + b + c + d + e + g = 6g$

Suy ra $abcde \le 6$. Do a, b, c, d, e, g nguyên dương nên $abcde \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Với $abcde = 1$, ta có $a = b = c = d = e = 1$, thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $5 + g = g$, phương trình không có g thỏa mãn.
- Với $abcde = 2$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 2$, thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $6 + g = 2g \Rightarrow g = 6$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.
- Với $abcde = 3$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 3$, thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $7 + g = 3g \Rightarrow 2g = 7$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.
- Với $abcde = 4$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 4$ hoặc $a = b = c = 1; d = e = 2$.

+ Khi $a = b = c = d = 1; e = 4$ thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $8 + g = 4g \Rightarrow 3g = 8$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

+ Khi $a = b = c = 1; d = e = 2$ thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $7 + g = 4g \Rightarrow 3g = 7$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

- Với $abcde = 5$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 5$, thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $9 + g = 5g \Rightarrow 4g = 9$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.
- Với $abcde = 6$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 6$ hoặc $a = b = c = 1; d = 2; e = 3$.

+ Khi $a = b = c = d = 1; e = 6$ thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $10 + g = 6g \Rightarrow g = 2$, loại do không thỏa mãn $g \ge e$.

+ Khi $a = b = c = 1; d = 2; e = 3$ thay vào $a + b + c + d + e + g = abcdeg$ ta được $5g = 8$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

Vậy các số nguyên dương cần tìm là 1; 1; 1; 1; 2; 6.

2. Phương trình nghiệm nguyên dạng phân thức.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{xy}{x+y}=\frac{2003}{2004}$.

Lời giải

Cách 1. Từ phương trình $\frac{xy}{x+y}=\frac{2003}{2004}$ ta suy ra được x và y khác 0.

Do đó ta được $\frac{x+y}{xy}=\frac{2004}{2003}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{2003}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\le y$, khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x=1$, khi đó phương trình trở thành $1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{2003}\Rightarrow y=2003$
- Trường hợp 2: Nếu $x\ge 2$, khi đó ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Do đó $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1+\frac{1}{2003}$

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

- Trường hợp 3: Nếu $x\le -1$, khi đó ta có $\frac{1}{x}<0$ nên từ phương trình ta suy ra được $\frac{1}{y}>0$.

Do đó $y>0$ nên lại suy ra được $\frac{1}{y}\le 1$. Từ đó ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1$

Do đó $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1+\frac{1}{2003}$

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(1;2003),(2003;1)$.

Cách 2. Dễ thấy $x+y\ne 0$, khi đó

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{2003}{2004}\Leftrightarrow 2004x=2003(x+y)\Leftrightarrow 2004x-2003x-2003y=0$$

$$\Leftrightarrow 2004^2xy-2004.2003x-2004.2003y+2003^2=2003^2$$

$$\Leftrightarrow(2004x-2003)(2004y-2003)=2003^2$$

- Nếu $x=y$, khi đó từ phương trình ban đầu ta được $x=y=\frac{2003}{1002}$, loại.
- Nếu $x>y$, khi đó $2004x-2003>2004y-2003$ nên ta được $2004x-2003=2003^2$ hoặc $2004x-2003=-1$

Với $2004x-2003=-1$ suy ra x không nhận giá trị nguyên.

Với $2004x-2003=2003^2$ ta được $x=2003$, suy ra $y=1$

- Nếu $x<y$, hoàn toàn tương tự ta được $x=1;y=2003$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(1;2003),(2003;1)$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{7}$

Lời giải

Từ phương trình ta được $x\neq 0; y\neq 0$, khi đó ta được $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow 7\left(x^2+y^2\right)=x^2y^2$

Do đó từ phương trình trên ta suy ra được x^2y^2 chia hết cho 7, do đó ta suy ra được x và y cùng chia hết cho 7. Chú ý là x và y là các số nguyên khác 0 nên ta được $x^2\geq 49; y^2\geq 49$

Suy ra $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\leq\frac{1}{49}+\frac{1}{49}=\frac{2}{49}<\frac{1}{7}$. Do đó phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên dương x, y, z khác nhau từng đôi một để biểu thức sau là một số nguyên dương:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$$

Lời giải

Giả sử $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=m$ với m là một số nguyên dương.

Từ đó ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=m\Leftrightarrow x+y+z+xy+yz+zx=mxyz$

- Xét x là số chẵn, khi đó từ phương trình trên ta suy ra $y+z+yz$ là số chẵn.

Do đó $yz+y+z+1$ là số lẻ hay $\left(y+1\right)\left(z+1\right)$ là số lẻ. Suy ra $y+1$ và $z+1$ cùng là số lẻ nên y và z cùng là số chẵn.

Hoàn toàn tương tự ta được nếu y là số chẵn thì x và z cùng là số chẵn, nếu z là số chẵn thì x và y cùng là số chẵn.

- Xét x là số lẻ, khi đó theo như trên thì y không thể là số chẵn và do đó z không thể là số chẵn.

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy x, y, z có cùng tính chẵn lẻ.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x<y<z$, khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x\geq 3$, khi đó do cùng tính chẵn lẻ nên ta được $y\geq 5; z\geq 7$.

Khi đó ta có $m\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{21}<1$, trái với yêu cầu $m\geq 1$

+ Với $x=2$, khi đó ta có $y\geq 4; z\geq 6$, Do đó ta được $m\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{7}{6}$

Do m là số nguyên dương nên ta được $m=1$. Khi đó ta được

$$2+y+z+2y+2z+yz=2yz\Leftrightarrow\left(y-3\right)\left(x-3\right)=11$$

Chú ý rằng $y<z$ nên từ phương trình trên ta được $y=4; z=14$.

+ Với $x=1$, khi đó ta có $y\ge 3; z\ge 5$, Do đó ta được $m\le 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{32}{15}$

Do m là số nguyên dương và $m>1$ nên ta được $m=2$. Khi đó ta được

$$1+y+z+y+z+yz=2yz \Leftrightarrow (y-2)(x-2)=5$$

Chú ý rằng $y<z$ nên từ phương trình trên ta được $y=3; z=7$.

Vậy các bộ số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(x;y;z)=(1;3;7),(2;4;14)$ và các hoán vị.

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$.

Lời giải

Giả sử các số nguyên x,y thỏa mãn $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$. Khi đó do $x^2+y^2>0$ nên ta được $x+2y>0$.

Ta có $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow 20(x+2y)=7(x^2+y^2)$.

Mà ta lại có $(7,20)=1$ nên từ $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$ ta được $\begin{cases}x+2y=7k\\ x^2+y^2=20k\end{cases}, k\in N^*$.

Ta có $5(x^2+y^2)=x^2+4xy+y^2+4x^2-4xy+y^2=(x+2y)^2+(2x-y)^2$

Suy ra $5.20k=(7k)^2+(2x-y)^2\Leftrightarrow (2x-y)^2=k(100-49k)$.

Lại từ $5(x^2+y^2)=(x+2y)^2+(2x-y)^2$ ta được $(x+2y)\le 5(x^2+y^2)=\frac{5.20.(x+2y)}{7}$

Do đó ta được $0<x+2y<15$. Mà ta lại có $x+2y=7k$ nên suy ra $k=1$ hoặc $k=2$.

- Với $k=1$, khi đó từ $(2x-y)^2=k(100-49k)$ ta được $(2x-y)^2=51$, phương trình không có nghiệm nguyên.
- Với $k=2$, khi đó từ $(2x-y)^2=k(100-49k)$ ta được $(2x-y)^2=4$

Từ đó ta được $2x-y=2$ hoặc $2x-y=-2$.

Kết hợp với $x+2y=14$ ta được $x=2; y=6$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(2;6)$.

Cách khác. Ta có thể dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá

$$(x+2y)^2\le(1+2^2)(x^2+y^2)=5(x^2+y^2)$$

Từ đó suy ra được $0<x+2y<15$.

Từ đó ta đi giải các hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=7\\ x^2+y^2=20\end{cases}$ và $\begin{cases}x+2y=14\\ x^2+y^2=40\end{cases}$

3. Phương trình nghiệm nguyên có chứa căn.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 1$

$$y=\sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}$$
$$=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

Xét hai trương hợp

+ Với $x=1$ thì ta thu được $y=2$.

+ Với $x\ge 2$ thì ta thu được $y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$

Do đó $y^2=4(x-1)$. Do $x\ge 2$ nên có thể đặt $x-1=t^2$ với t nguyên dương.

Ta có $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=2t\end{cases}\left(t\in Z^+\right)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(1;\ 2),\left(t^2+1;2t\right)$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Ví dụ 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=y$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 0, y\ge 0$

Bình phương hai vế của phương trình rồi chuyển vế ta được $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=y^2-x$

Đặt $y^2-x=k\,(k\in N)$ thì ta được phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=k$

Bình phương hai vế của phương trình rồi chuyển vế ta được $\sqrt{x+\sqrt{x}}=k^2-x$

Đặt $k^2-x=m\,(m\in N)$ thì ta được phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $x+\sqrt{x}=m^2$

Ta biết rằng với x nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do $x+\sqrt{x}=m^2\,(m\in N)$ nên $\sqrt{x}$ không là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x}$ là số tự nhiên.

Ta có $x+\sqrt{x}=m^2\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=m^2$

Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x}+1$ có tích là số chính phương nên mỗi số phải là một số chính phương. Do đó số nhỏ bằng 0 hay ta được $\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0$. Từ đó suy ra $x=0; y=0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;0)$.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980}$ (1)

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $0 \le x; y \le 1980$. Khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{x} = \sqrt{1980} - \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1980 + y - 2\sqrt{1980y} \Leftrightarrow x = 1980 + y - 12\sqrt{55y}$$

Do x, y là các số nguyên nên $12\sqrt{55y}$ cũng phải là số nguyên. Ta biết rằng với y nguyên thì $\sqrt{55y}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{55y}$ là số nguyên, tức là $55y$ là số chính phương

Từ đó ta đặt $55y = k^2 \Leftrightarrow 5.11.y = k^2 \left(k \in N\right)$. Do 5 và 11 là các số nguyên tố nên từ $5.11.y = k^2$ ta suy ra được $y = 11.5.a^2 = 55a^2 \left(a \in N\right)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $x = 55b^2 \left(b \in N\right)$

Thay vào phương trình ba đầu ta được $a\sqrt{55} + b\sqrt{55} = 6\sqrt{55} \Leftrightarrow a + b = 6$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $y \le x$ thì $a \le b$. Ta có các trường hợp sau

a	b	$x = 55a^2$	$y = 55b^2$
0	6	0	1980
1	5	55	1375
2	4	220	880
3	3	495	495

Vậy phương trình đã cho các các nghiệm là

$$\left(x; y\right) = \left(0; 1980\right), \left(1980; 0\right), \left(55; 1375\right), \left(1375; 55\right), \left(220; 880\right), \left(880; 220\right), \left(495; 495\right)$$

Ví dụ 5. Giải phương trình nghiện nguyên: $\left(x + y\sqrt{5}\right)^z = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$.

Lời giải

- Nhận thấy với $z = 0$ phương trình trên không có nghiệm.
- Nếu z là một số nguyên dương thì tồn tại các số nguyên dương a, b để $\left(x + y\sqrt{5}\right)^z = a + b\sqrt{5}$

Khi đó ta được $a + b\sqrt{5} = \sqrt{1 + \sqrt{5}} \Leftrightarrow a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5}$.

Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Nên ta được $a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 5b^2 = 1 \\ 2ab\sqrt{5} = \sqrt{5} \end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

- Nếu z là một số nguyên âm thì tồn tại các số nguyên dương a, b để

$$\left(x + y\sqrt{5}\right)^z = \frac{1}{\left(x + y\sqrt{5}\right)^{-z}} = \frac{1}{a + b\sqrt{5}}$$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\sqrt{1+\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left(a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=1\Leftrightarrow 4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1.$$

Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Nên ta được $4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1\Rightarrow\begin{cases}4a^2+20b^2=-1\\8ab\sqrt{5}=\sqrt{5}\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các cặp số nguyên p, q thỏa mãn điều kiện $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$

Lời giải

Điều kiện xác định của đẳng thức là $p-2\ge 0; q-3\ge 0; pq-2p-q+1\ge 0$. (p, q là các số nguyên)

Bình phương hai vế của $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ và thu gọn ta được

$$2\sqrt{p-2}\cdot\sqrt{q-3}=pq-3p-2q+6\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-2)(q-3)}=(p-2)(q-3)$$

Tiếp tục bình phương hai vế thì ta được $4(p-2)(q-3)=(p-2)^2(q-3)^2$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $p=2$, khi đó $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ trở thành $\sqrt{q-3}=\sqrt{q-3}$, đúng với mọi số nguyên tố $q\ge 3$ tùy ý.
- Nếu $q=3$ thì $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ trở thành $\sqrt{p-2}=\sqrt{p-2}$, đúng với mọi số nguyên tố $p\ge 2$ tùy ý.
- Xét $p>2$ và $q>3$. Khi đó từ $4(p-2)(q-3)=(p-2)^2(q-3)^2$ ta có $4=(p-2)(q-3)$ với p, q là các số nguyên. Chỉ xảy ra các trường hợp :

+ Với $p-2=1;\ q-3=4$ ta được $p=3;q=7$

+ Với $p-2=2;\ q-3=2$ ta được $p=4;q=5$

+ Với $p-2=4;\ q-3=1$ ta được $p=6;q=4$

Vậy tất cả các cặp số nguyên p, q thỏa mãn $(2;q),(p;3)(3;7),(4;5),(6;4)$ với các số nguyên tố $p\ge 2$ và $q\ge 3$.

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}\Leftrightarrow x+2\sqrt{3}=y+z+2\sqrt{yz}$

Hay ta được $(x-y-z)+2\sqrt{3}=2\sqrt{yz}\Rightarrow(x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12=4yz$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $x-y-z\ne 0$, khi đó từ $(x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12=4yz$

Ta có $\sqrt{3}=\dfrac{4yz-(x-y-z)^2-12}{4(x-y-z)}$, điều này vô lý do x, y, z là các số nguyên dương.

- Trường hợp 1: Nếu $x-y-z=0$, khi đó từ $(x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12=4yz$

Ta được $\begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4;y=1;z=3 \\ x=4;y=3;z=1 \end{array}\right.$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y;z)=(4;3;1),(4;1;3)$

4. Phương trình nghiệm nguyên dạng lũy thừa.

Ví dụ 1. Giải phương trình với nghiệm tự nhiên: $2^x+2^y+2^z=1024$

Lời giải

Do vai trò của x, y, z trong phương trình như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $0<x\le y\le z$

Chia hai vế của phương trình $2^x+2^y+2^z=1024$ cho $2^x>0$ ta được $1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{10-x}$

Do $2^{10-x}>1$ nên 2^{10-x} là bội của 2.

Ta lại thấy nếu $x=z$ thì $x=y=z$ khi đó phương trình trên trở thành

$1+2^0+2^0=2^{10-x}\Leftrightarrow 3=2^{10-x}$, phương trình này không có nghiệm. Từ đó suy ra $x<z$ nên 2^{z-x} là bội của 2.

Suy ra $1+2^{y-x}$ là bội của 2. Do đó $2^{y-x}=1$ nên $x=y$.

Thay vào phương trình $1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{10-x}$ ta đươc

$$1+1+2^{z-x}=2^{10-x}\Leftrightarrow 2+2^{z-x}=2^{10-x}\Leftrightarrow 2\left(1+2^{z-x-1}\right)=2^{10-x}\Leftrightarrow 1+2^{z-x-1}=2^{9-x}$$

Do $2^{9-x}>1$ nên 2^{9-x} là bội của 2. Từ đó ta được Do đó $\begin{cases} 2^{z-x-1}=1 \\ 2^{9-x}=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=8 \\ z=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=y=8 \\ z=9 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình trên là $(x;y;z)=(8;8;9)$ và các hoán vị.

Ví dụ 2. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2^x+57=y^2$

Lời giải

Do x, y là các số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét x là số lẻ, khi đó ta đặt $x=2n+1\,(n\in N)$

Từ phương trình đã cho ta được $2^{2n+1}+57=y^2$.

Ta có 57 chia hết cho 3. Lại có $2^{2n+1}=2.2^{2n}=2.4^n=2(3+1)^n=2(3k+1)=6k+2\,(k\in N)$

Từ đó ta được $2^{2n+1}+57$ chia 3 dư 2. Mà y^2 là số chính phương nên chia 3 dư 0 hoặc dư 1.

Do đó trong trương hợp x lẻ thì phương trình không có nghiệm tự nhiên.

- Trường hợp 1: Xét x là số chẵn, khi đó ta đặt $x=2n\,(n\in N)$

Từ phương trình đã cho ta được $2^{2n}+57=y^2$ hay ta được $y^2-2^{2n}=57 \Leftrightarrow \left(y-2^n\right)\left(y+2^n\right)=57$.

Do y, n là các số tự nhiên nên ta thấy $y+2^n>0$ nên $y-2^n>0$ và $y+2^n>y-2^n>0$.

Từ đó ta có bảng giá trị như sau:

$y+2^n$	51	19
$y-2^n$	1	3
2^n	28(loại)	8
n		3
y		11
$x=2n$		6

Thử lại ta thấy $2^6+57=11^2$ đúng.

Do đó cặp số tự nhiên cần tìm là $(x;y)=(6;11)$.

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên dương x và số nguyên y thỏa mãn $7^x+24^x=y^2$.

Lời giải

Nhận thấy nếu $(x;y)$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $(x;-y)$ cũng là nghiệm của phương trình, do đó ta chỉ xét với y là một số tự nhiên.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $x\le -1$, khi đó ta có $0<7^x\le \frac{1}{7}<\frac{1}{2}$; $0<24^x\le \frac{1}{24}<\frac{1}{2}$.

Từ đó ta được $7^x+24^x=y^2<1$, điều này vô lí vì y là số tự nhiên.

- Trường hợp 2: Với $x=0$, khi đó ta được $y^2=2$, trường hợp này loại vì y^2 là số chính phương.
- Trường hợp 2: Với $x\in N^*$, khi đó từ phương trình $7^x+24^x=y^2$ ta suy ra được y^2 là số chính phương lẻ. Mà ta biết một số chính phương lẻ khi chia 8 thì có số dư là 1 nên y^2 chia 8 dư 1.

Mà ta lại có 24^x chia hết cho 8 nên từ phương trình đã cho ta suy ra được 7^x chia 8 dư 1. Từ đó ta suy ra được x là một số tự nhiên chẵn hay $x=2k\left(k\in N^*\right)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $7^{2k}+24^{2k}=y^2 \Leftrightarrow \left(y-24^k\right)\left(y+24^k\right)=7^{2k}$.

Do 7 là số nguyên tố nên từ phương trình trên ta suy ra được $\begin{cases} y-24^k=7^m \\ y+24^k=7^{2k-m} \end{cases}$, với $m\in N, m\le k$.

Từ đó ta được $7^{2k-m}-7^m=2.24^k \Leftrightarrow 7^m\left(7^{2k-2m}-1\right)=2.24^k$.

Do 2.24^k không chia hết cho 7 nên từ phương trình trên ta suy ra được $7^m=1 \Rightarrow m=0$.

Từ đó ta được $y=24^k+1$, thay vào phương trình ban đầu ta được

$$7^{2k}+24^{2k}=\left(24k+1\right)^2 \Leftrightarrow 2.24^k+1=7^{2k}=49^k>48^k$$

Nếu $k \ge 2$ thì $48^k - 2.24^k = 24^k\left(2^k - 1\right) > 1$ nên phương trình trên không thỏa mãn.

Từ đó ta suy ra được $k = 1$. Nên ta được $x = 2$ và $y = 24 + 1 = 25$.

Như vậy các cặp số nguyên $\left(x; y\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(2; 25\right), \left(2; -25\right)$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^y + y^z + z^x = 2\left(x + y + z\right)$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét $x \ge 2; y \ge 2; z \ge 2$, khi đó ta có $x^y + y^z + z^x = x^2 + y^2 + z^2 \ge 2\left(x + y + z\right)$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

- Trường hợp 2: Xét trường hợp trong ba số x, y, z có ít nhất một số nhỏ hơn 2, chẳng hạn $z < 2$, khi đó $z = 1$ (Nếu $x = 1$ hoặc $y = 1$ ta có các nghiệm khác).

Khi đó từ $x^y + y^z + z^x = 2\left(x + y + z\right)$ ta được $x^y = 2x + y + 1$.

+ Nếu $y < 4$, khi đó ta được $y = 2$ hoặc $y = 3$

Với $y = 2$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $x^2 = 2x + 2 + 1 \Rightarrow x = 3$

Với $y = 3$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $x^3 = 2x + 3 + 1 \Rightarrow x = 2$

+ Nếu $x < 4$, khi đó ta được $x = 2$ hoặc $x = 3$

Với $x = 2$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $2^y = 2.2 + y + 1 \Rightarrow 2^y = y + 5 \Rightarrow y = 3$

Với $x = 3$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $3^y = 2.3 + y + 1 \Rightarrow 3^y = y + 7 \Rightarrow y = 2$

+ Nếu $x \ge 4; y \ge 4$, khi đó bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh $x^y > xy$.

Thật vậy, với $y = 4$ ta được $x^4 = x.x^3 > 4x$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $k \ge 4$, thì ta được $x^k > kx$

Khi đó ta được $x.x^k > kxx \ge 4kx \Rightarrow x^{k+1} > x\left(k + 3k\right) > \left(k + 1\right)x$, điều này có nghĩ là bất đẳng thức đún với $y = k + 1$.

Như vậy theo nguyên lí quy nạp thì với $y \ge 4$ thì $x^y > xy$.

Ta lại có $x \ge 4; y \ge 4$ nên $\left(x - 4\right)\left(y - 4\right) \ge 0$, từ đó ta được

$$xy \ge 2x + 2y + 2\left(x + y - 8\right) \ge 2x + 2y > 2x + y + 1$$

Từ đó suy ra $x^y > 2x + y + 1$.

Điều này có nghĩa là với $x \ge 4; y \ge 4$ thì $x^y = 2x + y + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương là

$$\left(x; y; z\right) = \left(2; 2; 2\right), \left(1; 2; 3\right), \left(1; 3; 2\right), \left(2; 1; 3\right), \left(2; 3; 1\right), \left(3; 1; 2\right), \left(3; 2; 1\right)$$

Chú ý: *Trong phương trình trên ba ẩn x, y, z có vai trò không bình đẳng mà là hoán vị vòng quanh, do đó không thể sắp thứ tự các ẩn kiểu* $x \ge y \ge z$.

Ví dụ 5. Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|=2011^x+2013^y+2015^z$$

Lời giải

Đặt $A=\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|;B=2011^x+2013^y+2015^z$.

Ta có nhận xét $a+\left|a\right|\in\left\{0;2a\right\}$ với mọi số nguyên a. Do đó $a+\left|a\right|$ luôn là số chẵn.

Do đó $\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|+\left(x-2005y\right)+\left(y-2007z\right)+\left(z-2009x\right)$ là một số chẵn.

Từ đó ta được $A-\left(2008x+2004y+2006z\right)$ là số chẵn nên A là số chẵn.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu cả ba số x, y, z đều là số nguyên âm.

Khi đó ta được $B=2011^x+2013^y+2015^z=\frac{1}{2011^{-x}}+\frac{1}{2013^{-y}}+\frac{1}{2015^{-z}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Do đó $0<B<1$ nên B không thể là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu trong ba số x, y, z có đúng hai số nguyên âm, chẳng hạn hai số đó là x, y.

Khi đó ta được $B=2011^x+2013^y+2015^z=\frac{1}{2011^{-x}}+\frac{1}{2013^{-y}}+2015^z<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2015^z=1+2015^z$.

Do đó ta được $2015^z<B<1+2015^z$ nên B không thể là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu trong ba số x, y, z có đúng một số nguyên âm, chẳng hạn hai số đó là x.

Khi đó hoàn toàn tương tự ta suy ra được B không phải là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu cả ba số x, y, z đều là số tự nhiên, khi đó $B=2011^x+2013^y+2015^z$ là số lẻ. Mà A lại là số chẵn. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

Vậy không tồn tại các số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x-32=y^2$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu x là số lẻ, khi đó $x=2k+1,k\in N$.

Phương trình đã cho trở thành $3^{2k+1}-32=y^2$ hay $3.9^k-32=y^2$.

Ta thấy 9 chia 8 dư 1 nên 3.9^k chia 8 dư 3. Từ đó suy ra 3.9^k-32 chia 8 dư 3.

Mà một số chính phương khi chia cho 8 không có số dư là 3.

Như vậy với x là số nguyên lẻ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

- Trường hợp 2: Nếu x là số chẵn, khi đó $x=2k,k\in N$.

Phương trình đã cho trở thành $3^{2k} - 32 = y^2$ hay ta được $(3^k - y)(3^k + y) = 32$.

Dễ thấy $3^k + y > 3^k - y > 0$ và $3^k + y; 3^k - y$ cùng là số chẵn. Do đó từ phương trình trên ta được các khả năng sau:

+ Với $\begin{cases} 3^k - y = 2 \\ 3^k + y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^k = 9 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} 3^k - y = 4 \\ 3^k + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^k = 6 \\ y = 2 \end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (4; 7)$.

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$.

Lời giải

Nhận thấy với $x = 1$ không thỏa mãn phương trình. Do đó $x \geq 2$

Viết phương trình đã cho về dạng $9.(3^{x-2} + 19) = y^2$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là

$x^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương với z là số nguyên dương.

Nếu $x - 2 = 2k + 1 (k \in N^*)$ là số lẻ thì $3^{2k+1} + 19 = (3^{2k+1} + 1) + 18 = 4.B + 18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x - 2 = 2k (k \in N^*)$ là số chẵn. Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow (z - 3^k)(z + 3^k) = 19$.

Vì 19 là số nguyên tố và $z - 3^k < z + 3^k$ nên $\begin{cases} z - 3^k = 1 \\ z + 3^k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ 3^k = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ k = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) = (6; 30)$.

Ví dụ 8. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 111 = (y - 3)(y - 5)$.

Lời giải

Đặt $y - 4 = a$ với a là số nguyên và $a \geq -3$, Khi đó từ phương trình đã cho ta được.

$$3^x + 111 = (a + 1)(a - 1) \Leftrightarrow 3^x + 112 = a^2$$

Nếu x là số lẻ, ta đặt $x = 2k + 1$, với k là số nguyên không âm. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} 3^x + 112 = 3^{2k+1} + 112 &= 3(9^k - 1) + 3 + 112 = 3.(9 - 1)(9^{k-1} + 9^{k-2} + ... + 1) + 3 + 112 \\ &= 24q + 3 + 112 = 4(8q + 28) + 3 \end{aligned}$$

Do đó $3^x + 112$ chia cho 4 dư 3 nên a^2 chia cho 4 dư 3, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1. Vậy x phải chẵn hay $x = 2k$ với k nguyên dương

Như vậy ta có $3^{2k} + 112 = a^2 \Leftrightarrow (a + 3^k)(a - 3^k) = 112$. Do đó ta được $112 \vdots a + 3^k$

Vì $a \geq -3 \Rightarrow a + 3^k \geq 0$ và $a + 3^k > a - 3^k \Rightarrow (a + 3^k)^2 > 112 \Rightarrow a + 3^k > 10$

Do đó suy ra $a+3^k \in \{14;28;56;112\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a+3^k=14 \Rightarrow a-3^k=8 \Rightarrow 2a=22 \Rightarrow a=11 \Rightarrow x=2; y=15$
- Nếu $a+3^k=28 \Rightarrow a-3^k=4 \Rightarrow 2a=32 \Rightarrow a=16 \Rightarrow 3^x=144$ (loại)
- Nếu $a+3^k=56 \Rightarrow a-3^k=2 \Rightarrow 2a=58 \Rightarrow a=29 \Rightarrow x=6; y=33$
- Nếu $a+3^k=112 \Rightarrow a-3^k=1 \Rightarrow 2a=113 \Rightarrow a=\dfrac{112}{2}$ (loại)

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(2;15),(6;33)$.

Ví dụ 9. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn điều kiện $x^2-5x+7=3^y$.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $y=0$, khi đó phương trình đã cho trở thành $x^2-5x+6=0$.

Giải phương trình trên ta được $x=2; x=3$ nên phương trình đã cho có nghiệm $(2;0),(3;0)$.

- Trường hợp 2: Nếu $y=1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $x^2-5x+4=0$.

Giải phương trình trên ta được $x=1; x=4$ nên phương trình đã cho có nghiệm $(1;1),(4;1)$.

- Trường hợp 2: Nếu $y \ge 2$, khi đó 3^y chia hết cho 9. Ta xét các trường hợp số dư của x khi chia cho 3.

+ Nếu $x=3k, k \in N$, khi đó x^2-5x+7 không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

+ Nếu $x=3k+1, k \in N$, khi đó $x^2-5x+7=9k^2-9k+3$ không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

+ Nếu $x=3k, k \in N$, khi đó $x^2-5x+7=9k^2-3k+1$ không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

Do đó khi $y \ge 2$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Vậy các cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(2;0),(3;0),(1;1),(4;1)$.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $(a^5+b)(a+b^5)=2^c$.

Lời giải

Do vai trò của hai số nguyên dương a và b như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge 1$.

Khi đó ta có $a^5+b \ge a+b^5 \ge 2$.

Từ điều kiện của bài toán ta suy ra được a và b là các số chẵn hoặc cùng lẻ. Khi đó tồn tại các số nguyên dương m và n thỏa mãn $\begin{cases} a^5+b=2^m \\ a+b^5=2^n \end{cases}, (m \ge n)$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $a^5+b^5+a+b=2^m+2^n$

Hay ta được $\left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1\right)=2^n\left(2^{m-n}+1\right)$.

Nếu a và b cùng là số chẵn, khi đó $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1$ là số lẻ.

Khi đó từ $\left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1\right)=2^n\left(2^{m-n}+1\right)$ suy ra $\left(a+b\right)\vdots 2^n$.

Mà ta có $2+2\le a+b\le a+b^5=2^n$ nên suy ra $a+b=2^n$ và $b=b^5$ nên $b=1$, điều này mâu thuẫn với b là số chẵn.

Từ đó suy ra a và b phải là số lẻ, khi đó $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1$ chia 4 dư 2.

Do đó từ $\left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1\right)=2^n\left(2^{m-n}+1\right)$ suy ra $\left(a+b\right)\vdots 2^{n-1}$.

Mà $1+1\le a+b\le a+b^5=2^n$ nên suy ra $a+b=2^n$ hoặc $a+b=2^{n-1}$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $a+b=2^{n-1}$, khi đó kết hợp với $a+b^5=2^n$ ta suy ra được $b^5-b=2^n-2^{n-1}$.

Do đó ta được $b\left(b^4-1\right)=2^{n-1}$ nên $2^{n-1}\vdots b$, mà b là số lẻ nên $b=1$. Do đó suy ra $2^{n-1}=0$, điều này vô lí.

- Xét $a+b=2^n$, khi đó kết hợp với $a+b^5=2^n$ ta suy ra được $b^5-b=2^n-2^n=0$.

Do đó ta được $b^5=b\Rightarrow b=1$.

Thay vào hệ $\begin{cases}a^5+b=2^m\\a+b^5=2^n\end{cases}$ ta được $\begin{cases}a^5+1=2^m\\a+1=2^n\end{cases}$

Từ đó ta được $a^4-a^3+a^2-a+1=2^{m-n}$.

Do a là số lẻ nên $a^4-a^3+a^2-a+1$ là số lẻ nên 2^{m-n} là số lẻ. Suy ra $2^{m-n}=1\Rightarrow m=n$.

Từ đó ta được $a^5+1=a+1\Rightarrow a^5=a\Rightarrow a=1$.

Ta thay $a=b=1$ vào $\left(a^5+b\right)\left(a+b^5\right)=2^c$ thì tìm được $c=2$.

Vậy bộ số nguyên dương $\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(1;1;2\right)$.

5. Hệ phương trình nghiệm nguyên.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+z=3\\x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$

Lời giải

Ta có hằng đẳng thức $\left(x+y+z\right)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

Do đó từ hệ phương trình trên ta được

$$27-3=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\Leftrightarrow 8=\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$$

Đặt $x+y=c;y+z=a;z+x=b$. Khi đó ta được $abc=8$.

Do a, b, c nguyên nên a, b, c là các ước của 8. Suy ra ta được $a;b;c\in\left\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\right\}$

Do vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử $x\le y\le z$, khi đó $a\ge b\ge c$.

Ta có $a+b+c=2\left(x+y+z\right)=6\Rightarrow a\ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $a=2$ ta có $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ x=2 \end{cases}$

Từ đó ta được $x=y=z=1$

+ Với $a=4$ ta có $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=2 \end{cases}$, hệ này không có nghiệm nguyên.

+ Với $a=8$ ta có $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

Từ đó ta tính được $x=y=4; z=-5$

Vậy hệ trên có các nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1),(4;4;5),(4;5;4),(5;4;4)$.

Ví dụ 2. Chứng minh không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-z^2=31 \\ x^2+xy+8z^2=100 \end{cases}$$

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-z^2=31 \\ x^2+xy+8z^2=100 \end{cases}$

Khi đó từ hệ phương trình trên ta được

$$9x^2-23xy+24y^2=348 \Leftrightarrow 5\left(2x^2-5xy+5y^2\right)=(x-y)^2+348$$

Dễ thấy $5\left(2x^2-5xy+5y^2\right)$ chia hết cho 5. Mà $(x-y)^2$ chia 5 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 4 và 348 chia 5 dư 3, do đó $(x-y)^2+348$ chia 4 dư 3 hoặc sư 4 hoặc dư 2. Như vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình trên.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Lời giải

Nếu $z=0$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x;-x;\ 0)$ với $x \in Z$.

Nếu $z \neq 0$ thì từ hệ phương trình ta có $x^2-xy+y^2=x+y \Leftrightarrow x^2-(y+1)x+y^2-y=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x nên ta được

$$\Delta_y=(y+1)^2-4\left(y^2-y\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{12}}{3}\leq y\leq \frac{3+\sqrt{12}}{3}$$

Do $y \in Z$ nên ta được $y \in \{0;\ 1;\ 2\}$.

- Nếu $y=0$, khi đó ta có hệ phương trinh $\begin{cases} x=z \\ x^3=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=z=1$

- Nếu $y=1$, khi đó ta được $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;\ z=1 \\ x=2;\ z=3 \end{array}\right.$
- Nếu $y=2$, khi đó ta được $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ z=3 \\ x=2;\ z=4 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên là

$$(x;-x;\ 0),\ (1;\ 0;\ 1),\ (0;\ 1;\ 1),\ (2;\ 1;\ 3),\ (1;\ 2;\ 3),\ (2;\ 2;\ 4)$$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}$.

Phân tích và lời giải

Đây là hệ phương trìnhcó cấu trúc đặc biệt. Do số ẩn nhiều hơn số phương trình nên thông thường ta nghĩ đến phương pháp đánh giá. Do vai trò bình đẳng của các ẩn nên ta có thể đánh giá một ẩn nào đó, chẳng hạn là ẩn z.

Chú ý rằng nếu xem z là tham số và x, y là ẩn số thì hệ phương trình trên là hệ đối xứng hai ẩn dạng 1. Ta viết lại hệ:

$$\begin{cases} xy+(y+x)z=8 \\ x+y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+(5-z)z=8 \\ x+y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8-(5-z)z \\ x+y=5-z \end{cases}$$

Như vậy theo định lí Vi – et thì x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2-(5-z)t+8-(5-z)z=0$$

Trong phương trình bậc hai trên thì z đóng vài trò tham số, khi đó nếu xác định được giá trị của z thì xem như bài toán được giải quyết.

Ta biết rằng để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0$ hay ta được $3z^2-10z+7\le 0 \Leftrightarrow 1\le z\le \frac{7}{3}$. Do z nhận giá trị nguyên nên $z=1$ hoặc $z=2$.

- Với $z=1$, khi đó phương trình trở thành $t^2-4t+4=0$, đến đây ta tìm được $x=y=2$ thỏa mãn.
- Với $z=2$ khi đó phương trình trở thành $t^2-3t+2=0$, đến đây ta tìm được $x=2; y=1$ hoặc $x=1; y=2$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(2;2;1),(1;2;2),(2;1;2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Chủ đề 1

CÁC BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ

Bài 1. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Bài 2. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3. Cho các số nguyên $a_1;a_2;...;a_n$. Đặt $A=a_1+a_2+...+a_n$ và $B=a_1^5+a_2^5+...+a_n^5$. Chứng minh rằng A chia hết cho 30 khi và chỉ khi B chia hết cho 30.

Bài 4. Chứng minh rằng $A=n^6-n^2$ chia hết cho 60 với mọi số nguyên dương n.

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì ở giữa n^2 và $(n+1)^2$ luôn tìm được các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn a^2+b^2 chia hết cho c.

Bài 6. Cho x và y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương z sao cho $x+y+z=xyz$.

Bài 7. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên x, y không chia hết cho 2011 và thỏa mãn điều kiện $x^2+8043y^2=4.2011^n$, với n là số tự nhiên khác 0.

Bài 8. Cho các số nguyên a, b, c, d. Chứng minh rằng P chia hết cho 12 với:

$$P=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Bài 9. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên và là ước của 1995.

Bài 10. Cho hai số nguyên dương a và b. Đem chia a^2+b^2 cho $a+b$ ta được thương là q và dư là r. Xác định các cặp số a, b sao cho $q^2+r=1977$.

Bài 11. Tìm số nguyên lớn nhất chia hết cho tất cả các số nguyên dương bé hơn căn bậc ba của nó.

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì 2^n+1 không chia hết cho 7.

Bài 13. Tìm các chữ số x, y trong phép tính sau: $109^{10}=\overline{23673xy67459221723401}$.

Bài 14. Giả sử m, n là các số tự nhiên với $n>2$. Chứng minh rằng 2^m+1 không chia hết cho 2^n-1.

Bài 15. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho mọi tập con k phần tử của tập hợp $\{1;2;3;...;50\}$ chứa hai phần tử a và b thỏa mãn ab chia hết cho $a+b$.

Bài 16. Xét phân số $A=\dfrac{n^2+4}{n+5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $1\le n\le 2015$ mà phân số A chưa tối giản.

Bài 17. Cho n là một số nguyên dương chẵn và cho a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm a và b biết rằng a^n+b^n chia hết cho $a+b$.

Bài 18. Cho n là một số nguyên dương. Xét phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{n}$ với x, y là các số nguyên dương.

a) Phương trình trên có thể có 2016 nghiệm nguyên dương $(x;y)$ được không.

b) Tìm số n nhỏ nhất để phương trình trên có đúng 2013 nghiệm nguyên dương $(x;y)$.

Bài 19. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m;n;l)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$m+n=(m,n)^2;n+l=(n,l)^2;l+m=(l,m)^2$$

Bài 20. Cho các số nguyên $x_1;x_2;...;x_{2015}$. Viết các số nguyên đó theo một thứ tự khác ta được $y_1;y_2;...;y_{2015}$. Chứng minh rằng $A=(x_1-y_1)(x_2-y_2)...(x_{2015}-y_{2015})$ chia hết cho 2.

Bài 21. Cho n số nguyên $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ nhận giá trị 1 hoặc -1 thỏa mãn $a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1=0$. Chứng minh rằng n chia hết cho 4.

Bài 22. Chứng minh rằng $A=2^n+6^n+8^n+9^n, n\in N^*$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 23. Tồn tại hay không số tự hiên n thỏa mãn 2003^n+1 chia hết cho 10^{2004}.

Bài 24. Tìm các số nguyên dương a và b sao cho a^2+ab+b^2 chia hết cho 7^5.

Bài 25. Tìm các số nguyên dương n để $A=\dfrac{(n-8)^2-48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.

Bài 26. Ba số nguyên dương a, p, q thỏa mãn các điều kiện:

i) $ap+1$ chia hết cho q

ii) $aq+1$ chia hết cho p

Chứng minh rằng $a>\dfrac{pq}{2(p+q)}$

Bài 27. Chứng minh rằng với mọi số nguyên m, n thì $mn(m^2-n^2)\,\vdots\,6$

Bài 28. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p=a^2+b^2+c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p

Bài 29. Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2051$. Chứng minh rằng tích abc chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 12.

Bài 30. Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ là 1 số nguyên. Gọi d là ước của số a và b. Chứng minh $d \le \sqrt{a+b}$

Bài 31. Cho ba số tự nhiên x, y, z thoả mãn: $x^2+y^2=z^2$. Chứng minh $xy \vdots 12$

Bài 32. Giả sử a và b là các số nguyên dương sao cho $\frac{(a+b)^2+a+b}{ab}$ là một số nguyên. Gọi d là một ước số chung bất kì của a và b. Chứng minh rằng: $d \le \left[\sqrt{a+b}\right]$

(Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Bài 33. Cho a, b, c là các số nguyên sao cho $2a+b,\ 2b+c,\ 2c+a$ đều là các số chính phương.

a) Biết rằng ít nhất một trong ba số chính phương trên chia hết cho 3. Chứng minh rằng tích $(a-b)(b-c)(c-a)$ chia hết cho 27.

b) Tồn tại hay không các số nguyên thỏa mãn điều kiện ban đầu sao cho $(a-b)(b-c)(c-a)$ không chia hết cho 27.

Bài 34. Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì $3^{2^{4n+1}}+2$ chia hết cho 11.

Bài 35. Giả sử a, b, c là các số nguyên sao cho $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng a, b, c đồng thời chia hết cho 2.

Bài 36. Chứng minh rằng trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Bài 37. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $2\left(1^{2013}+2^{2013}+...+n^{2013}\right)$ chia hết cho $n(n+1)$.

Bài 38. Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

Bài 39. Cho số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 7. Chứng minh rằng hiệu các lập phương của hai chữ số của số đó chia hết cho 7.

Bài 40. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a+20$ và $b+13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư của phép chia $A=4^a+9^b+a+b$ cho 21.

Bài 41. Chứng minh nếu n là số nguyên dương thì $25^n+7^n-4^n\left(3^n+5^n\right)$ chia hết cho 65.

Bài 42. Cho số tự nhiên $A=\overline{155*710*4*16}$. Hay thay dấu * bởi ba chữ số phân biệt tự 1 đến 9 để A luôn chia hết cho 396.

Bài 43. Cho 2014 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2014 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2014.

Bài 44. Giả sử n là một số nguyên dương và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên lẻ.

Đặt $A_n=a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4$. Chứng minh rằng A_n chia hết cho 16 khi và chỉ khi n chia hết cho 16

Bài 45. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Bài 46. Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$

Bài 47. a) Tìm số nguyên dương bé nhất để $F=n^3+4n^2-20n-48$ chia hết cho 125

Bài 48. Ta tìm hai số nguyên dương x, y sao cho $z=\dfrac{x^2+2}{xy+2}$ là số nguyên dương

Bài 49. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $\dfrac{m^4+n^2}{7^m-3^n}$ là một số nguyên.

Bài 50. Tìm các cặp số nguyên dương x, y sao cho $\dfrac{x^4+2}{x^2y+1}$ là số nguyên dương.

Bài 51. Tìm số dư trong phép chia số nguyên dương $S=a^b+b^a$ cho 5, trong đó $a=222...2$ với 2004 chữ số 2 và $b=333...3$ với 2005 chữ số 3.

Bài 52. Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\dfrac{x^3+1}{y+1}+\dfrac{y^3+1}{x+1}$ là số nguyên.

Chứng minh rằng $(x^{2016}-1)\vdots(y+1)$.

Bài 53. Tìm tất cả các số hữu tỉ x, y sao cho $x+y$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ đều là số nguyên.

Bài 54. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $4x^2+6x+3$ chia hết cho $2xy-1$.

Bài 55. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 2^n-1 chia hết cho 2011.

Bài 56. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn x^2+x+2 chia hết cho $xy-1$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$.

Bài 57. Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn

a) $4x^2+8x+3$ chia hết cho $4xy-1$

b) $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$

c) x^2+2 chia hết cho $xy+1$

d) x^3+x chia hết cho $xy-1$

Bài 58. Tìm các số nguyên dương x và y sao cho x^2-2 chia hết cho $xy+2$.

Bài 59. Trong dãy số gồm 6 số nguyên dương sắp theo thứ tự tăng dần thỏa mãn số đứng sau là bội của số đứng trước nó và tổng của sáu số đó là 79. Tìm dãy số mà số thứ sáu có giá trị lớn nhất.

Bài 60. Cho n là một số nguyên dương và các số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ có tổng bằng $2n-1$. Chứng minh rằng tồn tại một số số trong các số nguyên dương trên có tổng bằng n.

Bài 61. Cho số nguyên dương n thoả mãn $(n, 10)=1$. Chứng minh rằng: $(n^4-1)\vdots 40$

Bài 62. Chứng minh rằng $A = n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4$ chia hết cho 49 với các số n chia 7 dư 3 và không chia hết cho 49 trong các trường hợp còn lại.

Bài 63. Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết thành tổng của $n+1$ hợp số.

Bài 64. Cho m và n là hai số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $3^m + 5^n$ chia hết cho 8. chứng minh rằng $3^n + 5^m$ cũng chia hết cho 8.

Bài 65. Chọn 100 số tự nhiên khác nhau bất kì sao cho mỗi số đều không vượt qua 2015 và mỗi số đều chia 17 dư 10. Chứng minh rằng trong 100 số trên luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999.

Bài 66. Cho x và y là các số nguyên. Biết rằng $2x^2 - 3xy + y^2 - 16x + 22y$ và $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y$ đều chia hết cho 97. Chứng minh rằng $xy - 12x + 15y$ chia hết cho 97.

Bài 67. Tìm các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho $2a+1$ chia hết cho b và $2b+1$ chia hết cho a.

Bài 68. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$.

Bài 69. Cho $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2$. Tìm số các số tự nhiên x nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11.

Bài 70. Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n thỏa mãn $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

Bài 71. Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức

$$P = \frac{\left(x^2 - y^2\right)^3 + \left(y^2 - z^2\right)^3 + \left(z^2 - x^2\right)^3}{x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz}$$

Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Bài 72. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3}$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2 \vdots 40$

Bài 73. Tìm tất cả các số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn đồng thời các điều kiện $n \le 2p$ và $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1}.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Ta chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3. Thật vậy, mỗi số tự nhiên khi chia cho 3 thì có phần dư là 0, 1 hoặc 2

Nếu trong 5 số dư có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2 thì tổng của ba số tự nhiên tương ứng với ba số dư này là chia hết cho 3

Nếu 5 số dư chỉ nhận không quá 2 trong 3 số 0, 1, 2 thì theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại 3 số dư nhận cùng một giá trị và tổng của ba số tự nhiên tương ứng là chia hết cho 3

Từ 53 số tự nhiên đã cho chọn được 3 số mà tổng của chúng là a_1 chia hết cho 3. Xét 50 số còn lại chọn được 3 số mà tổng là a_2 chia hết cho 3. Lặp lại lập luận này từ 53 số ta chọn được 17 bộ, mỗi bộ gồm 3 số có tổng lần lượt là a_1, a_2, … a_{17} sao cho mỗi tổng đều chia hết cho 3.

Chứng minh tương tự nhận thấy từ 5 số tự nhiên bất kì mà mỗi số đều chia hết cho 3 ta chọn được 3 số có tổng chia hết cho 9. Vậy từ 17 số ta chọn được 5 bộ mỗi bộ gồm 3 số có tổng lần lượt là $b_1, b_2, \ldots, b_5$ sao cho $b_i \vdots 9$ với $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Từ 5 số chia hết cho 9 là $b_1, b_2, \ldots, b_5$ chọn được 3 số mà tổng của chúng là chia hết cho 27. Tổng của 3 số này chính là tổng của 27 số ban đầu. Vậy từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Bài 2. Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ ta được $2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0$

Từ đó suy ra $a+b+c=0$.

Dễ dàng chứng minh được khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$

Do đó ta suy ra được $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a ta luôn có $a^5-a \vdots 30$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a^5-a &= (a-1)a(a+1)(a^2+1) = (a-1)a(a+1)\left[(a^2-4)+5\right] \\ &= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1) \end{aligned}.$$

Ta thấy trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3, lại có 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $(a-1)a(a+1) \vdots 6$. Từ đó ta được $a^5-a \vdots 6$

Mà ta lại có $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 5$ và $5(a-1)a(a+1) \vdots 5$ nên $a^5-a \vdots 5$.

Mà 5 và 6 nguyên tố cùng nhau nên suy ra $a^5-a \vdots 30$.

Xét hiệu sau $B-A=(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)=(a_1^5-a_1)+(a_2^5-a_2)+\ldots+(a_n^5-a_n)$

Áp dụng bổ để trên ta được $(a_1^5-a_1) \vdots 30; (a_2^5-a_2) \vdots 30; \ldots; (a_n^5-a_n) \vdots 30$

Do đó ta được $B-A \vdots 30$. Suy ra A chia hết cho 30 khi và chỉ khi B chia hết cho 30.

Bài 4. Ta có $A=n^6-n^2=(n-1)(n+1)n^2(n^2+1)$ và $60=3.4.5$.

Do 3, 4, 5 nguyên tố với nhau theo từng đôi một nên để chứng minh A chia hết cho 60 ta cần chứng minh A chia hết cho 3, cho 4, cho 5.

- Dễ thấy $(n-1)n(n+1) \vdots 3$ nên suy ra $A \vdots 3$.
- Nếu n là số chẵn thì ta có $n^2 \vdots 4$, còn nếu n là số lẻ thì $(n-1)(n+1) \vdots 4$. Do đó ta luôn có $A \vdots 4$
- Ta cần chứng minh A chia hết cho 5.

Chú ý là n^2 có các chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9

+ Nếu n^2 có các chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì $n^2 \vdots 5$.

+ Nếu n^2 có các chữ số tận cùng là 1 hoặc 6 thì $n^2-1 \vdots 5$

+ Nếu n^2 có các chữ số tận cùng là 4 hoặc 9 thì $n^2+1 \vdots 5$.

Do đó ta luôn có $A \vdots 5$

Kết hợp các kết quả trên ta suy ra được $A \vdots 60$.

Bài 5. Xét số tự nhiên $n > 1$, khi đó ta đặt $a = n^2 + 2; b = n^2 = n + 1; c = n^2 + 1$.

Dễ thấy $n^2 < a; b; c < (n+1)^2$. Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (n^2+2)^2 + (n^2+n+1)^2 \\ &= (n^2+1)^2 + 2(n^2+1) + 1 + (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + n^2 \\ &= 2(n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + 3(n^2+1) = (n^2+1)(2n^2+2n+5) \\ &= (2n^2+2n+5).c \end{aligned}$$

Do đó suy ra $a^2 + b^2$ chia hết cho c. bài toán được chứng minh.

Bài 6. Từ giả thiết $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương ta suy ra được $(x^3+x) \vdots (xy-1)$ hay $x(x^2+1) \vdots (xy-1)$.

Do $(x, xy-1)$ nên ta suy ra được $(x^2+1) \vdots (xy-1)$.

Từ đó ta được $(x^2+1+xy-1) \vdots (xy-1)$, suy ra $(x^2+xy) \vdots (x-1) \Rightarrow x(x+y) \vdots (x-1)$

Cũng do $(x, xy-1)$ nên ta được $(x+y) \vdots (xy-1)$.

Từ đó suy ra tồn tại số nguyên dương z thỏa mãn $x + y = z(xy-1) \Rightarrow x + y + z = xyz$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Ta có $x^2 + 8043y^2 = 4.2011^n \Leftrightarrow x^2 + (4.2011-1)y^2 = 4.2011^n$

Đặt $a = 2011$, khi đó ta sẽ chứng minh tồn tại hai số nguyên x và y không chia hết cho a và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (4a-1)y^2 = 4a^n$.

Thât vậy, ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh.

- Với $n = 1$, khi đó ta có $x = y = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Giả sử bài toán đúng với n, từ là tồn tại hai số nguyên x và y không chia hết cho a và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (4a-1)y^2 = 4a^n$.
- Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với $n+1$.

Thật vậy, từ $x^2 + (4a-1)y^2 = 4a^n$ suy ra

$$ax^2 + a(4a-1)y^2 = 4a^{n+1} \Leftrightarrow 4a^{n+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2 + (4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$$

Ta có hai cách phân tích

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2 + (4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] = \left[\frac{x+(4a-1)}{2}\right]^2 + (4a-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Hoặc là $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left[\frac{(4a-1)y}{2}\right]^2+(4a-1)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x-(4a-1)}{2}\right]^2+(4a-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Đặt $\begin{cases} X_1=\dfrac{x+(4a-1)}{2} \\ Y_1=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases} X_2=\dfrac{x-(4a-1)}{2} \\ Y_2=\dfrac{x+y}{2}\end{cases}$

Khi đó ta được $4a^{n+1}=X_1^2+(4a-1)Y_1^2$ hoặc $4a^{n+1}=X_2^2+(4a-1)Y_2^2$

Đến đây ta xét các trường hợp sau

• Nếu Y_1 không chia hết cho a, ta có $X_1-Y_1=2ay \vdots a$ nên X_1 không chia hết cho a. Kết hợp với hệ thức $4a^{n+1}=X_1^2+(4a-1)Y_1^2$ suy ra X_1 và Y_1 thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n+1$.

• Nếu Y_2 không chia hết cho a, ta có $X_2-Y_2=2ay \vdots a$ nên X_2 không chia hết cho a. Kết hợp với hệ thức $4a^{n+1}=X_2^2+(4a-1)Y_2^2$ suy ra X_2 và Y_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n+1$.

Bài toán đúng với $n+1$.

Như vậy theo nguyên lí quy nạp thì bài toán được chứng minh.

Bài 8. Ta có $12=3.4$ và $(3,4)=1$ nên để chứng minh P chia hết cho 12 ta đi chứng minh P chia hết cho 3 và 4.

• Chứng minh P chia hết cho 3.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong bốn số nguyên a, b, c, d luôn tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b, khi đó $b-a$ chia hết cho 3. Do đó P chia hết cho 3.

• Chứng minh P chia hết cho 4.

Một số nguyên bất kì khi chia cho 4 có 4 số dư là 0, 1, 2, 3.

+ Nếu trong bốn số a, b, c, d khi chia cho 4 có hai số có cùng số dư, không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b, khi đó ta được $b-a$ chia hết cho 4.

+ Nếu trong bốn số a, b, c, d khi chia cho 4 có bốn số dư khác nhau, khi đó sẽ có hai số dư chẵn và hai số dư lẻ, suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số nguyên chẵn và hai số nguyên lẻ. Giả sử hai số chẵn là a và b, hai số lẻ là c và d, khi đó ta được $b-a$ và $d-c$ cùng chia hết cho 2 nên P chia hết cho 4.

Như vậy trong mọi trương hợp ta luôn có P chia hết cho 4.

Từ các kết quả trên ta suy ra được P chia hết cho 12.

Bài 9. Theo bài ra ta cần tìm cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}=k\in Z$ với k là ước của 1995. Hay ta được $x^2+y^2=k(x-y)$ với 1995 chia hết cho k. Chú ý là $1995=3.5.7.19$.

Ta có nhận xét: Với các số nguyên tố $p=3;7;19$, nếu $x^2+y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Thậy vậy, ta chứng cho trường hợp $p = 3$, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự

Ta có x^2 và y^2 là các số chính phương nên khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Mà ta lại có $x^2 + y^2 \vdots p$ nên suy ra x^2 và y^2 cùng chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên ta suy ra được $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Ta xét các trường hợp sau đây

+ Nếu k chia hết cho 3, khi đó $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 nên x và y cùng chia hết cho 3.

Khi đó ta được $x_1^2 + y_1^2 = k_1(x_1 - y_1)$ với k_1 là số nguyên và $5.7.19 \vdots k_1$

Nếu k_1 chia hết cho 7 khi đó ta được $x_1^2 + y_1^2$ chia hết cho 7 nên x_1 và y_1 cùng chia hết cho 7.

Khi đó ta được $x_2^2 + y_2^2 = k_2(x_2 - y_2)$ với k_2 là số nguyên và $5.19 \vdots k_2$

Nếu k_2 chia hết cho 19 khi đó ta được $x_2^2 + y_2^2$ chia hết cho 19 nên x_2 và y_2 cùng chia hết cho 19.

Khi đó ta được $x_3^2 + y_3^2 = k_3(x_3 - y_3)$ với k_3 là số nguyên và $5 \vdots k_3$ hay $k_3 = 5$

+ Trường hợp k chia hết cho 7 và k chia hết cho 19 ta lập luận hoàn toàn tương tự, đến cuối cùng ta thu được một đẳng thức dạng $a^2 + b^2 = 5(a - b)$ với a và b là các số nguyên dương(vì do $a > b$ nên không thể xẩy ra trường hợp $a^2 + b^2 = a - b$).

Từ đây ta được $(2a - 5)^2 + (2b + 5)^2 = 50$. Do đó ta suy ra được $a = 3; b = 1$ hoặc $a = 2; b = 1$.

Như vậy ta được cặp số nguyên dương $(x; y)$ cần tìm là $(3k; k), (2k; k), (k; 3k), (k; 2k)$, trong đó k được xác định là các ước nguyên dương khác 5 của 1995.

Bài 10. Ta có $a^2 + b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$, suy ra ta được $\dfrac{a^2 + b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$.

Do chia $a^2 + b^2$ cho $a + b$ ta được thương là q nên ta suy ra được $q \ge \dfrac{a+b}{2}$.

Mà ta có $r < a + b$ nên ta được $r < 2q$.

Mặt khác số chính phương lớn nhất mà nhỏ hơn 1977 là 44^2, ta được $1977 = 44^2 + 41$.

Số chính phương kế tiếp là 43^2, ta có $1977 = 43^2 + 128$.

Mà ta lại có $128 > 2.43$ và $41 < 2.44$ nên ta có $q = 44$ và $r = 41$

Từ đó ta được $a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$ hay ta được $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009$.

Chú ý là $1009 = 28^2 + 15^2$ nên từ phương trình trên ta được $\begin{cases}(a-22)^2 = 28^2 \\ (b-22)^2 = 15^2\end{cases}$ hoặc

$\begin{cases}(a-22)^2 = 15^2 \\ (b-22)^2 = 28^2\end{cases}$

+ Với $\begin{cases}(a-22)^2=28^2\\(b-22)^2=15^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-22=\pm 28\\b-22=\pm 15\end{cases}$, kết hợp với $a,b\in N^*$ ta được $\left[\begin{array}{l}a=50;b=37\\a=50;b=7\end{array}\right.$ thỏa mãn.

+ Với $\begin{cases}(a-22)^2=15^2\\(b-22)^2=28^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-22=\pm 15\\b-22=\pm 28\end{cases}$, kết hợp với $a,b\in N^*$ ta được $\left[\begin{array}{l}a=37;b=50\\a=7;b=50\end{array}\right.$ thỏa mãn.

Vậy ta được các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn bài toán là

$(50;37),(50;7),(37;50),(7;50)$

Bài 11. Gọi N là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán và n là số nguyên dương lớn nhất bé hơn hoặc bằng căn bậc ba của N. Khi đó ta thấy

• Nếu $n=7$ thì N phải chia hết cho $3.4.5.7=420$. Nhưng N phải bé hơn $8^3-1=511$, do đó số N lớn nhất phải là 420.

• Nếu $n\ge 8$ thì N phải chia hết cho $3.5.7.8=840$, từ đó ta được $N>729=9^3$, suy ra N phải chia hết cho 9. Khi đó N lại phải chia hết cho $3.5.7.8.9=2520$. Nếu tiếp tục suy luận như vậy thì bài toán sẽ không thể kết thuc được. Do đó ta sẽ chứng minh rằng các số $N>2000$ thì không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, để ý là với x là số nguyên lớn hơn 4 thì ta luôn có $2(x^3-1)>x^3$

Từ đó suy ra $[x]>\frac{x^3}{2}$ khi $x>4$. Do đó với $N>2000$, ta có $n^3>\frac{N}{2}$.

Ta gọi p_k là lũy thừa lớn nhất của số nguyên k mà không lớn hơn n, khi đó $p_k>\frac{n}{k}$.

Từ đó ta được $p_2.p_3.p_5>\frac{n^3}{30}>\frac{N}{60}$. Ta có $N>2000$ nên suy ra $7<11<n$. Từ đó ta được $p_2;p_3;p_5;7;11$ đều không lớn hơn n. Mà ta có $77p_2.p_3.p_5>N$, điều này mâu thuân.

Do đó các số $N>2000$ khoongthoar mãn yêu cầu bài toán.

Vậy số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 420.

Bài 12. Nếu cho n nhận các giá trị là 1; 2; 3; 4; 5; 6 thì giá trị của 2^n lần lượt là 2; 4; 8; 16; 32; 64. Khi đó số dư của 2^n khi chia cho 7 lần lượt là 2; 4; 1; 2; 4; 1. Chú ý là các số 1; 2; 3 và 4; 5; 6 thoe tứ tự chia 3 có số dư là 1; 2; 3. Điều này gợi ý ta chứng minh 2^n chia cho 7 có số dư lần lượt là 2; 4; 1 tương ứng với n chia 3 dư 1; dư 2; dư 0.

Thật vậy, xét các số $n=3k+1; n=3k+2; n=3k+3$ với k là số tư nhiên, khi đó ta xét từng trương hợp như sau:

• Với $n=3k+1$, khi đó ta có $2^n=2^{3k+1}=2.(2^3)^k=2.(7+1)^k=2.(7a+1)$ chia 7 dư 2, với a là số một số tự nhiên.

• Với $n=3k+2$, khi đó ta có $2^n=2^{3k+2}=4.(2^3)^k=4.(7+1)^k=4.(7b+1)$ chia 7 dư 4, với b là số một số tự nhiên.

- Với $n=3k+3$, khi đó ta có $2^n=2^{3k+3}=4.\left(2^3\right)^k=\left(7+1\right)^{k+1}=7c+1$ chia 7 dư 1, với c là số một số tự nhiên.

Từ đó ta thấy với mọi số nguyên dương n thì 2^n chia 7 có số dư là 1; 2; 4. Do đó 2^n+1 chia cho 7 sẽ có các số dư là 2; 3; 5, điều này có nghĩa là 2^n+1 không chia hết cho 7.

Bài 13. Ta có $109^{10}-1=\left(109-1\right)\left(109^9+109^8+...+1\right)=9.12\left(109^9+109^8+...+1\right)$.

Do đó $109^{10}-1$ chia hết cho 9.

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}109^{10}-1&=\left(109^5-1\right)\left(109^5+1\right)=\left(109^5-1\right)\left(109+1\right)\left(109^4-109^3+...+1\right)\\&=10.11\left(109^5-1\right)\left(109^4-109^3+...+1\right)\end{aligned}$$

Do đí ta lại có $109^{10}-1$ chia hết cho 11.

Từ các kết quy ra ta suy ra $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 9 và 11.

Ta có $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $\left(x+y+73\right)\vdots 9\Rightarrow\left(x+y+1\right)\vdots 9$

Và $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 1 khi và chỉ khi $\left(y-x-9\right)\vdots 11$

Từ đó ta có $\begin{cases}\left(x+y+1\right)\vdots 9\\\left(y-x-9\right)\vdots 11\end{cases}$.

Chú ý rằng x và y là các chữ số nên $0\le x;y\le 9$. Do đó $1\le x+y+1\le 19$ nên suy ra $x+y+1$ chỉ có thể nhận giá trị là 9 hoặc 18. Lai thấy $-18\le y-x-9\le 0$ nên suy ra $y-x-9$ chỉ có thể nhận giá trị là 0 hoặc -11. Từ đó ta có các trường hợp sau đây xẩy ra:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y+1=9\\y-x-9=0\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x+y+1=9\\y-x-9=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}x+y+1=18\\y-x-9=0\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}x+y+1=18\\y-x-9=-11\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy các chữ số cần tìm là $x=5$ và $y=3$.

Bài 14. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $m<n$, khi đó do $n>2$ nên $2^{n-1}\left(2-1\right)>2$. Suy ra $2^{n-1}+1<2^n-1$

Mà $m<n$ nên $m+1\le n$ suy ra $2^m+1\le 2^{n-1}+1$.

Từ đó ta được $2^n-1>2^m+1$ nên 2^m+1 không chia hết cho 2^n-1.

• Trường hợp 2: Nếu $m = n$. Khi đó ta có $\frac{2^m+1}{2^n-1} = \frac{2^n+1}{2^n-1} = \frac{2^n-1+2}{2^n-1} = 1 + \frac{2}{2^n-1}$.

Do $n > 2$ nên $2^n - 1 > 2$, do đó $\frac{2}{2^n-1}$ không phải là số nguyên,

Do đó $\frac{2^m+1}{2^n-1}$ không thể là số nguyên nên 2^m+1 không chia hết cho 2^n-1.

• Trường hợp 3: Nếu $m > n$. Khi đó ta đặt $m = kn + r$ với k, n là các số tự nhiên và $0 \le r < n$.

Từ đó suy ra $r = m - kn$, khi đó ta có

$$\frac{2^m+1}{2^n-1} = \frac{2^{m-kn}.2^{kn} - 2^{m-kn} + 2^{m-kn} + 1}{2^n-1} = \frac{2^{m-kn}\left(2^{kn}-1\right) + 2^r + 1}{2^n-1} = \frac{2^{m-kn}\left(2^{kn}-1\right)}{2^n-1} + \frac{2^r+1}{2^n-1}$$

Dễ thấy $\frac{2^{m-kn}\left(2^{kn}-1\right)}{2^n-1}$ là số nguyên và $\frac{2^r+1}{2^n-1}$ không phải là số nguyên.

Do đó $\frac{2^{m-kn}\left(2^{kn}-1\right)}{2^n-1} + \frac{2^r+1}{2^n-1}$ không thể là một số nguyên.

Từ đó ta được $\frac{2^m+1}{2^n-1}$ không thể là số nguyên nên 2^m+1 không chia hết cho 2^n-1.

Vậy trong mọi trường hợp thì 2^m+1 không chia hết cho 2^n-1.

Bài 15. Giả sử a, b là hai phần tử của tập hợp S là tập con của tập hợp $\{1;2;3;...;50\}$ thỏa mãn điều kiện ab chia hết cho $a+b$.

Gọi $(a,b) = c$, khi đó tồn tại hai số tự nhiên $a_1; b_1$ sao cho $a = ca_1; b = cb_1$ và $(a_1, b_1) = 1$.

Thế thì từ ab chia hết cho $a+b$ ta được $c^2a_1b_1$ chia hết cho $c(a_1+b_1)$ hay ca_1b_1 chia hết cho (a_1+b_1).

Do $(a_1,b_1) = 1$ nên suy ra $(a_1, a_1+b_1) = (b_1, a_1+b_1) = 1$ nên từ ca_1b_1 chia hết cho (a_1+b_1) ta suy ra được $c \vdots (a_1+b_1)$.

Do S là tập con của tập hợp $\{1;2;3;...;50\}$ nên suy ra $a+b \le 99$, do đó $c(a_1+b_1) \le 99$

Chú ý là $c \vdots (a_1+b_1)$ nên ta suy ra $a_1+b_1 \le 9$. Mà ta cũng thấy $a_1+b_1 \ge 3$.

Từ đó ta có thể tìm được cặp số a, b thỏa mãn bài toán.

• Với $a_1+b_1 = 3$ ta được các cặp số $(a;b)$ là

$$(6;3),(12;6),(18;9),(24;12),(30;15),(36;18),(42;21),(48;24)$$

• Với $a_1+b_1 = 4$ ta được các cặp số $(a;b)$ là $(12;4),(24;8),(36;12),(48;16)$

• Với $a_1+b_1 = 5$ ta được các cặp số $(a;b)$ là $(20;5),(40;10),(15;10),(30;20),(45;30)$

• Với $a_1+b_1 = 6$ ta được các cặp số $(a;b)$ là $(30;6)$

• Với $a_1 + b_1 = 7$ ta được các cặp số $(a;b)$ là $(42;7),(35;14),(28;21)$

• Với $a_1 + b_1 = 8$ ta được các cặp số $(a;b)$ là $(40;24)$

Bài 16. Giả sử A là một phân số chưa tối giản. Đặt $d = (n^2 + 4, n+5)$, suy ra $d > 1$.

Khi đó ta được $\begin{cases} n^2 + 4 \vdots d \\ n + 5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (n+5)^2 - (n^2+4) \vdots d \Rightarrow 10(n+5) - 29 \vdots d \Rightarrow 29 \vdots d \Rightarrow d = 29$.

Ngược lại nếu $n + 5 \vdots 29$ thì ta được $n + 5 = 29k\,(k \in N^*)$. Suy ra $n = 29k - 5$

Khi đó ta được $n^2 + 4 = (29k-5)^2 + 4 = 29(29k^2 - 10k + 1) \vdots 29$

Như vậy phân số A chưa tối giản.

Như vậy ta cần tìm xem có bao nhiêu giá trị của k để phân số A chưa tối giản.

Theo bài ra ta có $1 \le n \le 2015$ nên suy ra $1 \le 29k - 5 \le 2015 \Rightarrow 1 \le k \le 69$.

Như vậy ta có thể chọn được 69 giá trị của k để phân số A chưa tối giản.

Do đó trong khoảng từ 1 đến 2015 ta có thể chọn được 69 số tự nhiên n để phân số A chưa tối giản.

Bài 17. Do n là số nguyên dương chẵn nên ta đặt $n = 2k$ với k là số tự nhiên khác 0.

Khi đó ta có $a^n - b^n = a^{2k} - b^{2k} = (a^2 - b^2)\left[(a^2)^{k-1} + (a^2)^{k-2} b^2 + (a^2)^{k-3} b^4 + ... + (b^2)^{k-1}\right]$

Do $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ chia hết cho $a + b$. Do đó $a^n - b^n$ chia hét cho $a + b$.

Mà ta có $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ nên ta được $\left[(a^n + b^n) + (a^n - b^n)\right] \vdots (a+b)$ hay $2a^n \vdots (a+b)$

Và cũng có $\left[(a^n + b^n) - (a^n - b^n)\right] \vdots (a+b)$ hay $2b^n \vdots (a+b)$.

Như vậy $a + b$ là một ước chung của $2a^n$ và $2b^n$

Nhưng do a và b nguyên tố cùng nhau nên $(a^n, b^n) = 1$, do đó suy ra $(2a^n, 2b^n) = 2$.

Khi đó ta được 2 chia hết cho $a + b$ nên suy ra $a = b = 1$.

Bài 18.

a) Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n(x+y) = xy \Leftrightarrow (x-n)(y-n) = n^2$$

Từ phương trình ta nhận thấy $x > n$ và $y > n$ nên $x - n$ và $y - n$ là các ước nguyên dương của n^2.

Mỗi nghiệm nguyên dương của phương trình là một cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $(x-n)(y-n) = n^2$. Do đó mỗi ước nguyên dương n^2 tương ứng cho ta một cặp số $x - n$ và $y - n$ thỏa mãn phương trình và từ đó cho ta một nghiệm nguyên dương. Từ đó số nghiệm nguyên dương của phương trình chình là số ước nguyên dương của n^2.

Giả sử ta phân tích được $n = p_1^a.p_2^b...p_k^c$ với $p_1;p_2;...;p_k$ là các số nguyên tố.

Khi đó ta được $n^2 = p_1^{2a}.p_2^{2b}...p_k^{2c}$ nên số ước nguyên dương của n^2 là $(2a+1)(2b+1)...(2c+1)$ là một số lẻ. Do đó số nghiệm nguyên dương của phương trình trên là một số lẻ.

Vậy phương trình trên không thể có 2016 nghiệm nguyên dương $(x;y)$ được.

b) Giả sử $n^2 = p_1^{2a}.p_2^{2b}...p_k^{2c}$ với $p_1;p_2;...;p_k$ là các số nguyên tố, khi đó số nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2a+1)(2b+1)...(2c+1)$.

Ta cần tìm n nhỏ nhất để số nghiệm nguyên dương $(2a+1)(2b+1)...(2c+1) = 2013$.

Chú ý là $2013 = 3.11.61$, khi đó ta xét các trường hợp sau.

+ Với $2013 = 2.1006+1$, khi đó $n^2 = p_1^{2012} \Rightarrow n = p_1^{1006}$

Giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2^{1006}$

+ Với $2013 = 3.671 = (2.1+1)(2.335+1)$, khi đó $n^2 = p_1^{670}.p_2^2 \Rightarrow n = p_1^{335}.p_2$

Giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2^{335}.3$

+ Với $2013 = 11.183 = (2.5+1)(2.90+1)$, khi đó $n^2 = p_1^{10}.p_2^{180} \Rightarrow n = p_1^5.p_2^{90}$

Giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2^{90}.3^5$

+ Với $2013 = 33.61 = (2.16+1)(2.30+1)$, khi đó $n^2 = p_1^{32}.p_2^{60} \Rightarrow n = p_1^{16}.p_2^{60}$

Giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2^{30}.3^{16}$

+ Với $2013 = 3.11.61 = (2.1+1)(2.5+1)(2.30+1)$, khi đó $n^2 = p_1^2.p_2^{10}p_2^{60} \Rightarrow n = p_1.p_2^5.p_3^{30}$

Giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2^{30}.3^5.5$.

So sánh các kết quả trên ta thấy $n = 2^{30}.3^5.5$ là giá trị nhỏ nhất để phương trình có đúng 2013 nghiệm nguyên dương $(x;y)$.

Bài 19. Gọi $d = (m,n,l)$ và đặt $m = dm_1; n = dn_1; l = dl_1$ với $m_1,n_1,l_1 \in N^*$ và $(m_1,n_1,l_1) = 1$.

Gọi $d_{mn} = (m_1,n_1), d_{nl} = (n_1,l_1), d_{lm}(l_1,m_1)$.

Khi đó ta có $d(m_1+n_1) = d^2.d_{mn}^2 \Rightarrow m_1+n_1 = d.d_{mn}^2$

Hoàn toàn tương tự ta được $n_1+l_1 = d.d_{nl}^2; l_1+m_1 = d.d_{lm}^2$

Từ đó suy ra $2(m_1+n_1+l_1) = d(d_{mn}^2+d_{nl}^2+d_{lm}^2)$

Vì $(m_1+n_1+l_1) \vdots \dfrac{d}{(2,d)}$ và $(m_1+n_1) \vdots \dfrac{d}{(2,d)}$ nên $l_1 \vdots \dfrac{d}{(2,d)}$

Hoàn toàn tương tự ta được $m_1 \vdots \dfrac{d}{(2,d)}; n_1 \vdots \dfrac{d}{(2,d)}$.

Mà do $(m_1,n_1,l_1) = 1$ nên suy ra $\dfrac{d}{(2,d)} = 1$ và do đó $d \le 2$.

Để ý là $d_{mn};d_{nl};d_{lm}$ đôi một nguyên tố cùng nhau, do đó chúng có thể viết được thành

$$l_1 = l_2.d_{nl}.d_{lm};m_1 = m_2.d_{mn}.d_{lm};n_1 = n_2.d_{mn}.d_{nl}$$

Do đó $m_2.d_{mn}.d_{lm} + n_2.d_{mn}.d_{nl} = d.d_{mn}^2$ nên $m_2.d_{lm} + n_2.d_{nl} = d.d_{mn}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử d_{mn} không lớn hơn $d_{nl};d_{lm}$

Khi đó ta có $2d_{mn} \ge d.d_{mn} = m_2.d_{lm} + n_2.d_{nl} \ge d_{lm} + d_{nl} \ge 2d_{mn}$

Như vậy ta được $d = 2;m_2 = n_2 = 1$ và $d_{mn} = d_{nl} = d_{lm}$, nhưng do $d_{mn};d_{nl};d_{lm}$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d_{mn} = d_{nl} = d_{lm} = 1$. Từ đó ta suy ra được $m_1 = n_1 = 1$ và từ $m_1 + l_1 = d.d_{mn}^2$ ta cũng được $l_1 = 1$. Do đó suy ra $m = n = l = 2$.

Bài 20. Đặt $z_1 = x_1 - y_1;z_2 = x_2 - y_2;...;z_{2015} = x_{2015} - y_{2015}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + ... + z_{2015} &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + ... + (x_{2015} - y_{2015}) \\ &= (x_1 + x_2 + ... + x_{2015}) - (y_1 + y_2 + ... + y_{2015}) = 0 \end{aligned}$$

Nếu tất cả các số nguyên $z_1;z_2;...;z_{2015}$ đều là số lẻ thì $z_1 + z_2 + ... + z_{2015}$ là một số lẻ, điều này vo lí.

Như vậy trong các số nguyên $z_1;z_2;...;z_{2015}$ có ít nhất một số chẵn.

Từ đó suy ra $z_1.z_2...z_{2015} \vdots 2$ hay ta được $A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)...(x_{2015} - y_{2015})$ chia hết cho 2.

Bài 21. Do các số nguyên $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ nhận giá trị 1 hoặc -1 nên $a_1a_2;a_2a_3;...;a_na_1 \in \{-1;1\}$.

Mà ta có $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = 0$ nên số tích nhận giá trị 1 bằng số tích nhận giá trị -1.

Do đó có một số chẵn các tích $a_1a_2;a_2a_3;...;a_na_1$ nên n là số chẵn.

Đặt $n = 2m\left(m \in N^*\right)$. Khi đó trong các tích $a_1a_2;a_2a_3;...;a_na_1$ có m tích nhận giá trị 1 và m tích nhận giá trị -1. Ta có $(a_1.a_2...a_2)^2 = 1$. Mà lại có $(a_1.a_2...a_n) = a_1a_2.a_2a_3...a_na_1 = 1^m.(-1)^m$

Do đó ta được $1 = (-1)^m$, suy ra m là số chẵn.

Đặt $m = 2k\left(k \in N^*\right)$ ta được $n = 4k\left(k \in N^*\right)$ hay n chia hết cho 4.

Bài 22. Dễ thấy với mọi $n \in N^*$ ta luôn có $5^n \equiv 1^n \pmod 5;8^n \equiv 3^n \pmod 5;9^n \equiv 4^n \pmod 5$.

Từ đó suy ra $2^n + 6^n + 8^n + 9^n \equiv 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \pmod 5$.

Do đó $2^n + 6^n + 8^n + 9^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5.

Với $n \in N^*$ ta luôn bểu diễn được dưới dạng $n = 4t + r$ với $t \in N$ và $r \in \{0;1;2;3\}$.

Do đó ta có $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4t+r} + 3^{4t+r} + 4^{4t+r} = 1 + 16^t.2^r + 81^t.3^r + 256^t.4^r$

Dễ thấy $16^t \equiv 1 \pmod 5;81^t \equiv 1 \pmod 5;256^t \equiv 1 \pmod 5$

Nên ta suy ra được $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 2^r + 3^r + 4^r \pmod 5$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $r=0$, khi đó $1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 1+2^0+3^0+4^0=4\pmod 5$
- Nếu $r=1$, khi đó $1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 1+2^1+3^1+4^1=10\pmod 5$
- Nếu $r=2$, khi đó $1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 1+2^2+3^2+4^2=30\pmod 5$
- Nếu $r=3$, khi đó $1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 1+2^3+3^3+4^3=100\pmod 5$

Từ các trường hợp trên ta nhận thấy: Khi $r=0$ thì $1^n+2^n+3^n+4^n$ không chia hết cho 5 và do đó A không chia chia hết cho 5. Khi $r\in\{1;2;3\}$ thì $1^n+2^n+3^n+4^n$ chia hết cho 5 và do đó A chia chia hết cho 5.

Vậy A chi hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 23. Dễ thấy $2003\equiv 3\pmod 8$ nên ta được $2003^n\equiv 3^n\pmod 8$.

Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu n là số chẵn, khi đó $n=2k,(k\in N)$.

Do đó $3^n=3^{2k}=9^k\equiv 1\pmod 8$. Suy ra ta được $2003^n+1\equiv 2\pmod 8$.

Mà ta lại có 10^{2004} chia hết cho 8. Do đó khi n chẵn thì 2003^n+1 không chia hết cho 10^{2004}.

- Nếu n là số lẻ, khi đó $n=2k+1,(k\in N)$

Do đó $3^n=3^{2k+1}=3.9^k\equiv 3\pmod 8$. Suy ra ta được $2003^n+1\equiv 4\pmod 8$.

Mà ta lại có 10^{2004} chia hết cho 8. Do đó khi n lẻ thì 2003^n+1 không chia hết cho 10^{2004}.

Vậy không tồn tại số tự nhien n để 2003^n+1 chia hết cho 10^{2004}.

Bài 24. Ta xét các đẳng thức sau

$$(a-2b)(2a-b)=2(a^2+ab+b^2)-7ab$$
$$(a-18b)(18a-b)=18(a^2+ab+b^2)-7^3ab$$
$$(a-1353b)(1353a-b)=1353(a^2+ab+b^2)-109.7^5ab$$

Chú ý là $(2,7)=(20,7)=(1353,7)=1$

Từ các đẳng thức trên ta thấy để a^2+ab+b^2 chia hết cho 7^5 thì a và b phải thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

+ Cả a và b cùng chia hết cho 7^5

+ $a=7^2p;b=7^2q,(p;q\in Z^+)$ với $p\equiv 2q\pmod 7$ hoặc $q\equiv 2p\pmod 7$.

+ $a=7p;b=7q,(p;q\in Z^+)$ với $p\equiv 18q\pmod{7^3}$ hoặc $q\equiv 18p\pmod{7^3}$.

+ $a\equiv 1353b\pmod{7^5}$ hoặc $b\equiv 1353a\pmod{7^5}$.

Bài 25. Ta có $(n-8)^2-48=n^2-16n+16$, do đó ta được $A=n-21+\dfrac{121}{n+5}$

Vì $n \in Z^{+} \Rightarrow n+5 \ge 6$, do đó để A là số nguyên dương thức $n+5$ là ước nguyên dương lớn hơn 6 của 121. Do đó ta được

+ $n+5=11 \Rightarrow n=6 \Rightarrow A=-4$

+ $n+5=121 \Rightarrow n=116 \Rightarrow A=96$

Vì A là số nên dương nên ta chọn $A=96$ và $n=116$.

Bài 26. Từ giả thiết ta được $(ap+1)(aq+1) \vdots pq \Rightarrow (a^2pq+ap+aq+1) \vdots pq$

Mà $a^2pq \vdots pq$ nên ta được $(ap+aq+1) \vdots pq$.

Do $a,\ p,\ q$ là các số nguyên dương nên $ap+aq+1;\ pq$ là các số nguyên dương.

Suy ra $ap+aq+1 \ge pq$, do $a(p+q) > 1$ nên ta được $2a(p+q) > pq \Rightarrow a > \dfrac{pq}{2(p+q)}$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 27. Ta có $m.n(m^2-n^2) = mn\left[(m^2-1)-(n^2-1)\right] = mn(m-1)(m+1) - mn(n-1)(n+1)$

Vì $m(m-1)$ là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và $m(m-1)(m+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, mà $(2;\ 3)=1$. Do đó $mn(m-1)(m+1) \vdots 6$

Tương tự ta được $mn(n-1)(n+1) \vdots 6$

Do vậy ta có $mn(m^2-n^2) \vdots 6$ với mọi số nguyên m, n.

Bài 28. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c$.

Ta có $p^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 \vdots p$ nên $(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2) \vdots p$ mà ta lại có $(a^4+b^4+c^4) \vdots p$ nên ta được $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \vdots p$. Mặt khác do $a,b,c \ge 1$ và $p \ge 3$ nên ta được $(p,2)=1$ suy ra $(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \vdots p$. Do đó $\left[a^2b^2+c^2(a^2+b^2+c^2)-c^4\right] \vdots p$ suy ra $(a^2b^2-c^4) \vdots p$ nên $(ab-c^2)(ab+c^2) \vdots p$.

Lại có $ab < 2ab \le a^2+b^2$ nên $1 < ab+c^2 < a^2+b^2+c^2 = p$, do đó $(ab+c^2, p)=1$. Từ đó ta được $(ab-c^2) \vdots p$ hay $(c^2-ab) \vdots p$

Mặt khác $1 \le a \le b \le c$ nên $0 \le c^2-ab < c^2 < a^2+b^2+c^2 = p$. Do đó $c^2-ab=0$ hay $c^2=ab$, từ đó ta được $p=3a^2$, mà p là số nguyên tố nên $a^2=1,\ p=3$.

Bài 29.

+ Ta có 2051 chia cho 3 dư 2, suy ra $a^2+b^2+c^2$ chia cho 3 dư 2

Một số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1, do đó trong 3 số a, b, c phải có 2 số chia cho 3 dư 1, số còn lại chia cho 3 dư 0 nên abc chia hết cho 3.

+ Ta cũng có 2051 chia cho 4 dư 3, suy ra $a^2+b^2+c^2$ chia cho 4 dư 3

Một số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1, do đó a, b, c phải cùng chia cho 4 dư 1, suy ra a, b, c không chia hết cho 4 nên abc cũng không chia hết cho 4. do đó abc không chia hết cho 12.

Từ đó ta được abc chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 12.

Bài 30. Ta có $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}=\frac{(a+b)^2+(a+b)}{ab}-2$

Do $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}\in N\Rightarrow\frac{(a+b)^2+(a+b)}{ab}\in N\Rightarrow(a+b)^2+(a+b)=kab;k\in N$ (1)

Nếu d là ước chung của a và b thì

$a=md;b=nd(m,n\in N)\Rightarrow a+b=(m+n)d;ab=mnd^2$

$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow(m+n)^2d^2+(m+n)d=kmnd^2\Rightarrow m+n=\left[kmn-(m+n)^2\right]d=ld;l\in N$

$\Rightarrow a+b=ld^2\geq d^2\Rightarrow d\leq\sqrt{a+b}$. Bài toán được chứng minh.

Bài 31. Trước hết ta có nhận xét: Với số tự nhiên n

- Nếu $n=3k\pm1\Rightarrow n^2=9k^2\pm6k+1$
- Nếu $n=4p\pm1\Rightarrow n^2=16p^2\pm8p+1$
- Nếu $n=4p\pm2\Rightarrow n^2=16p^2\pm16p+4$

+ Nếu x, y, z đều không chia hết cho 3 thì x^2, y^2, z^2 đều chia cho 3 dư 1, khi đó x^2+y^2 chia cho 3 dư 2 và z^2 chia cho 3 dư 1, mâu thuẫn với $x^2+y^2=z^2$. Do đó trong hai số x, y tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3, suy $xy\,\vdots\,3$

+ Nếu x, y, z đều không chia hết cho 4 thì x^2, y^2, z^2 đều chia cho 4 dư 1 hoặc 4, khi đó xẩy ra các trường hợp sau

- Nếu x^2+y^2 chia cho 4 dư 2 và z^2 chia cho 4 dư 1, mâu thuẫn với $x^2+y^2=z^2$. Do đó trong hai số x, y tồn tại ít nhất một số chia hết cho 4, suy ra $xy\,\vdots\,4$

- Nếu x^2+y^2 chia hết cho 8 và z^2 chia cho 8 dư 4, mâu thuẫn với $x^2+y^2=z^2$. Do đó trong hai số x, y tồn tại ít nhất một số chia hết cho 4, suy ra $xy\,\vdots\,4$.

Vì vì $xy\,\vdots\,3$ và $xy\,\vdots\,4$, mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên ta được $xy\,\vdots\,12$

Bài 32.

+ Nếu $d<0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng

+ Nếu $d>0$. Giả sử $a=dm;\ b=dn$ (m, n là số nguyên dương)

Ta có $\frac{(a+b)^2+a+b}{ab}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}+2$ là số nguyên nên $a^2+b^2+a+b\,\vdots\,ab$

Do đó ta được

$$d^2m^2+d^2n^2+dm+dn \vdots \left(d^2mn\right) \Rightarrow d\left[d\left(m^2+n^2\right)+m+n\right] \vdots \left[d\left(dmn\right)\right]$$

$$\Rightarrow d\left(m^2+n^2\right)+m+n \vdots dmn \Rightarrow m+n \vdots d$$

$$\Rightarrow d \le m+n \Rightarrow d \le \frac{a+b}{d} \Rightarrow d^2 \le a+b \Rightarrow d \le \sqrt{a+b}$$

Như vậy d là số nguyên không vượt quá $\sqrt{a+b}$, mà $\left[\sqrt{a+b}\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\sqrt{a+b}$, do đó $d \le \left[\sqrt{a+b}\right]$

Bài 33.

a) Đặt $x^2=2a+b;\ y^2=2b+c;\ z^2=2c+a\ \left(x,y,z \in N\right)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z^2 \vdots 3$. Ta có $x^2+y^2+z^2=3\left(a+b+c\right) \vdots 3$ nên $x^2+y^2 \vdots 3$

Đặt $x=3t+r;\ y=3h+m\ \left(t,h \in N;\ r,m \in \left\{-1;0;1\right\}\right)$.

Ta có $x^2+y^2=\left[3\left(3t^2+3h^3+2tr+2hm\right)+r^2+m^2\right] \vdots 3 \Rightarrow r^2+m^2 \vdots 3$

Mà ta có $0 \le r^2+m^2 \le 2$ nên ta được $r^2+m^2=0 \Rightarrow m=r=0$

Do đó ta được $x \vdots 3;\ y \vdots 3$.Từ đó ta được $2a+b \vdots 3;\ 2b+c \vdots 3;\ 2c+a \vdots 3$.

Lại có $2a+b=3a-\left(a-b\right);\ 2b+c=3b-\left(b-c\right);\ 2c+a=3c-\left(c-a\right)$

Nên ta được $a-b \vdots 3;\ b-c \vdots 3;\ c-a \vdots 3$ suy ra $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right) \vdots 27$

b) Xét bội số $a=0;\ b=1;\ c=2$. Khi đó ta được $2a+b=1;\ 2b+c=4;\ 2c+a=4$ là các số chính phương. Mà ta lại có $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)=\left(-1\right).\left(-1\right).2=2$ không chia hết cho 27.

Vậy $a=0;\ b=1;\ c=2$ là bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 34. Ta có $2^{4n+1}=2.2^{4n}=2.16^n=2\left(15+1\right)^n=2\left(5k+1\right),\ \left(k \in N^*\right)$

Nên ta được $2^{4n+1}=10k+2$, do đó ta được

$$3^{2^{4n+1}}=3^{10k+2}=9.243^{2k}=9\left(22.11+1\right)^{2k}=9\left(11q+1\right),\ \left(q \in N^*\right)$$

Suy ra $3^{2^{4n+1}}+2=11\left(q+1\right)$ hay $3^{2^{4n+1}}+2$ chia hết cho 11.

Bài 35. Vì $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 4 nên $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn, suy ra cả ba số a, b, c cùng chẵn hoặc trong ba số a, b, c có một số chẵn và hai số lẻ

+ Trường hợp 1: Cả ba số a, b, c đều là số chẵn nên a, b, c cùng chia hết cho 2.

+ Trường hợp 2: Trong ba số a, b, c có một số chẵn và hai số lẻ, khi đó $a^2+b^2+c^2$ có dạng $\left(2k\right)^2+\left(2m+1\right)^2+\left(2n+1\right)^2$ với k,m,n là các số nguyên

Dễ thấy $\left(2k\right)^2+\left(2m+1\right)^2+\left(2n+1\right)^2=4\left(k^2+m^2+n^2\right)+4\left(k+m+n\right)+2$ chia 4 dư 2. Do đó trường hợp này không xẩy ra.

Vậy a, b, c cùng chia hết cho 2.

Bài 36. Gọi a và b là hai số bất kỳ trong 10 số nguyên dương liên tiếp với $a > b\left(a; b \in Z^{+}\right)$

Suy ra $1 \le a - b \le 9$.

Gọi n là ước chung của a và b, khi đó $a = n.x;\ b = n.y\left(n; x; y \in Z^{+}\right)$ (n, x, y là số nguyên dương).

Vì $a > b \Rightarrow x > y \Rightarrow x - y \ge 1 \Rightarrow 1 \le n.x - n.y \le 9 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \le x - y \le \frac{9}{n} \Rightarrow \frac{9}{n} \ge 1 \Leftrightarrow n \le 9$

Vậy trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Bài 37. Nhận xét: Nếu a, b là hai số nguyên dương thì $a^{2013} + b^{2013} \vdots (a+b)$.

Khi đó ta có

$$2\left(1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}\right) = \left(1^{2013} + n^{2013}\right) + \left(2^{2013} + (n-1)^{2013}\right) + ... + \left(n^{2013} + 1^{2013}\right) \vdots (n+1) \quad (1)$$

Mặt khác

$$2\left(1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}\right)$$
$$= \left(1^{2013} + (n-1)^{2013}\right) + \left(2^{2013} + (n-2)^{2013}\right) + ... + \left((n-1)^{2013} + 1^{2013}\right) + 2.n^{2013} \vdots n (2)$$

Do $(n, n+1) = 1$ và kết hợp với (1), (2) ta được $2\left(1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}\right)$ chia hết cho $n(n+1)$.

Bài 38. Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là $1;\ p;\ p^2;\ p^3;\ p^4$

Đặt $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$

Giả sử $S = n^2 (n \in Z) \Rightarrow 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4\ (1)$

Ta có $4p^4 + 4p^3 + p^2 < (2n)^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$$\Leftrightarrow \left(2p^2 + p\right)^2 < (2n)^2 < \left(2p^2 + p + 2\right)^2 \Leftrightarrow 4n^2 = \left(2p^2 + p + 1\right)^2\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

Thử lại với $p = 3$ ta thấy thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Bài 39. Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab}\ \left(a, b \in \mathbb{N};\ 0 < a \le 9;\ 0 \le b \le 9\right)$

Ta có $\overline{ab} \vdots 7$ hay $10a + b \vdots 7$.

Suy ra $(10a+b)^3 \vdots 7 \Leftrightarrow 1000a^3 + b^3 + 3.10ab(10a+b) \vdots 7 \Leftrightarrow 1001a^3 - a^3 + b^3 + 3.10ab(10a+b) \vdots 7$

Ta có $1001a^3 \vdots 7$ và $3.10ab(10a+b) \vdots 7$. Nên suy ra $b^3 - a^3 \vdots 7$

Bài 40. Từ giả thiết suy ra $a \equiv 1 \pmod 3, a = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$; $b \equiv 2 \pmod 3$, $b = 3q + 2 (q \in \mathbb{N})$.

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \pmod 3$ hay $A \equiv 4 \pmod 3$ (1)

Lại có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod 7$

$$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \pmod 7 \Rightarrow 9^b \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod 7.$$

Từ giả thiết ta còn suy ra $a \equiv 1 \pmod 7$, $b \equiv 1 \pmod 7$.

Dẫn đến $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \pmod 7$ hay $A \equiv 10 \pmod 7$.

Từ (1) suy ra $A \equiv 10 \pmod 3$ mà 3 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $A \equiv 10 \pmod{21}$.

Vậy A chia cho 21 dư 10.

Bài 41. Chứng minh nếu n là số nguyên dương thì $25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right)$ chia hết cho 65.

Ta có $65 = 5.13$, đặt $A = 25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right)$

Ta có $A = 25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right) = \left(25^n - 20^n\right) - \left(12^n - 7^n\right)$

Vì $\left(25^n - 20^n\right) \vdots 5$; $\left(12^n - 7^n\right) \vdots \left(12 - 7\right) \Rightarrow \left(12^n - 7^n\right) \vdots 5$ do đó A chia hết cho 5

Lại có $A = 25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right) = \left(25^n - 12^n\right) - \left(20^n - 7^n\right)$

Vì $\left(25^n - 12^n\right) \vdots \left(20 - 12\right) \Rightarrow \left(25^n - 7^n\right) \vdots 13$ và $\left(20^n - 7^n\right) \vdots \left(20 - 7\right) \Rightarrow \left(12^n - 7^n\right) \vdots 13$ do đó A chia hết cho 13.

Vì 5 và 13 là hai số nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho 65.

Bài 42. Gọi a, b, c là các chữ số cần tìm với $1 \le a, b, c \le 9$. Khi đó ta cần xác định a, b, c để $A = \overline{155a710b4c16}$ luôn chia hết cho 396.

Do a, b, c là các chữ số phân biệt nên ta có $1 + 2 + 3 \le a + b + c \le 7 + 8 + 9 \Leftrightarrow 6 \le a + b + c \le 24$.

Ta có $396 = 4.9.11$ mà 4, 9, 11 nguyên tố với nhau theo từng đôi một. Do đó ta cần tìm số A để A chia hết cho 4; 9; 11.

- Vì A có hai chữ số tận cùng là 16 nên A chia hết cho 4.
- Số A chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của A là $1 + 5 + 5 + 7 + 1 + 4 + 1 + a + b + c$ chia hết cho 9 hay $a + b + c + 3$ chia hết cho 9.

Kết hợp với điều kiện $6 \le a + b + c \le 24$ suy ra $a + b + c$ chỉ có thể là 6, 15, 24.

- Số A chia hết cho 11 khi và chỉ khi $\left(5 + a + 1 + b + c + 6\right) - \left(1 + 5 + 7 + 4 + 1\right)$ chia hết cho 11 hay $a + b + c - 6$ chia hết cho 11.

Kết hợp với điều kiện $6 \le a + b + c \le 24$ suy ra $a + b + c$ chỉ có thể là 6, 17.

Như vậy để A chia hết cho 9 và 11 thì $a + b + c = 6$. Do a, b, c khác nhau nên ta suy ra các bộ số $\left(a; b; c\right)$ thỏa mãn yêu cầu là $\left(1;2;3\right), \left(1;3;2\right), \left(2;1;3\right), \left(2;3;1\right), \left(3;1;2\right), \left(3;2;1\right)$.

Thử lại các các bộ số trên ta thay A chia hết cho 396.

Vậy để A chia hết cho 396 ta có thể thay các dấu * bởi các bộ số sau:

$\left(1;2;3\right), \left(1;3;2\right), \left(2;1;3\right), \left(2;3;1\right), \left(3;1;2\right), \left(3;2;1\right)$

Bài 43. Gọi 2014 số tự nhiên đã cho là $a_1, a_2, \cdots, a_{2014}$.

Xét dãy $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; ...; $S_{2014} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2014 ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu có một số hạng nào của dãy chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2014 thì vì có tất cả 2014 phép chia mà số dư chỉ gồm $1, 2, ..., 2013$ do đó theo nguyên lý Dirichle có ít nhất hai số hạng của dãy có cùng số dư khi chia cho 2014. Gọi hai số hạng đó là S_i và S_j.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le i < j \le 2014$ thì

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \text{ và } S_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_j$$

Lúc đó $S_j - S_i \vdots 2014 \Rightarrow a_{i+1} + \cdots + a_j \vdots 2014$ .Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 44. Chú ý rằng, với a là số nguyên lẻ ta có $(a-1)(a+1) \vdots 8$ (tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8) và $(a^2+1) \vdots 2$ nên $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 16$.

Khi đó, vì $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên lẻ nên ta có $A_n - n = (a_1^4 - 1) + (a_2^4 - 1) + \cdots (a_n^4 - 1) \vdots 16$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 45. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên ta được $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

+ Nếu $p = 3k+1 \Rightarrow (p+1)(p-1) = (3k+2).3k$ chia hết cho 3

+ Nếu $p = 3k+2 \Rightarrow (p+1)(p-1) = (3k+3)(3k+1)$ chia hết cho 3

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3

Mặt khác vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Suy ra $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Đặt $p-1 = 2n \Rightarrow p+1 = 2n+2$, ta có $(p+1)(p-1) = 2n(2n+2) = 4n(n+1)$

Do $n(n+1)$ chia hết cho 2 nên $4n(n+1)$ chia hết cho 8

Do đó $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau ta được $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Bài 46. Ta có $xy - 1 \vdots (x-1)(y-1)$ suy ra $xy - 1 \vdots (xy + 1 - x - y)$

Mà $(xy + 1 - x - y) \vdots (xy + 1 - x - y)$

Suy ra $[(x-1) + (y-1)] \vdots (x-1)(y-1) \Rightarrow \begin{cases} (y-1) \vdots (x-1) \\ (x-1) \vdots (y-1) \end{cases} \Rightarrow x = y$

Do đó ta được $x^2 - 1 \vdots (x-1)^2 \Rightarrow x+1 \vdots x-1 \Rightarrow 2 \vdots x-1 \Rightarrow x = 2;\ x = 3$

Từ đó ta được các cặp số thỏa mãn là $(2;\ 2), (3;\ 3)$

Bài 47. Ta có $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n-4)(n+2)(n+6) \vdots 125$

Vì $125 \vdots 5$ nên trong F tồn tại một thừa số chia hết chia 5

+ Nếu $n+2 \vdots 5$ thì $n-4 = n+2-6$ không chia hết cho 5 và $n+6 = n+2+4$ không chia hết cho 5 nên để F chia hết cho 125 thì $n+2 \vdots 125$ nên n bé nhất là 123

+ Nếu $n-4 \vdots 5$ thì $n+6=n-4+10$ chia hết cho 5 và $n+2=n-4+6$ không chia hết cho 5 nên để F chia hết cho 125 thì

Hoặc $n-4 \vdots 25$ nên n bé nhất là 4

Hoặc $n+6 \vdots 25$ nên n bé nhất là 19

Vậy để F chia hết cho 125 thì n bé nhất cần chọn là 4.

Bài 48.

+ Với $x=y$ ta có $z=1$. Vậy mọi bộ ba số $(x;\ x;\ 1)$ trong đó x là số nguyên dương tùy ý đều thỏa mãn

+ Với $x<y$, suy ra $x^2+2<xy+2 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{xy+2}<1$ (không thỏa mãn đề bài)

+ Với $x>y$. Giả sử bộ ba số nguyên dương $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn đề bài

Khi đó ta có $y(x^2+2) \vdots (xy+2)$ hay $[x(xy+2)-2(x-y)] \vdots (xy+2) \Rightarrow 2(x-y) \vdots (xy+2)$

Do đó tồn tại số k nguyên dương sao cho $2(x-y)=k(xy+2) \quad (1)$

Với $k \ge 2$, suy ra $x-y \ge xy+2 \Rightarrow (x+1)(y-1)+3 \le 0$ (vô lí)

Với $k=1$ ta có $2(x-y)=xy+2 \Rightarrow (x+2)(y-2)=-6$

Do x, y nguyên dương và $x>y$ suy ra $y=1$ và $x+2=6$ nên ta được $x=4;\ z=3$

Thử lại thỏa mãn đề bài

Vậy $(x;\ y;\ z)=(4;\ 1;\ 3)$ và các bộ số $(x;\ x;\ 1)$ trong đó x là số nguyên dương tùy ý là thỏa mãn đề bài

Bài 49. Đặt $A=\dfrac{m^4+n^2}{7^m-3^n}$. Dễ thấy 7^m và 3^n cùng là số lẻ nên 7^m-3^n là số chẵn.

Do đó để A là số nguyên thì $(m^4+n^2) \vdots (7^m-3^n)$, muốn vậy m và n phải cùng tính chẵn lẻ.

Ta xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét m và n cùng là số lẻ.

Khi đó ta có $7^m \equiv 3^n \equiv -1 \pmod 4$ do đó $7^m-3^n \vdots 4$

Mặt khác ta thấy $m^2-1=(m-1)(m+1)$ nên $m^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow m^4 \equiv 1 \pmod 4$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $n^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Do đó ta được $m^4+n^2 \equiv 2 \pmod 4$.

Từ đó suy ra m^4+n^2 không chia hết cho 7^m-3^n nên A không nguyên.

- Trường hợp 2: Xét m và n cùng là số chẵn.

Khi đó ta có $7^m \equiv 3^n \equiv 1 \pmod 8$, do đó để A nhận giá trị nguyên thì m^4+n^2 phải chia hết cho 8.

Mà $m^4 \vdots 8$, suy ra $n^2 \vdots 4$ nên ta được n chia hết cho 4.

Đặt $m = 2a; n = 4b$ với a, b là các số nguyên dương.

Từ đó ta được $A = \dfrac{m^4 + n^2}{7^m - 3^n} = \dfrac{16\left(a^4 + b^2\right)}{7^{2a} - 9^{2b}}$. Do A nhận giá trị nguyên và khác 0 nên $|A| \ge 1$.

Từ đó ta được $\left|\dfrac{16\left(a^4 + b^2\right)}{\left(7^a - 9^b\right)\left(7^a + 9^n\right)}\right| \ge 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{16\left(a^4 + b^2\right)}{7^a + 9^b}\right| \ge \left|7^a - 9^b\right|$.

Mặt khác $7^a - 9^b$ là số nguyên chẵn và $7^a \ne 9^b$ nên ta được $\left|7^a - 9^b\right| \ge 2$.

Từ đó suy ra $16\left(a^4 + b^2\right) \ge 2\left(7^a + 9^b\right) > 2\left(7^a + 7^b\right)$.

Gọi $c = \max\{a; b\}$ khi đó ta có $16c^4 + 16c^2 \ge 16a^4 + 16b^2 > 2\left(7^a + 7^b\right) > 2.7^c$

Ta sẽ chứng minh khi $c \ge 4$ thì $16c^4 + 16c^2 < 2.7^c$

Thật vậy, với $c = 4$ thì bất đẳng thức trên đúng.

Giả sử bất đẳng thức trên đúng với $c \ge 4$, khi đó ta có $16c^4 + 16c^2 < 2.7^c$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức trên đúng với $c + 1$, tức là ta cần chứng minh được

$$16(c+1)^4 + 16(c+1)^2 < 2.7^{c+1}$$

Ta có

$$2.7^c > 16c^4 + 16c^2 \Leftrightarrow 2.7^{c+1} > 7\left(16c^4 + 16c^2\right)$$

$$\Rightarrow 2.7^{c+1} - \left[16(c+1)^4 + 16(c+1)^2\right] > 7\left(16c^4 + 16c^2\right) - \left[16(c+1)^4 + 16(c+1)^2\right]$$

$$\Rightarrow 2.7^{c+1} - \left[16(c+1)^4 + 16(c+1)^2\right] > 16\left[c^3(c-4) + c\left(c^3 - 6\right) + c^4 - 2 + 3c^4\right] > 0$$

Do đó ta được $16(c+1)^4 + 16(c+1)^2 < 2.7^{c+1}$. Theo nguyên lý quy nạp thì bất đẳng thức trên được chứng minh.

Từ kết quả trên ta suy ra được $1 \le c \le 3$. Thử trực tiếp các kết quả trên ta được $a = b = 1$ thỏa mãn.

Từ đó ta suy ra được $m = 2; n = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số cần tìm là $(m; n) = (2; 4)$.

Bài 50. Giả sử cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn bài toán, khi đó ta đặt $\dfrac{x^4 + 2}{x^2y + 1} = a$ với $a \in N^*$.

Khi đó ta được $x^4 + 2 = a\left(x^2y + 1\right)$ hay $x^2\left(x^2 - ay\right) = a - 2$. Ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: Với $a = 1$, khi đó từ $x^2\left(x^2 - ay\right) = a - 2$ ta được $x^2\left(x^2 - y\right) = -1$.

Do x, y nguyên dương và $x^2 > 0$ nên ta được $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Thay vào biểu thức ban đầu ta được $(x; y) = (1; 2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $a = 2$, khi đó từ $x^2\left(x^2 - ay\right) = a - 2$ ta được $x^2\left(x^2 - 2y\right) = 0$.

Do x, y nguyên dương và $x^2 > 0$ nên ta được $x^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = 2y$, suy ra x là số nguyên dương chẵn. Từ đó ta được $x = 2k; y = 2k^2$ với k nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Với $a > 2$, khi đó từ $x^2\left(x^2 - ay\right) = a - 2$ ta được $a - 2 > 0$ và $a - 2 \vdots x^2$.

Nên ta được $a - 2 \ge x^2 \Rightarrow a > x^2 + 2 > x^2$, do đó $x^2 - ay < x^2 - x^2y < 0$.

Từ đó ta được $x^2\left(x^2 - ay\right) < 0$, điều này vô lí vì $a - 2 > 0$.

Do đó trường hợp này không tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $\left(x; y\right) = \left(1; 2\right), \left(2k; 2k^2\right)$ với k nguyên dương.

Bài 51. Dễ thấy $a = 222...2 = 222...20 + 2$ nên a chia 5 dư 2. Từ đó suy ra a^b chia 5 dư 2^b nên a^b và 2^b chia cho 5 có cùng số dư.

Tương tự $b = 333...3 = 333...30 + 3$ nên a chia 5 dư 3. Từ đó suy ra b^a chia 5 dư 3^a nên b^a và 3^a chia cho 5 có cùng số dư.

Như vậy $S = a^b + b^a$ và $2^b + 3^a$ có cùng số dư khi chia cho 5.

Lại có $b = 333...3 = 333...32 + 1 = 4k + 1$ với k là số nguyên dương.

Nên ta được $2^b = 2^{4k+1} = 2.2^{4k} = 2.16^k = 2\left(15 + 1\right)^k = 2.15m + 2, m \in N^*$

Từ đó suy ra 2^b chia 5 dư 2.

Mặt khác $a = 222...2 = 222...20 + 2 = 4q + 2$ với q là số nguyên dương.

Nên ta được $3^a = 3^{4q+2} = 3^2.3^{4q} = 9.81^q = 9\left(80b + 1\right) = 9.80b + 9 = 9.80b + 5 + 4$

Từ đó ta được 3^a chia 5 dư 4.

Suy ra $2^b + 3^a$ khi chia cho 5 có số dư là 1 nên $S = a^b + b^a$ khi chia cho 5 có số dư là 1.

Bài 52. Đặt $\dfrac{x^3 + 1}{y + 1} = \dfrac{a}{b}; \dfrac{y^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{c}{d}$, trong đó $a, b, c, d \in Z$ và $\left(a, b\right) = \left(c, d\right) = 1$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$ là số nguyên, nên ta suy ra được $\left(ad + bc\right) \vdots bd$

Suy ra ta được $\left(ad + bc\right) \vdots b$ nên $ad \vdots b$, mà ta có $\left(a, b\right) = 1$ nên suy ra $d \vdots b$.

Hoàn toàn tương tự ta được $b \vdots d$. Từ đó ta được $b = d$.

Lại có $\left(x^3 + 1\right) \vdots \left(x + 1\right); \left(y^3 + 1\right) \vdots \left(y + 1\right)$ nên $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d} = \dfrac{x^3 + 1}{y + 1}.\dfrac{y^3 + 1}{x + 1}$ là số nguyên, do đs $ac \vdots bd$.

Mà ta có $\left(a, b\right) = \left(c, d\right) = 1$ nên suy ra $b = d = 1$

Từ đó suy ra $\dfrac{x^3 + 1}{y + 1} \in Z; \dfrac{y^3 + 1}{x + 1} \in Z$ nên ta được $\left(x^3 + 1\right) \vdots \left(y + 1\right)$

Ta có $x^{2016}-1=\left(x^6\right)^{336}+1=\left(x^6-1\right)\left[\left(x^6\right)^{335}+\left(x^6\right)^{334}+\left(x^6\right)^{333}+...+1\right]$

Do $x^6-1=\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)$ nên $\left(x^6-1\right)\vdots\left(y+1\right)$

Từ đó ta suy ra được $\left(x^{2016}-1\right)\vdots\left(y+1\right)$.

Bài 53. Do x, y là các số hữu tỉ và x, y khác 0 nên ta đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{c}{d}$ trong đó $a,b,c,d\in Z;b,d>0$, đồng thời $\left(a,b\right)=\left(c,d\right)=1$.

Khi đó $x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bc}$. Do $x+y$ là số nguyên nên $\frac{ad+bc}{bd}\in Z\Rightarrow\left(ad+bc\right)\vdots bd$.

Từ đó ta được $\begin{cases}\left(ad+bc\right)\vdots b\\\left(ad+bc\right)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ad\vdots b\\bc\vdots d\end{cases}$. Vì $\left(a,b\right)=\left(c,d\right)=1$ nên $d\vdots b$ và $b\vdots d$, suy ra $b=d$

Lại có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$. Do $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ là số nguyên nên $\frac{ad+bc}{ac}\in Z\Rightarrow\left(ad+bc\right)\vdots ac$.

Từ đó ta được $\begin{cases}\left(ad+bc\right)\vdots a\\\left(ad+bc\right)\vdots c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ad\vdots c\\bc\vdots a\end{cases}$. Vì $\left(a,b\right)=\left(c,d\right)=1$ nên $c\vdots a$ và $a\vdots c$, suy ra $a=c$ hoặc $a=-c$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b}=-\frac{c}{d}$ nên $x=y$ hoặc $x=-y$.

- Với $x=y$ ta được $x=y=\frac{a}{b}$ nên $x+y=\frac{2a}{b}$. Do $x+y\in Z$ và $\left(a,b\right)=1$ nên $2\vdots b$. Từ đó ta được $b\in\left\{1;2\right\}$.

Lại có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2b}{a}$, do $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\in Z$ và $\left(a,b\right)=1$ nên $2\vdots a$, từ đó ta được $a\in\left\{\pm1;\pm2\right\}$.

Như vậy ta được các số x, y là $x=y\in\left\{\pm1;\pm2;\pm\frac{1}{2}\right\}$.

- Với $x=-y$. Khi đó ta được $x+y=0;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$ nên $x+y$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ đều là số nguyên.

Thử lại ta được các cặp số hữu tỉ thỏa mãn bài toán là

$$\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(-1;-1\right),\left(2;2\right),\left(-2;-2\right),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(t;-t\right);t\in Z$$

Bài 54. Do x, y là số nguyên dương nên $2xy-1>0$. Do $4x^2+6x+3$ chia hết cho $2xy-1$ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $\frac{4x^2+6x+3}{2xy-1}=m$.

Từ đó ta được $my=\frac{4x^2y+6xy+3y}{2xy-1}=2x+3+\frac{2x+3y+3}{2xy-1}$.

Do x, y là số nguyên dương và $2x+3y+3 \vdots (2xy-1)$ nên ta được $2xy-1<2x+3y+3$

Từ đó suy ra $2x(y-1) \le 3y+4$. Ta xét các trường hợp sau:

• Nếu $y=1$, khi đó ta được $m=2x+4+\dfrac{7}{2x-1}$

Do m là số nguyên dương nên $2x-1$ là ước dương của 7. Suy ra $2x-1 \in \{1;7\}$.

Từ đó ta được các cặp số thỏa mãn bài toán là $(x;y)=(1;1),(4;1)$.

• Nếu $y \ge 2$, khi đó từ $2x(y-1) \le 3y+4$ ta được $x \le \dfrac{3y+4}{2(y-1)} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2y-2} \le \dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}=5$.

Do x là số nguyên dương nên ta được $x \in \{1;2;3;4;5\}$.

+ Nếu $x=1$ thì ta được $m=\dfrac{13}{2y-1}$ là số nguyên và $2y-1 \ge 3$. Từ đó ta được $y=7$.

Do đó cặp số $(x;y)=(1;7)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $x=2$ thì ta được $m=\dfrac{31}{4y-1}$ là số nguyên và $4y-1 \ge 7$. Từ đó ta được $y=8$

Do đó cặp số $(x;y)=(2;8)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $x=3$ thì ta được $m=\dfrac{57}{6y-1}$ là số nguyên và $6y-1 \ge 11$ nên $6y-1=57$, không có giá trị y nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $x=4$ thì ta được $m=\dfrac{91}{8y-1}$ là số nguyên và $8y-1 \ge 17$ nên $8y-1=91$, không có giá trị y nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $x=5$ thì ta được $m=\dfrac{133}{10y-1}$ là số nguyên và $10y-1 \ge 19$. Từ đó ta được $y=2$

Do đó cặp số $(x;y)=(5;2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$(x;y)=(1;1),(4;1),(1;7),(2;8),(5;2)$.

Bài 55. Chú ý rằng $a \equiv b \pmod m$ có nghĩa là $a-b \vdots m$.

Vì 2011 là số nguyên tố và $(2,2011)=1$ nên theo định lí Fecmat nhỏ ta co $2^{2010} -1(\bmod 2011)$.

Hay $2^{2010}-1 \vdots 2011$.

Giả sử số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn 2^n-1 chia hết cho 2011. Khi đó $n \le 2010$.

Giả sử $2010=nq+r$ với q, r là số tự nhiên và $0 \le r < n$

Từ $2^n - 1(\text{mod } 2011)$ suy ra $2^{nq} \equiv 1(\text{mod } 2011)$

Mà ta có $2^{2010} - 1(\text{mod } 2011)$ nên ta được $2^{nq+r} - 1(\text{mod } 2011)$

Do đó ta được $2^{qn}(2^r - 1)\vdots 2011$. Mà do $(2^{qn}, 2011) = 1$ nên $(2^r - 1)\vdots 2011$.

Lại do $r < n$ và n là số nguyên dương nhỏ nhất nên từ $(2^r - 1)\vdots 2011$ ta được $r = 0$.

Từ đó suy ra n là ước của 2010. Mặt khác ta lại có $2^{10} - 1 = 1023 < 2011$ nên $n > 10$

Chú ý rằng $2010 = 2.3.5.67$ nên $n \in \{15; 30; 67; 134; 201; 335; 402; 670; 1005; 2010\}$.

Ta có $2^{15} \equiv 592(\text{mod } 2011)$ nên $2^{30} \equiv 592^2(\text{mod } 2011)$ hay $2^{30} \equiv 550^2(\text{mod } 2011)$

Từ đó ta lại được $2^{60} \equiv 550^2(\text{mod } 2011)$ hay $2^{60} \equiv 850(\text{mod } 2011)$

Do đó $2^{60}.2^7 \equiv 850.2^7(\text{mod } 2011)$ hay $2^{67} \equiv 206(\text{mod } 2011)$.

Nên ta được $2^{134} \equiv 206^2(\text{mod } 2011)$ hay $2^{134} \equiv 205(\text{mod } 2011)$

Và $2^{201} \equiv 206^3(\text{mod } 2011)$ hay $2^{201} \equiv 2010(\text{mod } 2011)$.

Ta cũng có $2^{335} \equiv 205.2010(\text{mod } 2011)$ nên $2^{335} \equiv 1806(\text{mod } 2011)$

Lại có $2^{402} \equiv 2010^2(\text{mod } 2011)$ hay $2^{402} \equiv 1(\text{mod } 2011)$, suy ra $(2^{402} - 1)\vdots 2011$

Vậy $n = 402$ là giá trị cần tìm.

Bài 56. Dễ thấy $xy \neq 1$. Ta xét các trường hợp sau

• Với $x = 1$ và $y \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được 4 chia hết cho $y - 1$ hay $y - 1$ là ước của 4. Chú ý rằng ước của 4 gồm 1; 2; 4 nên ta tìm được $y \in \{2; 3; 5\}$.

+ Với $x = 1$ và $y = 2$ ta được $A = 4$

+ Với $x = 1$ và $y = 3$ ta được $A = 2$

+ Với $x = 1$ và $y = 5$ ta được $A = 5$

• Với $y = 1$ và $x \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được $x^2 + x + 2$ chia hết cho $x - 1$ hay 4 chia hết cho $x - 1$, suy ra $x - 1$ là ước của 4 nên ta được $x \in \{2; 3; 5\}$.

+ Với $x = 2$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

+ Với $x = 3$ và $y = 1$ ta được $A = 7$

+ Với $x = 5$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

• Với $x \geq 2$ và $y \geq 2$, khi đó do $x^2 + x + 2$ chia hết cho $xy - 1$ nên ta được $y(x^2 + x + 2)$ chia hết cho $xy - 1$, từ đó suy ra $x + 2y + 1$ chia hết cho $xy - 1$.

Đặt $k = \dfrac{x + 2y + 1}{xy - 1}$, chú ý rằng do $x \geq 2$ và $y \geq 2$ nên ta được $xy - 1 \geq 3$.

+ Nếu $k = 1$ thì ta được $x + 2y + 1 = xy - 1 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 1) = 4$.

Giải phương trình tích trên ta được các nghiệm là $(x;y)=(3;5),(4;3)(6;4)$.

Khi đó ta tính được các giá trị tương ứng của A là 1; 2; 4.

+ Nếu $k\ge 2$, khi đó ta được $x+2y+1\ge xy-1\Leftrightarrow (x-2)(2y-1)\le 4$

Với $y\ge 3$ và $x\ge 2$ thì bất đẳng thức trên không xẩy ra, còn với $x=2$ và $y=2$ thì k không nhận giá trị nguyên dương.

Vậy các giá trị nguyên dương mà A nhận được là $A\in\{1;2;4;7;8\}$.

Bài 57.

a) $4x^2+8x+3$ chia hết cho $4xy-1$

Từ $4x^2+8x+3$ chia hết cho $4xy-1$ suy ra $y(4x^2+8x+3)\vdots(4xy-1)$

Do đó ta được $\left[x(4xy-1)+2(4xy-1)+(x+3y+2)\right]\vdots(4xy-1)$

Hay $(x+3y+2)\vdots(4xy-1)$.

Do $x+3y+2$ và $4xy-1$ là các số nguyên dương nên suy ra

$$4xy-1\le x+3y+2\Rightarrow x(4y-1)\le 3y+3$$

Do đó $x\le\dfrac{3y+3}{4y-1}=\dfrac{12y+13}{4(4y-1)}=\dfrac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4(4y-1)}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4.3}=2$

Do x là số nguyên dương nên ta được $x\in\{1;2\}$.

+ Với $x=1$, khi đó ta được $15\vdots(4y-1)$ nên ta được $y=1$ hoặc $y=4$

+ Với $x=2$, khi đó ta được $35\vdots(8y-1)$ nên ta được $y=1$.

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(1;1),(1;4),(2;1)$

b) $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$

Đặt $a=x-1;b=y-1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b$.

Do $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$ và $2xy-1$ là số lẻ nên $x-1;y-1$ là số lẻ, suy ra a và b là số lẻ.

Do x và y là số nguyên dương nên a và b là số nguyên dương.

Khi đó từ $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$ ta được $\left[2(a+1)(b+1)-1\right]\vdots ab\Rightarrow(2a+2b+1)\vdots ab$

Do a và b là các số nguyên dương nên từ trên ta được

$$ab\le 2a+2b+1\Leftrightarrow ab-2a-2b+4\le 5\Leftrightarrow(a-2)(b-2)\le 5$$

Chú ý rằng do a là các số lẻ nên $a-2$ là số lẻ, do đó $a-2\in\{-1;1;3;5\}$ nên $a\in\{1;3;5;7\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $a=1$, khi đó do $a\ge b$ và b nguyên dương nên ta suy ra được $b=1$.

Từ đó ta được $x = 2; y = 2$, thử lại ta thấy $(x; y) = (2; 2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $a = 3$, khi đó từ $(2a + 2b + 1) \vdots ab$ ta được $7 + 2b \vdots 3b$ suy ra $7 + 2b \vdots b \Rightarrow 7 \vdots b$.

Kết hợp với $a \geq b$ ta suy ra được $b = 1$.

Từ đó ta được $x = 4; y = 2$, thử lại ta thấy $(x; y) = (4; 2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Với $a = 5$, khi đó từ $(2a + 2b + 1) \vdots ab$ ta được $11 + 2b \vdots 5b$ suy ra $11 + 2b \vdots b \Rightarrow 11 \vdots b$.

Kết hợp với $a \geq b$ ta suy ra được $b = 1$.

Từ đó ta được $x = 6; y = 2$, thử lại ta thấy $(x; y) = (6; 2)$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 4: Với $a = 5$, khi đó từ $(2a + 2b + 1) \vdots ab$ ta được $15 + 2b \vdots 7b$ suy ra $15 + 2b \vdots b \Rightarrow 15 \vdots b$.

Kết hợp với $a \geq b$ ta suy ra được $b \in \{1; 3; 5\}$.

Từ đó tương ứng ta được $(x; y) = (8; 2), (8; 4), (8; 6)$ thử lại ta thấy $(x; y) = (8; 4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) = (2; 2), (4; 2), (2; 4), (8; 4), (4; 8)$.

c) $x^2 + 2$ chia hết cho $xy + 1$

Do $x^2 + 2$ chia hết cho $xy + 1$ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $x^2 + 2 = m(xy + 1)$

Hay ta được $x^2 - mxy = m - 2 \Leftrightarrow x(x - my) = m - 2$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $m = 1$, khi đó ta được $x(x - y) = -1$ nên ta được $x = 1; y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Nếu $m = 2$, khi đó ta được $x(x - 2y) = 0$. Do $x \neq 0$ nên suy ra $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$.

Do đó $x = 2k; y = k$ với k là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m > 2$, khi đó từ $x(x - my) = m - 2$ ta được $m - 2 \vdots x$ nên $m > x$.

Từ đó ta được $x - my < x - xy < 0$. Mặt khác ta lại có $x - my = \dfrac{m - 2}{x} > 0$, do đó ta được mâu thuẫn.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) = (1; 2), (2k; k)$ với k là số nguyên dương.

d) $x^3 + x$ chia hết cho $xy - 1$

Trước hết ta chứng minh x và $xy - 1$ nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, gọi $d = (x, xy - 1)$, khí đó ta được $x \vdots d; xy - 1 \vdots d$ nên ta được $xy - (xy - 1) \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Từ $x^3 + x$ chia hết cho $xy - 1$ ta được $x(x^2 + 1) \vdots (xy - 1)$.

Do $(x, xy-1)=1$ nên suy ra $x^2+1 \vdots xy-1$. Từ đó ta được $(x^2+1+xy-1) \vdots (xy-1)$

Hay ta được $x(x+y) \vdots (xy-1)$.

Lại do $(x, xy-1)=1$ nên ta suy ra được $(x+y) \vdots (xy-1)$

Khi đó tồn tại số nguyên dương z để $x+y=z(xy-1) \Leftrightarrow x+y+z=xyz$.

Như vậy ta đi tìm nghiệm nguyên dương cho phương trình $x+y+z=xyz$.

Chia hai vế của phương trình $x+y+z=x.y.z$ cho $xyz \neq 0$ ta được $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$. Khi đó $1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{3}{z^2}$

Suy ra $1 \leq \frac{3}{z^2}$, do đó ta được $z^2 \leq 3$ nên $z=1$. Thay $z=1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$x+y+1=xy \Leftrightarrow xy-x-y=1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=2$$

Từ $x \geq y$ nên ta có $x-1 \geq y-1 \geq 0$. Do đó từ $(x-1)(y-1)=2$ ta được $\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Do đó nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y;z)=(1;2;3)$ và các hoán vị.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$(x;y)=(1;2),(2;1),(1;3),(3;1),(2;3),(3;2)$.

Bài 58.

Cách 1. Ta có x^2-2 chia hết cho $xy+2$ nên $y(x^2-2)$ chia hết cho $xy+2$, khi đó

$x^2y-2y \vdots (xy+2) \Rightarrow x(xy-2)-2(x+y) \vdots (xy+2) \Rightarrow 2(x+y) \vdots xy+2$.

Do x và y là các số nguyên dương nên $x+y$ và $xy+2$ là các số nguyên dương.

Do đó từ $2(x+y) \vdots xy+2$ ta suy ra được $2(x+y) \geq y+2 \Leftrightarrow y(x-2) \leq 2x-2$.

Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Với $x=1$, khi đó ta được $-1 \vdots (y+2)$, trường hợp này không xẩy ra do $y+2 \geq 3$.
- Với $x=2$, khi đó ta được $2 \vdots 2(y+2)$ hay $1 \vdots (y+1)$, trường hợp này không xẩy ra do $y+1 \geq 2$.
- Với $x \geq 3$, khi đó từ $y(x-2) \leq 2x-2$ ta được $y \leq \frac{2x-2}{x-2}=2+\frac{2}{x-2} \leq 4$

Từ đó ta được $0 \leq y \leq 4$, khi đó suy ra $-2 \leq \frac{2}{x-2} \leq 2$. Kết hợp với $x \geq 3$ ta suy ra được $x \in \{3;4\}$.

+ Khi $x=3$ thì ta được $7 \vdots (3y+2) \Rightarrow 3y+2=7 \Rightarrow 3y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$, loại.

+ Khi $x=4$ thì ta được $14 \vdots (4y+2) \Rightarrow 7 \vdots (2y+1) \Rightarrow 2y+1=7 \Rightarrow y=3$, nhận.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(4;3)$

Cách 2. Ta có x^2-2 chia hết cho $xy+2$ nên $y(x^2-2)$ chia hết cho $xy+2$, khi đó

$$x^2y-2y\,\vdots\,(xy+2)\Rightarrow x(xy-2)-2(x+y)\,\vdots\,(xy+2)\Rightarrow 2(x+y)\,\vdots\,xy+2$$

Khi đó ta được $2(x+y)=k(xy+2)\left(k\in N^*\right)$. Từ đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $k=1$, khi đó ta có $2(x+y)=xy+2\Leftrightarrow(x-2)(y-2)=2$

Do x và y nguyên dương nên ta có $\begin{cases}x-2=2\\y-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-2=1\\y-2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$

Thử lại ta thấy $(x;y)=(4;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $k\ge 2$, khi đó từ $2(x+y)=k(xy+2)$ ta suy ra

$$2(x+y)\ge 2(xy+2)\Rightarrow x+y\ge xy+2\Rightarrow(x-1)(y-1)+1\le 0$$

Do x và y nguyên dương nên bất đẳng thức cuối cùng không có x và y thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(4;3)$.

Bài 59. Giả sử sáu số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5;a_6$ thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ta có $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$ và $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=79$

Ta có nhận xét, nếu $a_4\ge 12$ thì $a_5\ge 2a_4=24$ và $a_6\ge 2a_5=48$.

Khi đó $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6>12+24+48>79$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó ta được $a_4<12$.

Để ý là trừ số đầu tiên thì các số còn lại trong dãy số trên là bội của số đứng trước nó, do đó ta có một cách chọn bốn số đầu tiên là $a_1=1;a_2=2;a_3=4;a_4=8$.

Ta có $a_5=ma_4=8m$ và $a_6=na_5=8mn$ với m, n là các số nguyên dương lớn hơn 1.

Mặt khác ta lại có $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=79$. Từ đó ta được

$$1+2+4+8+8m+8mn=79\Rightarrow m(1+n)=8$$

Giải phương trình nghiệm nguyên trên kết hợp với điều kiện số thứ sáu của dãy lớn nhất ta được $m=2;n=3$ nên ta được $a_6=48$.

Vậy dãy số cần tìm là 1; 2; 4; 8; 16; 48.

Bài 60. Đặt $b_1=a_1;b_2=a_1+a_2;...;b_n=a_1+a_2+...+a_n$.

Vì $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các sô nguyên dương nên ta được $1\le b_1<b_2<...<b_n=2n-1$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu n số nguyên dương $b_1;b_2;...;b_n$ khi chia cho n có các số dư khác nhau thì tồn tại một số chia hết cho n. Không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là b_k với $k\in\{1;2;3;...;n\}$

Khi đó ta có $1 \le b_k \le 2n-1$ nên ta được $b_k = n$. Do đó ta được $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = n$.

+ Nếu n số nguyên dương $b_1; b_2; ...; b_n$ khi chia cho n có hai số dư bằng nhau. Không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là b_k và b_l với $k, l \in \{1; 2; 3; ...; n\}$ và $k > l$

Từ đó ta được $b_k - b_l \vdots n$ hay ta được $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_l) \vdots n$

Từ đó ta được $a_{l+1} + a_{l+2} + ... + a_k \vdots n$.

Vậy luôn tồn tại một số số trong các số nguyên dương trên có tổng bằng n

Bài 61. Ta có $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$. Ta cần chứng minh

$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$ chia hết cho 8 và 5 và 5 và 8 nguyên tố cùng nhau.

Theo giả thiết $(n, 10) = 1$ nên n không chia hết cho 2 và 5

Do đó $n = 2k+1$ $(k \in N)$ thay vào biểu thức trên ta được

$(2k+1-1)(2k+1+1)(4k^2+4k+1+1) = 8k(k+1)(2k^2+2k+1) \vdots 8$

Mà $n^2 \equiv 1; 4 \ (\text{mod} 5)$ $\forall n$, vì n không chia hết cho 5 nên loại trường hợp $n^2 \equiv 0 (\text{mod} 5)$

Với $n^2 \equiv 4 (\text{mod} 5)$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5 ta có

Với $n^2 \equiv 1 (\text{mod} 5) \Rightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0 (\text{mod} 5)$ nên $n - 1 \vdots 5$ hoặc $n + 1 \vdots 5$

Vậy ta đã có $n^4 - 1$ chia hết cho 40.

Bài 62. Chia biểu thức A cho $n - 3$ ta thu được

$$\begin{aligned} A &= n^4 - 5n^3 - 2n^2 - 10n + 4 = (n-3)(n^3 - 2n^2 - 8n - 34) - 98 \\ &= (n-3)\left[(n-3)(n^2+n-5) - 49\right] - 98 \\ &= (n-3)^2(n^2+n-5) - 49(n-1) \end{aligned}$$

Ta xét các trường hợp sau

- Khi n chia 7 dư 3 thì $n - 3$ chia hết cho 7 nên $(n-3)^2$ chia hết cho 49.

Từ đó ta được $A = (n-3)^2(n^2+n-5) - 49(n-1)$ chia hết cho 49.

- Khi n chia 7 không dư 3, khi đó $n = 7t + r$ với t, r là các số tự nhiên và $r \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$.

Khi đó dễ thấy $n - 3 = 7t + r - 3$ với $r - 3 \ne 0$ nên $n - 3$ không chia hết cho 7.

Lại có $n^2 + n - 5 = (7t + r)^2 + 7t + r - 5 = 49t^2 + 21t + r^2 + r - 5$.

Với $r \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$ thì $r^2 + r - 5$ không chi hết cho 7 nên suy ra $n^2 + n - 5$ không chia hết cho 7.

Từ đó suy ra $A = (n-3)^2(n^2+n-5) - 49(n-1)$ chia hết cho 49.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 63. Ta phát biểu bài toán dưới dạng: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2015 viết được thành $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất.

Ta có $2015=4.503+3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n\le 503$.

Xét $n=503$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i=1;2;...;n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1\ge 9$. Khi đó

$a_1+a_2+...+a_n\ge 9+4(503-1)=4.502+9>2015$

Xét $n=503-1$, khi đó ta có $2015=4.503+3=4.500+15=4.500+6+9$. Do đó n lớn nhất là $n=502$.

Bài 64. Trước hết ta có các nhận xét:

+ Với x, y là các số nguyên thì ta luôn có $(8x+1)(8y+1)$ chia 8 dư 1.

+ Với $k=2n$ là số nguyên chẵn thì 3^k chia 8 dư 1 và 5^k chia 8 dư 1.

Thậy vậy, ta có $3^k=3^{2n}=9^n=(8+1)^n=8a+1$ với a là số nguyên.

$$5^k=5^{2n}=25^n=(24+1)^n=8b+1 \text{ với b là số nguyên.}$$

+ Với $k=2n+1$ là số nguyên lẻ thì 3^k chia 8 dư 3 và 5^k chia 8 dư 5.

Thậy vậy, ta có $3^k=3^{2n+1}=3.9^n=3.(8+1)^n=3.8a+3$ với a là số nguyên.

$$5^k=5^{2n+1}=5.25^n=5.(24+1)^5=5.8b+5 \text{ với b là số nguyên.}$$

Áp dụng các nhận xét trên cho bốn trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu m là số chẵn và n là số chẵn, khi đó ta có

$3^m+5^n=8a+1+8b+1=8(a+b)+2$ không chia hết cho 8, với a, b là các số nguyên.

- Trường hợp 2: Nếu m là số chẵn và n là số lẻ, khi đó ta có

$3^m+5^n=8a+1+8b+5=8(a+b)+6$ không chia hết cho 8, với a, b là các số nguyên.

- Trường hợp 2: Nếu m là số lẻ và n là số chẵn , khi đó ta có

$3^m+5^n=8a+5+8b+1=8(a+b)+6$ không chia hết cho 8, với a, b là các số nguyên.

- Trường hợp 2: Nếu m là số lẻ và n là số lẻ, khi đó ta có

$3^m+5^n=8a+3+8b+5=8(a+b)+8$ không chia hết cho 8, với a, b là các số nguyên.

Như vậy với m và n là các số nguyên dương lẻ thì 3^m+5^n chia hết cho 8.

Khi đó ta có $3^n=8c+3$ và $5^m=8d+5$ nên ta được $3^n+5^m=8(c+d)+8$ cũng chia hết cho 8.

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 65. Giả sử n là số tự nhiên chia 17 dư 10, khi đó $n\ne 0$ và n có dạng $n=17k+10$ với $k\in N$.

Gọi 100 số tự nhiên được chọn là $17k_1+10;17k_2+10;17k_3+10;...;17k_{100}+10$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $k_1 < k_2 < k_3 < ... < k_{100}$.

Nếu $k_{100} \geq 118$ thì khi đó $17k_{100} + 10 \geq 17.118 + 10 = 2016$. Do đó $k_{100} \leq 117$.

Ta sẽ chứng minh $k_3 \leq 20$. Thật vậy, giả sử $k_3 \geq 21$.

Khi đó từ $k_1 < k_2 < k_3 < ... < k_{100}$ suy ra $k_4 \geq k_3 + 1; k_5 \geq k_4 + 1; k_6 \geq k_5 + 1; ...; k_{100} \geq k_{99} + 1$

Nên từ $k_3 \geq 21$ suy ra $k_4 \geq 21 + 1 = 22; k_5 \geq 22 + 1 = 23; k_6 \geq 23 + 1 = 24; ...; k_{100} \geq 117 + 1 = 118$, điều này trái với $k_{100} \geq 118$. Do đó $k_3 \leq 20$.

Vì $k_3 \leq 20$ nên suy ra $k_2 \leq 19; k_1 \leq 18$.

Với kết quả trên ta chon ba số nhỏ nhất trong 100 số trên là $17k_1 + 10; 17k_2 + 10; 17k_3 + 10$

Khi đó ta được $17k_1 + 10 + 17k_2 + 10 + 17k_3 + 10 \leq (17.18 + 10) + (17.19 + 10) + (17.20 + 10) = 999$

Vậy ta luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999. bài toán được chứng minh.

Bài 66. Ta có $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = (x - y)(x - 2y + 1)$ và 97 là số nguyên tố nên ta được

$$\left(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y\right) \vdots 97 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y \vdots 97 \\ x - 2y + 1 \vdots 97 \end{array}\right.$$

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $x - y \vdots 97$ khi đó $x \equiv y \pmod{97}$, từ đó ta được

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 16x + 22y \equiv 6x \pmod{97} \Rightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod{97}$$

Do đó suy ra $xy - 12x + 15y \equiv 0 \pmod{97}$ hay $xy - 12x + 15y$ chia hết cho 97.

- Trường hợp 2: Với $x - 2y + 1 \vdots 97$ khi đó $x \equiv 2y - 1 \pmod{97}$. Từ đó ta được

$2x^2 - 3xy + y^2 - 16x + 22y \equiv 3(y^2 - 5y + 6) \equiv 3(y - 2)(y - 3) \equiv 0 \pmod{97}$

+ Nếu $y - 2 \equiv 0 \pmod{97} \Leftrightarrow y \equiv 2 \pmod{97} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{97}$

Suy ra $xy - 12x + 15y \equiv 2.3 - 12.3 + 15.2 \equiv 0 \pmod{97}$ hay $xy - 12x + 15y$ chia hết cho 97.

+ Nếu $y - 3 \equiv 0 \pmod{97} \Leftrightarrow y \equiv 3 \pmod{97} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{97}$

Suy ra $xy - 12x + 15y \equiv 5.3 - 12.5 + 15.3 \equiv 0 \pmod{97}$

Bài 67. Giả sử a, b nguyên dương và $\begin{cases} 2a + 1 \vdots b \\ 2b + 1 \vdots a \end{cases}$

Khi đó ta có $(2a + 1)(2b + 1) \vdots ab \Rightarrow (2a + 2b + 1) \vdots ab \Rightarrow 2a + 2b + 1 = kab \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

Suy ra ta được k, a, b đều lẻ.

Vì $a \geq 1, b \geq 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow a + b \leq ab + 1 \Rightarrow 2a + 2b + 1 \leq 2ab + 3 \leq 5ab$

Kết hợp với $2a + 2b + 1 = kab$ ta được $kab \leq 5ab$ nên suy ra $k \leq 5$.

Do k là số tự nhiên lẻ nên đến đây ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $k=5 \Rightarrow 2a+2b+1=5ab$, khi đó từ $2a+2b+1=2ab+3=5ab$ ta suy ra được $3ab=3 \Rightarrow a=b=1$. Rõ ràng $a=b=1$ thỏa mãn $2a+1 \vdots b$ và $2b+1 \vdots a$.
- Trường hợp 2: Với $k=3$, không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b$, khi đó ta có

$$3ab=2a+2b+1 \le 5a \Rightarrow 3b \le 5 \Rightarrow b=1 \Rightarrow 3a=2a+3 \Rightarrow a=3$$

Rõ ràng $b=1; a=3$ thỏa mãn $2a+1 \vdots b$ và $2b+1 \vdots a$.

- Trường hợp 3: Với $k=1$, $k=3$, không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b$, khi đó ta có

$$ab=2a+2b+1 \le 5a \Rightarrow b \le 5 \Rightarrow b \in \{1;3;5\}$$

+ Với $b=1$, khi đó đẳng thức $ab=2a+2b+1$ trở thành $a=2a+3$ vô lý

+ Với $b=3$, khi đó đẳng thức $ab=2a+2b+1$ trở thành $3a=2a+6+1 \Rightarrow a=7$.

Rõ ràng $b=3; a=7$ thỏa mãn $2a+1 \vdots b$ và $2b+1 \vdots a$.

+ Với $b=5$, khi đó đẳng thức $ab=2a+2b+1$ trở thành $5a=2a+10+1 \Rightarrow a=\frac{11}{3}$ (loại)

Vậy xét đến vai trò của a và b ta được các cặp số nguyên dương cần tìm là

$$(a;b)=(1;1),(1;3),(3;1),(7;3),(3;7)$$

Bài 68. Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia hết cho $n^3+2012n$.

Ta $n^3+2012n=\left(n^3-n\right)+2013n=n(n-1)(n+1)+2013n$.

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3.

Suy ra $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 3, lại có mà 2013 chia hết cho 3 nên $n^3+2012n$ chia hết cho 3.

Mặt khác $2014^{2014}+1=(2013+1)^{2014}+1=2013k+2$ với k là số tự nhiên

Do đó $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia cho 3 dư 2. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy không có số nguyên nào thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho.

Bài 69. Bổ đề: Cho x, y là các số tự nhiên và số nguyên tố p có dạng $p=3k+2$ thì

$$x^3 \equiv y^3 \pmod p \Leftrightarrow x \equiv y \pmod p.$$

Thật vậy, ta có $x \equiv y \pmod p \Rightarrow x^3 \equiv y^3 \pmod p$, đúng.

Với $x^3 \equiv y^3 \pmod p \Rightarrow x^{3k} \equiv y^{3k} \pmod p$.

Với x, y cùng chia hết cho p thì hiển nhiên đúng.

Với $(x,p)=(y,p)=1$ ta có $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow x^{3k+1} \equiv y^{3k+1} \pmod p$

$\Rightarrow x.x^{3k} \equiv y.y^{3k} \pmod p \Rightarrow x \equiv y \pmod p$ vì $x^{3k} \equiv y^{3k} \pmod p$.

Áp dụng bổ đề, ta có

$$P(x) \equiv P(y) \pmod{11} \Leftrightarrow (x-1)^3+11(x-1)+10 \equiv (y-1)^3+11(y-1)+10 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 \equiv (y-1)^3 \pmod{11} \Leftrightarrow x-1 \equiv y-1 \pmod{11} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{11}.$$

Do đó $P(x) \equiv P(y) (\bmod 11) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod 11)$.

Suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}$, trong 11 giá trị $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+10)$, có duy nhất một giá trị chia hết cho 11. Do đó, trong các số $P(1), P(2), \ldots, P(99)$ có đúng 9 số chia hết cho 11, còn $P(0) = -2$ không chia hết cho 11.

Vậy có đúng 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 70. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với n là số chẵn, khi đó $n = 2k$ với k nguyên dương.

Khi đó ta có $M = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = 2k.16^k + 9^k$.

Ta có 16 và 9 cùng dư với 2 chia 7 nên 16^k và 9^k có cùng số dư với 2^k khi chia cho 7

Do đó M cùng dư với $(2k.2^k + 2^k) = 2^k.(2k+1)$ khi chia cho 7 nên $2k+1$ chia hết cho 7 hay k chia 7 dư 3, suy ra ta được $k = 7p + 3$ với p là số tự nhiên, từ đó ta được $n = 14p + 6$.

- Trường hợp 2: Với n là số lẻ, khi đó $n = 2k + 1$ với k nguyên dương

Khi đó ta có $M = (2k+1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 4(2k+1).16^k + 3.9^k$

Do đó ta được M cùng dư với $(k+4).2^k + 3.2^k = (k+7).2^k$ khi chia cho 7.

Do đó k chia hết cho 7 hay $k = 7q$ với q là số tự nhiên. Từ đó ta được $n = 14q + 1$.

Vậy $n = 14p + 6$ hoặc $n = 14q + 1$, với p và q là các số tự nhiên.

Bài 71. Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Suy ra nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Vì $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) + (z^2 - x^2) = 0$ nên

$$\begin{aligned}&(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 = 3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)\\ &= 3(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x).\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}&x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz\\ &= (x^2y + y^2x) + z^2(x+y) + (2xyz + y^2z + x^2z)\\ &= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + zx + zy)\\ &= (x+y)[x(y+z) + z(y+z)] = (x+y)(y+z)(z+x)\end{aligned}$$

Suy ra ta được $P = 3(x-y)(y-z)(z-x) \in \mathbb{Z}$.

Trong ba số nguyên dương x, y, z luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử đó là x và y, khi đó ta được $x - y \,\vdots\, 2$. Do đó ta được $P = 3(x-y)(y-z)(z-x) \,\vdots\, 6$

Bài 72. Biến đổi giả thiết $\dfrac{x^2 - 1}{2} = \dfrac{y^2 - 1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$

Vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 5 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 \vdots 5$

Vì số chính phương chia 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 8 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 \vdots 8$

Do 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên ta được $x^2 - y^2 \vdots 40$

Bài 73.

- Xét $n = 1$ thì mọi số nguyên tố p đều thỏa mãn.
- Xét $p = 2$ và $n \geq 2$, khi đó từ $n \leq 2p$ ta được $n \leq 4$, suy ra $n \in \{2; 3; 4\}$.

+ Với $n = 2$ ta có $(2-1)^2 + 1$ chia hết cho 2.

+ Với $n = 3$ ta có $(2-1)^3 + 1$ không chia hết cho 3.

+ Với $n = 4$ ta có $(2-1)^4 + 1$ không chia hết cho 4.

- Xét $n \geq 2$ và $p \geq 3$. Khi đó p là số lẻ nên $(p-1)^n + 1$ là số lẻ và là bội của n^{p-1} nên n là số tự nhiên lẻ, do đó ta được $n < 2p$.

Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Khi đó do $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1} ta được $(p-1)^n + 1$ chia hết cho q. Từ đó suy ra $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q$ và $(p-1; q) = 1$.

Do n, q đều lẻ nên $(n; q-1) = 1$ nên tồn tại $u, v \in \mathbb{N}^*$ sao cho $un - v(q-1) = 1$.

Khi ấy u lẻ và $(p-1)^{un} = (p-1)(p-1)^{v(q-1)} \Rightarrow (-1)^u \equiv (p-1)1^v \pmod q \Rightarrow p \equiv 0 \pmod q$

Suy ra p chia hết cho q, mà do p, q là các số nguyên tố nên $q = p$.

Từ đó do $n < 2p$ ta suy ra được $n = p$

Vậy p^{p-1} là ước của $(p-1)^p + 1 = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k p^k = p^2 \left(\sum_{k=2}^{p} C_p^k (-1)^{p-k} p^{k-2} + 1 \right)$

Do mỗi số hạng của $\sum_{k=2}^{p} C_p^k (-1)^{p-k} p^{k-2}$ đều chia hết cho p nên $p - 1 \leq 2 \Rightarrow p \leq 3$. Bởi vậy $n = p = 3$.

Vậy cặp số thỏa mãn bài toán là $(n; p) = (2; 2), (3; 3), (1; p)$ với p là số nguyên tố.

Chủ đề 2
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG, SỐ LẬP PHƯƠNG

Bài 1. Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^2+391 là số chính phương.

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A=(n-2010)(n-2011)(n-2012)$ là một số chính phương.

Bài 3. Tìm các số nguyên x để $\sqrt{199-x^2-2x}+2$ là một số chính phương chẵn.

Bài 4. Tìm số nguyên dương n sao cho $\frac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương .

Bài 5. Tìm số tự nhiên n lớn nhất không vượt quá 2012 sao cho $M=26n+17$ là một số chính phương.

Bài 6. Tìm các số nguyên tố p sao cho $\sqrt{1+p+p^2+p^3+p^4}$ là số hữu tỷ

Bài 7. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên ($S_1=2,\ S_2=2+3,...,\ S_3=2+3+5,....$). Chứng minh rằng trong dãy số $S_1,S_2,S_3,...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương .

Bài 8. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 9. Tìm số nguyên x để $\sqrt{x^2+x+3}$ là số hữu tỉ.

Bài 10. Cho x, y là các số nguyên dương và x^2+2y là số chính phương. Chứng minh rằng x^2+y bằng tổng của hai số chính phương.

Bài 11. Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ đều là số chính phương.

Bài 12. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n+2015$ và $n+2199$ đều là các số chính phương.

Bài 13. Tìm các số nguyên k để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Bài 14. Tìm tất cả số nguyên x để x^2+x+1 là số chính phương

Bài 15. Tìm số nguyên dương n sao cho $n^6+n^4-n^3+1$ là số chính phương

Bài 16. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho 2^m+3^n là một số chính phương.

Bài 17. Cho số tự nhiên n sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Bài 18. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là một số chính phương.

Bài 19. Tìm cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn x^2+3y và y^2+3x đều là số chính phương.

Bài 20. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 3^n+n^2 là một số chính phương.

Bài 21. Tồn tại hay không số tự nhiên n lẻ sao cho $n^{11}+199$ là một số chính phương

Bài 22. Cho các số nguyên dương a, b, c là thỏa mãn $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$ là số chính phương. Chứng minh rằng ba số $ab+1; bc+1; ca+1$ đều là số chính phương.

Bài 23. Tồn tại hay không các số nguyên dương a, b, c sao cho $a^2+b+c; b^2+c+a; c^2+a+b$ đều là các số chính phương.

Bài 24. Chứng minh rằng $2^{2p}+2^{2q}$ không thể là số chính phương với p và q là các số nguyên không âm.

Bài 25. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2n+1$ và $3n+1$ là số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.

Bài 26. Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không thể là số chính phương.

Bài 27. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu 2n là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

Bài 28. Cho a và b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu ab là số chẵn thì ta luôn tìm được số nguyên c để $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương.

Bài 29. Cho số nguyên dương $n>1$ và số nguyên tố p thỏa mãn $(p-1)\vdots n$ và $(n^3-1)\vdots p$. Chứng minh rằng $4p-3$ là một số chính phương.

Bài 30. Chứng minh rằng nếu n là một lập phương đúng thì n^2+3n+3 không thể là một lập phương đúng.

Bài 31. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2-p+1 là lập phương đúng của một số tự nhiên.

Bài 32. Cho các số nguyên x, y dương thỏa mãn $A=\dfrac{x^2+y^2+30}{xy}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng A là lũy thừa bậc 5 của một số.

Bài 33. Tìm số tự nhiên n để số 3^n-1 là lập phương của một một số tự nhiên.

Bài 34. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại số nguyên dương n mà số A sau là lũy thừa bậc 5 của một số nguyên dương: $A=2+n+n^2+n^3+...+n^{p-1}$

Bài 35. Cho số nguyên dương n có đúng k ước nguyên dương là $d_1,d_2,...,d_k$ thỏa mãn điều kiện $d_1+d_2+...+d_k+k=2n+1$. Chứng minh rằng $\dfrac{n}{2}$ là số chính phương.

Bài 36. Tìm số nguyên tố p và số nguyên dương n sao cho p^n là tổng lập phương của hai số nguyên dương liên tiếp.

Bài 37. Với số tự nhiên n tùy ý cho trước. Chứng minh rằng số $m=n(n+1)...(n+7)+7!$ không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Bài 38. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $2x^2+x=3y^2+y$. Chứng minh các số sau đều là số chính phương: $x-y; 2x+2y+1; 3x+3y+1$.

Bài 39. Cho a, b là số hữu tỷ thoả mãn $a^2+b^2=4-\left(\dfrac{ab+2}{a+b}\right)^2$. Chứng minh $\sqrt{ab+2}$ là số hữu tỉ

Bài 40. Giả sử m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^3 + m = 12n^3 + n$. Chứng minh rằng $m - n$ là lập phương của một số nguyên.

Bài 41. Tìm tất cả các số nguyên dương n chỉ có các ước nguyên tố là 2 và 5 thỏa mãn $n + 25$ là một số chính phương.

Bài 42. Tìm các tam giác vuông có độ dài các cạnh là một nguyên dương và diện tích tam giác vuông đó là một số chính phương.

Bài 43. Chứng minh rằng nếu số 2n là tổng của hai số chính phương(lớn hơn 1) phân biệt thì $n^2 + 2n$ là tổng của bốn số chính phương(lớn hơn 1) phân biệt.

Bài 44. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2$ chia hết cho $ab + 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là số chính phương.

Bài 45. Cho a, b, c là các sô thực dương thỏa mãn $0 < a^2 + b^2 - abc \le c$. Khi đó $a^2 + b^2 - abc$ là số chính phương.

Bài 46. Cho các số nguyên thỏa mãn $A = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab}{2}$ là số chính phương.

Chứng minh rằng $a = b = c$.

Bài 47. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện biểu thức A nhận giá trị nguyên với $A = \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+d} + \dfrac{d}{d+a}$. Chứng minh rằng tích $abcd$ là một số chính phương.

Bài 48. Viết các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999 sau đó sắp xếp các số đó theo môt thứ tự bất kì ta được một số tự nhiên. Chứng minh rằng số mới được tạo thành không thể là một lũy thừa của 2.

Bài 49. Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{x - 17}{x - 9}$ là bình phương của một phân số

Bài 50. Tìm số nguyên dương x để $\dfrac{x - 37}{x + 43}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Đặt $a^2 = n^2 + 391$ với a là số tự nhiên khác 0.

Khi đó ta được $(a - n)(a + n) = 391$, do đó $a - n;\ a + n$ là ước tự nhiên của 391.

Mà $a - n > 0;\ a + n > a - n$, nên ta được $\begin{cases} a + n = 391 \\ a - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 196 \\ n = 195 \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm là $n = 195$.

Bài 2.

Ta xét các trường hợp sau

+ Xét $n = 2001$ hoặc $n = 2011$ hoặc $n = 2012$ thì đều thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Xét $n \ne 2001;\ n \ne 2011;\ n \ne 2012$, khi đó

- Nếu n lẻ thì $(n-2010;\ n-2011)=(n-2011;\ n-2012)=(n-2010;\ n-2012)=1$. Do đó để tích là số chính phương thì $n-2001;\ n-2011;\ n-2012$ là ba số chính phương. Nhưng $n-2011;\ n-2012$ là hai số nguyên liên tiếp nên không thể cùng là số chính phương.

Nếu n chẵn thì $(n-2010;n-2012)=2;(n-2010;n-2011)=(n-2011;n-2012)=1$. Do đó để tích la số chính phương thì

$$\begin{cases} n-2010=2a^2 \\ n-2011=b^2 \\ n-2012=2c^2 \end{cases},\ \text{Với } a,b,c\in N^*;(a;c)=1$$

Suy ra $2(c^2-a^2)=2 \Leftrightarrow (c-a)(c+a)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} c-a=1 \\ c+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=1 \end{cases}$, trường hợp này loại

Vậy $n=2010;\ n=2011;\ n=2012$ là các số cần tìm.

Bài 3. Gọi số chính phương chẵn là $(2t)^2$ với $t\in N$

Ta có

$$\sqrt{199-x^2-2x}+2=(2t)^2 \Leftrightarrow \sqrt{200-(x+1)^2}+2=4t^2$$
$$\Rightarrow 4t^2\le 2+\sqrt{200} \Rightarrow 4t^2\le 16 \Rightarrow t^2\le 4 \Rightarrow 0\le t\le 2$$

Vì $t\in N$ nên ta có các trường hợp sau

+ Với $t=0$ phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $t=1$, giải phương trình (1) được hai nghiệm $x_1=13;x_2=-15$

+ Với $t=2$, giải phương trình (1) được hai nghiệm $x_1=1;x_2=-3$

Vậy các số nguyên cần tìm là $x=-15;\ x=-3;\ x=1;\ x=13$

Bài 4. Đặt $\dfrac{n(2n-1)}{26}=q^2 \Leftrightarrow n(2n-1)=26q^2$ với q là số tự nhiên

Do vế phải là số chẵn và $2n-1$ là số lẻ nên n phải là số chẵn. Đặt $n=2k\ (k\in N)$.

Từ đó ta được $k(4k-1)=13q^2$. Nhận thấy $(k;\ 4k-1)=1$ nên ta đươc

$$\begin{cases} k=u^2 \\ 4k-1=13v^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=13u^2 \\ 4k-1=v^2 \end{cases}$$

+ Xét trường hợp $\begin{cases} k=u^2 \\ 4k-1=13v^2 \end{cases}$, khi đó ta được $4k=13v^2+1=12v^2+v^2+1$

Từ đó suy ra $v^2+1\,\vdots\,4$ hay v^2 chia 4 dư 3, điều này vô lí. Do đó trương hợp này không xẩy ra

+ Xét trường hợp $\begin{cases} k=13u^2 \\ 4k-1=v^2 \end{cases}$, khi đó ta được $4k=v^2+1$, tương tự như trên thò trường hợp này cũng không xẩy ra.

Vậy không tìm được n thỏa mãm yêu cầu bài toán

Bài 5. Đặt $26n+17=k^2\,(k\in Z)\Rightarrow n=\dfrac{k^2-17}{26}\le 2012\Rightarrow k\le 228$ và k là số lẻ

Khi đó ta có các trường hợp sau

+Với $k=227$, ta có $n=\dfrac{227^2-17}{26}\notin\mathbb{N}$ (loại)

+ Với $k=225$, ta có $n=\dfrac{225^2-17}{26}\notin\mathbb{N}$ (loại)

+ Với $k=223$, ta có $n=\dfrac{223^2-17}{26}=1912$

Vậy với số tự nhiên lớn nhất $n=1912$ thì $M=26n+17$ là một số chính phương.

Bài 6. Ta có $\sqrt{1+p+p^2+p^3+p^4}$ là số hữu tỷ khi $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2,\ n\in\mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow 4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=4n^2 \quad (1)$$
$$\Rightarrow p^2+4p^3+4p^4<4n^2<4+4p+4p^2+4p^3+4p^4+5p^2$$
$$\Leftrightarrow \left(2p^2+p\right)^2<\left(2n\right)^2<\left(2p^2+p+2\right)^2\Leftrightarrow 2p^2+p<2n<2p^2+p+2$$

Do đó ta được $\Rightarrow 2n=2p^2+p+1$. Thế vào (1) ta được

$$4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=\left(2p^2+p+1\right)^2\Leftrightarrow p^2-2p-3=0$$

Giải phương trình trên ta được $p=-1$ (loại) và $p=3$

Vậy với $p=3\Rightarrow\sqrt{1+p+p^2+p^3+p^4}=11$ là số hữu tỉ.

Bài 7. Giả sử số nguyên tố thứ n là p_n. Giả sử tồn tại số tự nhiên m để

$S_{m-1}=k^2;\ S_m=l^2\ \left(k;\, l\in N^*\right)$

Vì $S_1=2,\ S_2=2+3=5,\ S_3=2+3+5=10,\ S_4=2+3+5+7=17$, không phải là các số chính phương nên $m>4$. Ta có $p_m=S_m-S_{m-1}=\left(l-k\right)\left(l+k\right)$.

Vì p_m là số nguyên tố nên $\begin{cases} l-k=1\\ l+k=p_m\end{cases}$

Suy ra $p_m=2l-1=2\sqrt{S_m}-1\Rightarrow S_m=\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2\ \ (*)$

Vì $m>4$ nên

$$S_m\le\left(1+3+5+7+\ldots+p_m\right)+2-1-9$$
$$=1^2-0^2+2^2-1^2+3^2-2^2+\ldots+\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2=\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$$

Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy không tồn tại số thự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 8. Nếu $2p+1$ là lập phương của 1 số tự nhiên thì số đó phải là số lẻ. Giả sử

$$2p+1=(2m+1)^3 \Leftrightarrow 2p+1=8m^3+12m^2+6m+1 \Leftrightarrow p=m(4m^2+6m+3)$$

Rõ ràng để p là số nguyên tố thì $m=1$ hay $p=13$. Thử lại $2.13+1=27=3^3$ đúng.

Vậy chỉ có 1 số nguyên tố duy nhất thoả điều kiện đề bài là $p=13$.

Bài 9. Ta có $\sqrt{x^2+x+3}$ là số hữu tỉ khi x^2+x+3 là một số chính phương do x nguyên

Đặt $x^2+x+3=k^2,(k\in\mathbb{Z})$. Suy ra $4x^2+4x+12=4k^2 \Leftrightarrow (2k+2x+1)(2k-2x-1)=11$

Vì số 11 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}2k+2x+1=11\\2k-2x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\k=3\end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}2k+2x+1=1\\2k-2x-1=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\k=3\end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}2k+2x+1=-11\\2k-2x-1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\k=-3\end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}2k+2x+1=-1\\2k-2x-1=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\k=-3\end{cases}$

Vậy các giá trị cần tìm là $x=2;\ x=-3$

Bài 10. Đặt $x^2+2y^2=k^2\ (k\in N)$ suy ra $2(x^2+y)=k^2+x^2$

Do đó k^2+x^2 là số chẵn nên k^2 và x^2 cùng tính chẵn, lẻ hay k và x cùng tính chẵn, lẻ

Suy ra $x+k;\ x-k$ cùng chẵn, lẻ.

Đặt $k+x=2p;\ k-x=2q\ (p;\ q\in N)$ tự nhiên)

Từ đó ta được $k=p+q;\ x=p-q$

Do đó ta được $2(x^2+y)=(p+q)^2+(p-q)^2=2(p^2+q^2) \Rightarrow x^2+y=p^2+q^2$.

Vậy x^2+y bằng tổng của hai số chính phương.

Bài 11. Đặt $n+5=x^2;\ n+30=y^2\ (x;y\in\mathbb{N},\ x;y>0)$,

$$y^2-x^2=25 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=1.25$$

Lại có $y-x<y+x$ nên $\begin{cases}y-x=1\\y+x=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13\\x=12\end{cases}$

Thay vào ta tính được $n=139$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 12. Giả sử a và b là các số tự nhiên sao cho $n+2015=a^2;\ n+2199=b^2$.

Suy ra $(b-a)(b+a)=184$ hay $(b-a)(b+a)=2^3.23$

Vì $b-a$ và $b+a$ là các số có cùng tính chẵn lẻ và $b-a<b+a$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} b-a=2 \\ b+a=92 \end{cases} (I) \text{ và } \begin{cases} b-a=4 \\ b+a=46 \end{cases} (II)$$

+ Trường hợp thứ nhất $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a=45 \\ b=47 \end{cases} \Rightarrow n=10.$ Thỏa mãn.

+ Trường hợp thứ hai $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a=21 \\ b=25 \end{cases} \Rightarrow n=-1574<0.$ Không thỏa mãn.

Vậy $n=10$ là số cần tìm

Bài 13. Tìm các số nguyên k để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Đặt $M=k^4-8k^3+23k^2-26k+10$. Ta có

$$M=\left(k^4-2k^2+1\right)-8k\left(k^2-2k+1\right)+9k^2-18k+9$$
$$=\left(k^2-1\right)^2-8k\left(k-1\right)^2+9\left(k-1\right)^2=\left(k-1\right)^2.\left[\left(k-3\right)^2+1\right]$$

M là số chính phương khi và chỉ khi $\left(k-1\right)^2=0$ hoặc $\left(k-3\right)^2+1$ là số chính phương.

+ Trường hợp 1: $\left(k-1\right)^2=0 \Leftrightarrow k=1$.

+ Trường hợp 2: $\left(k-3\right)^2+1$ là số chính phương, đặt $\left(k-3\right)^2+1=m^2$ $\left(m\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow m^2-\left(k-3\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(m-k+3\right)\left(m+k-3\right)=1$

Vì $m,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-k+3\in\mathbb{Z}, m+k-3\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} m-k+3=1 \\ m+k-3=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-k+3=-1 \\ m+k-3=-1 \end{cases}$.

Giải ra ta được $k=3$

Vậy $k=1$ hoặc $k=3$ thì $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương

Bài 14. Đặt $x^2+x+1=y^2$ $\left(y\in Z\right)$. Phương trình được viết lại thành $x^2+x+1-y^2=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x, ta có $\Delta=4y^2-3$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương

Nên $4y^2-3=k^2\left(k\in N\right)\Leftrightarrow\left(2y-k\right)\left(2y+k\right)=3$, mà $2y+k>2y-k$ nên ta có các trường hợp sau

+ Với $\begin{cases} 2y+k=3 \\ 2y-k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ k=1 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} 2y+k=-1 \\ 2y-k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ k=1 \end{cases}$

Thay $y=1;\ y=-1$ vào phương trình trên ta được $x=0;\ x=-1$.

Bài 15. Xét $n=1$ ta được $A=2$ và $n=2$ ta được $A=73$ đều không phải là số chính phương

Xét $n>2$ ta có $A=n^6+n^4-n^3+1$ là số chính phương nên $4A=n^6+4n^4-4n^3+4$ là số chính phương. Ta có $4A=\left(2n^3+n-1\right)^2+4-\left(n-1\right)^2$

+ Nếu $n=3$ thì $4-\left(n-1\right)^2=0$ nên $A=\left(\frac{2n^3+n-1}{2}\right)^2=28^2$ là số chính phương

+ Nếu $n>3$ ta có $4-\left(n-1\right)^2<0$ nên $4A<\left(2n^3+n-1\right)^2$

Mà $4A-\left(2n^3+n-2\right)^2=4n^3-n^2+4n>0$ nên $\left(2n^3+n-1\right)^2>4A>\left(2n^3+n-2\right)^2$

Do đó với $n>3$ thì A không thể là số chính phương.

Vậy với $n=3$ thì A là một số chính phương.

Bài 16. Giả sử $2^m+3^n=a^2$ với $a\in Z$. Dễ dàng nhận ra a là số lẻ nên a^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1.

Ta lại có $2^m+3^n\equiv 2^m\equiv\left(-1\right)^m\left(\bmod 3\right)$ nên $a^2\equiv\left(-1\right)^m\left(\bmod 3\right)$.

Từ đó suy ra m phải là số chẵn. Do đó ta suy ra được $2^m\,\vdots\,4$.

Ta có $2^m+3^n\equiv 3^n\equiv\left(-1\right)^n\left(\bmod 4\right)$ mà a^2 chia 4 dư 0 hoặc dư 1 nên suy ra n cũng là số chẵn.

Đặt $n=2k, k\in N^*$. Khi đó ta được $2^m+3^n=a^2\Leftrightarrow 2^m=a^2-3^{2k}\Leftrightarrow 2^m=\left(a-3^k\right)\left(a+3^k\right)$

Từ đó ta suy ra $a-3^k=2^s; a+3^k=2^r$ với $r>s\ge 1, r+s=m$.

Suy ra $2.3^k=2^r-2^s=2^s\left(2^{r-s}-1\right)$, do đó ta được $s=1$ nên $2^{r-1}-1=3^k$.

Ta có $r+1=m$ nên r là số lẻ, suy ra $r-1$ là số chẵn.

Do đó $2^{r-1}-1=3^k\Leftrightarrow\left(2^{\frac{r-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}}+1\right)=3^k$

Ta có $\left(2^{\frac{r-1}{2}}+1\right)-\left(2^{\frac{r-1}{2}}-1\right)=2$ nên một trong hai thừa số không chia hết cho 3.

Từ đó ta suy ra được $2^{\frac{r-1}{2}}-1=1\Rightarrow r=3$. Đến đây ta được $k=1$.

Vậy cặp số nguyên dương $\left(m;n\right)=\left(4;2\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 17. Giả sử $\frac{n^2-1}{3}=a\left(a+1\right)$ với a là một số tự nhiên. Từ đó ta được

$$n^2=3a^2+3a+1\Rightarrow 4n^2-1=12a^2+12a+3\Rightarrow\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)=3\left(2a+1\right)^2$$

Do $2n-1$ và $2n+1$ là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp nên ta có hai trường hợp sau

- Trường hợp 1: $\begin{cases}2n-1=3p^2\\2n+1=q^2\end{cases}$

Từ đó ta được $q^2=3p^2+2$ hay q^2 chia 3 dư 2, điều này vô lí vì số chính phương chia 3 dư 0 hoặc dư 1. Do đó trường hợp này không xảy ra.

- Trường hợp 2: $\begin{cases} 2n-1=p^2 \\ 2n+1=3q^2 \end{cases}$

Từ đó ta được p là số lẻ, nên ta đặt $p=2k+1$, với k là một số tự nhiên.

Khi đó $2n-1=(2k+1)^2 \Leftrightarrow 2n=4k^2+4k+2 \Leftrightarrow n^2=2k^2+2k+1 \Leftrightarrow n^2=k^2+(k+1)^2$.

Vậy ta có n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Bài 18. Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$ ta được $ab+bc+ca=1$

Ta có $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Hoàn toàn tương tự ta được $b^2+1=(b+c)(a+b); c^2+1=(c+a)(b+c)$

Do đó ta được $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.

Do đó $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là một số chính phương.

Bài 19. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x=y$, khi đó ta cần tìm x sao cho $x^2+3x=k^2$ với k là một số nguyên dương.

Ta có $x^2+3x=k^2 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9=4k^2+9 \Leftrightarrow (2x+3)^2-(2k)^2=9$

Hay ta được $(2x-2k+3)(2x+2k+3)=9$.

Chú ý rằng $2x+2k+3>2x-2k+3$ nên từ phương trình trên ta được $\begin{cases} 2x+2k+3=9 \\ 2x-2k+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=2 \end{cases}$

Từ đó ta được $(x;y)=(1;1)$ thảo mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $x \neq y$, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $x<y$.

Đặt $y^2+3x=a^2$, với a là số nguyên dương. Khi đó ta có $y^2<y^2+3x=a^2<y^2+3y<(y+2)^2$.

Do đó ta được $a^2=(y+1)^2$ hay $y^2+3x=(y+1)^2 \Leftrightarrow 3x=2y+1 \Leftrightarrow y=\frac{3x-1}{2}$.

Lại do x^2+3y là số chính phương nên ta đặt $x^2+3y=b^2$ với b là số nguyên dương.

Từ đó ta được $x^2+3.\frac{3x-1}{2}=b^2 \Leftrightarrow 2x^2+9x-3=2b^2 \Leftrightarrow (4x-4b+9)(4x+4b+9)=105$

Chú ý là $4x+4b+9>4x-4b+9$ nên giải phương trình trên ta được $x=1$ hoặc $x=11$

+ Với $x=1$ ta suy ra được $y=1$, trường hợp này loại do $x<y$.

+ Với $x=11$ ta suy ra được $y=16$, trường hợp này ta được $(x;y)=(11;16)$ thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(1;1),(11;16),(16;11)$.

Bài 20. Giả sử $3^n+n^2=m^2$ với m là một số nguyên dương.

Ta có $3^n+n^2=m^2 \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=3^n$, do đó ta được $\begin{cases} m-n=3^k \\ m+n=3^{n-k} \end{cases}$

Do $m+n>m-n$ nên $n-k>k \Rightarrow n-2k>0$ hay $n-2k\ge 1$. Ta xét các trường hợp

- Trường hợp 1: Nếu $n-2k=1$, khi đó từ hệ phương trình trên ta được

$$2n=3^{n-k}-3^k=3^k\left(3^{n-2k}-1\right)=2.3^k \Rightarrow n=3^k=2k+1$$

Dễ dàng chứng minh được với $k\ge 2$ thì $3^k=(2+1)^k>2^k+1>2k+1$

Từ đó để $3^k=2k+1$ thì $k=0$ hoặc $k=1$, từ đó ta tìm được $n=1$ hoặc $n=3$.

- Trường hợp 2: Nếu $n-2k\ge 2$, khi đó ta được $k\le n-k-2$ nên $3^k\le 3^{n-k-2}$

Do đó $2n=3^{n-k}-3^k\ge 3^{n-k}-3^{n-k-2}=3^{n-k-2}\left(3^2-1\right)=8.3^{n-k-2}$

Do k là số nguyên dương nên $n-k-2\ge 1$, do đó ta được $3^{n-k-2}=(2+1)^{n-k-2}\ge 1+2(n-k-2)$

Từ đó suy ra $2n\ge 8\left[1+2(n-k-2)\right]$ hay ta được $8k+12\ge 7n$.

Mặt khác ta lại có $n\ge 2k+2$ nên $7n\ge 14k+14$. Do đó ta được $8k+12\ge 14k+14$, điều này vô lí.

Do đó trong trường hợp này không có số tự nhiên n thỏa mãn.

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 21. Trước hết ta có hai nhận xét:

+ Với x, y là các số nguyên dương và p là số nguyên tố dạng $p=4k+3$ thỏa mãn $x^2+y^2 \vdots p$, khi đó x và y cùng chia hết cho p.

+ Cho hai số nguyên dương x và y nguyên tố cùng nhau. Khi đó mọi ước nguyên tố của x^2+y^2 đều có dạng $p=4k+3$.

Trở lại bài toán: Giả sử tồn tại số tự nhiên n lẻ sao cho $n^{11}+199$ là một số chính phương.

Đặt $n^{11}+199=m^2$ với m là một số tự nhiên. Do n là số lẻ nên n chia 4 có số dư là 1 hoặc 3.

Nếu n chia 4 dư 3, khi đó $n^{11}+199=(4k-1)^{11}+199$ chia 4 có số dư là 2 hay m^2 chia 4 có số dư là 2, điều này vô lý. Do đó n chia 4 có số dư là 1.

Ta có $n^{11}+199=m^2 \Leftrightarrow m^2+43^2=n^{11}+2^{11}=(n+2)\left(n^{10}-2n^9+...-512n+2^{10}\right)$

Hay ta được $m^2+43^2=(n+2)b$ với $b=n^{10}-2n^9+...-512n+2^{10}$.

Vì n chia 4 có số dư là 1 nên $b=n^{10}-2n^9+...-512n+2^{10}$ có số dư là 3 khi chia cho 4.

Từ đó suy ra b có một ước nguyên tố là p và p chia 4 dư 3 hay p có dạng $p=4k+3$.

Theo nhận xét thứ nhất thì $m^2+43^2 \vdots b \Rightarrow m^2+43^2 \vdots p$ nên ta được $43 \vdots p$ suy ra $p=43$.

Nếu $n+2 \vdots 43$ thì n chia 43 có số dư là -2. Từ đó ta được

$b=n^{10}-2n^9+4n^8-8n^7+16n^6-32n^5+64n^4-128n^3+256n^2-512n+2^{10}$ chia 43 dư 8.

Điều này vô lí vì b chia hết cho 43. Do đó $n+2$ không chia hết cho 43.

Ta có $m^2+43^2=(n+2)b \vdots 43 \Rightarrow m^2 \vdots 43 \Rightarrow m \vdots 43$, từ đó ta được $m^2+43^2 \vdots 43^2 \Rightarrow (n+2)b \vdots 43^2$.

Mà ta có $n+2$ không chia hết cho 43. Nên suy ra $b \vdots 43^2$ hay $b = 43^2 a$ với $a \in N$ và $(2,a)=1$.

Hơn nữa vì m chia hết cho 43 n33n $m = 43q, q \in N$. Do đó ta được

$$(n+2)b = m^2 + 43^2 = 43^2(q^2+1) \Leftrightarrow (n+2).43^2 a = 43^2(q^2+1) \Leftrightarrow q^2+1 = (n+2)a$$

Mà ta có $(1,q)=1$ nên theo nhận xét thứ hai thì q^2+1 không có ước nguyên tố nào dạng $4k+3$.

Nhưng do n chia 4 dư 1 nên $n+2$ chia 4 dư 3 hay $n+2$ có dạng $4k+3$. Điều này mâu thuận.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 22. Trong các bộ số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán ta xét bộ số $(a;b;c)$ sao cho $a+b+c$ có giá trị nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát ta chọn $c = \max\{a;b;c\}$.

Dễ thấy $a=b=c=1$ không thỏa mãn bài toán nên $c = \max\{a;b;c\} > 1$

Gọi t là số thỏa mãn phương trình bậc hai ẩn t sau

$$t^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca+ta+tb+tc) - 4abct - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 2t(a+b+c+2abc) + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca) - 4 = 0$$

Ta nhân thấy phương trình bậc hai trên tươngđương với ba phương trình sau

$$(a+b-c-t)^2 = 4(ab+1)(ct+1)$$
$$(a+c-b-t)^2 = 4(ac+1)(bt+1)$$
$$(b+c-a-t)^2 = 4(bc+1)(at+1)$$

Giả phương trình bậc hai trên ta được $t_{1,2} = a+b+c+2abc \pm 2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}$.

Do $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$ là số chính phương nên t nhận các giá trị nguyên.

Kết hợp ba phương trình trên ta được $4^3(ab+1)(ac+1)(bc+1)(ct+1)(bt+1)(at+1)$ là số chính phương, do đó $(ct+1)(bt+1)(at+1)$ là số chính phương.

Lại có $at+1 \ge 0; bt+1 \ge 0; ct+1 \ge 0$ nên $t \ge \frac{-1}{a}; t \ge \frac{-1}{b}; t \ge \frac{-1}{c}$. Do đó $t \ge \frac{-1}{\max\{a;b;c\}} > -1$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $t=0$, khi đó từ phương trình bậc hai ta được

$$(a+b+c)^2 = 4(ab+bc+ca)+4 \Leftrightarrow (a+b-c)^2 = 4(ab+1)$$

Suy ra $ab+1$ là số chính phương.

Chứng minh goàn toán tương tự ta được $bc+1; ca+1$ là các số chính phương.

- Nếu $t>0$, khi đó do $a+b+c$ có giá trị nhỏ nhất nên ta được $t \ge c$ và t chỉ nhận một trong hai giá trị $t_{1,2} = a+b+c+2abc \pm 2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}$

Mà theo định lí Vi – et ta có

$$t_1 t_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca) - 4 \le c^2 - a(2c-a) - b(2c-b) < c^2.$$

Điều này dẫn đến mâu thuân. Nên trường hợp này không có giá trị t thỏa mãn.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 23. Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b, c để $a^2+b+c; b^2+c+a; c^2+a+b$ đều là các số chính phương.

Khi đó do a, b, c là các số nguyên dương nên ta có $a^2+b+c>a^2$

Do đó ta được $a^2+b+c\ge(a+1)^2$ hay ta có $a^2+b+c\ge a^2+2a+1 \Leftrightarrow b+c\ge 2a+1$

Hoàn toàn tương tự ta được $c+a\ge 2b+1; a+b\ge 2c+1$.

Từ đó ta được $2(a+b+c)\ge 2(a+b+c)+3 \Leftrightarrow 0\ge 3$, điều này vô lí.

Vậy không tồn tại các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 24.

- Xét trường hợp $p=q$, khi đó $2^{2p}+2^{2q}=2.2^{2p}=2^{2p+1}$ không phải là số chính phương.
- Xét trường hợp $p\ne q$, Khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $p>q\ge 0$.

Khi đó ta được $2^{2p}+2^{2q}=4^p+4^q=4^q\left(4^{p-q}+1\right)$.

Dễ thấy $4^q=\left(2^q\right)^2$ là số chính phương. Ta cần chứng minh $4^{p-q}+1$ không phải là số chính phương.

Thật vậy, giả sử $4^{p-q}+1$ là số chính phương.

Do $p>q$ nên $4^{p-q}+1$ là số lẻ và $4^{p-q}+1>1$, do đó ta đặt $4^{p-q}+1=(2n+1)^2$, với n là một số nguyên dương.

Khi đó ta được $4^{p-q}+1=4n(n+1)+1$ hay $4^{p-q-1}=4n(n+1)$.

Từ đó suy ra 4^{p-q-1} chia hết cho n và $n+1$

Do n là số nguyên dương nên $n(n+1)>1$, do đó một trong hai số n và $n+1$ là số lẻ.

Do đó 4^{p-q-1} chia hết cho một số lẻ, khi đó $4^{p-q-1}=1$ nên $1\,\vdots\, n(n+1)$, điều này vô lí.

Từ đó suy ra $4^{p-q}+1$ không thể là số chính phương.

Vậy $2^{2p}+2^{2q}$ không thể là số chính phương.

Bài 25. Giả sử số nguyên dương n thỏa mãn $2n+1$ và $3n+1$ là số chính phương.

Đặt $2n+1=x^2$ và $3n+1=y^2$ với x, y là các số nguyên dương.

Từ cách đặt trên suy ra x là số lẻ và $2n=x^2-1 \Rightarrow 2n=(x-1)(x+1)$.

Do x là số lẻ nên $(x-1)(x+1)\,\vdots\,4$ nên ta được $2n\,\vdots\,4 \Rightarrow n\,\vdots\,2$ hay n là số chẵn.

Do n là số chẵn nên $3n+1$ là số lẻ, từ đó suy ra y là số lẻ.

Ta lại có $3n+1=y^2 \Rightarrow 3n=(y-1)(y+1)$.

Chú ý rằng tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8 nên ta được $(y-1)(y+1)\,\vdots\,8 \Rightarrow 3n\,\vdots\,8$

Mà 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên suy ra n chia hết cho 8.

Để ý rằng một số chính phương khi chia cho 5 có thể có số dư là 0; 1; 4.

Cũng theo cách đặt trên ta được $2n+1+3n+1=x^2+y^2 \Rightarrow 5n+2=x^2+y^2$

Do đó ta được x^2+y^2 chia 5 dư 2, từ đó suy ra x^2 và y^2 chia cho 5 cùng có số dư là 1.

Tờ đó ta lại có $y^2-x^2 \vdots 5$ hay $(3n+1)-(2n+1) \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5$.

Mà 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên suy ra $n \vdots 40$. Bài toán được chứng minh.

Bài 26. Ta sử dụng phương pháp phản chứng để cứng minh bài toán.

Giả sử b^2-4ac là một số chính phương, khi đó ta đặt $b^2-4ac=k^2, k \in N^*$.

Từ đó ta được $4ac=b^2-k^2$. Ta có

$$4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac=400a^2+40ab+b^2-k^2$$
$$=(20a+b)^2-k^2=(20a+b+k)(20a+b-k)$$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $c>0$ nên suy ra $ac>0$, do đó từ $4ac=b^2-k^2$ ta suy ra được $b>k$.
Từ đó dẫn đến $20a+b+k>20a+b-k>20a$.

Từ trên ta suy ra được $\overline{abc}=\dfrac{(20a+b+k)(20a+b-k)}{4a}=m.n$

Do $20a+b+k>4a$ và $20a+b-k>4a$ nên ta suy ra được $m>1$ và $n>1$.

Suy ra $\overline{abc}$ không phải là một số nguyên tố. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều giả sử trên là sai hay b^2-4ac không thể là số chính phương.

Bài 27. Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt $2n=a^2+b^2$ với $a, b \in N^*$.

Từ đó suy ra a^2+b^2 là số chẵn nên a và b có cùng tính chẵn lẻ.
Do đó $a-b$ và $a+b$ là các số chẵn.
Đặt $a+b=2m; a-b=2k$ với m và k là các số nguyên dương.

Khi đó ta được $a=m+k; b=m-k$. Do đó từ $2n=a^2+b^2$ ta được

$$2n=(m+k)^2+(m-k)^2 \Rightarrow 2n=m^2+2mk+k^2+m^2-2mk+k^2=2(m^2+k^2)$$

Do đó ta được $n=m^2+k^2$ hay n là tổng của hai số chính phương.

Bài 28. Do ab là số chẵn nên ít nhất một trong hai số a và b là số chẵn. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Cả hai số a và b đều là số chẵn. Khi đó a^2 và b^2 cùng chia hết cho 4.

Đặt $a^2+b^2=4k$ với k là một số tự nhiên. Khi đó ta chọn $c=k-1$.

Thế thì $a^2+b^2+c^2=4k+(k-1)^2=(k+1)^2$ hay $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương.

- Trường hợp 2: Trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ.

Suy ra trong hai số a^2 và b^2 có một số chia hết cho 4 và một số chia 4 có số dư là 1.

Do đó ta được $a^2+b^2=4k+1$ với k là một số tự nhiên. Khi đó ta chọn $c=2k$.

Thế thì $a^2+b^2+c^2=4k+1+\left(2k\right)^2=\left(2k+1\right)^2$ hay $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương.

Như vậy cả hai trường hợp ta luôn chọn được số nguyên c để $a^2+b^2+c^2$ là một số chính phương.

Bài 29. Từ giả thiết $\left(p-1\right)\vdots n$ với $n>1$ và số nguyên tố p ta được $p-1\ge n\Rightarrow p>n$.

Lại có $\left(n^3-1\right)\vdots p\Rightarrow\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)\vdots p$, khi đó ta được $\left(n^2+n+1\right)\vdots p$.

Đặt $n^2+n+1=kp$ với k là số nguyên dương.

Ta có $\left(p-1\right)\vdots n$ nên p chia n có số dư là 1, do đó kp chia n có số dư là k.

Từ đó ta được n^2+n+1 và k khi chia cho n có cùng số dư với nhau, do đó k và 1 khi chia cho n có cùng số dư.

Đặt $p=an+1$ và $k=bn+1$ với a, b là các số nguyên và $a>0;b\ge 0$

Khi đó ta có $n^2+n+1=\left(an+1\right)\left(bn+1\right)\Leftrightarrow n^2+n+1=abn^2+\left(a+b\right)n+1$

Hay ta được $abn+a+b=n+1$.

Nếu $b\ge 1$ thì ta được $abn+a+b\ge n+2>n+1$, trái với $abn+a+b=n+1$

Do đó ta được $b=0$, khi đó $k=1$ nên suy ra $n^2+n+1=p$

Từ đó ta được $4p-3=4\left(n^2+n+1\right)-3=4p^2+4p+1=\left(2p+1\right)^2$

Hay $4p-3$ là một số chính phương.

Bài 30. Ta sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh

Giả sử n^2+3n+3 là một lập phương đúng.

Khi đó do n là một lập phương đúng nên ta được $n\left(n^2+3n+3\right)$ là một lập phương đúng.

Để ý rằng $n\left(n^2+3n+3\right)=n^3+3n^2+3n$

Mà ta có $n^3<n^3+3n^2+3n<\left(n+1\right)^3$ nên ta được $n^3<n\left(n^2+3n+3\right)<\left(n+1\right)^3$

Do đó $n\left(n^2+3n+3\right)$ không thể là một lập phương đúng. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử là sai hay thì n^2+3n+3 không thể là một lập phương đúng.

Bài 31. Giả sử số nguyên tố p thỏa mãn p^2-p+1 là lập phương đúng của một số tự nhiên.

Khi đó ta đặt $p^2-p+1=a^3$ với a là một số tự nhiên.

Từ đó ta được $p\left(p-1\right)=\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)$. Từ đây ta suy ra $a>1$.

Do p là số nguyên tố nên ta được $a-1\vdots p$ hoặc $a^2+a+1\vdots p$.

- Nếu $a-1\vdots p$ nên ta được $a-1=kp,k\in N$, do đó $a=kp+1$.

Khi đó từ $p^2-p+1=a^3$ ta được $p^2-p+1=\left(kp+1\right)^3\Leftrightarrow p^2-p+1=k^3p^3+3k^2p^2+3kp+1$

Nhận thấy với $k\ge 2$ thì hiển nhiên $p^2-p+1<k^3p^3+3k^2p^2+3kp+1$ do đó $k\le 1$.

+ Với $k=0$, khi đó ta được $p^2-p+1=1 \Leftrightarrow p(p-1)=0$, điều này vô lí do p là số nguyên tố.

+ Với $k=1$, khi đó ta được $p^3-2p^2+4p=0 \Leftrightarrow p^2-2p+4=0$, không tồn tại p thỏa mãn.

Vậy với $a-1\vdots p$ thì không tồn tai số nguyên tố p thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $a^2+a+1\vdots p$, khi đó $(p,a-1)=1$ và có $p(p-1)\vdots(a-1)$ nên suy ra được $p-1\vdots a-1$.

Đặt $p=(a-1)b+1$ với $b\in N$, khi đó từ $a^2+a+1\vdots p$ ta suy ra được $\dfrac{a^2+a+1}{(a-1)b+1}$ là số nguyên dương hay ta được $\dfrac{a^2b+ab+b}{ab-b+1}=a+2+\dfrac{3b-a-2}{ab-b+1}$ là số nguyên dương.

Từ đó ta phải có $|3b-a-2|\ge ab-b+1$. Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu $3b-a-2\ge ab-b+1$, khi đó ta được $b(4-a)\ge a+3$.

Từ đó nếu $a\ge 4$ thì ta được $b(4-a)<a+3$, điều này mâu thuẫn, do đó vì $1<a$ nên $a=2$ hoặc $a=3$. Khi $a=2$ thì từ $p^2-p+1=a^3$ ta được $p(p-1)=7$, phương trình vô nghiệm. Khi $a=3$ thì từ $p^2-p+1=a^3$ ta được $p(p-1)=26$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: Nếu $3b-a-2\le-(ab-b+1)\Rightarrow 2+a-3b\ge ab-b+1\Rightarrow b(a+2)\le a+1$, điều này vô lí vì $a+1<a+2$.

+ Trường hợp 3: Nếu $3b-a-2=0\Rightarrow a=3b-2$, khi đó từ $p=(a-1)b+1$ ta được

$$p=3b(b-1)+1=3b^2-3b+1 \text{ và } a^2+a+1=(3b-2)^2+(3b-2)+1=9b^2-9b+3$$

Từ đó suy ra $\dfrac{a^2+a+1}{p}=\dfrac{9a^2-9a+3}{3a^2-3a+1}=3$.

Do đó từ $p(p-1)=(a-1)(a^2+a+1)$ ta được $p-1=3(a-1)$ nên suy ra $(b-1)(b-3)=0$

Từ đó ta được $b=1$ hoặc $b=3$.

Với $b=1$ thì $p=a$, khi đó ta được $p^2-p+1=p^3 \Leftrightarrow p(p^2-p+1)=1$, điều này vô lí.

Với $b=3$ thì $p=3a-2$, khi đó ta được $9a^2-15a+7=a^3 \Leftrightarrow (a-1)(a-7)=0$ nên $a=1$ hoặc $a=7$. Thử trực tiếp ta được $a=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta được $p=19$.

Vậy $p=19$ là số nguyên tố uy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 32. Gọi $(x_0;y_0)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán và x_0+y_0 có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó ta được $A=\dfrac{x_0^2+y_0^2+30}{x_0y_0}$ hay $y_0^2-Ax_0y_0+x_0^2+30=0$

Do vai trò như nhau của x_0 và y_0 nên ta có thể giả sử $x_0\le y_0$.

Xét phương trình bậc hai $y^2-Ax_0y+x_0^2+30=0$.

Do $(x_0;y_0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán nên y_0 là nghiệm của phương trình

$y^2-Ax_0y+x_0^2+30=0$.

Do phương trình trên là phương trình bậc hai nên ngoài nghiệm y_0 thì phương trình còn có một nghiệm nữa là y_1. Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases}y_0+y_1=Ax_0\\y_0y_1=x_0^2+30\end{cases}$.

Do $y_0;x_0;A$ là các số nguyên y_1 là số nguyên.

Như vậy $(x_0;y_0)$ và $(x_0;y_1)$ đều thỏa mãn phương trình bậc hai trên và theo cánh chọn x_0+y_0 có giá trị nhỏ nhất ta được $x_0+y_0\le x_0+y_1\Rightarrow y_0\le y_1$. Do đó $x_0\le y_0\le y_1$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $x_0=y_0$, khi đó thay vào A ta được $A=\dfrac{x_0^2+c_0^2+30}{x_0.x_0}=2+\dfrac{30}{x_0^2}\in Z$

Từ đó suy ra $30\,\vdots\,x_0^2\Rightarrow x_0^2=1\Rightarrow x_0=1$, do đó $A=32$.

- Trường hợp 2: Xét $y_0=y_1$, khi đó từ $y_0y_1=x_0^2+30$ ta được

$$x_0^2+30=y_0^2\Leftrightarrow(y_0-x_0)(y_0+x_0)=30$$

Dễ thấy y_0-x_0 và y_0+x_0 có cùng tính chẵn lẻ, mà $30=1.30=2.15=3.10=5.6$ nên không có x_0 và y_0 thỏa mãn.

- Trường hợp 3: Với $x_0<y_0<y_1$, khi đó ta được $\begin{cases}y_0\ge x_0+1\\y_1\ge y_0+1\ge x_0+2\end{cases}$

Do đó từ $y_0y_1=x_0^2+30$ ta được $30+x_0^2\ge(x_0+1)(x_0+2)\Rightarrow x_0\le 9$.

Khi $x_0=9$ ta được $y_0y_1=9^2+30=111=1.111=3.37$. Do $y_0<y_1$ nên ta suy ra được $(y_0;y_1)=(1;111),(3;37)$, loại do không thỏa mãn $x_0<y_0$.

Khi $x_0=8$ ta được $y_0y_1=8^2+30=94=1.94=2.47$. Do $y_0<y_1$ nên ta suy ra được $(y_0;y_1)=(1;94),(2;47)$, loại do không thỏa mãn $x_0<y_0$.

Khi $x_0=7$ ta được $y_0y_1=7^2+30=79=1.79$. Do $y_0<y_1$ nên ta suy ra được $(y_0;y_1)=(1;79)$, loại do không thỏa mãn $x_0<y_0$.

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại ta đều không tìm được $(y_0;y_1)$ thỏa mãn.

Như vậy ta được $A=32=2^5$ là lũy thừa bậc 5 của một số nguyên dương khi $x=y=1$.

Bài 33. Đặt $3^n-1=a^3$ với a là số tự nhiên. Khi đó ta được $3^n=a^3+1\Leftrightarrow 3^n=(a+1)(a^2-a+1)$

Do đó $a+1$ và a^2-a+1 là các ước của 3^n. Suy ra $\begin{cases}a+1=3^x\\a^2-a+1=3^y\end{cases}$, trong đó $x,y\in N$ và $x+y=n$.

Từ $a+1=3^x \Rightarrow a=3^x+1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(3^x+1\right)^2-\left(3^x+1\right)+1=3^y \Leftrightarrow 3^{2x}-3^{x+1}+3=3^y$$

- Nếu $x\geq 2$, khi đó $3^{2x}-3^{x+1}$ chia hết cho 9, do đó $3^{2x}-3^{x+1}+3$ chia 9 dư 3 nên 3^y chia 9 dư 3.

Do $x\geq 2$ nên $a=3^x-1\geq 8$. Do đó từ $a^2-a+1=3^y$ ta được $3^y=a\left(a-1\right)+1\geq 8.7+1=57$

Suy ra $y\geq 4$, do đó 3^y chia hết cho 9. Mâu thuẫn với trên

Như vậy trường hợp này không có n thỏa mãn.

- Nếu $x=1$, khi đó từ $a+1=3^x$ ta được $a=2$, do đó $3^n=a^3+1=2^3+1=9$ nên $n=2$
- Nếu $x=0$, khi đó từ $a+1=3^x$ ta được $a=0$, do đó $3^n=a^3+1=0^3+1=1$ nên $n=0$

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n=0$ và $n=2$.

Bài 34. Nhận xét: Nếu p, q là hai số nguyên tố và $n\geq 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{n^p-1}{n-1}\,\vdots\, q$ thì hoặc $p=q$ hoặc $q\equiv 1\left(\bmod p\right)$.

Chứng minh:

Từ giả thiết ta suy ra $n^p-1\,\vdots\, q$. Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $n^k-1\,\vdots\, q$.

Khi đó p chia hết cho k. Do p là số nguyên tố nên $k\in\left\{1;p\right\}$.

- Nếu $k=1$ thì $n\equiv 1\left(\bmod q\right)$. Khi đó $n^{p-1}+\cdots+n+1\equiv p\left(\bmod q\right)$.

Vậy $p\equiv 0\left(\bmod q\right)$ nên $p=q$.

- Nếu $k=p$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $n^{q-1}-1\,\vdots\, q$ (hiển nhiên q không chia hết cho n).

Do đó $q-1\,\vdots\, p$ hay $q\equiv 1\left(\bmod p\right)$.

Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán: Đặt $A=a^5$ với $a\in\mathbb{N}^*$.

Ở đây ta xét với $n\geq 2$ thì ta có $\dfrac{n^p-1}{n-1}=a^5-1=\left(a-1\right)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)$

Nếu q là một ước nguyên tố bất kì của $a-1$ thì theo bổ đề ta suy ra $q=p$ hoặc $q\equiv 1\left(\bmod p\right)$.

Vậy tất cả các ước nguyên dương của A hoặc chia hết cho p hoặc chia p dư 1.

+ Nếu $a-1\,\vdots\, p$ nên $a\equiv 1\left(\bmod p\right)$. Khi đó $a^4+a^3+a^2+a+1\equiv 5\left(\bmod p\right)$. Vậy $p\in\left\{5;2\right\}$.

+ Nếu $a-1\equiv 1\left(\bmod p\right)$ thì $a\equiv 2\left(\bmod p\right)$. Khi đó $a^4+a^3+a^2+a+1\equiv 31\left(\bmod p\right)$.

Vậy $p\in\left\{2;3;5;31\right\}$.

Với $p=2$ thì hiển nhiên có vô số giá trị n thỏa mãn.

Với $p=3$ thì $n=5$ thỏa mãn.

Với $p=31$ thì $n=1$ thỏa mãn.

Với $p=5$ thì $n=2$ thỏa mãn

Vậy $p\in\{2;3;5;31\}$.

Bài 35. Trước hết, ta có nhận xét: Nếu số $n=2^s t$ với t lẻ, có số ước lẻ là một số lẻ thì t là số chính phương.

Thật vậy, ta phân tích $t=p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.p_3^{a_3}...p_k^{a_k}$ thì số ước lẻ của n cũng chính là số ước của t và là $(a_1+1)(a_2+2)...(a_k+1)$.

Do số lượng này là lẻ nên tất cả đại lượng $a_i+1, i=1;2;3;...;k$ đều lẻ hay a_i chẵn, suy ra t là số chính phương, điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán: Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Nếu k là số chẵn thì ta được $p_1+p_2+...+d_k=2n+1-k$ lẻ. Do đó, số lượng ước lẻ của n là lẻ. Ta viết $n=2^s.u^2$ với u là số lẻ.

Giả sử số ước của u^2 là m lẻ. Ta cần chứng minh s lẻ.

Do k chẵn và số lượng ước lẻ của n lẻ nên số lượng ước chẵn của n là lẻ.

Các ước chẵn của 2^s là $2;2^1;2^2;...;2^s$ và có tất cả s ước.

Mỗi ước đó đi kèm với một trong m ước của u^2 tạo thành thêm các ước chẵn của n và là ms

Do đó ms lẻ, mà số lượng ước chẵn là lẻ nên buộc s lẻ. Từ đó suy ra $\frac{n}{2}$ là số chính phương.

- Trường hợp 2: Nếu k lẻ thì lập luận tương tự ta được số lượng ước lẻ là chẵn và số lượng ước chẵn là lẻ. Đến đây dễ thấy điều vô lí nên trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy ta luôn có $\frac{n}{2}$ là số chính phương

Bài 36. Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $p=2$, khi đó dễ thấy $2^n=m^3+(m+1)^3$ với m là số nguyên dương.

Dễ thấy 2^n là số chẵn và $m^3+(m+1)^3$ là số lẻ do nên $2^n=m^3+(m+1)^3$ vô nghiệm

+ Với $p=3$, khi đó với $n=2$ ta có $p^2=3^2=1^3+(1+1)^3$

+ Với $p>3$, khi đó giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $p^n=m^3+(m+1)^3$ với m là một số nguyên dương.

Ta có $p^n=m^3+(m+1)^3=(2m+1)(m^2+m+1)$

Do m là số nguyên dương nên $2m+1>1;\ m^2+m+1>1$

Từ đó ta được $\begin{cases}2m+1=p^r\\ m^2+m+1=p^s\end{cases}$, với $r;s\in N^*$.

Dễ thấy $m^2+m+1\ge 2m+1$ nên $p^s\ge p^r$, suy ra $(2m+1,m^2+m+1)=p^r>3$

Mặt khác gọi $d=\left(2m+1,m^2+m+1\right)$ khi đó ta có $\begin{cases}2m+1\,\vdots\, d\\ m^2+m+1\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\left(2m+1\right)\vdots\, d\\ 2\left(m^2+m+1\right)\vdots\, d\end{cases}$

Do đó suy ra $2\left(m^2+m+1\right)-m\left(2m+1\right)\vdots\, d\Rightarrow m+2\,\vdots\, d$

Nên ta được $2\left(m+1\right)-\left(2m+1\right)\vdots\, d\Rightarrow 3\,\vdots\, d$, suy ra $d=1$ hoặc $d=3$

Điều này mâu thuẫn với $\left(2m+1,m^2+m+1\right)=p^r>3$

Do đó với $p>3$ thì p^n không thể là tổng lập phương của hai số nguyên dương liên tiếp.

Bài 37. Dễ thấy $128=2^3.2^2.2.2$, mà trong 8 số nguyên liên tiếp tồn tại một số chia hết cho 8, một số chia hết cho 6, một số chia hết cho 4 và một số chia hết cho 2.

Do đó tích của 8 số nguyên liên tiếp chia hết cho $128=2^3.2^2.2.2$.

Từ đó suy ra $n\left(n+1\right)...\left(n+7\right)+7!=128k,k\in Z$

Giả sử $m=a^2+b^2$, khi đó ta được $a^2+b^2=128k+7!$

Dễ thấy $128k+7!$ chia hết cho 4 nên $m=a^2+b^2$ chia hết cho 4.

Suy ra a, b đều là số chẵn. Đặt $a=2c;b=2d$ với c, d là số tự nhiên.

Từ đó ta được $c^2+d^2=32k+1260$. Ta lại suy ra được suy ra c, d đều là số chẵn.

Đặt $c=2p;d=2q$ với p, q là các số tự nhiên. Đến đây ta lại được $p^2+q^2=8k+315$

Vì số chính phương khi chia 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1, nên p^2+q^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 hoặc 2.

Mà $8k+315$ chia 4 dư 3. Nên $p^2+q^2=8k+315$ không xảy ra.

Vậy không thể biểu diễn số $m=n\left(n+1\right)...\left(n+7\right)+7!$ dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Bài 38. Từ $2x^2+x=3y^2+y\Rightarrow 2x^2-2y^2+x-y=y^2\Rightarrow\left(x-y\right)\left(2x+2y+1\right)=y^2$

Mặt khác từ cũng từ $2x^2+x=3y^2+y$ ta được

$$3x^2-3y^2+x-y=x^2\Rightarrow\left(x-y\right)\left(3x+3y+1\right)=x^2$$

Do đó ta được $\left(x-y\right)^2\left(2x+2y+1\right)\left(3x+3y+1\right)=x^2y^2$

Suy ra $\left(2x+2y+1\right)\left(3x+3y+1\right)$ là số chính phương.

Gọi $\left(2x+2y+1,\,3x+3y+1\right)=d$, khi đó ta được

$$\begin{cases}2x+2y+1\,\vdots\, d\\ 3x+3y+1\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\left(3x+3y+1\right)-\left(2x+2y+1\right)=\left(x+y\right)\vdots\, d$$

Từ đó ta lại có $2\left(x+y\right)\vdots\, d\Rightarrow\left(2x+2y+1\right)-2\left(x+y\right)=1\,\vdots\, d$ nên $d=1$

Suy ra $\left(2x+2y+1,\,3x+3y+1\right)=1$.

Do đó $2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là số chính phương.

Lại có $(x-y)(2x+2y+1)=y^2$ nên suy ra $x-y$ là số chính phương

Vậy $x-y; 2x+2y+1; 3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Bài 39. Đặt $s=a+b$ và $p=ab$. Ta có $a^2+b^2=4-\left(\dfrac{ab+2}{a+b}\right)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+\dfrac{(ab+2)^2}{(a+b)^2}=4$

$$\Leftrightarrow s^2-2p+\frac{(p+2)^2}{s^2}=4 \Leftrightarrow s^4-2ps^2+(p+2)^2=4s^2$$

$$\Leftrightarrow s^4-2s^2(p+2)+(p+2)^2=0 \Leftrightarrow (s^2-p-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow s^2-p-2=0 \Leftrightarrow p+2=s^2 \Leftrightarrow \sqrt{p+2}=|s| \Leftrightarrow \sqrt{ab+2}=|a+b|$$

Vị a, b là số hữu tỉ nên $|a+b|$ là số hữu tỉ. Vậy $\sqrt{ab+2}$ là số hữu tỉ

Bài 40. Ta có $4m^3+m=12n^3+n \Leftrightarrow 4(m^3-n^3)+(m-n)=8n^3$

Hay ta được $(m-n)(4m^2+4mn+4n^2+1)=8n^3$ (1)

Giả sử p là một ước nguyên tố chung của $m-n$ và $4m^2+4mn+4n^2+1$

Do $4m^2+4mn+4n^2+1$ là số lẻ nên p là số lẻ.

Từ (1) suy ra $8n^3 \vdots p$ mà p là số nguyên tố lẻ nên $n \vdots p$ suy ra $m \vdots p$

Mặt khác p là ước của $4m^2+4mn+4n^2+1$ nên ta được $p=1$, điều này vô lí vì p là số nguyên tố.

Do đó $m-n$ và $4m^2+4mn+4n^2+1$ không có ước nguyên tố chung

Từ đó suy ra $(m-n, 4m^2+4mn+4n^2+1)=1$.

Do $8n^3=(2n)^3$ nên suy ra $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

Bài 41. Giả sử x là một số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta đặt $x+25=y^2$ với $y \in N$.

Theo giả thiết ta biểu diễn được $x=2^a.5^b=y^2-24$ với $a, b \in N$.

Từ đó ta được $(y-5)(y+5)=2^a.5^b$ (1).

- Nếu $b=0$ thì từ (1) ta được $(y-5)(y+5)=2^a$.

Suy ra $\begin{cases} y-5=2^u \\ y+5=2^v \end{cases}$, với $u, v \in N; u<v$ và $u+v=a$.

Do đó ta được $2^v-2^u=10 \Leftrightarrow 2^u(2^{v-u}-1)=10 \Rightarrow \begin{cases} 2^u=2 \\ 2^{v-u}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^u=2 \\ 2^{v-u}=6 \end{cases}$, trường hợp này loại.

- Nếu $b>0$, khi đó ta được $(y-5)(y+5) \vdots 5$. Mà ta có $(y+5)-(y-5) \vdots 5$ nên ta được $y \vdots 5$.

Đặt $y=5t$, với $t \in N$. Khi đó ta được $(t-1)(t+1)=2^a.5^{b-2}$ (2).

Mà ta lai có $(t-1)+(t+1)=2t$ là số chẵn nên kết hợp với (2) ta được $(t-1)$, $(t+1)$ cùng là số chẵn.

Đến đây ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} t-1=2^m \\ t+1=2^n.5^{b-2} \end{cases}$, với $m,n\in N; m+n=a$. Suy ra $2^n.5^{b-2}-2^m=2$

- Nếu $n\ge m$ thì $m=1$ và $2^n.5^{b-2}=4$, suy ra $n=2$ và $b=2$. Khi đó ta được $a=3$.

Từ đó ta được $x=2^3.5^2=200$ nên $x+25=225=15^2$ thỏa mãn bài toán.

- Nếu $m>n$ thì $n=1$ và $5^{b-2}-2^{m-1}=1\ (3)$

Vì $1\equiv 1(\text{mod}\,3)$ và 2, 5 không chia hết cho 3 nên $5^{b-2}\equiv 2(\text{mod}\,3)$ và $2^{m-1}\equiv 1(\text{mod}\,3)$, do đó ta được $b-2$ là số lẻ. Đặt $b=2k+1(k\in N)$, suy ra $5^{b-2}=25^{k-1}.5\equiv 5(\text{mod}\,8)$.

Do đó từ (3) ta suy ra được $2^{m-1}\equiv 4(\text{mod}\,8)$ nên $m=3; b=3; a=4$.

Khi đó $x=2^4.5^3=2000$ nên $x+25=2025=45^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} t+1=2^m \\ t-1=2^n.5^{b-2} \end{cases}$, với $m,n\in N; m+n=a$. Suy ra $2^m-2^n.5^{b-2}=2$

- Nếu $n\ge m$ thì $m=1$ và $2^n.5^{b-2}=0$, trường hợp này loại.

- Nếu $m>n$ thì $n=1$ và $2^{m-1}-5^{b-2}=1\ (4)$.

Lập luận tương tự như trên ta được $5^{b-2}\equiv 1(\text{mod}\,3)$ nên b là số chẵn. Đặt $b=2k(k\in N)$

Khi đó ta được $5^{b-2}=25^{k-1}\equiv 1(\text{mod}\,8)$ nên kết hợp với (4) ta được $2^{m-1}\equiv 2(\text{mod}\,8)$

Do đó ta được $m=2; b=2; a=3$, khi đó $x=2^3.5^2=200$ nên $x+25=225=15^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có hai số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 200 và 2000.

Bài 42. Giả sử tồn tại tam giác vuông có cạnh a, b, c(với a là cạnh huyền) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta có $a^2=b^2+c^2$ và diện tích ta giác vuông là $S=\frac{1}{2}bc=k^2$ hay $2S=bc=2k^2$, với k là một số nguyên dương.

Trong các tam giác vuông đó ta xét tam giác vuông có cạnh huyền bé nhất và a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau. Ta xẽ chứng minh tồn tại m và n để $a=m^2+n^2; b=m^2-n^2; c=2mn$ với m, n khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy,

Khi đó từ $2S=bc=2k^2$ ta được $(m^2-n^2)mn=k^2$ hay $(m-n)(m+n)mn=k^2$.

Do m, n khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau nên ta được

$$(m+n,m)=(m+n,n)=(m-n,m)=(m-n,n)=1$$

Gọi $d=(m+n,m-n)$, khi đó d là số lẻ và là ước của 2m, 2n, suy ra $d=1$.

Như vậy bốn số $m+n,m-n,m,n$ nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một.

Mà ta lại có $(m-n)(m+n)mn=k^2$ nên $m+n,m-n,m,n$ đều là các số chính phương.

Đặt $m+n=x^2;m-n=y^2;m=z^2;n=t^2$ với x, y, z, t là các số nguyên dương.

Khi đó ta có $\begin{cases}(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)=4m=(2z)^2\\ \frac{1}{2}(x+y)(x-y)=\frac{1}{2}(x^2-z^2)=n=t^2\\ 2z=2\sqrt{m}<m^2<m^2+n^2=a\end{cases}$.

Như vậy tam giác vuông có các cạnh $x+y;x-y;2z$ thỏa mãn diện tích là một số chính phương, tuy nhiên cạnh huyền $2z<a$, mâu thuẫn với cách chọn tam giác vuông có cạnh huyền nhỏ nhất.

Vậy diện tích các tam giác vuông có các cạnh là các số nguyên không thể là một số chính phương.

Bài 43. Giả sử $2n=a^2+b^2$ với a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $a>b>1$.

Khi đó ta có $4n^2=(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$.

Do đó ta được $n^2=\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2+(ab)^2$. Khi đó ta được $n^2+2n=\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2+(ab)^2+a^2+b^2$.

Do $a>b>1$ nên suy ra $(ab)^2;a^2;b^2$ là các số chính phương phân biệt lớn hơn 1.

Như vậy ta cần chứng minh $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$ là số chính phương lớn hơn 1 và khác với ba số chính phương trên.

Thật vậy, do $2n=a^2+b^2$ là số chẵn nên a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ.

Lại có $a>b>1$ nên suy ra $\frac{a^2-b^2}{2}$ là số nguyên dương.

- Nếu $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2=1$ thì $\frac{a^2-b^2}{2}=1$, suy ra $a^2=b^2+2<b^2+2b+1=(b+1)^2$

Do đó $b^2<a^2<(b+1)^2$, điều này vô lí vì a^2 là số chính phương. Từ đó suy ra $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\neq 1$.

- Nếu $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2=a^2$ thì $\frac{a^2-b^2}{2}=a$, suy ra $b^2=a^2-2a$.

Do $a>b>1$ nên $a>2$, suy ra $a^2-4a+4<a^2-2a$.

Từ đó ta được $(a-2)^2<b^2<(a-1)^2$, điều này vô lí vì b^2 là số chính phương.

Từ đó suy ra $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\neq a^2$.

- Nếu $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2=b^2$ thì $\frac{a^2-b^2}{2}=b$, suy ra $a^2=b^2+2b<(b+1)^2$.

Từ đó ta được $b^2<a^2<(b+1)^2$, điều này vô lí vì b^2 là số chính phương.

Từ đó suy ra $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\neq b^2$.

- Nếu $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2=(ab)^2$ thì $\frac{a^2-b^2}{2}=ab$, suy ra $a^2+b^2-2ab=2b^2\Rightarrow(a-b)^2=2b^2$.

Do đó ta được $a-b=b\sqrt{2}$, điều này vô lí vì $a-b$ là số nguyên dương và $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Từ đó suy ra $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\neq(ab)^2$.

Từ các kết quả trên ta suy ra được n^2+2n tổng của bốn số chính phương(lớn hơn 1) phân biệt.

Bài 44. Do a^2+b^2 chia hết cho $ab+1$. Khi đó tồn tại số nguyên dương k để $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$ và ta cần chứng minh k là số chính phương.

Cố định k, ta quy bài toán về tìm nghiệm $(a;b)$ của phương trình $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k\ (1)$.

Giả sử cặp số nguyên dương $(a_0;b_0)$ thỏa mãn (1) và a_0+b_0 nhỏ nhất .

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0\geq b_0$.

Xét phương trình $\frac{x^2+b_0^2}{xb_0+1}=k\Leftrightarrow x^2-kb_0x+b_0^2-k=0$ có ẩn x.

Khi đó a_0 là một nghiệm của phương trình trên. Do đó theo định lý Vi – et thì phương trình còn có một nghiệm nữa. Gọi nghiệm đó là a_1 thì ta được $\begin{cases}a_0+a_1=kb_0\\ a_0.a_1=b_0^2-k\end{cases}$

Từ đây ta được a_1 là số nguyên.

Nếu a_1 là số nguyên âm thì ta được $a_1^2-kb_0a_1+b_0^2-k\geq a_1^2-k+b_0^2-k>0$, điều này vô lý.

Do đó $a_1\geq 0$, khi đó $(a_1;b_0)$ là một cặp số thỏa mãn (1).

Khi đó nếu $a_1>0$ thì ta có $a_0+b_0\leq a_1+b_0$ nên $a_0\leq a_1$, suy ra $a_0^2\leq a_0a_1=b_0^2-k<b_0^2$ nên ta được $a_0<b_0$, điều này mâu thuẫn với $a_0\geq b_0$.

Từ đó ta suy ra được $a_1=0$, do đó ta được $k=b_0^2$ là một số chính phương.

Tóm lại nếu $a=0$ thì ta được $k=b^2$ và nếu $b=0$ thì ta được $k=a^2$ đều là số chính phương.
Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 45.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $0 < a^2 + b^2 - abc \le c$ mà $k = a^2 + b^2 - abc$ không phải là số chính phương. Khi đó ta có $0 < k \le c$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b$. Xét phương trình bậc hai ẩn x là $x^2 - bcx + b^2 - k = 0$. Khi đó a là một nghiệm của phương, khi đó theo định lí Vi – et thì phương trình còn có một nghiệm nữa là $x = a_1$.

Từ đó ta được $\begin{cases} a + a_1 = bc \\ a.a_1 = b^2 - k \end{cases}$

Từ đó ta suy ra được a_1 là số nguyên.

+ Nếu $a_1 = 0$, khi đó từ hệ thức $a.a_1 = b^2 - k$ ta được $k = b^2$ là số chính phương, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.

+ Nếu $a_1 < 0$, khi đó $k = a_1^2 + b^2 - a_1bc \ge a_1^2 + b^2 + bc > c$, mâu thuẫn do $0 < k \le c$.

Như vậy ta được a_1 là số nguyên dương.

Cũng theo định lí Vi – ét ta có $a_1 = \dfrac{b^2 - k}{a}$ và $\dfrac{b^2 - k}{a} < a$ nên ta được $a_1 < a$.

Ta thấy cặp số $\left(a_1; b\right)$ cũng là một nghiệm. Khi đó ta có $a_1 + b < a + b$, điều này sẽ vô lí khi ta chọn cặp số $\left(a; b\right)$ với $a + b$ bé nhất.

Từ đó ta thấy không thể tồn tại k để $k = a^2 + b^2 - abc$ không phải là số chính phương.

Như vậy $a^2 + b^2 - abc$ phải là số chính phương.

Bài 46. Từ $A = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab}{2}$ ta được $4A = \left(a - b\right)^2 + \left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2$.

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$.

Đặt $x = a - b \ge 0; y = b - c \ge 0$, suy ra $a - c = \left(a - b\right) + \left(b - c\right) = x + y$.

Từ đó ta được $4A = x^2 + y^2 + \left(x + y\right)^2 \Leftrightarrow 2A = x^2 + y^2 + xy$.

Nếu x và y cùng tính lẻ hoặc khác tính chẵn lẻ thì $x^2 + y^2 + xy$ là số lẻ, trong khi $2A$ là số chẵn.

Do đó x và y phải cùng là số chẵn. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $A = 0$, khi đó ta suy ra được $x = y = 0$, do đó $a = b = c$.
- Trường hợp 2: Nếu $A = k^2 > 0$, khi đó ít nhất một trong hai số x và y lớn hơn 0.

Đặt $x = 2x_1; y = 2y_1$. Khi đó $x^2 + y^2 + xy$ chia hết cho 4.

Khi đó $A = k^2$ là số chẵn nên k là số chẵn, đặt $k = 2k_1$.

Do đó từ $2A = x^2 + y^2 + xy$ ta được $2^3.k_1^2 = 4x_1^2 + 4y_1^2 + 4x_1y_1$ hay $2.k_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_1y_1$.

Lập luận tương tự như trên cho đến một lúc $A = k^2 = n$ ta được $2^{2n+1}.k_n^2 = 2^n x_n^2 + 2^n y_n^2 + 2^n x_n y_n$, trong đó k_n là số nguyên dương nhưng đẳng thức vẫn xẩy ra.

Khi đó ta được $n = 2^n.k_n^2$, điều này vô lí.

Vậy khi số $A = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab}{2}$ là số chính phương thì $a = b = c$.

Bài 47. Ta có nhận xét nếu x, y, z là các số dương và $x < y$ thì $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+z}{y+z}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên cho các số dương a, b, c, d ta được

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$
$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+d+a}{a+b+c+d}$$
$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d} < \frac{c+a+b}{a+b+c+d}$$
$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a} < \frac{d+b+c}{a+b+c+d}$$

Từ đó ta được $1 < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+d} + \dfrac{d}{d+a} < 3$.

Do A nhận giá trị nguyên nên ta được $A = 2$ hay $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+d} + \dfrac{d}{d+a} = 2$

Từ đó dẫn đến $\left(\dfrac{a}{a+b} - 1\right) + \dfrac{b}{b+c} + \left(\dfrac{c}{c+d} - 1\right) + \dfrac{d}{d+a} = 0$

Hay $(a-c)\left[\dfrac{b}{(b+c)(a+b)} - \dfrac{d}{(a+d)(c+d)}\right] = 0$.

Do $a \neq d$ nên ta suy ra được $\dfrac{b}{(b+c)(a+b)} = \dfrac{d}{(a+d)(c+d)}$.

Biến đổi và thu gọn ta được $bd^2 - db^2 + abc - acd = 0$ hay $(b-d)(ac-bd) = 0 \Rightarrow ac = bd$

Do đó $abcd = (ac)^2$ là một số chính phương.

Bài 48. Gọi A là số mới được tạo thành. Số A được tao ra từ việc sắp xếp các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999 nên A có tất cả $99999 - 11111 + 1 = 88889$ số có 5 chữ số.

Tách số tự nhiên A thành tổng các số hạng có dạng $\overline{abcde}.10^{5n}$ với $n = 0;1;2;3;...;88888$.

Đặt $s = \overline{abcde}$, khi đó $\overline{abcde}.10^{5n} = s(9.11111+1)^n = s(9m+1)^n = s(km+1) = skm + s$.

Chú ý rằng $m = 11111$ và $k \in N^*$.

Khi đó $\overline{abcde}.10^{5n}$ và s có cùng số dư khi chia cho $m = 11111$.

Như vậy số A khi chia cho M có cùng số dư với B là tổng của các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999.

Ta có $B = 11111 + 11112 + ... + 99999 = \dfrac{(11111+99999).88889}{2}$

Do đó $2B = 11111.888890$, do đó 2B chia hết cho m nên B chia hết cho m.

Từ đó ta được A chia hết cho m hay $m = 11111$ là một ước của A.

Mà lũy thừa của 2 không có ước là số lẻ, do đó A không thể là một lũy thừa của 2.

Bài 49. Giải sử $\frac{x-17}{x-9} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ với $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $a = 0$, khi đó ta được $x = 17$
- Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$, khi đó không mất tính tổng quát ta giả $(a,b) = 1$.

Do $(a^2, b^2) = 1$ nên ta có $x - 17 = a^2k$ và $x - 9 = b^2k$ với k nguyên

Từ đó ta được $(x-9)-(x-17) = (b^2 - a^2)k \Leftrightarrow 8 = (b+a)(b-a)k$

Ta thấy $a+b$ và $b-a$ là ước của 8. Chú ý rằng $(b+a)-(b-a) = 2a$ nên $a+b$ và $b-a$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có $b+a > b-a$ và $a+b > 0$. Từ đó ta có các trường hợp như sau

1. $b+a$	**2.** $b-a$	**3.** k	**4.** b	**5.** a	**6.** $x = b^2k+9$
7. 4	**8.** 2	**9.** 1	**10.** 3	**11.** 1	**12.** 18
13. 4	**14.** -2	**15.** -1	**16.** 1	**17.** 3	**18.** 8
19. 2	**20.** -2	**21.** -2	**22.** 0(loại)	**23.**	**24.**
25. 2	**26.** -4	**27.** -1	**28.** -1(loại)	**29.**	**30.**

Như vây ta có các kết quả là

+ Với $x = 17$ thì $\frac{17-17}{17-9} = \frac{0}{8} = 0^2$

+ Với $x = 18$ thì $\frac{18-17}{18-9} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

+ Với $x = 8$ thì $\frac{8-17}{8-9} = 9 = 3^2$

Bài 50. Giả sử $\frac{x-37}{x+43} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ với a, b là các số nguyên dương và $(a,b) = 1$.

Từ đó ta được $x - 37 = ka^2$ và $x + 43 = kb^2$ với k là số nguyên dương.

Do đó ta được $kb^2 - ka^2 = 80 \Rightarrow k(b-a)(b+a) = 80$. Chú ý là $80 = 1.2^4.5$.

Do $(a,b) = 1$ nên ta có thể xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ.

Khi đó $b-a$ và $b+a$ cùng là số lẻ. Từ đó ta được $a+b = 5; b-a = 1$ và $k = 16$.

Do đó ta có $a = 2; b = 3$ nên $x - 37 = 16.2^2 \Rightarrow x = 101$.

- Trường hợp 2: Hai số a và b đều là số lẻ. Khi đó ta đặt $a = 2m - 1; b = 2n - 1$ với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó từ $k(b-a)(b+a) = 80$ ta được $k(n-m)(m+n-1) = 1.2^2.5$.

Chú ý là $m+n-1 > n-m$, lại thấy $m+n-1$ và $n-m$ khác tính chẵn lẻ.

Do đó ta được $(n-m; m+n-1) = (1;2), (1;4), (1;20), (5;20), (2;5), (4;5)$.

Giải lần lượt từng trường hợp ta tìm được $(m;n) = (1;2), (2;3), (10;11), (8;13), (2;4), (1;5)$

Từ đó ta suy ra được $(a;b) = (1;3), (3;5), (19;21), (15;25), (3;7), (1;9)$.

Đến đây ta tìm được các giá trị của x là $x \in \{38; 47; 55; 82; 199; 398\}$.

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x \in \{38; 47; 55; 82; 101; 199; 398\}$.

Bài 3. Cho các số nguyên a, b, c thỏa $a^2b + b^2c + c^2a = 3abc$ (1)

a) Hãy chỉ ra một bộ ba số nguyên a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn (1).

b) Chứng minh rằng abc là lập phương của một số nguyên.

Lời giải.

a) Ta chọn bộ $(a; b; c) = (4; -2; 1)$ thỏa mãn đẳng thức (1)

b) Từ phương trình ta suy ra $(a, b, c) = 1$.

Giả sử p là ước nguyên tố của abc nên trong ba số a, b, c có một số chia hết cho p, Không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là a.

Suy ra ta được $a = p^m a_1$ với $a_1 \in N^*; (a_1, p) = 1$. Khi đó đẳng thức trên trở trở thành

$$p^{2m}a_1^2 b + b^2c + c^2p^m = 3p^m a_1 bc \quad (*)$$

Do đó $b^2c \vdots p$. Ta giả sử $b \vdots p \Rightarrow b = p^k.b_1; (b_1, p) = 1$, thay vào (*) ta được

$$p^{2m+k}a_1^2 b_1 + p^{2k}.b_1^2 c + c^2 p^m = 3p^{m+k} a_1 b_1 c$$

+ Nếu $2k > m$, ta suy ra được $c^2 \vdots p$ vô lí

+ Nếu $2k < m$, ta suy ra được $b_1^2 c \vdots p \Rightarrow c \vdots p$ vô lí.

Do đó $m = 2k \Rightarrow abc = p^{3k} a_1 b_1 c$ với $(a_1, p) = (b_1, p) = (c, p) = 1$.

Giả sử abc có các ước nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, ..., p_k$. Khi đó, theo chứng minh trên ta có

$$abc = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} ... p_k^{3\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}\right)^3$$

Chủ đề 3
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

Bài 1. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Bài 2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m;p;q)$ sao cho p, q là số nguyên tố và $2^m.p^2+1=q^5$.

Bài 3. Tìm sáu số nguyên tố $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ thỏa mãn $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^3+p_5^2=p_6^2$.

Bài 4. Cho số nguyên tố p dạng $4k+3$. Tồn tại hay không số nguyên a nào thỏa điều kiện $(a^2+1)\vdots p$

Bài 5. Tìm số nguyên tố p sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 6. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^2-5q^2=4$.

Bài 7. Tồn tại hay không cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn $5^{2^p}+2007=5^{2q^2}+q^2$

Bài 8. Tìm tất cả các bộ số nguyên tố(có thể bằng nhau) sao cho tích của chúng bằng 10 lần tổng của chúng.

Bài 9. Giả sử p là số nguyên tố, a và b là các số tự nhiên$(a<b)$ thỏa mãn điều kiện: Tổng các phân số tối giản có mẫu là p nằm giữa a và b có tổng bằng 2011. Tìm các số p, a, b.

Bài 10. Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết thành tổng của $n+1$ hợp số.

Bài 11. Cho số nguyên tố $p>5$. Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $111...1$ chia hết cho p.

Bài 12. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được sáu số nguyên tố kí hiệu là $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ thỏa mãn điều kiện $(p_1-p_2)(p_3-p_4)(p_4+p_6)$ chia hết cho 1800.

Bài 13. Tìm số nguyên tố p để $2p+1$ viết được thành lập phương của một số tự nhiên.

Bài 14. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+2018 là một số nguyên tố.

Bài 15. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $p=n^n+1,\ n\in N^*$, biết rằng p không có nhiều hơn 18 chữ số.

Bài 16. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước tự nhiên của p^4 là một số chính phương.

Bài 17. Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n$ là một số nguyên tố với n là số nguyên dương thì $n=3^k$ với k là số nguyên dương.

Bài 18. Xác định tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\dfrac{q^3-1}{q-1}$ với $n>1, n\in Z$.

Bài 19. Một số nguyên tố có dạng $2^{2^n}+1(n\in N)$ có thể biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai lũy thừa bậc năm của hai số tự nhiên không?

Bài 20. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 21. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì $5n+3$ không thể là số nguyên tố.

Bài 22. Tìm số nguyên tố p, q thỏa mãn điều kiện $p^2=8q+1$.

Bài 23. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức:

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$$

Bài 24. Cho số nguyên tố p. Đặt tập hợp $A=\left\{p-n^2 \middle| n\in Z,\ n^2<p\right\}$. Chứng minh rằng ta có thể tìm được số tự nhiên a và b thuộc tập hợp A sao cho $a>1$ và a chia hết cho b.

Bài 25. Biết rằng số 27000001 khi phân tích thành thừa số thì có đúng bốn thừa số nguyên tố. Tính tổng của bốn thừa số nguyên tố đó.

Bài 26. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p-4$ không thể viết được thành lũy thừa bậc bốn của một số nguyên dương.

Bài 27. Cho p và q là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m và n trung bình cộng của tất cả các ước tự nhiên của $A=p^m.q^n$ là một một số nguyên.

Bài 28. Cho p và q là các số nguyên tố sao cho $p>q>3$ và $p-q=2$. Chứng minh rằng $p+q$ chia hết cho 12.

Bài 29. Cho $n>1$ là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng các số n và $n+2$ cùng là số nguyên tố khi và chỉ khi $(n-1)!$ không chia hết cho n và $n+2$.

Bài 30. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^{8n}+3p^{4n}-4$ chia hết cho 5.

Bài 31. Tìm bộ ba số nguyên tố liên tiếp sao cho tổng các lũy thừa bậc bốn của ba số nguyên tố đó là một số nguyên tố.

Bài 32. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n để $A=3^{3m^2+6n-61}+4$ là số nguyên tố.

Bài 33. Cho n là một số nguyên với $n\ge 2$. Chứng minh rằng nếu k^2+k+n là một số nguyên tố với mọi số nguyên k thỏa mãn $0\le k\le\sqrt{\frac{n}{3}}$ thì k^2+k+n là một số nguyên tố với mọi số nguyên k thỏa mãn $\sqrt{\frac{n}{3}}\le k\le n-2$.

Bài 34. Tìm tất cả các cặp số nguyên x, t thỏa mãn $x^2\left(x^2+y^2\right)=y^{p+1}$, trong đó p là số nguyên tố.

Bài 35. Chứng minh rằng nếu số nguyên k lớn hơn 1 thoả mãn k^2+4 và k^2+16 là các số nguyên tố thì k chia hết cho 5.

Bài 36. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5)-f(3)=2010$. Chứng minh rằng $f(7)-f(1)$ là hợp số.

Bài 37. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương $m; n$ thoả mãn điều kiện $\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.

Bài 38. a) Hãy chỉ ra một bộ bốn số nguyên dương phân biệt mà tổng ba số bất kì trong bốn số đó là một số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng không tồn tại năm số nguyên dương phân biệt mà tổng ba số bất kì trong chung là một số nguyên tố.

Bài 39. Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số

Bài 40. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n^3 - n^2 - 7n + 10$ là một số nguyên tố.

Bài 41. Tìm số tự nhiên n để A là số nguyên tố biết $A = n^3 - n^2 - n - 2$

Bài 42. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p

Bài 43. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2 \\ p^2 + 1 = 2y^2 \end{cases}$$

Bài 44. Tìm số nguyên tố p và q sao cho các số $7p + q$ và $pq + 11$ cũng là các số nguyên tố.

Bài 45. Tìm các số nguyên không âm a, b sao cho $a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$ là số nguyên tố.

Bài 46. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương. Biết $f(5) - f(4) = 2012$. Chứng minh rằng $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Bài 47. a) Tìm hai số nguyên dương p, q sao cho $p^2 - q^2 = 7$

b) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương lớn hơn 1 thì $n^4 + 4^n$ không phải là số nguyên tố.

Bài 48. Tìm hai số nguyên a, b để $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.

Bài 49. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x + y\sqrt{2013}}{y + z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỷ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 50. Cho a, b là các số tự nhiên lớn hơn 2 và p là số là số tự nhiên thỏa mãn $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Chứng minh p là hợp số

Bài 51. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$.

Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài 52. Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^2 = 8q + 9$.

Bài 53. Cho $p \ge 5$ là số nguyên tố và n là số nguyên dương sao cho các số $p-1; p; n; n+1$ đôi một không có ước chung lớn hơn 2. Chứng minh rằng không tồn tại x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình:

$$2 + x + x^2 + ... + x^{p-1} = y^{n+1}$$

Bài 54. Tìm tất cả các số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn đồng thời các điều kiện $n \le 2p$ và $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1}.

Bài 55. Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của $2^{2^n} + 1$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1) thì $p-1$ chia hết cho 2^{n+2}.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên ta được $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

+ Nếu $p = 3k+1 \Rightarrow (p+1)(p-1) = (3k+2).3k$ chia hết cho 3

+ Nếu $p = 3k+2 \Rightarrow (p+1)(p-1) = (3k+3)(3k+1)$ chia hết cho 3

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3

Mặt khác vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Suy ra $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Đặt $p-1 = 2n \Rightarrow p+1 = 2n+2$, ta có $(p+1)(p-1) = 2n(2n+2) = 4n(n+1)$

Do $n(n+1)$ chia hết cho 2 nên $4n(n+1)$ chia hết cho 8

Do đó $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau ta được $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Bài 2. Biến đổi $2^m.p^2 + 1 = q^5$ thành $2^m.p^2 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$

Do $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ lẻ nên $q - 1 = 2^m.p^k$ với $k = 0; 1; 2$

+ Nếu $k = 0$ khi đó ta có $q - 1 = 2^m$ Từ đó ta được

$$p^2 = \frac{(2^m+1)^5 - 1}{2^m} = 2^{4m} + 5.2^{3m} + 10.2^{2m} + 10.2^m + 5$$

Nếu $m > 1$ thì $p^2 \equiv 5 \pmod 8$ vô lí nên suy ra $m = 1$, từ đó ta được $p = 11; q = 3$.

+ Nếu $k = 1$ khi đó ta có $q - 1 = 2^m.p$ do đó ta được $p = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$

Do đó để p là số nguyên tố thì $q - 1 = 1 \Rightarrow q = 2$, từ đó suy ra $q = 31$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $2^m.31^2 + 1 = 2^5$, phương trình không có m nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $k = 2$ khi đó ta có $q - 1 = 2^m.p^2$ do đó ta được $1 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ điều này vô lí do q là số nguyên tố

Vậy bộ $(m;p;q)=(1;11;3)$ là bộ duy nhất cần tìm.

Bài 3. Từ giả thiết suy ra $p_6>2\Rightarrow p_6^2\equiv 1(\bmod 8)$.

Mà $p_i^2\equiv 1;4(\bmod 8)$ nên trong 5 số $p_i\left(i=\overline{1;5}\right)$ có bốn số bằng 2, một số lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử k là số số chẵn trong dãy p_1,p_2,p_3,p_4,p_5. Suy ra

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2=4k+A \text{ (A là tổng bình phương của 5-k số lẻ)}$$

$$\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 4k+(5-k).1(\bmod 8)\equiv 3k+5(\bmod 8)$$

Mà $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 1(\bmod 8)$ nên $3k+4\,\vdots\, 8\Rightarrow k=4$.

Nhận xét được chứng minh xong.

Bây giờ ta giả sử $p_1=p_2=p_3=p_4=2;\ p_5>2$

Từ đó suy ra $p_6^2-p_5^2=16\Leftrightarrow (p_6-p_5)(p_6+p_5)=16$

Từ đó giải được $p_6=5;p_5=3$.

Vậy bộ các số nguyên tố các số cần tìm là $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6)$ trong đó $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5)$ được xác định là $(2;2;2;2;3)$ và các hoán vị, còn cố định $p_6=5$.

Bài 4. Giả sử có số nguyên a để $(a^2+1)\,\vdots\, p$ hay ta có $a^2\equiv -1(\bmod p)$

Suy ra $a^{p-1}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$ hay $a^{p-1}-1\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}-1(\bmod p)$

Nhưng theo định lí Fecmat thì $a^{p-1}-1\equiv 0(\bmod p)$

Nên ta được $(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 0(\bmod p)$ mà p là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 0(\bmod p)\Leftrightarrow -2\equiv 0(\bmod p), \text{ điều này vô lí.}$$

Nên không tồn tại số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 5. Nếu $p=7k+i$ với k, i nguyên và $i=\{\pm 1;\pm 2;\pm 3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có các số dư là 1;4;2

- Xét $p>2\Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3>7;\ 3p^2+4>7$

+ Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái yêu cầu bài toán.

+ Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái yêu cầu bài toán

+ Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái yêu cầu bài toán

- Xét $p=2$ thì $3p^2+4$ (loại)
- Xét $p=7k$ với k nguyên dương, vì p nguyên tố nên $p=7$ là nguyên tố

Khi đó ta có $2p^2-1=97;2p^2+3=101;3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy $p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6. Ta có $p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow p^2-4=5q^2 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$

Do p và q là số nguyên tố nên $0<p-2<p+2$ nên $p-2$ chỉ có thể nhận các giá trị $1;5;q;q^2$

Ta có bảng giá trị tương ứng

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
q	5q	3	1
q^2	5	3	1

Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p;q)=(7;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7. Ta giả sử tồn tại cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn phương trình.

Khi đó $5^{2^p}+2007=5^{2q^2}+q^2 \Leftrightarrow 5^{2^p}-5^{2q^2}=q^2-2007$

Do p và q là các số nguyên tố nên $p\ge 2;q\ge 2$, do đó $5^{2^p};5^{2q^2}$ cùng có chữ số tận cùng là 5.

Từ đó suy ra $5^{2^p}-5^{2q^2}$ chia hết cho 10.

Mặt khác vì q^2 là số chính phương nên q^2 không thể tận cùng bằng 7, do đó q^2-2007 không thể chia hết cho 10. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với $5^{2^p}-5^{2q^2}=q^2-2007$

Từ đó suy ra không tồn tại cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn bài toán.

Bài 8. Chú ý là $10=2.5$ với 2 và 5 là các số nguyên tố. Do đó ta nhận thấy trong các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán có 2 và 5.

Gọi $p_1;p_2;...;p_n$ các số còn lại trong bộ các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p_1\le p_2\le ...\le p_n$.

Theo bài ra ta có $2.5.p_1.p_2...p_n=10(2+5+p_1+p_2+...+p_n)$

Hay ta được $p_1.p_2...p_n=7+p_1+p_2+...+p_n\ (1)$.

Nhận thấy với hai số nguyên tố a và b ta luôn có $(a-1)(b-1)\ge 1 \Rightarrow ab\ge a+b$.

Từ đó ta được $p_1.p_2...p_{n-1}.p_n\ge (p_1+p_2+...+p_{n-1})p_n$.

Suy ra $7+p_1+p_2+...+p_n\ge (p_1+p_2+...+p_{n-1})p_n$

Đặt $s=p_1+p_2+...+p_{n-1}$, khi đó ta được $7+p_n+s\ge s.p_n \Leftrightarrow (s-1)(p_n-1)\le 8$.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $s=2$, khi đó $n=2$ và $p_1=2$. Thay vào (1) ta được $p_2=9$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 1: Với $s>2$, khi đó $p_n\le 5$.

+ Với $p_n = 5$ suy ra $s \le 3$, do đó $n = 2$ và $p_1 \in \{2;3\}$. Thử lại ta thấy $p_1 = 3$ và $p_2 = 5$ thỏa mãn.

+ Với $p_n = 3$ suy ra $s \le 5$, do đó có bộ số nguyên tố $(p_1;p_2;...;p_n)$ là $(2),(3),(2;2),(2;3),(5)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p_n = 2$ khi đó ta được $2n + 7 = 2^n$, trường hợp này loại.

Vậy bộ số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(2;3;5;5)$.

Bài 9. Chú ý là tổng của k số tự nhiên đầu tiên được tính là $1 + 2 + 3 + ... + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Mỗi phân số tối giản có giá trị nằm giữa a và b với mẫu là p có dạng $a + m + \dfrac{n}{p}$, trong đó m và n là các số tự nhiên thỏa mãn $0 \le m \le b - a - 1$ và $0 \le n \le p - 1$.

Tương ứng với mỗi giá trị của m có $p - 1$ giá trị của n và tương ứng với mỗi giá trị của n có $b - a$ giá trị của m. Như vậy số phân số tối giản thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(p-1)(b-a)$.

Từ đó tổng các phân số thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(b-a)\frac{1+2+...+(p-1)}{p} + (b-a)(p-1)a + (p-1)\left[1+2+...+(b-a-1)\right] = 2011.$$

Từ đó ta được $2011 = \dfrac{(b-a)(p-1)}{2} + (b-a)(p-1)a + \dfrac{(p-1)(b-a-1)(a+b)}{2}$.

Hay ta được $2011 = \dfrac{(b-a)(p-1)(a+b)}{2} \Leftrightarrow (b-a)(p-1)(a+b) = 2.2011$.

Do 2011 là số nguyên tố, còn $b - a$ và $a + b$ cùng tính chẵn lẻ. Lại có $b - a \le a + b$.

Do đó từ $(b-a)(p-1)(a+b) = 2.2011$ ta được $\begin{cases} b - a = 1 \\ a + b = 2011 \\ p - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1005 \\ b = 1006 \\ p = 3 \end{cases}$.

Vậy ta được $a = 1005; b = 1006; p = 3$ là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 10. Ta phát biểu bài toán dưới dạng: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2015 viết được thành $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất.

Ta có $2015 = 4.503 + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le 503$.

Xét $n = 503$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1;2;...;n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(503 - 1) = 4.502 + 9 > 2015$

Xét $n = 503 - 1$, khi đó ta có $2015 = 4.503 + 3 = 4.500 + 15 = 4.500 + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = 502$.

Bài 11. Xét dãy số $1;11;111;...;\underbrace{111..1}_{p}$. Giả sử trong dãy số trên không có số nào chia hết cho p. Khi đó chia các số trong dãy trên cho p ta được dãy các số dư là $1;2;...;p-1$.

Mà khi chia p số $1;11;111;...;\underbrace{111...1}_{p}$ cho p thì ta được p số dư. Như vậy theo nguyên lí Dirichlets thì trong p số dư trên có hai số dư bằng nhau.

Giả sử hai số khi chia cho p có số dư giống nhau là $\underbrace{111...1}_{m}$ và $\underbrace{111...1}_{n}$ với $m,n \in N^*;m>n$.

Khi đó ta được $\underbrace{111...1}_{m}-\underbrace{111...1}_{n}=\underbrace{111...1}_{m-n}\underbrace{000...0}_{n}$ chia hết cho p.

Do p là số nguyên tố nên $(p,1000...0)=1$, do đó $\underbrace{111...1}_{m-n}$ chia hết cho p.

Mà $1\le m-n\le p$ nên $\underbrace{111...1}_{m-n}$ cũng nằm trong dãy số trên. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với giả sử hay điều giả sử là sai. Do vậy luôn tồn tại số có dạng 111…1 chia hết cho số nguyên tố p.

Bài 12. Vì ba số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5 nên trong 12 số nguyên tố trên có ít nhất 9 số nguyên tố lớn hơn 5.

- Vì các số nguyên tố lớn hơn 3 nên 9 số nguyên tố trên chia 3 dư 1 hoặc dư 2. Theo nguyên lí Dirichlets thì tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này không chia hết cho 5 nên trong 5 số này tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 5. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử hai số đó là p_1 và p_2, khi đó ta được $(p_1-p_2)\vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta còn có $(p_1-p_2)\vdots 3$ và $(p_1-p_2)\vdots 2$. Nên ta suy ra được $(p_1-p_2)\vdots 30$.

- Xét 7 số nguyên tố còn lại sau khi đã lai đi năm số chia cho 3 có cùng số dư. Khi đó theo nguyên lí Dirichlets luôn tồn tại 4 số có cùng số dư ki chia cho 3. Xét 4 số đó trong phép chia cho 5 ta có các trường hợp sau:

+ Nếu trong bốn số đó mà ta có $(p_3-p_4)\vdots 5$ và hiển nhiên ta có $(p_3-p_4)\vdots 3$, $(p_3-p_4)\vdots 2$. Do ta có $(2,3,5)=1$ nên suy ra $(p_3-p_4)\vdots 30$. Đến đây ta chỉ cần lấy hai số lẻ p_5 và p_6 để có $(p_5+p_6)\vdots 2$.

Từ đó ta được $(p_1-p_2)(p_3-p_4)(p_4+p_6)$ chia hết cho 1800.

+ Nếu trong bốn số đó khi chia 5 có số dư theo thứ tự là 1; 2; 3; 4. Khi đó ta chọn được hai số p_5 chia 5 dư 1 và p_6 chia 5 dư 4. Từ đó ta được $(p_5+p_6)\vdots 5$.

Đồng thời khi đó ta được hai số còn lại là p_3 và p_4 thỏa mãn $(p_3-p_4)\vdots 3$.

Chú ý là $(p_5+p_6)\vdots 2$ và $(p_3-p_4)\vdots 2$. Do đó suy ra $(p_5+p_6)\vdots 10$ và $(p_3-p_4)\vdots 6$

Vậy ta cũng được $(p_1-p_2)(p_3-p_4)(p_4+p_6)$ chia hết cho 1800.

Do đó với 12 số nguyên tố phân biệt ta luôn chọn ra được sáu số là $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ thỏa mãn điều kiện $(p_1-p_2)(p_3-p_4)(p_4+p_6)$ chia hết cho 1800.

Bài 13. Ta thấy với $p=2$ thì $2p+1=5$ không thể viết được thành lập phương của một số tự nhiên,

Do đó suy ra $p \ge 3$.

Giả sử $2p+1=k^3$ với $k \in N^*$. Do $2p+1$ là số lẻ nên k^3 là số lẻ hay k là số lẻ.

Khi đó đó ta được $2p=t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$.

Do k là số lẻ nên suy ra $(2, t^2+t+1)=1$ nên ta được $t-1 \vdots 2$.

Mặt khác do p là số nguyên tố nên suy ra $t-1=2 \Rightarrow t=3$.

Thay vào $2p=t^3-1$ ta được $p=13$ là số nguyên tố.

Bài 14. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=2$ khi đó ta được $p^2+2018=2022$ là một hợp số.
- Nếu $p=3$, khi đó ta được $p^2+2018=2027$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p>3$, do p là số nguyên tố nên nên p là số nguyên tố lẻ. Từ đó p^2 là số chính phương lẻ nên p^2 chia 3 dư 1. từ đó ta được. Đặt $p^2=3k+1$ với $k \in N^*$.

Từ đó ta được $p^2+2018=3k+1+2018=3(k+673)$ nên không thể là một số nguyên tố.

Vậy với $p=3$ thì p^2+2018 là một số nguyên tố.

Bài 15. Do $n \in N^*$ nên ta đặt $n=2^k.m$ với k là số tự nhiên và m là số tự nhiên lẻ.

Khi đó ta có $p=n^n+1=n^{2^k.m}+1=\left(n^{2^k}\right)^m+1$ chia hết cho $n^{2^k}+1$.

Do p là số nguyên tố nên suy ra $m=1$. Từ đó ta được $n=2^k$, đến đây ta xét các trường hợp sau

- Nếu $k=0$, khi đó $n=1$ nên ta được $p=2$. Như vậy $n=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Nếu $k \ge 1$, khi đó ta đặt $k=2^{k_1}.m_1$ với k_1 là số tự nhiên và m_1 là số tự nhiên lẻ.

Khi đó ta có $p=n^n+1=\left(2^k\right)^n+1=\left(2^{2^{k_1}.m_1}\right)^n=\left(2^{2^{k_1}.n}\right)^{m_1}+1$

Do m_1 là số tự nhiên lẻ nên $\left(2^{2^{k_1}.n}\right)^{m_1}+1$ chia hết cho $2^{2^{k_1}.n}+1$.

Mà p là số nguên tố nên ta suy ra được $m_1=1$, nên ta có $k=2^{k_1}$ suy ra $n=2^{2^{k_1}}$

+ Với $k_1=0$, khi đó $n=2$ nên ta suy ra được $p=5$ là số nguyên tố. Do đó $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $k_1=1$, khi đó $n=4$ nên ta suy ra được $p=257$ là số nguyên tố. Do đó $n=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $k_1 \ge 2$, khi đó $n \ge 16$ nên ta suy ra được $p \ge 16^{16}+1=2^{64}+1$

Từ đó suy ra $p \ge 16.2^{60}+1=16.1024^6+1>16.1000^6+1=16.10^{18}+1$

Mà ta thấy $16.10^{18}+1$ có 19 chữ số nên p có ít nhất 19 chữ số, điều này trái với giả thiết giả thiết của bài toán. Do vậy trong trường hợp này không có n thỏa mãn.

Vậy các số tự nhiên n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1;2;4\}$.

Bài 16. Do p là số nguyên tố nên p^4 có 5 ước tự nhiên là $1;p;p^2;p^3;p^4$.

Khi đó tổng của các ước tự nhiên của p^4 là $1+p+p^2+p^3+p^4$.

Giả sử $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2$ với n là một số tự nhiên.

Khi đó ta có $(2n)^2=4n^2=4+4p+4p^2+4p^3+4p^4$

Ta có $(2p^2+p)^2=4p^4+4p^3+p^2$ và $(2p^2+p+2)^2=4p^4+4p^3+9p^2+4p+4$

Do đó ta được $(2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2$ nên suy ra $(2n)^2=(2p^2+p+1)^2$

Hay ta được $4n^2=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$. Kết hợp với $(2n)^2=4n^2=4+4p+4p^2+4p^3+4p^4$

Suy ra $4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$

Hay ta được $p^2-2p-3=0 \Rightarrow p=3$.

Ngược lại với $p=3$, khi đó $3^4=81$ có 5 ước tự nhiên là $1;3;3^2;3^3;3^4$ và $1+3+3^2+3^3+3^4=11^2$.

Vậy số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p=3$.

Bài 17. Đặt $n=3^k.m$ với k, m là các số nguyên dương và $(m,3)=1$. Giả sử $m>1$ khi đó ta xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $m=3a+1$ với a là một số nguyên dương. Khi đó ta có

$$1+2^n+4^n=1+2^{3^k.(3a+1)}+4^{3^k.(3a+1)}=1+2^{3^k.(3a+1)}+2^{3^k.(6a+2)}$$

Đặt $x=2^{3^k}$ thì ta được $1+2^n+4^n=1+x^{3a+1}+x^{6a+2}=x(x^{3a}-1)+x^2(x^{6a}-1)+x^2+x+1$

Dễ thấy $x^{3a}-1 \vdots (x^2+x+1)$ và $x^{6a}-1 \vdots (x^2+x+1)$

Do đó ta được $1+2^n+4^n$ chia hết cho x^2+x+1. Suy ra $1+2^n+4^n$ là một hợp số.

- Trường hợp 1: $m=3a+1$ với a là một số nguyên dương. Khi đó ta có

$$1+2^n+4^n=1+2^{3^k.(3a+2)}+4^{3^k.(3a+2)}=1+2^{3^k.(3a+2)}+2^{3^k.(6a+4)}$$

Đặt $x=2^{3^k}$ thì ta được $1+2^n+4^n=1+x^{3a+1}+x^{6a+2}=x^2(x^{3a}-1)+x(x^{6a}-1)+x^2+x+1$

Dễ thấy $x^{3a}-1 \vdots (x^2+x+1)$ và $x^{6a}-1 \vdots (x^2+x+1)$

Do đó ta được $1+2^n+4^n$ chia hết cho x^2+x+1. Suy ra $1+2^n+4^n$ là một hợp số.

Như vậy khi $m>1$ thì $1+2^n+4^n$ đều là một hợp số.

Do đó để $1+2^n+4^n$ là một số nguyên tố thì $m=1$ hay $n=3^k$ với k là số nguyên dương.

Bài 18. Ta có $\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\dfrac{q^3-1}{q-1} \Leftrightarrow (p-1)\left(\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}-1\right)=(p-1)\left(\dfrac{q^3-1}{q-1}-1\right)$

Hay ta được $(p-1)\left(\frac{p^{2n+1}-p}{p-1}\right)=(p-1)\left(\frac{q^3-q}{q-1}\right)\Leftrightarrow p(p^n-1)(p^n+1)=(p-1)q(q+1)$.

Nếu $q\le p^n-1$ thì ta được $p(p^n-1)(p^n+1)>(p-1)q(q+1)$. Do đó $q\ge p^n$

Mà q là số nguyên tố và p^n không nguyên tố nên suy ra ta phải có $q\ge p^n+1$

Cũng từ $p(p^n-1)(p^n+1)=(p-1)q(q+1)$ ta được trong tích $p(p^n-1)(p^n+1)$ có một thừa số chia hết cho q. Mà ta lại có $q\ge p^n+1$ nên để điều đó xẩy ra thì $q=p^n+1$.

Khi đó ta được $p(p^n-1)=(p-1)(q+1)$ hay $p(p^n-1)=(p-1)(p^2+2)$.

Khai triển và thu gọn ta được $p^n-3p+2=0$ nên suy ra được $2=p(3-p^{n-1})$, từ đó 2 chia hết cho p nên ta được $p=2$. Từ đây ta tính được $n=2$. Do đó ta được $q=5$.

Vậy ta được cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài bài toán là $p=2$ và $q=5$.

Bài 19. Giả sử số nguyên tố dạng $2^{2^n}+1\,(n\in N)$ phân tích được thành hiệu của hai lũy thừa bậc năm của hai số tự nhiên là a, b. Tức là ta có $2^{2^n}+1=a^5-b^5$.

Mà ta có $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

Do a, b là các số tự nhiên nên ta có $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4>1$.

Ta thấy $a-b$ và $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$ là các ước số tự nhiên của $2^{2^n}+1$. Do $2^{2^n}+1$ là số nguyên tố nên ta suy ra $a-b=1$ hay $a=b+1$.

Từ đó ta được $2^{2^n}+1=(b+1)^5-b^5=5b^4+10b^3+10b^2+5b+1$

Do đó ta được $2^{2^n}=(b+1)^5-b^5=5b^4+10b^3+10b^2+5b$ nên suy ra $2^{2^n}\,\vdots\,5$, điều này vô lí.

Do đó không thể biểu diễn số nguyên tố có dạng $2^{2^n}+1\,(n\in N)$ thành hiệu của hai lũy thừa bậc năm của hai số tự nhiên.

Bài 20. Ta có $2a^2b=a(a+b)^2-a(a^2+b^2)$.

Do p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ nên p^4 cũng là ước của $2a^2b$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên suy ra p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 không vượt quá 2, khi đó a^2 không chia hết cho p^4. Do đó b phải chứa p^2, điều này có nghĩa là b chia hết cho p^2, từ đó ta được b^2 chia hết cho p^4. Từ đó suy ra a^2+b^2 không chia hết cho p^4, điều này mâu thuẫn vơi giả thiết.

Do vậy a phải chia hết cho p^2 nên a^2 không chia hết cho p^4. Từ a^2+b^2 không chia hết cho p^4 ta suy ra được b^2 chia hết p^4, do đó b chia hết cho p^2

Dẫn đến $a+b$ chia hết cho p^2 nên suy ra $a(a+b)$ chia hết cho p^4.

Vậy p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 21. Do $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên ta đặt $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với a, b là các số nguyên dương.

Ta có $5n+3=8n+4-(3n+1)=4(2n+1)-(3n+1)=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$.

Do a, b là các sô nguyên dương nên $2a+b>1$.

Giả sử $5n+3$ là số nguyên tố, khi đó từ $5n+3=(2a-b)(2a+b)$ ta suy ra được $2a-b=1$

Hay ta được $2a=b+1$. Do đó $5n+3=(2a-b)(2a+b)=2a+b=2b+1$

Mặt khác ta có $3n+1=b^2$ nên từ $5n+3=2b+1$ ta suy ra được

$$2n+3n+1+1=2b \Leftrightarrow b^2-2b+1=-2n \Leftrightarrow (b-1)^2=-2n$$

Mà n là số nguyên dương nên $(b-1)^2$ là số âm, điều này là vô lí.

Do đó $5n+3$ không thể là số nguyên tố.

Bài 22. Ta có $p^2=8q+1 \Leftrightarrow 8q=(p-1)(p+1)$.

Do $p^2=8q+1$ nên p^2 là số lẻ, suy ra p là số lẻ, khi đó đặt $p=2k+1$ với k là một số nguên dương.

Từ đó ta được $8q=2k(2k+2)=4k(k+1)$ nên $2q=k(k+1)$.

Nếu $q=2$ khi đó $4=k(k+1)$, không có số thự nhiên k thỏa mãn đẳng thức. Do đó $q>2$.

Mà q là một số nguyên tố nên ta được $(2,q)=1$. Từ $2q=k(k+1)$ ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $k=2$, khi đó ta được $q=k+1=3$. Từ đó ta được $p=5;q=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $q=k$, khi đó ta được $k+1=2 \Rightarrow k=1$ nên $q=1$, trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(p;q)=(5;3)$.

Bài 23. Biến đổi tương đương đẳng thức trên ta được

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1) \Leftrightarrow p(p+1)=(n-p)(n+q+1)$$

Giả sử tồn tại các số nguyên tố p, q và số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó từ đẳng thức trên ta suy ra được $n-q$ chia hết cho p hoặc $n+q+1$ chia hết cho p. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $n-q$ chia hết cho p thì suy ra $n-q \ge p$, do đó $n+q+1>p+1$.

Từ đó suy ra $p(p+1)<(n-p)(n+q+1)$, điều này mâu thuẫn.

- Nếu $n+q+1$ chia hết cho p, khi đó tồn tại số tự nhiên k sao cho $n+q+1=kp(k \ne 0)$

Do đó từ $p(p+1)=(n-p)(n+q+1)$ ta suy ra được $p+1=k(n-q)$.

Mặt khác ta lại có $(p+q)(p+q+1)=p(p+1)+q(q+1)+2pq \ge n(n+1)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p \geq q$. Do $n(n+1) > p(p+1)$ nên $n > p$.

Cũng từ $n+q+1 = kp$ ta được $kp > n > p$ nên $k > 1$.

Hơn nữa $kp < (p+q)+q+1 \leq 3p+1 < 4p$ nên suy ra $k < 4$.

Như vậy $1 < k < 4$ và k là số tự nhiên nên ta được $k = 2$ hoặc $k = 3$.

+ Với $k = 2$ thì ta được $n = 2p-q-1$ và $p+1 = 2(n-q)$ nên suy ra $3(p-1) = 4q$.

Do đó q chia hết cho 3, mà q là số nguyên tố nên suy ra $q = 3$.

Thay vào $3(p-1) = 4q$ ta suy ra được $p = 5$, từ đó ta tìm được $n = 6$.

+ Với $k = 3$ thì ta được $n = 3p-q-1$ và $p+1 = 3(n-q)$ nên suy ra $2(2p-1) = 3q$.

Do đó q chia hết cho 2, mà q là số nguyên tố nên suy ra $q = 2$.

Thay vào $2(2p-1) = 3q$ ta suy ra được $p = 2$, từ đó ta tìm được $n = 3$.

Vậy các bội số $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(3;5;6),(5;3;6),(2;2;3)$.

Bài 24. Gọi $m^2\ (m \in Z)$ là bình phương lớn nhất bé hơn p. Ta đặt $p - m^2 = k\ (k \in N)$.

Khi đó ta có $p-(m-k)^2 = (m^2+k)-(m^2-2km+k^2) = k(2m-k+1)$

Từ đó suy ra $p-(m-k)^2$ chia hết cho k hay chia hết cho $p-m^2$.

Nếu $k = m$ thì ta được p chia hết cho m, điều này vô lí vì p là số nguyên tố. Nếu $m-k = m$ thì khi đó $p = m^2$, điều này cũng vô lí vì p là số nguyên tố. Như vậy $k \neq m$ và $m-k \neq m$.

Nếu $k-m = m$ thì khi đó ta được $p = m^2+2m = m(m+2)$, điều này vô lí vì p là số nguyên tố.

Như vậy nếu $k \neq 1$, khi đó từ $p-(m-k)^2$ chia hết cho $p-m^2$ ta chọn $a = p-(m-k)^2$ và $b = p-m^2$. Từ đó ta được a và b thuộc tập hợp A thỏa mãn cho $a > 1$ và a chia hết cho b.

Nếu $k = 1$ khi đó từ $p-(m-k)^2$ chia hết cho $p-m^2$ ta chọn $a = p-(m-1)^2 = 2m$ và $b = p-m^2$. Từ đó ta được a và b thuộc tập hợp A thỏa mãn cho $a > 1$ và a chia hết cho b.

Bài 25. Chú ý là $27000001 = 27000000+1 = 300^3+1$.

Áp dụng các hằng đẳng thức dạng $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ và $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$ ta được

$$\begin{aligned}27000001 &= 27000000+1 = 300^3+1 = (300+1)(300^2-300+1)\\&= 301.(300^2-300+1) = 301.\left[(300^2+2.300+1)-3.300\right]\\&= 301.\left[(300+1)^2-30^2\right] = 301.(301-30)(301+30) = 301.271.331\end{aligned}$$

Chú ý là 271 và 331 là các số nguyên tố. Lại có $301 = 7.43$ là tích của hai số nguyên tố.

Từ đó ta được $270000001 = 7.43.271.331$ là tích của bốn thừa số nguyên tố.

Từ đó ta được tổng của các thừa số nguyên tố đó là $7+43+271+331=652$.

Bài 26. Giả sử p là số nguyên tố lớn hơn 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q sao cho $p-4=q^4$. Từ đó ta được $p=q^4+4$.

Ta có $q^4+4=q^4+4q^2+4-4q^2=\left(q^2+2\right)^2-\left(2q\right)^2=\left(q^2-2q+2\right)\left(q^2+2q+2\right)$.

Chú ý rằng $p>5$ nên ta suy ra được $q>1$.

Do đó $q^2-2q+1>0$ nên $q^2-2q+2>1$ và $q^2+2q+2>1$

Do đó q^2-2q+2 và q^2+2q+2 là các ước tự nhiên lớn hơn 1 của số nguyên tố p. Điều này là vô lí.

Do đó không tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn bài toán hay $p-4$ không thể viết được thành lũy thừa bậc bốn của một số nguyên dương.

Bài 27. Do p và q là các số nguyên tố nên p^m có các ước tự nhiên là $1;p;p^2;...;p^{m-1};p^m$ và q^n các các ước tự nhiên là $1;q;q^2;...;q^{n-1};q^n$.

Do đó tổng tất cả các ước của $A=p^m.q^n$ được xác định là

$$\left(1+p+p^2+...+p^{m-1}+p^m\right)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n\right)$$

Và số các ước tự nhiên của $A=p^m.q^n$ được xác định là $\left(m+1\right)\left(n+1\right)$.

Khi đó trung bình cộng tất că các ước tự nhiên của $A=p^m.q^n$ là

$$M=\frac{\left(1+p+p^2+...+p^{m-1}+p^m\right)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n\right)}{\left(m+1\right)\left(n+1\right)}$$

+ Ta thấy nếu hai số nguyên tố p và q đều là số lẻ, khi đó ta chọn $m=p$ và $n=q$. Thế thì

$$M=\frac{\left(1+p+p^2+...+p^{m-1}+p^m\right)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n\right)}{\left(p+1\right)\left(q+1\right)}=\frac{\left(p^{p+1}-1\right)\left(q^{q+1}-1\right)}{\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)}$$

Chú ý là khi p và q là các số lẻ thì $\left(p^{p+1}-1\right)\vdots\left(p^2-1\right)$ và $\left(q^{q+1}-1\right)\vdots\left(q^2-1\right)$ nên ta được M là số nguyên.

+ Nếu $p=2$ và q là số nguyên tố lẻ, khi đó ta chọn $n=q$ và $m=q+q^2+...+q^{q-1}$. Thế thì

$$M=\frac{\left(1+p+p^2+...+p^{m-1}+p^m\right)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n\right)}{\left(p+1\right)\left(q+1\right)}=1+2+2^2+...+2^{m-1}+2^m$$

Do đó M là một số nguyên

+ Nếu $q=2$ và p là số nguyên tố lẻ, khi đó ta chọn $m=p$ và $n=p+p^2+...+p^{q-1}$. Thế thì

$$M=\frac{\left(1+p+p^2+...+p^{m-1}+p^m\right)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n\right)}{\left(p+1\right)\left(q+1\right)}=1+2+2^2+...+2^{n-1}+2^n$$

Do đó M là một số nguyên

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 28. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q không chia hết cho 3, do đó $q = 3k \pm 1$ với k là số nguyên dương.

+ Với $q = 3k+1$, khi đó từ $p-q=2$ ta suy ra được $p = 3k+3 = 3(k+1)$ chia hết co 3, mà p lại lớn hơn 3 nên p không phải là số nguyên tố. Do đó trường hợp này loại.

+ Với $q = 3k-1$, khi đó từ $p-q=2$ ta suy ra được $p = 3k+1$. Từ đó ta được $p+q = 6k$ chia hết cho 6. Mặt khác do p và q là các số nguyên tố lơn hơn 3 nên p và q là hai số lẻ. Lại có $p-q=2$ nên p và q là hai số lẻ liên tiếp. Từ đó suy ra $p+1$ và $q+1$ là hai số chẵn liên tiếp, do dó trong hai số $p+1$ và $q+1$ có một số chia hết cho 4. Nếu $p+1$ chia hết cho 4 thì ta được $p = 4m-1\left(m \in N^*\right)$, khi đó từ $p-q=2$ ta tính được $q = 4m-3$. Từ đó ta được $p+q = 8m-4$ chia hết cho 4. Nếu $q+1$ chia hết cho 4 thì ta được $q = 4m-1\left(m \in N^*\right)$, khi đó từ $p-q=2$ ta tính được $p = 4m+1$. Từ đó ta được $p+q = 8m$ chia hết cho 4. Do đó trong các trường hợp ta đều có $p+q$ chia hết cho 4.

Mà ta thấy 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $p+q$ chia hết cho 12.

Bài 29.

- Điều kiện cần: Giả sử số n và $n+2$ cùng là số nguyên tố. Ta cần chứng minh $(n-1)!$ không chia hết cho n và $n+2$.

Thật vậy, ta có nhận xét là nếu p là một ước nguyên tố của $m!$ thì p sẽ là một ước của số tự nhiên a nhỏ hơn hoặc bằng m.

Ta thấy $n > n-1$ và $n+2 > n-1$. Mà n và $n+2$ cùng là số nguyên tố nên n và $n+2$ không thể là ước của bất kì số tự nhiên a nào nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$. Do đó n và $n+2$ không thể là ước của $(n-1)!$. Hay $(n-1)!$ không chia hết cho n và $n+2$.

- Điều kiện đủ: Giả sử $(n-1)!$ không chia hết cho n và $n+2$. Ta cần chứng minh số n và $n+2$ cùng là số nguyên tố.

Thật vậy, ta giả sử ngược lại n không phải là số nguyên tố, khi đó $n = a.b\left(a,b \in N; a,b > 1\right)$ và a, b không vượt quá $n-1$. Ta xét các khả năng sau

+ Nếu $a \ne b$ thì a, b cũng là các ước của $(n-1)!$ nên $(n-1)!$ chia hết cho $ab = n$. Điều này vô lí vì theo giả thiết $(n-1)!$ không chia hết cho n. Do đó không thể có $a \ne b$.

+ Nếu $a = b > 2$, khi đó $n = ab = a^2$

Vì $a > 2$ nên $a-2 > 1 \Rightarrow a(a-2) > 1 \Rightarrow a^2 - 1 > 2a$. Từ đó ta có $a < 2a < a^2 - 1 = n-1$.

Lại có $2n = 2a^2 = a.2a$ nên kết hợp với $a < 2a < n-1$ ta suy ra được $(n-1)!$ chia hết cho 2n. Điều này vô lí vì theo giả thiết $(n-1)!$ không chia hết cho n. Do đó không thể có $a = b > 2$.

+ Nếu $a=b=2$ thì khi đó ta được $n=4$, trường hợp này ta không xét do n phải là số lẻ.

Như vậy mọi trường hợp ta đều chỉ ra được mâu thuẫn, điều đó có nghĩa là điều ta giả sử sai hay n phải là một số nguyên tố.

Bây giờ ta chứng minh $n+2$ cũng là số nguyên tố.

Thật vậy, ta giả sử ngược lại $n+2$ không phải là số nguyên tố, khi đó $n+2=a.b\left(a,b\in N\right)$. do n là số nguyên tố lẻ nên $n+2$ là số lẻ nên a, b là số lẻ và $n+2\ge 5$. Do $n+2$ không phải là số nguyên tố nên $a;b\ge 2$, mà a, b lẻ nên $a;b\ge 3$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $3\le a\le b$.

Từ đó ta được $\dfrac{n+2}{2}>\dfrac{n-1}{2}>b$. Ta xét các khả năng sau

+ Nếu $a\ne b$ khi đó a, b cũng là các ước của $\left(n-1\right)!$ nên $\left(n-1\right)!$ chia hết cho $ab=n+2$. Điều này vô lí vì theo giả thiết $\left(n-1\right)!$ không chia hết cho $n+2$. Do đó không thể có $a\ne b$.

+ Nếu $a=b$, khi đó $n+2=ab=a^2\Rightarrow 2\left(n+2\right)=2a^2=2a.a$

Do đó từ $\dfrac{n+2}{2}>\dfrac{n-1}{2}>b$ ta được $n-1>2b=2a>a$, suy ra $\left(n-1\right)!$ chia hết cho $2\left(n+2\right)$.

Điều này vô lí vì theo giả thiết $\left(n-1\right)!$ không chia hết cho $n+2$. Do đó không thể có $a=b$.

Như vậy mọi trường hợp ta đều chỉ ra được mâu thuẫn, điều đó có nghĩa là điều ta giả sử sai hay $n+2$ phải là một số nguyên tố.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 30. Dễ thấy $p^{8n}+3p^{4n}-4=\left[\left(p^8\right)^n-1\right]+3\left[\left(p^4\right)^n-1\right]$

Mà ta có

$$\left(p^8\right)^n-1=\left(p^8-1\right)\left[\left(p^8\right)^{n-1}+\left(p^8\right)^{n-2}+\left(p^8\right)^{n-3}+...+1\right]=\left(p^8-1\right).M$$
$$\left(p^4\right)^n-1=\left(p^4-1\right)\left[\left(p^4\right)^{n-1}+\left(p^4\right)^{n-2}+\left(p^4\right)^{n-3}+...+1\right]=\left(p^4-1\right).N$$

Trong đó $M=\left(p^8\right)^{n-1}+\left(p^8\right)^{n-2}+\left(p^8\right)^{n-3}+...+1;N=\left(p^4\right)^{n-1}+\left(p^4\right)^{n-2}+\left(p^4\right)^{n-3}+...+1$

Từ đó ta được $p^{8n}+3p^{4n}-4=\left(p^8-1\right)M+3\left(p^4-1\right)N=\left(p^4-1\right)\left[\left(p^4+1\right)M+3N\right]$

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p có dạng $p=5k\pm 1;p=5k\pm 2$ với k là số tự nhiên khác 0.

+ Nếu $p=5k\pm 1$, khi đó ta được $p^2-1=\left(5k\pm 1\right)^2-1=\left(25k^2\pm 10k\right)$ chia hết cho 5.

Từ đó ta được p^4-1 chia hết cho 5

+ Nếu $p=5k\pm 2$, khi đó ta được $p^2+1=\left(5k\pm 2\right)^2+1=\left(25k^2\pm 10k+5\right)$ chia hết cho 5.

Từ đó ta được p^4-1 chia hết cho 5.

Vậy ta được $p^{8n}+3p^{4n}-4$ chia hết cho 5.

Bài 31. Giả sử bộ ba số nguyên tố cần tìm là p, q, r và không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q < r$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Với $p = 2; q = 3; r = 5$, khi đó $p^4 + q^4 + r^4$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số.

+ Trường hợp 2: Với $p = 3; q = 5; r = 7$, khi đó $p^4 + q^4 + r^4 = 3107$ chia hết cho 13 nên là hợp số.

+ Trường hợp 3: Với $3 < p < q < r$, khi đó do p, q, r là các số nguyên tố nên có dạng $3n \pm 1$. Do đó lũy thừa bậc bốn của chúng đều chia 3 có số dư là 1. Từ đó suy ra $p^4 + q^4 + r^4$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

Như vậy không có ba số nguyên tố liên tiếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 32. Để A là số nguyên tố thì $3m^3 + 6n - 61 \in N$.

Chú ý là $3m^3 + 6n - 63$ chia hết cho 3 nên ta đặt $3m^3 + 6n - 63 = 3k\left(k \in N\right)$

Từ đó ta được $3m^3 + 6n - 61 = 3k + 2$.

Do đó suy ra $A = 3^{3m^2+6n-61} + 4 = 3^{3k+2} + 4 = 9.3^{3k} + 4 = 9.27^k + 4 = 9\left(27^k - 1\right) + 13$

Dễ thấy $27^k - 1 = \left(27 - 1\right)\left(27^{k-1} + 27^{k-2} + ... + 1\right) = 26\left(27^{k-1} + 27^{k-2} + ... + 1\right)$ chia hết cho 13.

Do đó $A = 3^{3m^2+6n-61} + 4 = 3^{3k+2} + 4$ chia hết ho 13.

Để A là số nguyên tố thì $A = 13$ nên suy ra $3^{3k+2} + 4 = 13 \Rightarrow 9.3^{3k} = 9 \Rightarrow k = 0$

Từ đó ta được $3m^3 + 6n - 61 = 2 \Rightarrow m^2 + 2n = 21 \Rightarrow m^2 < 21$

Chú ý là m^2 nhận giá trị lẻ nên ta được $m^2 = 1$ hoặc $m^2 = 9$

+ Với $m^2 = 1$ thì ta được $m = 1$, từ đó suy ra $n = 10$

+ Với $m^2 = 9$ thì ta được $m = 3$, từ đó suy ra $n = 6$.

Vậy có hai cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(m; n\right) = \left(1; 10\right), \left(3; 6\right)$

Bài 33. Không mấy khó khăn để kiểm tra được tính chất trên đúng với $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Với $n = 4$ ta thấy không có số nguyên k thỏa mãn. Ta cần chứng minh tính chất trên đúng với $n \geq 5$.

Giả sử $k^2 + k + n$ là một số nguyên tố với mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ và tồn tại số l để $l^2 + l + n$ là một hợp số với $\sqrt{\frac{n}{3}} \leq l \leq n - 2$. Gọi p là số nhỏ nhất trong các số l thỏa mãn điều kiện và $l^2 + l + n$ là một hợp số. Ta đặt $p^2 + p + n = ab$ với $a, b \in Z; 1 < a \leq b$.

Thế thì khi $l < p$ thì $l^2 + l + n$ là một số nguyên tố.

Trước hết ta sẽ chứng minh $a \geq p + 1$. Giả sử ngược lại $p + 1 > a$ thì ta có $0 < p - a < p$ và

$$\left(p - a\right)^2 + p - a + n = p^2 + p + n + a\left(a - 2p - 1\right) = ab + a\left(a - 2p - 1\right) = a\left(b + a - 2p - 1\right)$$

Từ $\left(p - a\right)^2 + \left(p - a\right) + n$ là một số nguyên tố ta suy ra được $b + a - 2p - 1 = 1$

Suy ra $a+b=2(p+1)$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}=(p+1)^2$

Do đó từ $p^2+p+n=ab$ ta được $p^2+p+n \le (p+1)^2$

Từ đây suy ra $p \ge n-1$, điều này mâu thuẫn với cách chọn p nhỏ nhất. Như vậy ta đi đến kết luận được là $a \ge p+1$.

Lại từ $n<3p^2 \Rightarrow p^2+p+n<4p^2+p<(2p+1)^2$ từ đó suy ra $p^2+p+n=ab<(2p+1)^2$

Do đó ta suy ra được $a<2p+1$.

Từ các kết quả đó ta suy ra được $p+1 \le a<2p+1$ nên $0 \le a-p-1<p$.

Khi đó thì $(a-p-1)^2+(a-p-1)+n$ là một số nguyên tố.

Mặt khác ta có $(a-p-1)^2+(a-p-1)+n=p^2+p+n+a(a-2p-1)=a(b+a-2p-1)$

Do đó suy ra $b+a-2p-1=1$ nên $a+b=2(p+1)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy thì $a+b \ge \sqrt{ab}=2\sqrt{p^2+p+n}>2\sqrt{p^2+p+p+1}=2(p+1)$

Như vậy ta thu được mâu thuẫn. Do đó giả sử ban đầulà sai hay ta có điều phải chứng minh.

Bài 34. Đặt $t=x^2$ với t là số nguyên không âm. Khi đó phương trình trở thành $t^2+y^2t-y^{p+1}=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn t thì ta có $\Delta=y^4+4y^{p+1}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=2$, khi đó $\Delta=y^4+4y^3=y^2(y^2+4y)$.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương hay y^2+4y phải là số chính phương.

Đặt $y^2+4y=a^2$ với a là số nguyên, khi đó ta được $(y+2-a)(y+2+a)=4$.

Dễ thấy $y+2-a$ và $y+2+a$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có các trường hợp sau

+ Nếu $y+2-a=y+2+a=2$ thì ta được $y=a=0$, khi đó ta được $x=0$.

+ Nếu $y+2-a=y+2+a=-2$ thì ta được $y=-4; a=0$, khi đó ta được $t=-8$, không thỏa mãn điều kiện t là số nguyên không âm.

- Nếu $p \ge 3$, khi đó do p là số nguyên tố nên p là số lẻ. Đặt $p=2n+1, n \in N^*$.

Khi đó $\Delta=y^4+4y^{2n+2}=y^4(1+4y^{2n-2})$.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương hay $1+4y^{2n-2}$ phải là số chính phương. Đặt $1+4y^{2n-2}=m^2$ với m là số nguyên.

Khi đó ta được $(m-2y^{n-1})(m+2y^{n-1})=1$.

Dễ thấy $m-2y^{n-1}$ và $m+2y^{n-1}$ cùng tính chẵn lẻ nên ta được các trường hợp sau:

+ Nếu $m-2y^{n-1}=m+2y^{n-1}=1$ thì ta được $y=0; m=1$, khi đó ta tìm được $x=0$.

+ Nếu $m-2y^{n-1}=m+2y^{n-1}=-1$ thì ta được $y=0; m=-1$, khi đó ta tìm được $x=0$.

Vậy cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(0;0)$

Bài 35. Vì $k>1$ suy ra $k^2+4>5;\ k^2+16>5$

+ Xét $k=5n+1\ (n\in\mathbb{Z})\Rightarrow k^2=25n^2+10n+1\Rightarrow k^2+4\ \vdots\ 5$

Suy ra k^2+4 không là số nguyên tố.

+ Xét $k=5n+2\ (n\in\mathbb{Z})\Rightarrow k^2=25n^2+20n+4\Rightarrow k^2+16\ \vdots\ 5$

Suy ra k^2+16 không là số nguyên tố.

+ Xét $k=5n+3\ (n\in\mathbb{Z})\Rightarrow k^2=25n^2+30n+9\Rightarrow k^2+16\ \vdots\ 5$

Suy ra k^2+16 không là số nguyên tố.

+ Xét $k=5n+4\ (n\in\mathbb{Z})\Rightarrow k^2=25n^2+40n+16\Rightarrow k^2+4\ \vdots\ 5$

Suy ra k^2+4 không là số nguyên tố.

Do vậy với $k^2+4;\ k^2+16$ là các số nguyên tố thì $k\vdots 5$.

Bài 36. Theo bài ra f(x) có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a nguyên dương.

Ta có $2010=f(5)-f(3)=(5^3-3^3)a+(5^2-3^2)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$$\Rightarrow 16b+2c=(2010-98a)$$

Lại có

$$\begin{aligned}f(7)-f(1)&=(7^3-1^3)a+(7^2-1^2)b+(7-1)c=342a+48b+6c=342a+3(16b+2c)\\&=342a+3(2010-98a)=48a+6030=3(16a+2010)\end{aligned}$$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$. Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số

Bài 37. Theo giả thiết $p>2$. Giả sử $\frac{1}{p}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$, hay là $m^2n^2=p(m^2+n^2)$. (1)

Suy ra $m^2n^2\vdots p$. Do p nguyên tố nên $mn\vdots p$, vì thế $m\vdots p$ hoặc $n\vdots p$.

Kết hợp với (1) suy ra $m^2+n^2\vdots p$. Do đó $m\vdots p$ và $n\vdots p$.

Suy ra $m\ge p;\ n\ge p$. Khi đó ta được $\frac{1}{p}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}=\frac{2}{p^2}$.

Điều này dẫn đến $p\le 2$. Mâu thuẫn.

Vậy với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương $m;\ n$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 38. a) Xét bộ số $(1;\ 5;\ 7;\ 11)$ ta có

$$1+5+7=13;\ 1+5+11=17;\ 1+7+11=19;\ 5+5+11=23$$

Mà $13;\ 17;\ 19;\ 23$ là các sô nguyên tố.

Do đó $\left(1;\ 5;\ 7;\ 11\right)$ là một bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có nhận xét: Một số tự nhiên khi chia cho 3 có các số dư là 0; 1; 2.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu trong năm số tự nhiên phân biệt này có ba số chia cho 3 có cùng số dư. Khi đó tổng ba số đó chia hết cho 3 và tổng này lớn hơn 3 nên tổng đó là hợp số.

+ Nếu trong năm số tự nhiên phân biệt này có ba số khi chia cho 3 có số dư khác nhau. Khi đó số dư là 0; 1; 2 và tổng ba số đó lớn hơn 3 nên tổng đó chia hết cho 3 hay tỏng đó là hợp số.

Như vậy với 5 số tự nhiên bất kì ta luôn chọn được ba số mà tổng của chúng là hợp số.

Vậy không tồn tại bộ năm số tự nhiên phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 39. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình trên, theo hệ thức Vi – et ta được

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{2};\ x_1.x_2 = n + 4$$

Ta có $m^2 + n^2 = \left(2x_1 + 2x_2\right)^2 + \left(x_1x_2 - 4\right)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2x_1^2 + x_2^2x_1^2 + 16 = \left(x_1^2 + 4\right)\left(x_2^2 + 4\right)$

Vì $x_1^2 + 4;\ x_2^2 + 4$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $m^2 + n^2$ là hợp số

Bài 40. ta có $P = n^3 - n^2 - 7n + 10 = n^3 - 2n^2 + n^2 - 2n - 5n + 10 = \left(n - 2\right)\left(n^2 + n - 5\right)$

Vì $n^2 + n - 5;\ n - 2$ là các số tự nhiên. Do đó ta được P nguyên tố khi

$$\left[\begin{array}{l} n - 2 = 1 \\ n^2 + n - 5 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = 2 \end{array}\right.$$

Xét $n = 3$ ta được $P = 7$ là số nguyên tố

Xét $n = 2$ ta được $P = 0$ không phải là số nguyên tố

Vậy $n = 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 41. Phân tích $A = n^3 - 2n^2 + n^2 - 2n + n - 2 = \left(n - 2\right)\left(n^2 + n + 1\right)$

Do $n - 2 < n^2 + n + 1,\ \forall n \in N.$

Vậy A là số nguyên tố khi và chỉ khi $n - 2 = 1$ và $n^2 + n + 1$ là số nguyên tố

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ A = 3^2 + 3 + 1 = 13 \end{cases} \text{là số nguyên tố}$$

Vậy với $n = 3$ thì A là số nguyên tố

Bài 42. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c$.

Ta có $p^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \vdots p$ nên $\left(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right) \vdots p$ mà ta lại có $\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \vdots p$ nên ta được $2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \vdots p$. Mặt khác do $a, b, c \ge 1$ và $p \ge 3$ nên ta được $(p,2)=1$ suy ra $(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\vdots p$. Do đó $\left[a^2b^2+c^2(a^2+b^2+c^2)-c^4\right]\vdots p$ suy ra $(a^2b^2-c^4)\vdots p$ nên $(ab-c^2)(ab+c^2)\vdots p$.

Lại có $ab<2ab\le a^2+b^2$ nên $1<ab+c^2<a^2+b^2+c^2=p$, do đó $(ab+c^2,p)=1$. Từ đó ta được $(ab-c^2)\vdots p$ hay $(c^2-ab)\vdots p$

Mặt khác $1\le a\le b\le c$ nên $0\le c^2-ab<c^2<a^2+b^2+c^2=p$. Do đó $c^2-ab=0$ hay $c^2=ab$, từ đó ta được $p=3a^2$, mà p là số nguyên tố nên $a^2=1,\ p=3$.

Bài 43. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x\ge 0,y\ge 0$. Từ phương trình $p+1=2x^2$ suy ra p là số lẻ. Dễ thấy $0\le x<y<p\Rightarrow y-x$ không chia hết cho p (1)

Do đó ta có $2y^2-2x^2=p^2-p\Rightarrow (y-x)(y+x)\equiv 0(\bmod p)\Rightarrow y+x\equiv 0(\bmod p)$

Do $0\le x<y<p\Rightarrow 0<y+x<2p\Rightarrow x+y=p\Rightarrow y=p-x$ thay vào hệ đã cho ta được

$$\begin{cases}p+1=2x^2\\ p^2+1=2(p-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p+1=2x^2\\ 1=p^2-4px+p+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p+1=2x^2\\ p=4x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=4x-1\\ 2x^2=4x\end{cases}$$

Giải hệ này ta được $p=7,x=2$ thay vào hệ ban đầu ta suy ra $y=5$. Vậy $p=7$.

Bài 44. Dễ thấy các bộ số $(p;\ q)=(2;\ 3),\ (3;\ 2)$ thỏa mãn yêu cần bài toán.

Ta sẽ chứng minh không còn bộ số nào khác thỏa mãn yêu cầu bài toàn.

Thật vậy, khi $p>3;\ q>3$, do p và q là số nguyên tố nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ và $q=3n+1$ hoặc $q=3n+2$.

+ Xét trường hợp $p=3k+1,\ q=3n+1$ hoặc $p=3k+2,\ q=3k+2$ thì $pq+11$ đều chia hết cho 3 nên trường hợp này loại.

+ Xét trường hợp $p=3k+1,\ q=3n+2$ hoặc $p=3k+2,\ q=3k+1$ thì $7p+q$ đều chia hết cho 3 nên trường hợp này cũng loại

Vậy $(p;\ q)=(2;\ 3),\ (3;\ 2)$ là các bộ số cần tìm

Bài 45. Đặt $A=a^2-b^2-5a+3b+4$, dễ thấy A là số chẵn. Do đó A là số nguyên tố khi và chỉ khi $A=2$, hay $A=a^2-b^2-5a+3b+4=2$, suy ra $(a+b-4)(a-b-1)=2$.

Ta xét các trường hợp sau :

+ Trường hợp $\begin{cases}a+b-4=1\\ a-b-1=2\end{cases}\Leftrightarrow a=4;b=1$

+ Trường hợp $\begin{cases}a+b-4=2\\ a-b-1=1\end{cases}\Leftrightarrow a=4;\ b=2$

+ Trường hợp $\begin{cases}a+b-4=-1\\ a-b-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow a=1;\ b=2$.

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-2 \\ a-b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=1$

Bài 46. Ta có $f(5)-f(4)=2012 \Leftrightarrow 61a+9b+c=2012$

$$f(7)-f(2)=(343a+49b+7c+d)-(8a+4b+2c+d)=335a+45b+5c$$
$$=305a+45b+5c+30a=2012+30a=2(1006+15a)$$

Vì a là số nguyên nên ta được $f(7)-f(2)$ chia hết cho 2 và $1006+15a$ khác 1

Do đó $f(7)-f(2)$ là hợp số

Bài 47.

a) Từ giả thiết ta có $(p-q)(p+q)=7$

Mà p và q nguyên dương nên $p-q, p+q$ đều là ước nguyên dương của 7 và $p-q<p+q$.

Do đó ta được $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=3 \end{cases}$

b) Nếu n là số chẵn thì $A=n^4+4^n$ là số chẵn lớn hơn 2 nên A không phải là số nguyên tố.

Nếu n là số lẻ thì $A=n^4+4^n=(n^2+2^n)^2-2.n^2.2^n=(n^2+2^n)^2-n^2.2^{n+1}$

Đặt $n+1=2k$ với k nguyên dương ta có

$$A=(n^2+2^n)^2-n^2.2^{n+1}=(n^2+2^n+n.2^k)(n^2+2^n-n.2^k)$$

Vì $(n^2+2^n+n.2^k)>1$

Và $(n^2+2^n-n.2^k)=(n-2^{k-1})^2+(2^n-2^{2k-2})>1$ nên A không phải là số nguyên tố.

Bài 48. Ta có $a^4+4b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$

Vì $a^2-2ab+2b^2\ge 0;\ a^2+2ab+2b^2\ge 0$.

Nên a^4+4b^4 nguyên tố khi và chỉ khi một thừa số là 1 còn thừa số kia là số nguyên tố. Khi đó ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $a^2-2ab+2b^2=1 \Leftrightarrow (a-b)^2+b^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-b)^2=1 \\ b^2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} (a-b)^2=0 \\ b^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$

- Với $\begin{cases} (a-b)^2=1 \\ b^2=0 \end{cases} \Rightarrow b=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow M=1$ (loại).

- Với $\begin{cases} (a-b)^2=0 \\ b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+ Trường hợp 2: $a^2+2ab+2b^2=1 \Leftrightarrow (a+b)^2+b^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+b)^2=1\\ b^2=0\end{cases}\\ \begin{cases}(a+b)^2=0\\ b^2=1\end{cases}\end{array}\right.$

- Với $\begin{cases}(a+b)^2=1\\ b^2=0\end{cases} \Rightarrow b=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow M=1$ (loại).

- Với $\begin{cases}(a+b)^2=0\\ b^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1;\ b=-1\\ a=-1;\ b=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy các cặp số $(a;b)$ cần tìm là $(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)$.

Bài 49. Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$

$$\Leftrightarrow nx-my=(mz-ny)\sqrt{2013} \Rightarrow \begin{cases}nx-my=0\\ mz-ny=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n} \Rightarrow xz=y^2$$

Do đó $x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x+z-y)$

Vì $x+y+z>1$ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x+y+z\\ x-y+z=1\end{cases}$

Từ đó suy ra $x=y=z=1$, thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $x=y=z=1$ là giá trị cần tìm

Bài 50. Gọi ước chung lớn nhất của a và b là d khi đó ta có $a=md;\ b=md,\ (m;n)=1$

Từ giả thiết ta được $a^2b^2=pa^2+pb^2 \Rightarrow m^2n^2d^4=pm^2d^2+pn^2d^2 \Rightarrow m^2n^2d^2=pm^2+pn^2$.

$$\Rightarrow \begin{cases}pm^2 \vdots n^2\\ pn^2 \vdots m^2\end{cases} \Rightarrow p\vdots m^2 \text{ và } p\vdots n^2$$

Nếu $a=b>2 \Rightarrow p=\dfrac{a^2}{2}\in Z \Rightarrow a=2k$ do đó $p=2k^2>2$ là hợp số

Nếu $a\neq b \Rightarrow m\neq n \Rightarrow$ p là hợp số.

Vậy P là một hợp số.

Bài 51. Ta có

$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Leftrightarrow (a+b)^2-ab=(c+d)^2-cd$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)(a+b-c-d)=ab-cd \quad (1)$$

Đặt $s=a+b+c+d$. Giả sử $s=p$ là một số nguyên tố $\Rightarrow a+b+c\equiv -d \pmod p$. Từ (1) suy ra:

$$ab-cd\equiv 0 \pmod p \Rightarrow ab+c(a+b+c)\equiv 0 \pmod p \Rightarrow (c+a)(c+b)\equiv 0 \pmod p$$

Vì p là số nguyên tố nên suy ra $\left[\begin{array}{l} a+c\equiv 0 \pmod p \\ b+c\equiv 0 \pmod p \end{array}\right.$

Điều này vô lý vì $1<a+c; b+c<p$ (a, b, c, d là các số nguyên dương và có tổng bằng p).

Vậy $s>1$ và không là số nguyên tố nên s phải là hợp số.

Bài 52. Do $p^2=8q+9$ là số lẻ nên p lẻ. Đặt $p=2k+1\ (k\in\mathbb{N})$.

Ta có $p^2=8q+9\Leftrightarrow (p-3)(p+3)=8q\Leftrightarrow (2k-2)(2k+4)=8q\Leftrightarrow (k-1)(k+2)=2q.$

Vì q là số nguyên tố và $0\le k-1<k+2$ nên có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $\begin{cases} k-1=1 \\ k+2=2q \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ q=2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=2 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} k-1=2 \\ k+2=q \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ q=5 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} p=7 \\ q=5 \end{cases}$

Vậy cặp số $(p; q)$ thỏa mãn bài toán là $(5; 2)$, $(7; 5)$.

Bài 53. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa phương trình. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $x=1$, ta có $p+1=y^{n+1}$, suy ra $p=y^{n+1}-1=(y-1)(y^n+y^{n-1}+...+y+1)$

Do đó $\begin{cases} y-1=1 \\ y^n+y^{n-1}+...+y+1=p \end{cases}\Rightarrow p=1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

Suy ra $2^{n+1}\equiv 1\pmod p$.

Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $2^k\equiv 1\pmod p$, ta có $k\ge 3$.

Vì $2^{n+1}\equiv 2^{p-1}\equiv 1\pmod p\Rightarrow (n+1, p-1)\,\vdots\, k$ vô lí, vì $(n+1,p-1)\le 2$.

- Trường hợp 1: Với $x\ge 2$, ta có

$$x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}=y^{n+1}-1=(y-1)(y^n+y^{n-1}+...+y+1)$$

Xét q là một ước nguyên tố bất kì của $\frac{x^p-1}{x-1}$, ta có $(x,q)=1$ nên $x^{q-1}\equiv 1\pmod q$

Mà $x^p-1\,\vdots\, q$ và q là số nguyên tố nên $x-1\,\vdots\, q$ hoặc $q-1\,\vdots\, p$.

Nếu $x\equiv 1\pmod q$ thì $1+x+x^2+...+x^{p-1}\equiv p\pmod q$, suy ra $p\,\vdots\, q$ hay $p=q$ hoặc $q\equiv 1\pmod p$.

Suy ra tất cả các ước nguyên tố q của $\frac{x^p-1}{x-1}$ thì $p=q$ hoặc $q\equiv 1\pmod p$.

Dẫn tới hai số $y-1$ và $y^n+y^{n-1}+...+y+1$ hoặc chia hết cho p hoặc có số dư là 1 khi chia cho p.

+ Nếu $y-1\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow y\equiv 1\pmod p$, suy ra $y^n+y^{n-1}+...+y+1\equiv n+1\pmod p$

Vì $(n+1,p)\le 2$ nên $n+1$ không chia hết cho p và $(n,p)\le 2$ nên $n+1$ chia cho p có số dư khác 1.

Do đó trường hợp này không xảy ra

+ Nếu $y-1\equiv 1(\bmod p)\Leftrightarrow y\equiv 2(\bmod p)$.

Khi đó $y^n+y^{n-1}+...+y+1\equiv 2^{n+1}-1(\bmod p)$.

Ta có $2^{n+1}-1$ không chia hết cho p vì $(n+1,p-1)\le 2$

Ta có $2^{n+1}-2=2(2^n-1)$, mà $(n,p-1)\le 2$ nên 2^n-1 không chia hết cho p.

Do đó $2^{n+1}-1$ chia cho p có số dư khác 1.

Tóm lại trong các trường hợp ta đều có điều giả sử ban đầu là sai. Bài toán được chứng minh.

Bài 54.

- Xét $n=1$ thì mọi số nguyên tố p đều thỏa mãn.
- Xét $p=2$ và $n\ge 2$, khi đó từ $n\le 2p$ ta được $n\le 4$, suy ra $n\in\{2;3;4\}$.

+ Với $n=2$ ta có $(2-1)^2+1$ chia hết cho 2.

+ Với $n=3$ ta có $(2-1)^3+1$ không chia hết cho 3.

+ Với $n=4$ ta có $(2-1)^4+1$ không chia hết cho 4.

- Xét $n\ge 2$ và $p\ge 3$. Khi đó p là số lẻ nên $(p-1)^n+1$ là số lẻ và là bội của n^{p-1} nên n là số tự nhiên lẻ, do đó ta được $n<2p$.

Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Khi đó do $(p-1)^n+1$ chia hết cho n^{p-1} ta được $(p-1)^n+1$ chia hết cho q. Từ đó suy ra $(p-1)^n\equiv -1\ (\bmod q)$ và $(p-1;\ q)=1$.

Do n, q đều lẻ nên $(n;q-1)=1$ nên tồn tại $u,v\in\mathbb{N}^*$ sao cho $un-v(q-1)=1$.

Khi ấy u lẻ và $(p-1)^{un}=(p-1)(p-1)^{v(q-1)}\Rightarrow(-1)^u\equiv(p-1)1^v\ (\bmod q)\Rightarrow p\equiv 0(\bmod q)$

Suy ra p chia hết cho q, mà do p, q là các số nguyên tố nên $q=p$.

Từ đó do $n<2p$ ta suy ra được $n=p$

Vậy p^{p-1} là ước của $(p-1)^p+1=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k p^k=p^2\left(\sum_{k=2}^{p}C_p^k(-1)^{p-k}p^{k-2}+1\right)$

Do mỗi số hạng của $\sum_{k=2}^{p}C_p^k(-1)^{p-k}p^{k-2}$ đều chia hết cho p nên $p-1\le 2\Rightarrow p\le 3$.

Bởi vậy $n=p=3$.

Vậy cặp số thỏa mãn bài toán là $(n;p)=(2;2),(3;3),(1;p)$ với p là số nguyên tố.

Bài 55. Vì $2^{2^n}+1\,\vdots\, p\ (*)$ nên ta được $2^{2^n}\equiv -1(\bmod p)\Rightarrow 2^{2^{n+1}}\equiv 1(\bmod p)(1)$.

Do p là số lẻ nên theo định lí Fermat ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (2).

Gọi h là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn $2^h \equiv 1 \pmod{p}$.

Từ (1) và (2) ta được $2^{n+1} \vdots h$ và $p-1 \vdots h$ nên suy ra $h = 2^m \left(0 \le m \le n+1\right)$.

Nếu $m \le n$ thì từ $2^{2^m} \equiv 1 \pmod{p}$ ta suy ra được $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$.

Kết hợp với (*) ta suy ra được $2 \vdots p$, điều này vô lí vì p là số lẻ.

Do vậy $h = 2^{n+1}$ nên $p-1 \vdots 2^{n+1}$ suy ra $p-1 \vdots 8$.

Giả sử $r_1; r_2; ...; r_{n(p)}$ là các số chẵn trong khoảng $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ khi đó $p-r_1; p-r_2; ...; p-r_{n(p)}$ là các số le trong khoảng $\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Giả sử $s_1; s_2; ...; s_{m(p)}$ là các số chẵn trong khoảng $\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Khi đó $n(p) + m(p) = \frac{p-1}{2}$ là các số chẵn trong khoảng $(0, p)$ và tập hợp $\left\{s_1; s_2; ...; s_{m(p)}; p-r_1; p-r_2; ...; p-r_{n(p)}\right\}$ chính là tập hợp $\left\{1; 2; ...; \frac{p-1}{2}\right\}$. Do đó ta được

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! = s_1.s_2...s_{m(p)}.(p-r_1).(p-r_2)...(p-r_{n(p)}) \equiv (-1)^{n(p)} s_1.s_2...s_{m(p)}.r_1.r_2...r_{n(p)}$$

$$= (-1)^{n(p)} 2^{\frac{p-1}{2}}.\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$$

Suy ra ta được $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{n(p)} \pmod{p}$

Mặt khác từ $p-1 \vdots 8$ ta được $p = 8k+1$ với k là số tự nhiên khác 0.

Do đó từ việc chọn h ta được $\frac{p-1}{2} \vdots h \Rightarrow \frac{p-1}{2} \vdots 2^{n+1} \Rightarrow p-1 \vdots 2^{n+2}$. Bài toán được chứng minh.

Chủ đề 4
CÁC BÀI TOÁN VỀ CẤU TẠO SỐ

Bài 1. Chữ số hàng chục của một số có 2 chữ số lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu đổi chỗ 2 chữ số cho nhau sẽ được một số bằng $\frac{5}{6}$ số ban đầu. Tìm số có 2 chữ số ban đầu .

Bài 2. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư là 6.

Bài 3. Cho số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 7. Chứng minh rằng hiệu các lập phương của hai chữ số của số đó chia hết cho 7.

Bài 4. Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi giảm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương có 4 chữ số.

Bài 5. Tìm các số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-\left(10d+e\right)$ chia hết cho 101?

Bài 6. Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{ab}^2=\left(a+b\right)^3$

Bài 7. Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{abc}.c=\overline{dac}$ với a, b, c, d là các chữ số khác nhau.

Bài 8. Tìm các chữ số a, b, c biết rằng $\overline{abc}-\overline{ca}=\overline{ca}-\overline{ac}$

Bài 9. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp, mỗi số có hai chữ số, biết rằng nếu viết lớn trước số nhỏ thì ta được một số có bốn chữ số là số chính phương.

Bài 10. Cho số tự nhiên A có n chữ số 9, hỏi có thể phân tích A thành tổng của hai số tự nhiên khác là B và C sao cho khi đổi thay đổi vị trí các chữ số của số B thì ta thu được số C.

Bài 11. Viết các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999 sau đó sắp xếp các số đó theo môt thứ tự bất kì ta được một số tự nhiên. Chứng minh rằng số mới được tạo thành không thể là một lũy thừa của 2.

Bài 12. Tìm các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{xy}$ sao cho $2.\overline{xy}=\left(x+2\right)^2+\left(y+4\right)^2$

Bài 13. Cho m là một số nguyên dương. Hãy tìm các chữ số $x\left(x\neq 0\right)$ và y sao cho A là một số chính phương với $A=\overline{xy5}+100m\left(m+5\right)$.

Bài 14. Tìm các chữ số x, y trong phép tính sau: $109^{10}=\overline{23673xy67459221723401}$.

Bài 15. Tìm số có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho số $A=\overline{abcabc...abc}$ gồm 6003 chữ số chia hết cho 91.

Bài 16. Tìm các chữ số a, b, c sao cho:

a) Số $\overline{7ab9}$ chia hết cho 63.

b) Số $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 1125.

Bài 17. Tìm tất cả các số có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$.

Bài 18. Cho số tự nhiên n có hai chữ số, chữ số hàng chục là x và chữ số hàng đơn vị là y(nghĩa là $x\neq 0$ và $n=10x+y$). Gọi $M=\frac{n}{x+y}$

a) Tìm n để $M=2$.

b) Tìm n để M nhỏ nhất.

Bài 19. Cho số tự nhiên $A=\overline{155*710*4*16}$. Hay thay dấu * bởi ba chữ số phân biệt tự 1 đến 9 để A luôn chia hết cho 396.

Bài 20. Tìm hai số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$ với $a \neq b$ thỏa mãn đẳng thức: $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \dfrac{\overline{a\underbrace{33...3}_{2014}b}}{\overline{b\underbrace{33...3}_{2014}a}}$.

Bài 21. Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$

Bài 22. Tìm số tự nhiên có nhiều hơn ba chữ số, biết rằng nếu ta bỏ đi ba chữ số cuối thì được một số mới mà lập phương của nó bằng chính số cần tìm.

Bài 23. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, trong đó hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau, thỏa mãn mỗi điều kiện sau đây:

a) Số đó bằng tổng các bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và số tạo bởi hai chữ số sau.

b) Số đó bằng tích của hai số mà mỗi số là số có hai chữ số giống nhau.

Bài 24. Tìm số tự nhiên có năm chữ số sao cho sao cho số đó bằng lập phương của tổng năm chữ số của nó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Gọi x là chữ số hàng chục $\left(0 < x \le 9\right)$, y là chữ số hàng đơn vị $\left(0 \le y \le 9\right)$

Vì chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 1 nên ta được $x - y = 1$

Vì đổi chổ 2 chữ số cho nhau sẽ được một số bằng $\dfrac{5}{6}$ số ban đầu nên ta được

$$\overline{yx} = \frac{5}{6}.\overline{xy} \Leftrightarrow 10y + x = \frac{5}{6}.\left(10x + y\right) \Leftrightarrow 4x - 5y = 0$$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy 54 là số cần tìm

Bài 2. Gọi số cần tìm có 2 chữ số là $\overline{ab}$, với $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a \neq 0$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 10a + b = 7(a+b) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ 3a - 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 83

Bài 3. Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab}$ $\left(a, b \in \mathbb{N};\ 0 < a \le 9;\ 0 \le b \le 9\right)$. Ta có $\overline{ab} \vdots 7$ hay $10a + b \vdots 7$.

Suy ra $\left(10a + b\right)^3 \vdots 7 \Leftrightarrow 1000a^3 + b^3 + 3.10ab\left(10a + b\right) \vdots 7$

Hay $1001a^3 - a^3 + b^3 + 3.10ab\left(10a + b\right) \vdots 7$

Ta có $1001a^3 \vdots 7$ và $3.10ab\left(10a + b\right) \vdots 7$. Nên suy ra $b^3 - a^3 \vdots 7$

Bài 4. Gọi số chính phương cần tìm là $x^2 = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ với $x \in N^*$

Ta được $1000 < x^2 < 9999 \Rightarrow 31 < x < 100$.

Sau khi giảm đi 1 đơn vị ở ở tất cả các chữ số ta được số

$$y^2=\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}=1000(a-1)+100(b-1)+10(c-1)+(d-1)$$
$$=1000a+100b+10c+d-1111=x^2-1111$$

Do đó ta được $x^2-y^2=1111\Leftrightarrow (x-y)(x+y)=1111=11.101$. Do $x+y>x-y$ nên ta được

$$\begin{cases}x+y=101\\x-y=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=56\\y=45\end{cases}(\text{Nhận})\text{ hoặc }\begin{cases}x+y=1111\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=556\\y=555\end{cases}(\text{Loại})$$

Vậy số chính phương cần tìm là $x^2=56^2=3136$

Bài 5. Ta có $\overline{abc}-(10d+e)\vdots 101\Leftrightarrow 101\overline{abc}-\left[\overline{abc}-(10d+e)\right]\vdots 101$

Hay ta được $100\overline{abc}+10d+e\vdots 101\Leftrightarrow \overline{abcde}\vdots 101$

Vậy số các số phải tìm là số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 101

Có tất cả 10100 số các số tự nhiên 5 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101.

Có tất cả 99990 số các số tự nhiên có 5 chữ số lớn nhất chia hết cho 101

Vậy số các số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 101 là $\dfrac{99990-10100}{101}+1=891$

Bài 6. Từ giả thiết suy ra $\overline{ab}=(a+b)\sqrt{a+b}$

Vì $\overline{ab}$ và $a+b\in\mathbb{N}^*$ nên $a+b$ là số chính phương.

Mặt khác $1\le a+b\le 18$ nên $a+b\in\{1;\,4;\,9;\,16\}$

Nếu $a+b=1;\ a+b=4;\ a+b=16$ thì thay vào (1) không thỏa mãn

Nếu $a+b=9$ thay vào $\overline{ab}=(a+b)\sqrt{a+b}$ ta được $\overline{ab}=27$. Vậy $a=2;\ b=7$.

Bài 7. Từ giả thiết $\overline{abc}.c=\overline{dac}$ ta suy ra được c khác 0 và

$$(100a+10b+c)c=100d+10a+c\Leftrightarrow 100ac+10bc+c^2=100d+10a+c$$

Như vậy c^2 có chữ số tận cùng là c nên ta suy ra được $c\in\{1;5;6\}$. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $c=1$, khi đó ta được $\overline{abc}=\overline{dac}$, trường hợp này không xẩy ra do a, b, c, d là các chữ số khác nhau.

+ Nếu $c=5$, khi đó từ $100ac+10bc+c^2=100d+10a+c$ ta suy ra được

$$500a+50b+25=100d+10a+5\Leftrightarrow 50a+10b+2=10d+a$$

Từ đó ta suy ra được $49a+5b+2=10d\le 90$ nên $a=1$.

Khi đó ta được $50+5b+1=10d$ nên suy ra $5b=...9$ nên không tồn tại chữ số b thỏa mãn.

+ Nếu $c=6$, khi đó từ $100ac+10bc+c^2=100d+10a+c$ ta suy ra được

$$60a+6b+3=10d+a\Leftrightarrow 59a+6b+3=10d\le 90$$

Do đó $a=1$ nên ta được $59+6b+3=10d\Rightarrow 62+6b=10d$

Từ đó ta suy ra $6b<30$ và $68=...8$ nên ta được $b=3$, từ đó suy ra $d=8$.

Vậy số cần tìm là 1368.

Bài 8. Dễ thấy $\overline{ca}-\overline{ac}<100$ nên từ $\overline{abc}-\overline{ca}=\overline{ca}-\overline{ac}$ suy ra $\overline{abc}-\overline{ca}<100$ nên $\overline{abc}<200$.

Do đó suy ra $a=1$. Từ đó ta được $\overline{1bc}-\overline{c1}=\overline{c1}-\overline{1c}$.

Hay ta được $100+10b+c-10c-1=10c+1-10+c \Rightarrow 10b+108=18c \Rightarrow 5b+54=9c$

Suy ra $5b \vdots 9$ nên b chỉ có thể là 0 hoặc 9.

+ Với $b=0$, khi đó ta được $9c=54 \Rightarrow c=6$

+ Với $b=9$, khi đó ta được $5.9+54=9c \Rightarrow c=11$, không thỏa mãn.

Vậy các chữ số cần tìm là $a=1; b=0; c=6$.

Bài 9. Gọi hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số là x và $x+1$ với . Gọi số chính phương là n^2 với n là số tự nhiên.

Từ đó ta được $10 \le x \le 98$ và $32 \le n \le 99$

Đặt $x=\overline{ab}$ thì $x+1=\overline{a(b+1)}$ với a, b là các chữ số. Khi đó ta được $n^2=\overline{a(b+1)ab}$.

Ta có $n^2=\overline{a(b+1)ab}=\overline{a(b+1)00}+\overline{ab}=\overline{a(b+1)}.100+\overline{ab}$

Hay ta được $n^2=100(x+1)+x \Leftrightarrow n^2=101x+100 \Leftrightarrow (n-10)(n+10)=101x$.

Từ đó suy ra $(n-10)(n+10)$ chia hết cho số nguyên tố 101. Do đó trong hai thừa số $n-10$ và $n+10$ có một thừa số chia hết cho 101.

Mà từ $32 \le n \le 99$ ta được $22 \le n-10 \le 89; 42 \le n+10 \le 109$.

Do đó chỉ có thể $n+10=101 \Rightarrow n=91$.

Từ đó suy ra $n^2=8281$ nên ta được $x=81$ và $x+1=82$.

Vậy hai số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 81 và 82.

Bài 10. Giả sử $A=\overline{999...9}=B+C$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét n là số chẵn, khi đó ta có thể phân tích A thành tổng của hai số B và C thỏa mãn yêu cầu bài toán, chẳng hạn $B=\overline{333...3666...6}$ và $C=\overline{666...6333...3}$, với B và C cùng có n chữ số trong đó có $\frac{n}{2}$ chữ số 3, $\frac{n}{2}$ chữ số 6.

- Trường hợp 2: Xét n là số lẻ, khi đó giả sử ta có thể phân tích A thành tổng của hai số B và C thỏa mãn yêu bài toán.

Đặt $B=\overline{a_1a_2...a_n}; C=\overline{b_1b_2...b_n}$ với $a_1; a_2; ...; a_n; b_1; b_2; ...b_n$ là các chữ số.

Khi đó ta có $\overline{a_1a_2...a_n}+\overline{b_1b_2...b_n}=999...9$.

Do $a_1+b_1 \le 9+9=18$ nên từ $\overline{a_1a_2...a_n}+\overline{b_1b_2...b_n}=999...9$ ta suy ra được $a_1+a_2=9$.

Lập luận tương tự ta được $a_1+b_1=a_2+b_2=...=a_n+b_n=9$.

Do đó tổng các chữ số của B và C là $S=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)=9n$ là một số lẻ.

Theo bài ra thì khi đổi vị trí các chữ số của số b ta được số C nên tổng các chữ số của B bằng tổng các chữ số của C. Từ đó ta được $S=(a_1+a_2+...+a_n)+(b_1+b_2+...+b_n)=2(a_1+a_2+...+a_n)$ là một số chẵn. Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do vậy khi n là số lẻ thì ta không phân tích được.

Vậy với n chẵn thì ta có thể phân tích A thành tổng của hai số B và C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 11. Gọi A là số mới được tạo thành. Số A được tao ra từ việc sắp xếp các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999 nên A có tất cả $99999-11111+1=88889$ số có 5 chữ số.

Tách số tự nhiên A thành tổng các số hạng có dạng $\overline{abcde}.10^{5n}$ với $n=0;1;2;3;...;88888$.

Đặt $s=\overline{abcde}$, khi đó $\overline{abcde}.10^{5n}=s\left(9.11111+1\right)^{n}=s\left(9m+1\right)^{n}=s\left(km+1\right)=skm+s$.

Chú ý rằng $m=11111$ và $k\in N^{*}$.

Khi đó $\overline{abcde}.10^{5n}$ và s có cùng số dư khi chia cho $m=11111$.

Như vậy số A khi chia cho M có cùng số dư với B là tổng của các số có 5 chữ số từ 11111 đến 99999.

Ta có $B=11111+11112+...+99999=\dfrac{\left(11111+99999\right).88889}{2}$

Do đó $2B=11111.888890$, do đó 2B chia hết cho m nên B chia hết cho m.

Từ đó ta được A chia hết cho m hay $m=11111$ là một ước của A.

Mà lũy thừa của 2 không có ước là số lẻ, do đó A không thể là một lũy thừa của 2.

Bài 12. Ta có

$$2.\overline{xy}=\left(x+2\right)^{2}+\left(y+4\right)^{2}\Leftrightarrow 2\left(10x+y\right)=x^{2}+4x+4+y^{2}+8y+16$$
$$\Leftrightarrow x^{2}-16x+y^{2}+6y+20=0\Leftrightarrow x^{2}-16x+64+y^{2}+6y+9=53$$
$$\Leftrightarrow\left(x-8\right)^{2}+\left(y+3\right)^{2}=53$$

Vì $x;y\in N$ nên $\left(x-8\right)^{2}$ và $\left(y+3\right)^{2}$ là các số chính phương. Mà 53 thì chỉ có thể viết về dạng tổng có 2 số chính phương là $53=2^{2}+7^{2}$. Nên ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}\left(x-8\right)^{2}=4\\ \left(y+3\right)^{2}=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left\{10;6\right\}\\ y\in\left\{4;-10\right\}\end{cases}$

Do x, y là chữ số nên ta suy ra được $\left(x;y\right)=\left(6;4\right)$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}\left(x-8\right)^{2}=49\\ \left(y+3\right)^{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left\{15;1\right\}\\ y\in\left\{-1;-5\right\}\end{cases}$, loại do x, y là chữ số.

Vậy số cần tìm là $\overline{xy}=64$.

Bài 13. Dễ thấy $A=\overline{xy5}+100m\left(m+5\right)$ chia hết cho 5 và A là số chính chính phương nên số A có dạng $A=\left(10t+5\right)^{2}=100t^{2}+100t+25$ với t là một số tự nhiên.

Từ đó ta được $100t^{2}+100t+25=100x+10y+5+100m^{2}+500m$

Hay ta được $100t^{2}+100t=100x+100m^{2}+500m+10y-20$

Do đó ta được $10y-20$ chia hết cho 100. Do y là chữ số nên ta suy ra được $y=2$.

Khi đó ta được $t^2+t=m^2+5m+x$.

Đặt $t=m+v$ nên ta được $(m+v)^2+m+v=m^2+5m+x \Leftrightarrow 2m(2-v)=v^2+v-x$, đẳng thức xấy ra với số mọi m nên ta suy ra được $v=2$. Từ đó ta được $x=v^2+v=6$.

Vậy các chữ số cần tìm là $x=6; y=2$.

Bài 14. Ta có $109^{10}-1=(109-1)(109^9+109^8+...+1)=9.12(109^9+109^8+...+1)$.

Do đó $109^{10}-1$ chia hết cho 9.

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}109^{10}-1&=(109^5-1)(109^5+1)=(109^5-1)(109+1)(109^4-109^3+...+1)\\&=10.11(109^5-1)(109^4-109^3+...+1)\end{aligned}$$

Do đó ta lại có $109^{10}-1$ chia hết cho 11.

Từ các kết quy ra ta suy ra $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 9 và 11.

Ta có $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $(x+y+73)\vdots 9 \Rightarrow (x+y+1)\vdots 9$

Và $\overline{23673xy67459221723401}-1$ chia hết cho 1 khi và chỉ khi $(y-x-9)\vdots 11$

Từ đó ta có $\begin{cases}(x+y+1)\vdots 9\\(y-x-9)\vdots 11\end{cases}$.

Chu ý rằng x và y là các chữ số nên $0\le x;y\le 9$. Do đó $1\le x+y+1\le 19$ nên suy ra $x+y+1$ chỉ có thể nhận giá trị là 9 hoặc 18. Lai thấy $-18\le y-x-9\le 0$ nên suy ra $y-x-9$ chỉ có thể nhận giá trị là 0 hoặc -11. Từ đó ta có các trường hợp sau đây xẩy ra:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y+1=9\\y-x-9=0\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x+y+1=9\\y-x-9=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}x+y+1=18\\y-x-9=0\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}x+y+1=18\\y-x-9=-11\end{cases}$, hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy các chữ số cần tìm là $x=5$ và $y=3$.

Bài 15. Ta có

$$\begin{aligned}A=\overline{abcabc...abc}&=\overline{abc}.10^{6000}+\overline{abc}.10^{5997}+...+\overline{abc}.10^6+\overline{abc}.10^3+\overline{abc}\\&=\overline{abc}(10^{6000}+10^{5997}+...+10^6+10^3+1)\end{aligned}$$

Chú ý là $1001=10^3+1$ và $1001\vdots 91$. Ta lại có

$$10^{6000}+10^{5997}+...+10^{6}+10^{3}+1=10^{6000}+10^{1999}\left(10^{3}+1\right)+...+10^{6}\left(10^{3}+1\right)+\left(10^{3}+1\right)$$

Từ đó ta suy ra được $A \vdots 91$ khi và chỉ khi $\overline{abc}.10^{6000}$ chia hết cho 91.

Do $\left(91,10^{6000}\right)$ nên để A chia hết cho 91 ta cần có $\overline{abc}$ chia hết cho 91.

Vậy các số cần tìm là $\overline{abc}\in\left\{182;273;364;455;546;637;728;819;910\right\}$.

Bài 16.

a) Số $\overline{7ab9}$ chia hết cho 63.

Ta có $\overline{7ab9}=7009+\overline{ab0}$ chia hết cho 63.

Nhận thấy 7009 chia 63 dư 16 nên để $\overline{7ab9}$ chia hết cho 63 thì $\overline{ab0}$ chia 63 dư 47

Từ đó ta đặt $\overline{ab0}=63t-16$ với $t\in N^{*}$.

Xét $a=0$, khi đó ta có $\overline{b0}=63t-16$. Không tồn tai số tự nhiên t thỏa mãn bài toán.

Xét $a\neq 0$, từ đó ta được $100\le\overline{ab0}\le 990$

Do đó suy ra $100\le 63t-16\le 990\Rightarrow 2\le t\le 15$.

Mặt khác từ $\overline{ab0}=63t-16$ ta suy ra được $63t-16$ có chữ số tận cùng bằng 0 nên $63t$ có chữ số tân cùng bằng 6. Suy ra t có chữ số tận cùng bằng 2. Kết hợp với $2\le t\le 15$ ta được $t=2$ hoặc $t=12$.

- Với $t=2$ thì ta được $\overline{ab0}=63.2-16=110$, do đó $a=b=1$

Thử lại ta thấy 7119 chia hết cho 63.

- Với $t=12$ thì ta được $\overline{ab0}=63.12-16=740$, do đó $a=7;b=4$

Thử lại ta thấy 7749 chia hết cho 63.

Vậy ta được hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 7119 bà 7740.

b) Số $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 1125.

Ta có $1125=9.5^{3}$ và $\left(9,125\right)=1$ nên từ $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 1125 ta suy ra được $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 9 và 125.

Ta có $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 125 nên $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 25, do đó $\overline{2c}$ chia hết cho 25, suy ra $c=5$.

Lại vì $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 125 nên $\overline{b25}$ chia hết cho 125, do đó $b=1$ hoặc $b=6$.

Mặt khác do $\overline{1ab2c}$ chia hết cho 9 nên ta được $a+b+c+3\vdots 9$ hay $a+b+8\vdots 9$

- Với $b=1$, khi đó từ $a+b+8\vdots 9$ ta được $a+9\vdots 9$ nên $a=0$ hoặc $a=9$
- Với $b=6$, khi đó từ $a+b+8\vdots 9$ ta được $a+5\vdots 9$ nên $a=4$.

Thử lại ta được các bộ chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(a;b;c\right)=\left(0;1;5\right),\left(9;1;5\right),\left(4;6;5\right)$

Bài 17. Đặt $x=\overline{ab}$ và $y=\overline{cde}$, khi đó ta có $\overline{abcde}=1000x+y$ với $0\le y<1000$

Từ giả thiết $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$ ta có $\sqrt[3]{1000x+y}=x\Leftrightarrow 1000x+y=x^{3}$.

Do $y\ge 0$ nên từ phương trình trên ta suy ra được $1000x\le x^{3}\Rightarrow 1000\le x^{2}$ nên ta được $x\ge 32$.

Mặt khác do $y<1000$ nên ta lại có

$x^3=1000x+y<1000x+1000 \Rightarrow x\left(1000-x^2\right)<1000 \Rightarrow x<33$

Từ đó ta suy ra được $x=32$. Nên ta được $x^3=32768$ hay $\overline{abcde}=32768$

Bài 18.

a) Ta có $M=2 \Leftrightarrow \dfrac{10x+y}{x+y}=2 \Leftrightarrow 10x+y=2x+2y \Leftrightarrow 8x=9$

Vì $x;\ y\in N$ và $1\le x\le 9;\ 0\le y\le 9$ nên ta được $x=1;\ y=8$. Suy ra $n=18$

b) Ta có $M=\dfrac{10x+y}{x+y}=1+\dfrac{9x}{x+y}=1+\dfrac{9}{1+\dfrac{y}{x}}$

Vì $x;\ y\in N$ và $1\le x\le 9;\ 0\le y\le 9$ nên ta được $0\le \dfrac{y}{x}\le 9 \Leftrightarrow 1\le 1+\dfrac{y}{x}\le 10$

Do đó ta được $M=1+\dfrac{9}{1+\dfrac{y}{x}}\ge 1+\dfrac{9}{10}=\dfrac{19}{10}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x=1;\ y=9$

Vậy giác trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{19}{10}$, xẩy ra khi $x=1;\ y=9$.

Bài 19. Gọi a, b, c là các chữ số cần tìm với $1\le a,b,c\le 9$. Khi đó ta cần xác định a, b, c để $A=\overline{155a710b4c16}$ luôn chia hết cho 396.

Do a, b, c là các chữ số phân biệt nên ta có $1+2+3\le a+b+c\le 7+8+9 \Leftrightarrow 6\le a+b+c\le 24$.

Ta có $396=4.9.11$ mà 4, 9, 11 nguyên tố với nhau theo từng đôi một. Do đó ta cần tìm số A để A chia hết cho 4; 9; 11.

- Vì A có hai chữ số tận cùng là 16 nên A chia hết cho 4.
- Số A chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của A là $1+5+5+7+1+4+1+a+b+c$ chia hết cho 9 hay $a+b+c+3$ chia hết cho 9.

Kết hợp với điều kiện $6\le a+b+c\le 24$ suy ra $a+b+c$ chỉ có thể là 6, 15, 24.

- Số A chia hết cho 11 khi và chỉ khi $(5+a+1+b+c+6)-(1+5+7+4+1)$ chia hết cho 11 hay $a+b+c-6$ chia hết cho 11.

Kết hợp với điều kiện $6\le a+b+c\le 24$ suy ra $a+b+c$ chỉ có thể là 6, 17.

Như vậy để A chia hết cho 9 và 11 thì $a+b+c=6$. Do a, b, c khác nhau nên ta suy ra các bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu là $(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)$.

Thử lại các các bộ số trên ta thay A chia hết cho 396.

Vậy để A chia hết cho 396 ta có thể thay các dấu * bởi các bộ số sau:

$$(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)$$

Bài 20. Đặt $c=\underbrace{33...3}_{2014}0$, khi đó ta thấy $3c+10=3.\underbrace{33...3}_{2014}0+10=\underbrace{99...9}_{2014}0+10=1\underbrace{00...0}_{2015}=10^{2015}$.

Ta có $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \dfrac{\overline{a\underbrace{33...3}_{2014}b}}{\overline{b\underbrace{33...3}_{2014}a}} \Leftrightarrow \dfrac{10a+b}{10b+a} = \dfrac{a.10^{2015} + \underbrace{33...3}_{2014}0 + b}{b.10^{2015} + \underbrace{33...3}_{2014}0 + a} = \dfrac{a.10^{2015} + c + b}{b.10^{2015} + c + a}$

Hay ta được $\dfrac{10a+b}{10b+a} - 1 = \dfrac{a(3c+10)+c+b}{b(3c+10)+c+a} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{9(a-b)}{10b+a} = \dfrac{3(a-b)(c+3)}{b(3c+10)+c+a}$

Do $a \neq b$ nên ta suy ra được $\dfrac{3}{10b+a} = \dfrac{c+3}{b(3c+10)+c+a}$

Từ đó ta có $9bc + 30b + 3c + 3a = 10bc + 30b + ac + 3a \Leftrightarrow 3c = (a+b)c \Leftrightarrow a+b=3$.

Do a, b là các chữ số khác 0 nên từ $a+b=3$ ta được $a=1; b=2$ hoặc $a=2; b=1$.

Vậy có hai bộ số $(\overline{ab}; \overline{ba})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(12;21),(21;12)$.

Bài 21. Từ $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$ ta được $1000a + 200b + 30c + 4d = 4574$.

Xét hàng đơn vị có tích $4d = ...4$, suy ra $d=1$ hoặc $d=6$

+ Nếu $d=1$, khi đó từ $1000a+200b+30c+4d=4574$ ta được $100a+20b+3c=457$

Khi đó xét hàng đơn vị $3c = ..7$ suy ra $c=9$. Do đó từ $100a+20b+3c=457$ ta được $10a+2b=43$

Dễ thấy vế trái của đẳng thức trên là số chẵn và vế phải là số lẻ nên không tìm thấy các chữ số a, b thỏa mãn đẳng thức $10a+2b=43$.

+ Nếu $d=6$, khi đó từ $1000a+200b+30c+4d=4574$ ta được $100a+20b+3c=455$

Xét hàng đơn vị có tích $3c=...5$ suy ra $c=5$. Do đó từ $100a+20b+3c=455$ ta được $10a+2b=44$.

Khi đó từ tích $2b=...4$ ta suy ra được $b=2$ hoặc $b=7$.

Với $b=2$ ta được $a=4$ và với $a=7$ ta được $b=3$.

Do đó các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 4256; 3756.

Bài 22. Gọi số cần tìm là $A = \overline{a...bcde}$. Đặt $N = \overline{a...b}$ và $P = \overline{cde}$.

Dễ thấy $A = 1000.N + P$. Khi bỏ ba chữ số cuối từ số A ta được số N.

Theo bài ra ta có $N^3 = A$ hay ta được $N^3 = 1000N + P$. Suy ra $N(N^2 - 1000) = P$.

Do $P \geq 0$ nên ta được $N^2 \geq 1000 \Rightarrow N \geq 32$. Lại thấy $p < 1000$.

Từ các kết quả trên ta được $32(N^2-1000) \leq N(N^2-1000) < 1000$

Do đó ta được $N^2 - 1000 < 32 \Rightarrow N^2 < 1032 \Rightarrow N < 33$.

Từ đó ta được $32 \leq N < 33$ nên suy ra $N = 32$.

Suy ra $N^3 = 32^3 = 32768$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy số cần tìm là $A = 32768$.

Bài 23.

a) Gọi số tự nhiên có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{xxyy}$ với $x, y \in N$, $1 \le x \le 9; 0 \le y \le 9$.

Theo bài ra ta có $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$ hay ta được

$$1100x + 11y = (11x)^2 + (11y)^2 \Leftrightarrow 100x + y = 11(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 99x + (x + y) = 11(x^2 + y^2)$$

Từ đó ta suy ra được $x + y \vdots 11$, do $1 \le x \le 9; 0 \le y \le 9$ nên $x + y = 11$

Khi đó ta được $99x + 11 = 11(x^2 + y^2)$, biến đổi tương đương ta được

$$9x + 1 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 9x + 2xy + 1 = (x + y)^2 \Leftrightarrow 2xy + 9x + 1 = 11^2 \Leftrightarrow x(2y + 9) = 120$$

Dễ thấy $2y + 9$ là số lẻ và 120 chia hết cho 8 nên x chia hết cho 8, do đó suy ra $x = 8$ nên $y = 3$.

Như vậy số cần tìm là 8833. Thử lại ta có $8833 = 88^2 + 33^2$ đúng.

Vậy số tự nhiên có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 8833.

b) Gọi số tự nhiên có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{xxyy}$ với $x, y \in N$, $1 \le x \le 9; 0 \le y \le 9$.

Theo bài ra ta có $\overline{xxyy} = \overline{aa}.\overline{bb}$ với a, b là các chữ số khác 0.

Khi đó ta được $1100x + 11y = 11a.11b \Leftrightarrow 100x + y = 11ab \Leftrightarrow 99x + (x + y) = 11ab$

Từ đó ta suy ra được $x + y \vdots 11$, do $1 \le x \le 9; 0 \le y \le 9$ nên $x + y = 11$

Lại từ $100x + y = 11ab \Leftrightarrow \overline{x0y} = 11ab \Rightarrow ab = \dfrac{\overline{x0y}}{11}$, do đó kết hợp với $x + y = 11$ ta có bảng giá trị như sau:

$\overline{x0y}$	209	308	407	506	605	704	804	902
$ab = \dfrac{\overline{x0y}}{11}$	19	24	37	46	55	64	73	82

Chú ý rằng a và b là các chữ số nên trong các trường hợp trên chỉ có hai số tách được thành tích của hai số tự nhiên có một chữ số là $28 = 4.7$ và $64 = 8.8$.

Tương ứng với hai trường hợp trên ta có hai số cần tìm là 3388 và 7744.

Thử lại ta thấy $3388 = 44.77$ và $7744 = 88.88$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số tự nhiên có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3388 và 7744.

Bài 24. Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ với a, b, c, d, e là các chữ số và $a \ne 0$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcde} = (a + b + c + d + e)^3$

Đặt $m = a + b + c + d + e$ với $m \in N^*$, khi đó ta được $\overline{abcde} = m^3$.

Vì $10000 \le \overline{abcde} \le 99999 \Rightarrow 10000 \le m^3 \le 99999$ hay ta được $22 \le m \le 46$. Mà ta lại có

$$10000a+1000b+100c+10d+e=m^3$$
$$\Leftrightarrow 9999a+999b+99c+9d+(a+b+c+d+e)=m^3$$
$$\Leftrightarrow 9999a+999b+99c+9d=m^3-m=(m-1)m(m+1)$$

Dễ thấy $9999a+999b+99c+9d\,\vdots\,9$ nên suy ra $(m-1)m(m+1)\,\vdots\,9$.

Vì trong ba số tự nhiên liên tiếp có duy nhất một số chia hết cho 3, mà tích ba số đó chia hết cho 9 nên trong ba số đó có duy nhất một số chia hết cho 9. Từ đó ta được m chia hết cho 9 hoặc chia 9 dư 1 hoặc 8.

Kết hợi với $22 \le m \le 46$ ta được m nhận các giá trị 26; 27; 28; 35; 36; 37; 44; 45; 46.

Từ đó các số $\overline{abcde}$ tương ứng thỏa mãn yêu cầu bài toán được cho bởi bảng sau

m	26	27	28	35	36	37	44	45	46
$\overline{abcde}$	17576	19683	21852	42875	46656	50653	85184	91125	97336

Chủ đề 5

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Bài 1. Giải phương trình với nghiệm nguyên $3x+17y=159$

Bài 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $11x+18y=120$

Bài 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$

Bài 4. Tìm các số nguyên x,y thõa mãn $x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3$

Bài 5. Tìm tất cả các cặp hai số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn $x^4-x^3+1=y^2$

Bài 6. a) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$x^4+y^4=7z^4+5$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn đẳng thức: $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$

Bài 7. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn: $xyz=x^2-2z+2$

Bài 8. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y)$$

Bài 9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^3=1+x+x^2+x^3$

Bài 10. Tìm các số tự nhiên x và y thoả mãn $2^x+1=y^2$

Bài 11. Tìm các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn $x^2-4xy+5y^2=2(x-y)$

Bài 12. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2+8y^2=20412$

Bài 13. Cho 3 số nguyên dương a, b, c thỏa điều kiện $2^a=b^c+1$ và $a>1$. Tìm tất cả các giá trị của c thỏa mãn đẳng thức đã cho.

Bài 14. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+y^3-3xy-3=0$.

Bài 15. Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức: $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Bài 16. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Bài 17. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$

Bài 18. Giải phương trình trên tập số nguyên: $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1$

Bài 19. Tìm các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn: $x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$

Bài 20. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy+2x+3y+4=0$.

Bài 21. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $x(x^2+x+1)=4y(y+1)$ b) $x^3+y^3=2xy+11$

Bài 22. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $\left(x^2-y\right)\left(x+y^2\right)=\left(x+y\right)^3$.

Bài 23. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương:

a) $x\left(x+2\right)\left(x^2+2x+3\right)$ b) $x^4+x^3+x^2+x+1$

Bài 24. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $xyz=3\left(x+y+z\right)$

Bài 25. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $xyz=10\left(x+y+z\right)$

Bài 26. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

a) $5xyz=x+5y-4z+31$ b) $3xyz=x+2y+3z+7$

Bài 27. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+y^3+z^3=3xyz+1$.

Bài 28. Cho một tam giác có số đo ba cạnh là x,y,z nguyên thỏa mãn điều kiện:

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0$$

Chứng minh tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài 29. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn $x^2+15y^2+8xy-8x-36y-28=0$

Bài 30. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$4y^3-4x^2y^2-4xy^2+x^2y+5x^2+4y^2+4xy+8x=0$$

Bài 31. a) Chứng minh phương trình $z^2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2010$ vô nghiệm với $x;y;z\in Z$

b) Chứng minh phương trình $z^2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2008$ có nghiệm với $x;y;z\in Z$.

Bài 32. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $195\left(x+y+z+t\right)-1890xyzt+2008=0$

Bài 33. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+3y^2+4xy+2x+4y-13=0$

Bài 34. Giải phương trình sau trong tập hợp các số nguyên dương: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{\sqrt{2009}}$

Bài 35. Tìm tất cả các cặp số $\left(x;y\right)$ với $x,y\in\mathbb{Z}$ sao cho $x^3=y^3+2y^2+1$

Bài 36. Giải phương trình nghiệm nguyên: $\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-2x\right)=4\left(y^2+2\right)$

Bài 37. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\left(x+y\right)^4=40y+1$.

Bài 38. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $\left(2x+5y+1\right)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105$.

Bài 39. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $xy^2+2xy+x=32y$.

Bài 40. Giải phương trình trên tập số nguyên $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0$

Bài 41. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0$$

Bài 42. Tìm cặp số $\left(x;y\right)$ nguyên dương thoả mãn $\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833$.

Bài 43. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3+2x^2y+x^2+2xy=x+10$

Bài 44. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3-y^3=95\left(x^2+y^2\right)$

Bài 45. Tìm tất cả các bộ số nguyên x, y thỏa mãn $x^4+2x^2=y^3$

Bài 46. Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^5+y^5=\left(x+y\right)^3$

Bài 47. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$

Bài 48. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $3x^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=6$.

Bài 49. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^3+2x^2+3x+2=y^3$

Bài 50. Giải phương trình $\left(2x-y-2\right)^2=7\left(x-2y-y^2-1\right)$ trên tập số nguyên.

Bài 51. Giải phương trình nghiệm nguyên: $3^x-y^3=1$

Bài 52. Xác định tất cả các cặp $\left(x,y\right)$ các số nguyên thỏa mãn $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$

Bài 53. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ đều là các số nguyên.

Bài 54. Tìm tất cả các số nguyên dương m và n thỏa mãn $3^m=n^2+2n-8$.

Bài 55. Tìm các số nguyên dương x, y, t với $t\le 6$ thỏa mãn: $x^2+y^2-4x-2y-7t-2=0$

Bài 56. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3=4y^3+x^2y+y+13$

Bài 57. Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn phương trình $\left(x^2+2\right)^2=2y^4+11y^2+x^2y^2+9$.

Bài 58. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2\left(x^2-y^2\right)^2=x^2+y^2+2z^2$.

Bài 59. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^4+2\left(x^2+y^2\right)^2+xy\left(x+y\right)^2=132$

Bài 60. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=4\left(x^2+y^2+xy+3\right)$.

Bài 61. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $2010^x+2011^y=2012^z$.

Bài 62. Tìm các số tự nhiên x, y, x thỏa mãn:

a) $2002^x-2001^y=1$ b) $5^x=1+2^y$

c) $5^x+1=2^y$ d) $2^x.3^y=1+5^z$

Bài 63. Tìm các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn: $\begin{cases} xy-3zt=1 \\ xz+ty=2 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình. Ta thấy 159 và 2x đều chia hết cho 3 nên 17y chia hết 3, do đó y chia hết cho 3 (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt $y=3t\left(t\in Z\right)$. Thay vào phương trình ta được $3x+17.3t=159\Leftrightarrow x+17t=53\Leftrightarrow x=53-17t$

Do đó nghiêm của phương trình là $\begin{cases}x=53-17t\\ y=3t\end{cases}\left(t\in Z\right)$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình được xác định là $\begin{cases}x=53-17t\\ y=3t\end{cases}\left(t\in Z\right)$

Bài 2. Dễ thấy $18y$ và 120 chia hết cho 6 nên suy ra $11x\vdots 6$ hay ta được $x\vdots 6$. Đặt $x=6k$ với k là số nguyên. Thay vào phương trình $11x+18y=120$ và rút gọn ta được $11k+3y=20$

Từ đó ta được $y=\dfrac{20-11k}{3}$ hay $y=7-4k+\dfrac{k-1}{3}$

Lại đặt $t=\dfrac{k-1}{3}$, với t nguyên suy ra $k=3t+1$

Từ đó ta được $x=6k=6\left(3t+1\right)=18t+6$ và $y=7-4\left(3t+1\right)+t=3-11t$

Thay các biểu thức của x và y vào phương trình ban đầu ta thấy phương trình được nghiệm đúng.

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình đã cho được biểu thị bởi $\begin{cases}x=18t+6\\ y=3-11t\end{cases}\left(t\in Z\right)$.

Bài 3. Nếu y thỏa mãn phương trình thì $-y$ cũng thỏa mãn, do đó ta có thể giả sử $y\ge 0$

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=y^2\Leftrightarrow\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=y^2$$

Đặt $x^2+3x+1=a$, khi đó từ phương trình trên ta được

$$\left(a-1\right)\left(a+1\right)=y^2\Leftrightarrow a^2-1=y^2\Leftrightarrow\left(a+y\right)\left(a-y\right)=1$$

Suy ra $a+y=a-y$ nên ta được $y=0$

Thay vào phương trình đã cho ta được $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=0$

Giải phương trình trên ta được các nghiệm nguyên là $x_1=0;x_2=-1;x_3=-2;x_4=-3$

Vậy phương tình đã cho có các nghiệm nguyên là $\left(0;0\right),\left(-1;0\right),\left(-2;0\right),\left(-3;0\right)$

Bài 4. Biến đổi tương đương ta được

$$x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3\Leftrightarrow x^2-1+x-2xy^2+2y^2-1+y-xy=1$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+1-y\right)-\left(x-1\right)\left(2y^2-1\right)=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+1-y-2y^2+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\ -2y^2-y+x+2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\ -2y^2-y+x+2=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ \left(y-1\right)\left(2y+3\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ \left(y-1\right)\left(2y+3\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;\ y=1\\ x=2;\ y=-\dfrac{3}{2}\\ x=0;\ y=1\\ x=0;\ y=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy cặp số nguyên thỏa mãn là : $\left(2;1\right)$, $\left(0;1\right)$

Bài 5. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $x=0$, thay vào phương trình ta được $y=\pm1$.

+ Nếu $x=-1\Rightarrow y^2=3$, phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $x=1\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm1$

+ Nếu $x\ge2$, ta có $4y^2=4x^4-4x^3+4\Rightarrow\left(2x^2-x-1\right)^2<\left(2y\right)^2<\left(2x^2-x+1\right)^2$

$\Rightarrow\left(2y\right)^2=\left(2x^2-x\right)^2\Leftrightarrow4x^4-4x^3+x^2=4x^4-4x^3+4\Leftrightarrow x=2\,(\text{do } x\ge2)\Rightarrow y=\pm3$

+ Nếu $x\le-2$, đặt $t=-x\ge2$. Khi đó ta có $y^2=t^4+t^3+1$

$\Rightarrow4y^2=4t^4+4t^3+4\Rightarrow\left(2t^2+t-1\right)^2<\left(2y\right)^2<\left(2t^2+t+1\right)^2$

$\Rightarrow\left(2y\right)^2=\left(2t^2+t\right)^2\Leftrightarrow4t^4+4t^3+4=4t^4+4t^3+t^2\Leftrightarrow t=2\,(\text{do } t\ge2)\Rightarrow y=\pm5$

Kết luận $(x;y)=(0;1),(0;-1),(1;1),(1;-1),(2;3),(2;-3),(-2;5),(-2;-5)$

Bài 6. a) Giả sử tồn tại các số nguyên $x;\ y;\ z$ thỏa mãn

$$x^4+y^4=7z^4+5\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5\ (1).$$

Ta có $a^4\equiv0(\text{mod } 8);\ a^4\equiv1(\text{mod } 8)$ với mọi số nguyên a

$$\Rightarrow\begin{cases}x^4+y^4+z^4\equiv0;\ 1;\ 2;\ 3\ (\text{mod } 8)\\8z^4+5\equiv5(\text{mod } 8)\end{cases}$$

Mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại $x;\ y;\ z$ thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$\left[(x+1)^2+(x-1)^2\right]\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]=y^3\Leftrightarrow\left(2x^2+2\right).4x=y^3\Leftrightarrow8x^3+8x=y^3$

+ Nếu $x\ge1\Rightarrow8x^3<8x^3+8x<\left(2x+1\right)^3\Leftrightarrow\left(2x\right)^3<y^3<\left(2x+1\right)^3$ (mâu thuẫn vì ynguyên).

+ Nếu $x\le-1$ và $(x;\ y)$ là nghiệm, ta được $(-x;\ -y)$ cũng là nghiệm, mà $-x\ge1\Rightarrow$ mâu thuẫn.

+ Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ (thỏa mãn).

Vậy $x=y=0$ là nghiệm duy nhất.

Bài 7. Ta tìm hai số nguyên dương x, y sao cho $z=\dfrac{x^2+2}{xy+2}$ là số nguyên dương

+ Với $x=y$ ta có $z=1$. Vậy mọi bộ ba số $(x;\ x;\ 1)$ trong đó x là số nguyên dương tùy ý đều thỏa mãn

+ Với $x<y$, suy ra $x^2+2<xy+2\Rightarrow\dfrac{x^2+2}{xy+2}<1$ (không thỏa mãn đề bài)

+ Với $x>y$. Giả sử bộ ba số nguyên dương $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn đề bài

Khi đó ta có $y\left(x^2+2\right)\vdots\left(xy+2\right)$ hay $\left[x\left(xy+2\right)-2\left(x-y\right)\right]\vdots\left(xy+2\right)\Rightarrow 2\left(x-y\right)\vdots\left(xy+2\right)$

Do đó tồn tại số k nguyên dương sao cho $2\left(x-y\right)=k\left(xy+2\right)$

Với $k\ge 2$, suy ra $x-y\ge xy+2\Rightarrow\left(x+1\right)\left(y-1\right)+3\le 0$ (vô lí)

Với $k=1$ ta có $2\left(x-y\right)=xy+2\Rightarrow\left(x+2\right)\left(y-2\right)=-6$

Do x, y nguyên dương và $x>y$ suy ra $y=1$ và $x+2=6$ nên ta được $x=4;\ z=3$

Thử lại thỏa mãn đề bài

Vậy $\left(x;\ y;\ z\right)=\left(4;\ 1;\ 3\right)$ và các bộ số $\left(x;\ x;\ 1\right)$ trong đó x là số nguyên dương tùy ý là thỏa mãn đề bài

Bài 8. Ta có

$$\left(x+y+1\right)\left(xy+x+y\right)=5+2\left(x+y\right)\Leftrightarrow\left(x+y+1\right)\left(xy+x+y\right)=2\left(x+y+1\right)+3$$
$$\Leftrightarrow\left(x+y+1\right)\left(xy+x+y-2\right)=3=3.1=1.3=(-3).(-1)=(-1).(-3)$$

Xét các trường hợp

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x+y+1=3\\xy+x+y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x+y+1=-1\\xy+x+y-2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-2\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}x+y+1=1\\xy+x+y-2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\xy=5\end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}x+y+1=-3\\xy+x+y-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-4\\xy=5\end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình có các nghiệm là $\left(1;\ 1\right),\left(-1;\ -1\right)$

Bài 9. Dễ thấy $x^3\le 1+x+x^2+x^3\le\left(x+1\right)^3$ do đó ta được $x^3\le y^3\le\left(x+1\right)^3$

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $y^3=x^3$, khi đó ta được $x^3=1+x+x^2+x^3\Leftrightarrow x^2+x+1=0$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $y^3=\left(x+1\right)^3$, khi đó ta được

$$\left(x+1\right)^3=1+x+x^2+x^3\Leftrightarrow 2x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\ y=1\\x=-1;\ y=0\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $\left(0;\ 1\right),\left(-1;\ 0\right)$.

Bài 10. Ta có $2^x+1=y^2\ \Leftrightarrow\ 2^x=y^2-1\ \Leftrightarrow\ 2^x=\left(y+1\right)\left(y-1\right)$.

Đặt $y+1=2^m,\ \ y-1=2^n\ \ \left(m,n\in\mathbb{N};\ m>n\right)$.

Khi đó $2^m - 2^n = y + 1 - (y-1) = 2 \Leftrightarrow 2^n\left(2^{m-n} - 1\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2^n = 2 \\ 2^{m-n} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 1;\ m = 2$

Thoả mãn điều kiện $m, n \in \mathbb{N}; m > n$

Vậy ta được $x = 3; y = 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Phương trình tương đương với $x^2 - 2(1+2y)x + 5y^2 + 2y = 0$, xem phương trình đó là phương trình bậc hai ẩn x, khi đó ta có $\Delta' = (1+2y)^2 - (5y^2 + 2y)$

Để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 1 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \le 2 \Leftrightarrow |y-1| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \le y \le 1 + \sqrt{2}$$

Do y là số nguyên nên ta được $y = 0,\ y = 1,\ y = 2$. Ta xét các trường hợp xẩy ra

- $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2$
- $y = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$
- $y = 2 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 4,\ x = 6$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là $(0;0), (2;0), (4;2), (6;2)$.

Bài 12. Trước hết ta nhận thấy số chính phương khi chia cho 3 có thể dư 0 hoặc dư 1. Do đó tổng hai số chính phương chia hết cho 3 khi và chỉ khi cả hai số cùng chia hết cho 3.

Ta có $5x^2 + 8y^2 = 20412 \Leftrightarrow 6x^2 + 9y^2 - 20412 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 3\left(2x^2 + 3y^2 - 6804\right) = x^2 + y^2$

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \vdots 3 \\ y^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x_1 \\ y = 3y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9x_1^2 \\ y = 9y_1^2 \end{cases}$, khi đó ta được

$$3\left(2.9x_1^2 + 3.9y_1^2 - 6804\right) = 9x_1^2 + 9y_1^2 \Leftrightarrow 3\left(2x_1^2 + 3y_1^2 - 756\right) = x_1^2 + y_1^2$$

Suy ra $x_1^2 + y_1^2 \vdots 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \vdots 3 \\ y_1^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ y_1 = 3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 9x_2^2 \\ y_1^2 = 9y_2^2 \end{cases}$, khi đó ta được

$$3\left(2.9x_2^2 + 3.9y_2^2 - 756\right) = 9x_2^2 + 9y_2^2 \Leftrightarrow 3\left(2x_2^2 + 3y_2^2 - 84\right) = x_2^2 + y_2^2$$

Suy ra $x_2^2 + y_2^2 \vdots 3 \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 \vdots 3 \\ y_2^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_3 \\ y_2 = 3y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 = 9x_3^2 \\ y_2^2 = 9y_3^2 \end{cases}$, khi đó ta được

$$3\left(2.9x_3^2 + 3.9y_3^2 - 84\right) = 9x_3^2 + 9y_3^2 \Leftrightarrow 3\left(2x_3^2 + 3y_3^2 - 28\right) = x_3^2 + y_3^2 \Leftrightarrow 5x_3^2 + 8y_3^2 = 28$$

Suy ra $8y_3^2 \le 28 \Rightarrow y_3^2 \le 3{,}5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_3^2 = 0 \\ y_3^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_3 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_3 = 0 \end{array}\right.$

+ Với $y_3 = 0 \Rightarrow 5x_3 = 28$, trường hợp này không xẩy ra.

+ Với $y_3 = 1$, khi đó ta được $x_3 = 2;\ x_3 = -2$

+ Với $y_3 = -1$, khi đó ta được $x_3 = 2;\ x_3 = -2$

Khi đó ta được $(x_3; y_3) = (2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1)$

Vì $\begin{cases} x = 3x_1 = 9x_2 = 27x_3 \\ y = 3y_1 = 9y_2 = 27y_3 \end{cases}$, khi đó ta được $(x; y) = (54; 27), (54; -27), (-54; 27), (-54; -27)$

Thử lại ta thấy phương trình nhận các nghiệm là $(54; 27), (54; -27), (-54; 27), (-54; -27)$

Bài 13. Từ $2^a = b^c + 1$ (1). Với $a \in Z^+$, $a > 1$ nên $a \geq 2 \Rightarrow 2^a \vdots 4$. Từ (1) suy ra b là số nguyên dương lẻ. Giả sử $b = 2n + 1$ với $n \in Z^+$.

+ Nếu c là số nguyên dương chẵn thì: $c = 2m$ với $m \in Z^+$. Khi đó ta có:

$$ab^c = (b^2)^m = \left[(2n+1)^2\right]^m = (4n^2 + 4n + 1)^m = 4k + 1 \text{ với } k \in Z^+$$

Suy ra $2^a = b^c + 1 = 4k + 2 \not\vdots 4$ vô lý. Do đó c là số nguyên dương lẻ.

+ Ta đặt $c = 2m + 1$ với $m \in N$. Suy ra

$2^a = b^c + 1 = b^{2m+1} + 1 = (b+1)(b^{2m} - b^{2m-1} + \cdots + b^2 - b + 1) = (b+1)A$ với $A \in Z^+$ và A lẻ

Suy ra A là ước lẻ của $b^c + 1$, tức là ước lẻ của 2^a suy ra $A = 1$.

Ta có $b^c + 1 = b + 1 \Rightarrow c = 1$. Vậy $c = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Ta có $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 + 1 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xy - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left[(x+y)^2 - (x+y) + 1\right] - 3xy(x+y+1) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left[(x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy\right] = 4$$

Vì x, y nguyên nên có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y+1 = 4 \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1;\ y = 2 \\ x = 2;\ y = 1 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y+1 = 2 \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ xy = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$ (loại)

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} x+y+1 = 1 \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1;\ y = -1 \\ x = -1;\ y = 1 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} x+y+1 = -1 \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -2 \\ xy = \dfrac{11}{3} \end{cases}$ (loại)

+ Trường hợp 5: $\begin{cases} x+y+1 = -2 \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -3 \\ xy = 5 \end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

+ Trường hợp 6: $\begin{cases} x+y+1=-4 \\ (x+y)^2-(x+y)+1-3xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=\dfrac{32}{3} \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên $(x;\ y)=(1;\ 2),\ (2;\ 1),\ (1;\ -1),\ (-1;1)$

Bài 15. Ta thấy $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ và $x,y\in\mathbb{N}\Rightarrow x,y$ là các số chính phương.

$\Rightarrow \sqrt{x+y+3},\sqrt{x},\sqrt{y}\in\mathbb{N}$

Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b,\sqrt{x+y+3}=c\left(a,b,c\in\mathbb{N}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ x+y=a^2+b^2 \\ x+y+3=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ c^2-a^2-b^2=3 \end{cases} \Rightarrow (a+b-1)^2-a^2-b^2=3$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b-2ab=-3 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 16. Ta có $x^3+y^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2-x-y\right)=0$

Vì x, y nguyên dương nên $x+y>0$, ta có $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-xy+y^2-x-y\right)=0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2=1 \\ (y-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2;\ z=4$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=0 \\ (x-y)^2=1 \\ (y-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow z=3$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 \\ (x-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow z=3$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(1;2;3),\ (2;1;3),\ (2;2;4)$

Bài 17. Ta có $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$

$$\Leftrightarrow 2^x\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-2^x.5^y=11879.2^x$$

+ Xét $y = 0$, từ phương trình trên ta được

$$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-1=11879 \Leftrightarrow \left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)=11880$$

Đặt $t = 2^x \Rightarrow t \in N^*$ và phương trình trở thành

$$\left(t+1\right)\left(t+2\right)\left(t+3\right)\left(t+4\right)=9.10.11.12 \Rightarrow t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3$$

+ Xét $y \ge 1$. Khi đó $2^x\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-2^x.5^y$ chia hết cho 5 và 11879.2^x không chia hết cho 5. Nên trường hợp này không có nghiệm.

Vậy ta tìm được $x = 3;\ y = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 18. Điện xác định của phương trình là $y\left(y+1\right)\left(y+2\right)\left(y+3\right) \ge 0$.

Ta có $x^{2015}=\sqrt{y\left(y+1\right)\left(y+2\right)\left(y+3\right)+1} \Leftrightarrow x^{2015}-1=\sqrt{\left(y^2+3y+1\right)^2-1}$

Đặt $y^2+3y+1=a\,(a \in Z)$. Vì x nguyên nên $x^{2015}-1$ nguyên nên

$a^2-1=k^2(k \in Z) \Rightarrow a^2-k^2=1 \Rightarrow \left(a-k\right)\left(a+k\right)=1 \Rightarrow k=0$

$$\Rightarrow \left(y^2+3y+1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+3y+1=1 \\ y^2+3y+1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-3 \Rightarrow x=1 \\ y=-1 \Rightarrow x=1 \\ y=-2 \Rightarrow x=1 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên $\left(x;y\right)=\left(1;0\right),\left(1;-1\right),\left(1;-2\right),\left(1;-3\right)$.

Bài 19. Phương trình tương đương với $\left(x-2\right)^2\left[\left(x+1\right)^2+9\right]=\left(2y-1\right)^2$

Nếu $x = 2$ thì ta được $y=\dfrac{1}{2}$ (loại). Do đó $\left(x+1\right)^2+9$ là số chính phương.

Nhận thấy $\left|x+1\right|^2<\left(x+1\right)^2+9 \le \left(\left|x+1\right|+3\right)^2$ nên ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\left(x+1\right)^2+9=\left(\left|x+1\right|+1\right)^2 \Rightarrow \left|x+1\right|=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=3 \end{array}\right.$

- Với $x=-5$ ta được $y=-17;\ y=18$
- Với $x=3$ ta được $y=-2;\ y=3$

+ Trường hợp 2: $\left(x+1\right)^2+9=\left(\left|x+1\right|+2\right)^2 \Rightarrow \left|x+1\right|=\dfrac{5}{4}$ (loại)

+ Trường hợp 3: $\left(x+1\right)^2+9=\left(\left|x+1\right|+3\right)^2 \Rightarrow \left|x+1\right|=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-4;\ y=5$

Vậy có các cặp số thỏa mãn bài toán là $\left(3;\,3\right),\left(3;\,-2\right),\left(-5;\,18\right),\left(-5;\,-17\right),\left(-1;\,5\right),\left(-1;4\right)$

Bài 20. Phương trình đã cho được viết lại thành $x^2+\left(3y+2\right)x+\left(2y^2+3y+4\right)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x có y là tham số, khi đó ta có

$$\Delta = (3y+2)^2 - 4(2y^2+3y+4) = y^2 - 12$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta = y^2 - 12$ phải là số chính phương.

Khi đó đặt $y^2 - 12 = m^2 \Leftrightarrow (y-m)(y+m) = 12 (m \in N)$.

Từ đó suy ra $y+m$ và $y-m$ là các ước của 12. Chú ý là $y+m > y-m$ và $y+m+y-m = 2y$ nên $y+m$ và $y-m$ có cùng tính chẵn. Do đó ta được

$$\begin{cases} y+m=6 \\ y-m=2 \end{cases} \Rightarrow y=4 \text{ hoặc } \begin{cases} y+m=-2 \\ y-m=-6 \end{cases} \Rightarrow y=-4$$

+ Với $y=4$, khi đó ta có phương trình $x^2+14x+48=0 \Rightarrow x=-6; x=-8$

+ Với $y=-4$, khi đó ta có phương trình $x^2-10x+24=0 \Rightarrow x=4; x=6$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x;y) = (-6;4),(-8;4),(4;-4),(6;-4)$.

Bài 21. a) $x(x^2+x+1) = 4y(y+1)$

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x(x^2+x+1) = 4y(y+1) = x^3+x^2+x+1 = 4y^2+4y+1 \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) = (2y+1)^2$$

Do $(2y+1)^2$ là số lẻ nên $x+1$ và x^2+1 cùng là số lẻ.

Gọi $d = (x+1, x^2+1)$, khi đó $(x^2+1)-(x^2-1) \vdots 2$ nên $2 \vdots d$, mà d là số lẻ nên $d=1$.

Do đó ta được $(x+1, x^2+1) = 1$.

Tích của hai số $x+1$ và x^2+1 nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên $x+1$ và x^2+1 cùng là số chính phương. Từ đó suy ra x^2 và x^2+1 là hai số chính phương đồng thời là hai số nguyên liên tiếp, do đó $x^2=0 \Rightarrow x=0$. Từ đó ta suy ra được $y=0$ hoặc $y=-1$.

Thử lại vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy các nghiệm nguyê của phương trình là $(x;y) = (1;0),(1;-1)$.

b) $x^3+y^3 = 2xy+11$

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$x^3+y^3 = 2xy+11 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 2xy+11$

Đặt $a = x+y; b = xy$ với a, b là các số nguyên.

Khi đó phương trình trên trở thành $a^3-3ab = 2b+11 \Leftrightarrow a^3-11 = b(3a+2)$

Từ đó ta suy ra được $(a^3-11) \vdots (3a+2)$ hay ta được $(27a^3+8-305) \vdots (a+2)$ nên $305 \vdots a+2$

Suy ra $a+2$ là ước 305, ta cũng có $b = \dfrac{a^3-11}{3a+2}$, nên ta có bảng giá trị như sau

$3a+2$	-1	5	-61	305

a	-1	1	-21	101
$b=\dfrac{a^3-11}{3a+2}$	12	-2	152	3378

Chú ý là $(x+y)^2 \ge 4xy$ nên ta loại các trường hợp $a^2 < 4b$.

Từ đó ta được các cặp $(a;b)$ thỏa mãn là $(1;-2)$.

Khi đó ta được $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=-1 \\ x=-1; y=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;-1),(-1;2)$.

Bài 22. Do $y>0$ nên biến đổi tương đương phương trình và chí hai vế cho y ta được

$$\left(x^2-y\right)\left(x+y^2\right)=(x+y)^3 \Leftrightarrow 2y^2+x(3-x)y+x(3x+1)=0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai có ẩn y, ta có

$$\Delta = x^2(3-x)^2-8x(3x+1)=x\left(x^3-6x^2-15x-8\right)=(x+1)^2x(x-8)$$

Do x nguyên dương nên $(x+1)^2>0$, nên để phương trình có nguyên dương thì Δ phải là số chính phương, do dó $x(x-8)$ phải là số chính phương.

Đặt $x(x-8)=a^2, a\in N$. Khi đó ta được

$$x(x-8)=a^2 \Leftrightarrow (x-4)^2=a^2+16 \Leftrightarrow (x+a-4)(x-a-4)=16$$

Nhận thấy $x+a-4$ và $x-a-4$ cùng chẵn, đồng thời $x+a-4 \ge x-a-4$ nên ta có bảng giá trị sau:

$x+a-4$	-2	-4	4	8
$x-a-4$	-8	-4	4	2
$x-4$	-5	-4	4	5
x	-1, loại	0, loại	8	9
y			10	6 hoặc 21

Thử lại ta được các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y)=(8;10),(9;6),(9,21)$

Bài 23. a) Giả sử $x(x+2)\left(x^2+2x+3\right)=y^2, y\in N$.

Khi đó ta có $x(x+2)\left(x^2+2x+3\right)=y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x+3\right)=y^2$

Đặt $k=x^2+2x$, khi đó từ phương trình trên ta được $k(k+3)=y^2$

+ Nếu $y=0$, khi đó ta có $k=0; k=-3$.

Với $k=0$ ta được $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0; x=-2$

Với $k=-3$ ta được $x^2+2x=-3 \Leftrightarrow x^2+2x+3=0$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $y > 0$, khi đó từ phương trình $k(k+3) = y^2$ ta được

$$4k(k+3) = 4y^2 \Leftrightarrow (2k+3)^2 - 9 = 4y^2 \Leftrightarrow (2k+3+2y)(2k+3-2y) = 9$$

Nhận thấy $2k+3+2y > 2k+3-2y$ nên từ phương trình ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 2k+3+2y = 9 \\ 2k+3-2y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2k+3 = 5 \Rightarrow k = 1$.

Từ đó ta có phương trình $x(x+2) = 1$, phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2: $\begin{cases} 2k+3+2y = -1 \\ 2k+3-2y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2k+3 = -5 \Rightarrow k = -4$

Từ đó ta có phương trình $x(x+2) = -4$, phương trình vô nghiệm.

Vậy với $x = 0$ hoặc $x = -2$ thì $x(x+2)(x^2+2x+3)$ là số chính phương.

b) **Cách 1.** Giả sử $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2, y \in N$. Khi đó ta có

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 4y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 = (2y)^2 \Leftrightarrow (2x^2+x)^2 + 2x^2 + (x+2)^2 = (2y)^2$$

Từ đó ta được $(2y)^2 > (2x^2+x)^2$ nên ta được $(2y)^2 \ge (2x^2+x+1)^2$. Do đó

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \ge (2x^2+x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \ge 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow 0 \ge x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$$

Do x nhận giá trị nguyên nên $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $x = -1$, khi đó ta được $y^2 = 1$, thỏa mãn.

+ Nếu $x = 0$, khi đó ta được $y^2 = 1$, thỏa mãn.

+ Nếu $x = 1$, khi đó ta được $y^2 = 5$, loại.

+ Nếu $x = 2$, khi đó ta được $y^2 = 31$, thỏa mãn.

+ Nếu $x = 3$, khi đó ta được $y = 121 = 11^2$.

Vậy khi $x = -1; x = 0; x = 3$ thì $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ là số chính phương.

Cách 2. Giả sử $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2, y \in N$. Khi đó ta có

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 4y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 = (2y)^2 \Leftrightarrow (2x^2+x)^2 + 2x^2 + (x+2)^2 = (2y)^2$$

Từ đó ta được $(2y)^2 > (2x^2+x)^2$. Mặt khác ta có

$$\left(2x^2+x+2\right)^2-\left(4x^4+4x^3+4x^2+4x+4\right)$$
$$=\left(2x^2+x\right)^2+2\left(2x^2+x\right)+4-\left[\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+4\right]$$
$$=8x^2+4x-3x^2-4x=5x^2\ge 0$$

Từ đó ta suy ra được $\left(2x^2+x+2\right)^2\ge 4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$

Như vậy ta được $\left(2x^2+x\right)^2<\left(2y\right)^2\le\left(2x^2+x+2\right)^2$

Do $\left(2y\right)^2$ là số chính phương nên ta được $\left(2y\right)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2$ hoặc $\left(2y\right)^2=\left(2x^2+x+2\right)^2$

- Trường hợp 1: $\left(2y\right)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2$ hay

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=\left(2x^2+x+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=\left(2x+x\right)^2+2\left(2x^2+x\right)+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1;x=3$$

- Trường hợp 1: $\left(2y\right)^2=\left(2x^2+x+2\right)^2$ hay

$$\left(2x^2+x+2\right)^2=\left(4x^4+4x^3+4x^2+4x+4\right)$$
$$=\left(2x^2+x\right)^2+2\left(2x^2+x\right)+4-\left[\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+4\right]=0$$
$$=8x^2+4x-3x^2-4x=0\Leftrightarrow 5x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

Vậy khi $x=-1;x=0;x=3$ thì $x^4+x^3+x^2+x+1$ là số chính phương.

Bài 24. Do vai trò của x y, z như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $1\le x\le y\le z$

Khi đó từ $xyz=3\left(x+y+z\right)$ ta có $xyz\le 3\left(z+z+z\right)\Rightarrow xy\le 9$

Từ đó suy ra được $x^2\le xy\le 9$ do x^2 là số chính phương nên ta suy ra $x^2\in\left\{1;4;9\right\}\Rightarrow x\in\left\{1;2;3\right\}$

.

Ta xét các trường hợp sau

- Với $x=1$, khi đó từ phương trình $xyz=3\left(x+y+z\right)$ ta được

$$yz=3\left(1+y+z\right)\Leftrightarrow yz-3y-3z=3\Leftrightarrow\left(y-3\right)\left(z-3\right)=12$$

Chú ý là $y\le z$ nên $y-3\le z-3$. Do đó ta có bảng giá trị sau:

$y-3$	1	2	3
$z-3$	12	6	4
y	4	5	6
z	15	9	7

- Với $x=2$, khi đó từ phương trình $xyz=3\left(x+y+z\right)$ ta được

$$2yz=3(2+y+z)\Leftrightarrow 2yz-3y-3z=6\Leftrightarrow (2y-3)(2z-3)=21$$

Chú ý là $y\le z$ nên $2y-3\le 2z-3$.

Nên ta suy ra được $\begin{cases}2y-3=1\\2z-3=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\z=12\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2y-3=3\\2z-3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\z=5\end{cases}$

- Với $x=3$, khi đó từ phương trình $xyz=3(x+y+z)$ ta được

$$3yz=3(3+y+z)\Leftrightarrow yz-y-z=3\Leftrightarrow (y-1)(z-1)=4$$

Chú ý là $y\le z$ nên $y-1\le z-1$

Do đó ta được $\begin{cases}y-1=1\\z-1=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\z=5\end{cases}$(loại do không thỏa mãn $x\le y$) hoặc $\begin{cases}y-1=2\\z-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\z=3\end{cases}$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là

$$(x;y;z)=(1;4;15),(1;5;9),(1;6;7),(2;2;12),(2;3;5),(3;3;3) \text{ và các hoán vị}$$

Bài 25. Do vai trò của x y, z như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $1\le x\le y\le z$

Khi đó từ $xyz=10(x+y+z)$ ta có $xyz\le 10(z+z+z)\Rightarrow xy\le 30$

Từ đó $x^2\le xy\le 30$ do x^2 là số chính phương nên ta suy ra $x^2\in\{1;4;9;16;25\}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5\}$

.

Ta xét các trường hợp sau

- Với $x=1$, khi đó từ phương trình $xyz=10(x+y+z)$ ta được

$$yz=10(1+y+z)\Leftrightarrow yz-10y-10z=10\Leftrightarrow (y-10)(z-10)=110$$

Chú ý là $y\le z$ nên $y-10\le z-10$. Do đó ta có bảng giá trị sau:

$y-10$	1	2	5	10
$z-10$	110	55	22	11
y	11	12	15	20
z	120	65	32	22

- Với $x=2$, khi đó từ phương trình $xyz=10(x+y+z)$ ta được

$$2yz=10(2+y+z)\Leftrightarrow 2yz-10y-10z=20\Leftrightarrow (y-5)(z-5)=35$$

Chú ý là $y\le z$ nên $y-5\le z-5$.

Nên ta suy ra được $\begin{cases}y-5=1\\z-5=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6\\z=40\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y-5=5\\z-5=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10\\z=12\end{cases}$

- Với $x=3$, khi đó từ phương trình $xyz=10(x+y+z)$ ta được

$$3yz=10(3+y+z)\Leftrightarrow 3yz-10y-10z=30\Leftrightarrow (3y-10)(3z-10)=190$$

Chú ý là $y\le z$ nên $3y-10\le 3z-10$. Lại thấy $3y-10;3z-10$ chia 3 dư 2, Nên ta suy ra được $\begin{cases}3y-10=2\\3z-10=95\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\z=35\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}3y-10=5\\3z-10=38\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\z=16\end{cases}$

• Với $x=4$, khi đó từ phương trình $xyz=10(x+y+z)$ ta được

$$4yz=10(4+y+z)\Leftrightarrow 4yz-10y-10z=40\Leftrightarrow(2y-5)(2z-5)=65$$

Chú ý là $y\le z$ nên $2y-5\le 2z-5$. Nên ta suy ra được

$\begin{cases}2y-5=1\\2z-5=65\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\z=35\end{cases}$(loại do không thỏa mãn $x\le y$) hoặc $\begin{cases}2y-5=5\\2z-5=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\z=9\end{cases}$

• Với $x=5$, khi đó từ phương trình $xyz=10(x+y+z)$ ta được

$$5yz=10(5+y+z)\Leftrightarrow 5yz-10y-10z=50\Leftrightarrow(y-2)(z-2)=14$$

Chú ý là $y\le z$ nên $y-2\le z-2$. Nên ta suy ra được

$$\begin{cases}y-2=1\\z-2=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\z=16\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y-2=2\\z-2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\z=9\end{cases}$$

Trường hợp này loại do không thỏa mãn $x\le y$.

Vây các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ của phương trình là

$(1;11;120),(1;12;65),(1;15;32),(1;20;21),$

$(2;6;40),(2;10;12),(3;4;35),(3;5;16),(4;5;9)$ và các hoán vị của chúng.

Bài 26. a) $5xyz=x+5y-4z+31$

Ta xét các trường hợp sau:

• Với $x=1$, khi đó phương trình trở thành

$$5yz=5y-4z+32\Leftrightarrow 5yz-5y+4z=32\Leftrightarrow(5y+4)(z-1)=28$$

Chú ý rằng $y\ge 1$ nên $5y+4\ge 9$ và $5y+4$ chia 5 dư 4 nên từ phương trình trên ta được

$$\begin{cases}5y+4=14\\z-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\z=3\end{cases}$$

• Với $x\ge 2$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $5y-4z+31=x(5yz-1)\ge 2(5yz-1)$

Hay ta được $10yz-5y+4z\le 33\Leftrightarrow(5y+2)(2z-1)\le 31$.

Chú ý rằng $y\ge 1$ nên $5y+2\ge 7$ nên $2z-1\le 4$, do đó suy ra $z\in\{1;2\}$.

+ Với $z=1$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $5xy-x-5y=27\Leftrightarrow(x-1)(5y-1)=28$

Dễ thấy $5y-1$ cia 5 dư 4 nên từ phương trình ta được

$$\begin{cases}5y-1=4\\x-1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x=8\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}5y-1=14\\x-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\x=3\end{cases}$$

+ Với $z=2$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $10xy-x-5y=23\Leftrightarrow(2x-1)(10y-1)=47$

Do x, y nguyên dương và 47 là số nguyên tố nên phương trình trên không có nghiệm nguyên dương.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dươn là $(x;y;z)=(1;2;3),(8;1;1),(3;3;1)$

b) $3xyz = x + 2y + 3z + 7$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x=1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $3yz-2y-3z=8 \Leftrightarrow (y-1)(3z-2)=10$

Để ý là $3z-2$ chia 3 dư 1 nên ta được $\begin{cases} y-1=1 \\ 3z-2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1=10 \\ 3z-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11 \\ z=1 \end{cases}$

- Nếu $x \ge 2$, khi đó từ phương trình đã cho ta được

$$2y+3z+7 = x(3yz-1) \ge 2(3yz-1) \Rightarrow (2y-1)(3z-1) \le 10$$

Do $3z-1 \ge 2$ nên $2y-1 \le 5$, từ đó suy ra $y \in \{1;2;3\}$.

+ Thay $y=1$ vào phương trình ban đầu ta được $3xz-x-3z=9 \Leftrightarrow (x-1)(3z-1)=10$

Lại thấy $3z-1$ chia 3 dư 2 nên ta có $\begin{cases} x-1=2 \\ 3z-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1=5 \\ 3z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ z=1 \end{cases}$

+ Thay lần lượt $y=2$ và $y=3$ vào phương trình ban đầu ta tìm được $x=2; z=1$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương là

$(x;y;z)=(1;2;4),(1;11;1),(3;1;2),(6;1;1),(2;3;1)$.

Bài 27. Biến đổi tương đương phương trình ta được $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=1$

Dễ thấy $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge 0$, khi đó từ phương trình ta được

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1 \end{cases}$$

Từ $x+y+z=1$ suy ra

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1 \Rightarrow (x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=1 \Rightarrow xy+yz+zx=0$$

Do đó ta có hệ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x^2 \ge y^2 \ge z^2$, khi đó từ $x^2+y^2+z^2=1$ ta được

$x^2=1; y^2=z^2=0$

Hay ta được $x=1; y=z=0$ hoặc $x=-1; y=z=0$

Thay vào phương trình ban đầu ta thấy $x=-1; y=z=0$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(1;0;0)$ và các hoán vị.

Bài 28. Ta có $2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0$

Vì $x, y, z \in N^*$ nên từ trên suy ra y là số chẵn. Đặt $y = 2k\left(k \in N^*\right)$ và thay vào điều kiện trên ta được

$$2x^2 + 12k^2 + 2z^2 - 8xk + 2xz - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6k^2 + z^2 - 4xk + xz - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x\left(4k - z\right) + \left(6k^2 + z^2 - 10\right) = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai theo ẩn x. Khi đó ta có

$$\Delta = \left(4k - z\right)^2 - 4\left(6k^2 + z^2 - 10\right) = 16k^2 - 8kz + z^2 - 24k^2 - 4z^2 + 40$$
$$= -8k^2 - 8kz - 3z^2 + 40$$

+ Nếu $k \geq 2$, ta có $z \geq 1$ suy ra $\Delta < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Suy ra $k = 1$ nên $y = 2$. Thay $k = 1$ vào biệt thức Δ ta được

$\Delta = -8 - 8z - 3z^2 + 40 = -3z^2 - 8z + 32$

- Nếu $z \geq 3$ thì $\Delta < 0$ khi đó phương trình trên vô nghiệm.

Suy ra $z = 1$ hoặc $z = 2$.

- Nếu $z = 1$ thì $\Delta = 21$ không phải là số chính phương nên phương trình trên không có nghiệm nguyên. Do đó ta được $z = 2$.

Thay $z = 2,\ k = 1$ vào phương trình trên ta đươc

$$x^2 - 2x + \left(6 + 4 - 10\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Suy ra $x = y = z = 2$. Vậy tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài 29. Biến đổi giả thiết đã cho ta có

$$x^2 + 15y^2 + 8xy - 8x - 36y - 28 = 0 \Leftrightarrow \left(x + 4y - 4\right)^2 - \left(y + 2\right)^2 = 40$$
$$\Leftrightarrow \left(x + 3y - 6\right)\left(x + 5y - 2\right) = 40$$

Do x, y là các số nguyên dương và $x + 3y - 6 < x + 5y - 2$ nên ta có thể phân tích

Chú ý là $\left(x + 3y - 6\right) + \left(x + 5y - 2\right) = 2x + 8y - 8$ và kết hợp với phương trình đã cho ta được $x + 3y - 6$ và $x + 5y - 2$ có cùng tính chẵn. Đến đây ta giải từng trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\begin{cases} x + 3y - 6 = 2 \\ x + 5y - 2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 7 \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 2: Với $\begin{cases} x + 3y - 6 = 4 \\ x + 5y - 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $\left(x; y\right) = \left(7; 1\right)$

Bài 30. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$4y^3 - 4x^2y^2 - 4xy^2 + x^2y + 5x^2 + 4y^2 + 4xy + 8x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(y + 1\right)\left[4y^2 - 4\left(x^2 + x\right)y + 5x^2 + 8x\right] = 0$$

- Nếu $y = -1$ thì với mọi x nguyên tuỳ ý đều thỏa mãn phương trình đã cho.
- Nếu $y \neq -1$ thì từ phương trình trên ta được $4y^2 - 4\left(x^2 + x\right)y + 5x^2 + 8x = 0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y có x là tham số, khi đó ta có

$$\Delta = 4x\left(x^3+2x^2-4x-8\right) = 4x\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương. Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2;y=3 \\ x=0;y=0 \\ x=-2;y=1 \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow x \ne 0; x\ne 2; x\ne -2$, khi đó ta có $x\left(x-2\right) = a^2\left(a\in Z\right)$

Từ đó ta được $\left(x-1\right)^2 - a^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1+a=1 \\ x-1-a=1 \end{cases} \Rightarrow x=2 \\ \begin{cases} x-1+a=-1 \\ x-1-a=-1 \end{cases} \Rightarrow x=0 \end{array}\right.$

Ta thấy cả hai giá trị $x=0$ và $x=2$ đều không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(0;0\right),\left(2;3\right),\left(-2;1\right),\left(m;-1\right)$ với m nguyên tùy ý.

Bài 31

a) Ta có nhận xét: một số chính phương khi chia cho 8 thì có số dư 0; 1; 4.

Khi đó ta được $\begin{cases} x^2 \equiv 0;1;4\left(\text{mod } 8\right) \\ y^2 \equiv 0;1;4\left(\text{mod } 8\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 \equiv -1;0;3\left(\text{mod } 8\right) \\ y^2-1 \equiv -1;0;3\left(\text{mod } 8\right) \end{cases}$

Từ đó suy ra $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) \equiv 1;0;5\left(\text{mod } 8\right)$

Mà $2010 \equiv 2\left(\text{mod } 8\right)$ nên ta được $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2010 \equiv 3;2;7\left(\text{mod } 8\right)$

Trong khi $z^2 \equiv 0;1;4\left(\text{mod } 8\right)$. Do đó phương trình $z^2 = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2010$ vô nghiệm.

b) Ta có $z^2 = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2008 \Leftrightarrow z^2 - x^2y^2 + x^2 + y^2 = 2009$

Xét phương trình $x^2+y^2 = 2009$. Nếu phương trình $x^2+y^2=2009$ có nghiệm $x=x_0; y=y_0$, thì phương trình $z^2-x^2y^2+x^2+y^2=2009$ có nghiệm $x=x_0$, $y=y_0$, $z=x_0y_0$.

Vậy ta chứng minh $x^2+y^2=2009$ có nghiệm bằng cách chỉ ra một bộ $x=x_0; y=y_0$ thỏa mãn phương trình.

Ta thấy x^2+y^2 có tận cùng bằng 9 nên tận cùng của $\left(x^2;y^2\right)$ chỉ có thể là $\left(0;9\right),\left(4;5\right)$.

Nghĩa là tận cùng của $\left(x;y\right)$ chỉ có thể là $\left(0;3\right),\left(0;7\right),\left(2;5\right),\left(8;5\right)$ (Do vai trò x, y là như nhau).

Bằng cách thử trực tiếp ta có một nghiệm của $x^2+y^2=2009$ là $x=28; y=35$.

Vậy phương trình $z^2 = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+2008$ có nghiệm.

Bài 32. Vì x, y, z, t có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử: $x\ge y\ge z\ge t\ge 1$.

$$195(x+y+z+t)-1890xyzt+2008=0 \Leftrightarrow 195(x+y+z+t)+2008=1890xyzt$$

$$\Leftrightarrow 1890=\frac{195}{xyz}+\frac{195}{yzt}+\frac{195}{xzt}+\frac{195}{xyt}+\frac{2008}{xyzt}\le\frac{2788}{t^3}\Leftrightarrow t^3\le\frac{2788}{1890}\Leftrightarrow t^3\le 1\Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1$, khi đó ta có

$$195(x+y+z)+2203=1890xyz$$

$$\Leftrightarrow 1890=\frac{195}{xy}+\frac{195}{yz}+\frac{195}{xz}+\frac{2203}{xyz}\le\frac{2788}{z^2}\Leftrightarrow z^2\le\frac{2788}{1890}\Leftrightarrow z^2\le 1\Leftrightarrow z=1$$

Với $z=1$ thì ta có

$$195(x+y)+2398=1890xy\Leftrightarrow 1890=\frac{195}{x}+\frac{195}{y}+\frac{2398}{xy}\le\frac{2788}{y}\Leftrightarrow y=1$$

Khi $y=1$ ta được $195x+2593=1890x$, không có nghiệm nguyên dương trong trường hợp này.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài 33. Viết lại phương trình này trong dạng $x^2+2(2y+1)x+3y^2+4y-13=0$ và áp dụng định lí trên ta có phương trình trên có nghiệm nguyên khi và chỉ khi sau có nghiệm nguyên

$$\Delta=(2y+1)^2-(3y^2+4y-13)=k^2\ (k\in Z)$$

Ta có $(2y+1)^2-(3y^2+4y-13)=k^2\Leftrightarrow k^2=y^2+14\Leftrightarrow v^2-y^2=14\Leftrightarrow(v-y)(v+y)=14$

Từ đó ta được $v-y=7;v+y=2$ hoặc $v-y=2;v+y=7$

Bài 34. Từ phương trình trên ta suy ra $x;y>2009$. Biến đổi phương trình ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2009}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{7.\sqrt{41}}\Leftrightarrow 7\sqrt{41}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{41x}=\sqrt{xy}-7\sqrt{41y}\Leftrightarrow 49.41x=xy+49.41y-14y\sqrt{41x}$$

Nếu $41x$ không là số chính phương thì $\sqrt{41x}$ là số vô tỉ. Khi đó $49.41x=xy+49.41y-14y\sqrt{41x}$ không thỏa mãn. Do đó $41x$ là số chínhphương, suy ra $x=41a^2\ (a\in N^*)$

Tương tự ta cũng có $x=41b^2\ (b\in N^*)$

Phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2009}}$ trở thành $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{7}$

Từ phương trình $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{7}$, ta suy ra $a;b>7$.

Đặt $a=7+m;b=7+n\ (m;n\in N^*)$ khi đó ta có phương trình

$$\frac{1}{7+m}+\frac{1}{7+n}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow 7(14+m+n)=(7+m)(7+n)\Leftrightarrow mn=7^2$$

Suy ra ra có các trường hợp sau

+ Với $\begin{cases} m = 1 \\ n = 7^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2624 \\ y = 128576 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} m = 7 \\ n = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8036 \\ y = 8036 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} m = 7^2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 56 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 128576 \\ y = 2624 \end{cases}$

Thử lại ta được ba nghiệm trên đều thỏa phương trình đã cho.

Bài 35. Ta có $x^3 = y^3 + (2y^2 + 1) > y^3 \Rightarrow x > y$

Mặt khác $x < y + 1 \Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 1 < (y+1)^3 \Leftrightarrow y(y+3) > 0 \Leftrightarrow y < -3$ hoặc $y > 0$ 7

Vậy nếu $y < -3$ hoặc $y > 0$ thì phương trình vô nghiệm

+ Với $y = -3 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

+ Với $y = -2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

+ Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy phương trình có ba nghiệm $(-2;-3);(1;-2);(1;0)$

Bài 36. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x) = 4(y^2 + 2) \Leftrightarrow (x-3)(x-1)x(x-2) = 4(y^2+2)$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 4(y^2 + 2) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 - 4y^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1 - 2y)(x^2 - 3x + 1 + 2y) = 9$$

Vì x, y nguyên nên từ phương trình trên ta được các hệ sau:

$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = 1 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = 9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = 9 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = -1 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = -9 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = -9 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = 3 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2y = -3 \\ x^2 - 3x + 1 - 2y = -3 \end{cases}$

Giải lần lượt các các hệ ta được nghiệm của phương trình là

$(x;y) = (-1;-4),(4;-4),(-1;4),(4;4)$.

Bài 37. Vì x $x \geq 1; y \geq 1$ nên $(x+y)^4 = 40y + 1$ viết được dưới dạng $(x+y)^3 = \dfrac{40y+1}{x+y}$

Chứng minh được $2(x+y)^2 \leq (x+y)^3 = \dfrac{40y+1}{x+y} < \dfrac{40y+40x}{x+y} = 40$

Suy ra $2(x+y)^2 < 20$ suy ra $1 < x + y \leq 4$, đồng thời $x + y$ là ước của $40y + 1$.

Để ý là $40y + 1$ là số lẻ nên $x + y$ lẻ, do đó ta được $x + y = 3$

Từ đó suy ra $40y+1=3^4=81 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất là $(x;y)=(1;2)$

Bài 38. Vì 105 là số lẻ nên $2x+5y+1$ và $2^{|x|}+x^2+x+y$ phải là các số lẻ.

Từ $2x+5y+1$ suy ra y là số chẵn. Mà ta lại có $x^2+x=x(x+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên là số chẵn nên để $2^{|x|}+x^2+x+y$ là số lẻ thì $2^{|x|}$ phải là số lẻ. Điều này chỉ xảy ra khi $x=0$

Từ đó ta được phương trình $(5y+1)(y+1)=105 \Leftrightarrow (5y+26)(y-4)=0 \Rightarrow y=4$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)=(0;4)$.

Bài 39. Ta có $xy^2+2xy+x=32y \Leftrightarrow x(y+1)^2=32y$

Do y nguyên dương nên ta được $y+1\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{32y}{(y+1)^2}$

Vì $(y,y+1)=1$ nên $(y+1)^2$ là ước của 32.

Mà $32=2^5$ nên suy ra $(y+1)^2=2^2$ hoặc $(y+1)^2=2^4$

+ Nếu $(y+1)^2=2^2$ ta suy ra được $y=1;x=8$

+ Nếu $(y+1)^2=2^4$ ta suy ra được $y=3;x=6$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y)=(8;1),(6;3)$

Bài 40. Phương trình tương đương với

$$(x^2+4y^2-4xy)+4(x-2y)+4=16-y^2 \Leftrightarrow (x-2y+2)^2=16-y^2$$

Mà $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases}(x-2y+2)^2=16\\ y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-2y+2=0\\ y^2=16\end{cases}$

+ Với $\begin{cases}(x-2y+2)^2=16\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2;\ y=0\\ x=-6;\ y=0\end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases}x-2y+2=0\\ y^2=16\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=4;\ x=6\\ y=-4,\ x=-10\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(x;\ y)=(2;\ 0),(-6;\ 0),(6;\ 4),(-10;\ -4)$

Bài 41. Ta có

$$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+2x+2y+1+4x^2+4xy+y^2=41$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2+(2x+y)^2=41 \Leftrightarrow (x+y+1)^2+(2x+y)^2=4^2+5^2$$

Ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y+1=4 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y+1=5 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ (loại)

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y)=(2;1)$.

Bài 42. Biến đổi tương đương phương trình ta được.

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833$$

$$\Leftrightarrow\left[x^2+4\left(y^2+7\right)\right]^2=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[4x^2-\left(y^2+7\right)\right]^2=0\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0\Leftrightarrow(2x+y)(2x-y)=7$$

Vì x và y là các số nguyên dương nên $2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$.

Do đó từ phương trình trên ta suy ra được $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy phương trình trên có nghiệm nguyên dương là $(x;y)=(2;3)$.

Bài 43. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2x^3+2x^2y+x^2+2xy=x+10\Leftrightarrow 2x^2(x+y)+2x(x+y)-\left(x^2+x\right)=10$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)\left(x^2+x\right)-\left(x^2+x\right)=10\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\left[2(x+y)-1\right]=10$$

Để ý là $10=1.10=2.5=(-1).(-10)=(-2).(-5)$

Lại thấy $x^2+x=x(x+1)$ là số chẵn và $2(x+y)-1$ là số lẻ

Mặt khác $x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}>-1\Rightarrow x^2+x\geq 0$.

Do đó từ phường trình trên ta được $\begin{cases} x^2+x=10 \\ 2(x+y)-1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x+y)-1=5 \end{cases}$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2+x=10 \\ 2(x+y)-1=1 \end{cases}$. Phương trình $x^2+x=10$ không có nghiệm nguyên.

- Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x+y)-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=2 \\ x=-2;y=5 \end{array}\right.$

Vậy có hai bộ số nguyên thỏa mãn bài toán là $(x;y)=(1;2),(-2;5)$.

Bài 44. Đặt $d=(x,y)$ khi đó $x=da;y=db$ với $a,b\in N^*$ và $(a,b)=1$.

Và phương trình trở thành $d(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=95\left(a^2+b^2\right)$

Vì $\left(a^2+b^2,a^2+ab+b^2\right)=1$ nên $a^2+ab+b^2=\left(a-b\right)^2-3ab$ là ước của $95=5.19$, ước này chia 3 dư 1 hoặc 0 và lớn hơn 1 nên chỉ có thể là 19, như vậy $\left(a-b\right)^2-3ab=19$

Từ đó ta được $\begin{cases}a-b=1\\ a.b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=2\end{cases}\Rightarrow d=65\Rightarrow\begin{cases}x=195\\ y=130\end{cases}$

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $\left(x;y\right)=\left(195;130\right)$

Bài 45. Ta có $x^4+2x^2=y^3\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=y^3+1\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)$

Gọi $d=\left(y+1,\ y^2-y+1\right)$, khi đó $\left(y+1\right)^2\,\vdots\, d$ và $y^2-y+1\,\vdots\, d$ nên ta được $3y\,\vdots\, d$

Do đó ta được $3\left(y+1\right)-3y\,\vdots\, d\Rightarrow 3\,\vdots\, d$. Từ đó ta được $d=1$ hoặc $d=3$

+ Với $d=3$, khi đó ta được $\left(x^2+1\right)^2=\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)\vdots\, 9$ nên suy ra $x^2+1\,\vdots\, 3$.

Từ đó suy ra x^2 chia 3 có số dư là 2, điều này vô lí vì số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1.

+ Với $d=1$, khi đó ta được $d=\left(y+1,\ y^2-y+1\right)=1$

Do đó từ $\left(x^2+1\right)^2=\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)$ ta được $\begin{cases}y+1=a^2\\ y^2-y+1=b^2\end{cases}$ với $a,b\in N^*$ và $\left(a,b\right)=1$

Từ đó ta được

$$b^2=\left(a^2-1\right)^2-\left(a^2-1\right)\Leftrightarrow 4b^2=4a^4-12a^2+12\Leftrightarrow\left(2b-2a^2+3\right)\left(2b+2a^2+3\right)=3$$

Vì $\left(2b\right)^2>\left(2a^2-3\right)^2\Rightarrow 2b>2a^2-3$ nên từ phương trình trên ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=1\\ 2b+2a^2-3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ a^2=2\end{cases}$ (loại)
- Trường hợp 2: Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=3\\ 2b+2a^2-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ a^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$

Bài 46. Rõ ràng các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ sao cho $x+y=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta giả sử $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình mà $x+y\neq 0$

Trước tiên từ phương trình ta phải có $xy\geq 0$

Thật vậy, chia cả 2 vế của $x^5+y^5=\left(x+y\right)^3$ cho $x+y$ ta được

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=\left(x+y\right)^2$$

Đẳng thức trên tương đương với $\left(x^2+y^2\right)^2+x^2y^2=\left(x+y\right)^2\left(xy+1\right)$ từ đó suy ra $xy\geq 0$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\left|x+y\right|\le 4$.

Dễ dàng chứng minh được với mọi số không âm x và y, ta có

$$\frac{x^5+y^5}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^5\Rightarrow x^5+y^5\ge\frac{1}{16}\left(x+y\right)^5$$

Do đó nếu $x+y>4$ thì $x^5+y^5>\left(x+y\right)^3$

Hoàn toàn tương tự, nếu x, y đều không dương và đồng thời $x+y<-4$ thì $x^5+y^5<\left(x+y\right)^3$

Vậy ta chỉ cần xét các x, y mà $xy\ge 0$ và $\left|x+y\right|\in\left\{1;2;3;4\right\}$, từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên thỏa mãn là $\left(x;y\right)=\left(0;\pm1\right),\left(\pm1;0\right),\left(2;2\right);\left(-2;-2\right)$

Tóm lại các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình là

$$\left(x;y\right)=\left(a;-a\right),\left(0;\pm1\right),\left(\pm1;0\right),\left(2;2\right);\left(-2;-2\right)\text{ với a là số nguyên.}$$

Bài 47. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2+4\left(y^2+7\right)\right]=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0\Leftrightarrow\left[4x^2-\left(y^2+7\right)\right]^2=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0\Leftrightarrow\left(2x+y\right)\left(2x-y\right)=7$$

Do x, y nguyên dương nên $2x+y\ge 2x-y$ và $2x+y>0$

Vậy $\begin{cases}2x+y=7\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(2;3\right)$

Vậy phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;3\right)$.

Bài 48. Ta có $3x^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=6\Leftrightarrow 3\left(x-3\right)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33$

Suy ra $z^2\,\vdots\,3;\ 2z^2\le 33$, do đó ta được $z^2\le 9\Rightarrow\left|z\right|\le 3$. Vì z là số nguyên nên $z=0$ hoặc $\left|z\right|=3$

+ Trường hợp $z=0$ khi đó ta được $\left(x-3\right)^2+2y^2=11$ suy ra $y^2\le 4\Leftrightarrow\left|y\right|\le 2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\\left|y\right|=1\\\left|y\right|=2\end{array}\right.$

- Với $y=0$, không có số nguyên x nào thỏa mãn
- Với $\left|y\right|=1$, khi đó ta tìm được $x=6$
- Với $\left|y\right|=2$, không có số nguyên x nào thỏa mãn

+ Trường hợp $\left|z\right|=3$, suy ra $\left(x-3\right)^2+11y^2=5\Rightarrow 11y^2\le 5\Rightarrow y=0$, không có số nguyên x nào thỏa mãn

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên là $(0;\,1;\,0)$, $(0;\,-1;\,0)$, $(6;\,1;\,0)$, $(6;\,-1;\,0)$.

Bài 49. Ta có $y^3-x^3=2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0\Rightarrow x<y \quad (1)$

$$(x+2)^3-y^3=4x^2+9x+6=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0\Rightarrow y<x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x<y<x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y=x+1$

Thay $y=x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x=-1;\ x=1$ từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là $(1;\ 2)$, $(-1;\ 0)$

Bài 50. Phương trình tương đương với

$$2(2x-y-2)^2=14(x-2y-y^2-1)$$
$$\Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0 \quad (2)$$

Đặt $t=2x-y-2\ (t\in Z)$, khi đó phương trình trên trở thành $2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0 \quad (3)$

+ Nếu $y=-1$ thay vào phương trình ban đầu ta được

$$(2x-1)^2=7x\Leftrightarrow 4x^2-11x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11+\sqrt{105}}{8} \\ x=\frac{11-\sqrt{105}}{8}\end{array}\right.$$

Hai nghiệm trên không thuộc tập hợp Z.

+ Nếu $y\le -2$ hoặc $y\ge 0$ thì $2y^2+3y=y(2y+3)\ge 0$

Từ phương trình (3) suy ra $2t^2-7t\le 0\Leftrightarrow t(2t-7)\le 0\Rightarrow 0\le t\le 3$ (do $t\in\mathbb{Z}$).

Mặt khác, theo phương trình (3) thì $t\,\vdots\,7$ nên ta được $t=0$. Suy ra $y(2y+3)=0\Rightarrow y=0.$

Do đó ta được $x=1$. Thử lại, ta thấy $(1;\ 0)$ thoả mãn phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(1;\ 0)$.

Bài 51. Giải phương trình nghiệm nguyên $3^x-y^3=1$

Từ phương trình trên ta được $3^x=(y+1)(y^2-y+1)$ do đó tồn tại các số tự nhiên m và n sao cho

$$\begin{cases} y+1=3^m \\ y^2-y+1=3^n \\ m+b=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=3^m-1 \\ 9^m-3.3^m+3=3^n \\ m+b=x\end{cases}$$

+ Nếu $m=0$ thì thì $x=y=0$

+Nếu $m>0$ thì $9^m-3.3^m+3$ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 do đó 3^n chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên $n=1$

Suy ra $9^m - 3.3^m + 3 = 3 \Rightarrow 3^m\left(3^m - 3\right) = 0 \Rightarrow m = 1$ do đó ta đươc $x = y = 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $(0;\ 0),\ (2;\ 2)$.

Bài 52. Ta có nhận xét: Nếu $(x;y)$ là nghiệm thì $x \ge 0$ và $(x;-y)$ cũng là nghiệm.

Nhận thấy $(0;2),(0;-2)$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta xét nghiệm $(x;y)$ với x dương. Không mất tính tổng quát giả sử $y > 0$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $2^x\left(1+2^{x+1}\right) = y^2 - 1$ hay $(y-1)(y+1) = 2^{x-1}.2\left(1+2^{x+1}\right)$

Suy ra $y-1$ và $y+1$ là hai số chẵn liên tiếp, khi đó hiển nhiên một trong hai số đó chia hết cho 4 vì thế $(y-1)(y+1)$ chia hết cho 8. Do đó ta được $x \ge 3$.

+ Vì $1+2^{2x+1}$ là số lẻ nên trong hai số $y-1$ và $y+1$ phải có một số chia hết cho 2^{x-1} và không chia hết cho 2^x. Do vậy ta có thể đặt $y = m.2^{x-1} + t$ với m lẻ và $t = \pm 1$.

Thay vào phương trình $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ ta được $\left(m.2^{x-1}+t\right)^2 - 1 = 2^{x-1}.2\left(1+2^{x+1}\right)$

Hay ta được $1 - mt = 2^{x-2}\left(m^2 - 8\right)$

Với $t = 1$ thì $m^2 < 8$ suy ra $m = 1$, không thỏa phương trình $1 - mt = 2^{x-2}\left(m^2-8\right)$.

Với $t = -1$, phương trình $1 - mt = 2^{x-2}\left(m^2-8\right)$ trở thành $1 + m = 2^{x-2}\left(m^2-8\right) \ge 2\left(m^2-8\right)$.

Từ đó suy ra $m = 3$ nên ta được $x = 4; y = 23$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên là $(0;2),(0;-2),(4;23),(4;-23)$.

Bài 53. Điều kiện $x \in N$. Đặt $a = \sqrt{x}$ và $b = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

Từ đó ta được a và b là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $a^2 - a = b^2$.

Ta có $a^2 - a = b^2 \Leftrightarrow 4\left(a^2 - a\right) = 4b^2 \Leftrightarrow (2a-1)^2 - 4b^2 = 1 \Leftrightarrow (2a-1+2b)(2a-1-2b) = 1$.

Vì a và b là các số tự nhiên nên $2a-1+2b; 2a-1-2b$ là các số nguyên đồng thời là ước của 1.

Chú ý là $1 = 1.1 = -1.(-1)$ nên ta được $2a-1+2b = 2a-1-2b \Leftrightarrow b = 0$.

Từ đó ta được $b = \sqrt{x-\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta thấy $x = 0; x = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán nên $x = 0; x = 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 54. Ta có $3^m = n^2 + 2n - 8 \Rightarrow 3^m = (n-2)(m+4)$.

Đặt $3^x = n+4; 3^y = n-2$ với $x, y \in N; x > y$ và $x + y = m$.

Khi đó ta có $3^x - 3^y = 6 \Leftrightarrow 3^y\left(3^{x-y} - 1\right) = 6$

Do $3^{x-y}-1$ không chia hết cho 3 và $6=2.3$ nên ta được ta được $\begin{cases}3^y=3\\3^{x-y}-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x=2\end{cases}$

Từ đó ta được $m=3;n=5$.

Bài 55. Phương trình đã cho tương đương với $(x-2)^2+(y-1)^2=7(t+1)$.

Ta có nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 7 có số dư là 0; 1; 2; 4. Do đó nếu tổng hai số chính phương mà chia hết chi 7 thì các hai số chính phương đó cùng chia hết cho 7.

Như vậy từ $(x-2)^2+(y-1)^2=7(t+1)$ ta được $(x-2)^2\,\vdots\,7;\ (y-1)^2\,\vdots\,7$.

Do 7 là số nguyên tố nên ta được $x-2\,\vdots\,7;\ y-1\,\vdots\,7$ nên $(x-2)^2\,\vdots\,49;\ (y-1)^2\,\vdots\,49$

Do đó ta được $(x-2)^2+(y-1)^2\,\vdots\,49\Rightarrow 7(t+1)\,\vdots\,49\Rightarrow t+1\,\vdots\,7$.

Mà ta lại có $1\le t\le 6$ nên từ $t+1\,\vdots\,7$ suy ra $t=6$.

Đến đây ta được $(x-2)^2+(y-1)^2=49$. Chú ý là $49=0+7^2=7^2+0$ nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases}(x-2)^2=0\\(y-1)^2=7^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-6;y=8\end{cases}$. Do x, y là các số nguyên dương nên ta được

$x=2;y=8$ thỏa mãn phương trình đã cho.

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases}(x-2)^2=7^2\\(y-1)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5;x=9\\y=1\end{cases}$. Do x, y là các số nguyên dương nên ta được

$x=9;y=1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy bộ các số nguyên dương $(x;y;t)$ thỏa mãn phương trình ta $(2;8;6),(9;1;6)$.

Bài 56.

Cách 1. Đặt $x=2y+k$ với $k\in Z$ rồi thế vào phương trình $x^3=4y^3+x^2y+y+13$ ta được

$$(2y+k)^3=4y^3+(2y+k)^2y+y+13\Leftrightarrow 8ky^2+(5k^2-1)y+k^3-13=0.$$

Xem phương trình trên là phương trình ẩn y với k là tham số. Khi đó ta thấy

- Nếu $k=0$ thì phương trình trên trở thành $y+13=0\Rightarrow y=-13$, từ đó ta được $x=-26$.
- Nếu $k\ne 0$, khi đó phương trình trên là trương trình bậc hai ẩn y có k là tham số.

Ta có $\Delta=(5k^2-1)^2-32k(k^3-13)=-7k^4-10k^2+416k+1$

+ Xét $k\ge 4$, khi đó ta có $\Delta=7k^4-10k^2+416k+1<-7.4^3.k+416k+1=1-32k<0$ nên phương trình không có nghiệm.

+ Xét $k\le -1$, khi đó ta có $\Delta=7k^4-10k^2+416k+1<416k+1<0$ nên phương trình không có nghiệm.

+ Xét $1\le k\le 3$, khi đó do $k\in Z$ nên ta được $k=1;2;3$.

- Với $k=1$, khi đó thay vào phương trình trên ta được $8y^2+4y-12=0\Rightarrow y=1$, từ đó ta suy ra được $x=3$.

- Với $k=2$ ta được $\Delta=681$ và với $k=3$ ta được $\Delta=592$, đều không phải là số chính phương nên phương trình trên không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-26;-13),(3;1)$.

Cách 2. Biến đổi tương đương ta được $x^3=4y^3+x^2y+y+13\Leftrightarrow(x-2y)(x^2+xy+2y^2)=y+13$

- Nếu $y=-13$, khi đó ta được $(x-2y)(x^2+xy+2y^2)=0\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow x=-26$.
- Nếu $y\neq-13$, khi đó do x và y là các số nguyên nên $x-2y$ và $x^2+xy+2y^2$ là các ước của $y+13$.

Do đó ta được $|y+13|\geq x^2+xy+2y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{7y^2}{4}\geq\dfrac{7y^2}{4}$.

Do y là số nguyên nên từ $|y+13|\geq\dfrac{7y^2}{4}$ ta suy ra được $y\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Thay các giá trị trong tập hợp trên vào phương trình đã cho ta được với $y=1$ thì $x=3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-26;-13),(3;1)$.

Bài 57.

Cách 1. Biến đổi tương đương phương trình trên ta được

$$(x^2+2)^2=2y^4+11y^2+x^2y^2+9\Leftrightarrow(x^2+2)^2=y^4+6y^2+9+y^4+5y^2+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow(x^2+2)^2-(y^2+3)^2=y^4+5y^2+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow(x^2-y^2-1)(x^2+y^2+5)=y^2(x^2+y^2+5)$$

Do $x^2+y^2+5\neq0$ nên phương trình trên tương đương với $x^2-y^2-1=y^2\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=2y^2$

Từ đó ta được $(x-1)(x+1)\,\vdots\,2$. Mà $x-1;x+1$ cùng tính chẵn lẻ nên $x-1\,\vdots\,2;x+1\,\vdots\,2$.

Từ đó suy ra $(x-1)(x+1)\,\vdots\,4$ nên suy ra $2y^2\,\vdots\,4\Rightarrow y^2\,\vdots\,2\Leftrightarrow y\,\vdots\,2$.

Mà y là số nguyên tố nên ta suy ra được $y=2$. Từ đó ta được $x=3$.

Vậy ta có $x=3;y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: ta có nhận xét: Nếu y là số chẵn thì y^2 chia hết cho 4 và nếu y là số lẻ thì y^2 chia 4 dư 1.

Xét trường hợp y là số lẻ, khi đó y^4 chia 4 dư 1 nên $2y^4$ chia 4 dư 2, $11y^2$ chia 4 dư 3 và x^2y^2 chia 4 dư 0 hoặc dư 1. Từ đó ta được $2y^4+11y^2+x^2y^2+9$ chia 4 dư 2 hoặc dư 3. Mà ta lại có $(x^2+2)^2$ chia 4 dư 0 hoặc dư 1. Như vậy hai vế của phương trình có số dư khác nhau khi chia cho 4, do đó khi y lẻ phương trình không có nghiệm. Từ đó dẫn đến y phải là số lẻ, mà y là số nguyên tố nên dẫn đến $y=2$. Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được $x=3$ thỏa mãn.

Vậy ta có $x = 3; y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 58.

Ta có nhận xét: Nếu x là số chẵn thì $x = 2t, t \in Z$ nên $x^2 = 4t^2$ và nếu x là số lẻ thì $x = 2t+1, t \in Z$ nên $x^2 = (2t+1)^2 = 4t(t+1)+1 = 8k+1, k \in Z$.

Từ phương trình đã cho suy ra $x^2 + y^2$ là số chẵn, do đó x và y phải cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với x và y là các số lẻ. Khi đó theo nhận xét như trên ta được $x^2 - y^2$ chia hết cho 8.

Và ta có $x^2 + y^2 + 2z^2 = 8k + 2 + 2z^2 = 8k + 2(z^2+1), k \in Z$.

Do đó để $x^2 + y^2 + 2z^2$ chia hết cho 8 thì $2(z^2+1) \vdots 4$ nên z là số lẻ.

Khi đó ta đặt $z = 8n+1, n \in Z$ thì ta được $x^2 + y^2 + 2z^2 = 8(n+2k)+4$ hay $x^2 + y^2 + 2z^2$ chia 8 có số dư là 4. Điều này mâu thuẫn với vế trái của phương trình chia hết cho 8. Do đó khi x và y cùng là số lẻ thì phương trình không có nghiệm.

- Trường hợp 2: Với x và y là các số chẵn, khi đó ta được $2(x^2 - y^2) \vdots 4$ và $(x^2 + y^2) \vdots 4$. Do đó từ phương trình đã cho ta hu được $2z^2 \vdots 4 \Rightarrow z^2 \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2$ hay z là số chẵn.

Đặt $x = 2x_1; y = 2y_1; z = 2z_1$ và thay vào phương trình đã cho ta được

$$2\left[(2x_1)^2 - (2y_1)^2\right]^2 = (2x_1)^2 + (2y_1)^2 + 2(2z_1)^2 \Leftrightarrow 8(x_1^2 - y_1^2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2$$

Lập luận tương tự như trên ta lại được $x_1; y_1; z_1$ là các số chẵn.

Tiếp tục như thế ta sẽ có $x \vdots 2^n; y \vdots 2^n; z \vdots 2^n$ với n là một số tự nhiên bất kì.

Điều này chỉ xẩy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Bài 59. Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được $(2x^2 + xy + y^2)(3x^2 - xy + 2y^2) = 132$.

Ta có $2x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{7x^2}{4} \ge 0$.

Lại có $(3x^2 - xy + 2y^2) - (2x^2 + xy + y^2) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \ge 0$

Do đó $3x^2 - xy + 2y^2 \ge 2x^2 + xy + y^2 \ge 0$.

Chú ý rằng $132 = 1.132 = 2.66 = 3.44 = 4.33 = 6.22 = 11.12$.

Lại có $(3x^2 - xy + 2y^2) - (2x^2 + xy + y^2)$ là một số chính phương.

Do đó ta được $\begin{cases} 3x^2 - xy + 2y^2 = 12 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 11 \end{cases}$

Từ đó suy ra $(x-y)^2=1 \Rightarrow x-y=\pm 1$, ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $x-y=1$, ta có $x=y+1$. Thay vào phương trình $2x^2+xy+y^2=11$ và thu gọn ta được $4y^2+5y-9=0$. Giả phương trình ta được $y=1$, do đó $x=2$
- Trường hợp 2: Với $x-y=-1$, ta có $x=y-1$. Thay vào phương trình $2x^2+xy+y^2=11$ và thu gọn ta được $4y^2-5y-9=0$. Giả phương trình ta được $y=-1$, do đó $x=-2$.

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;1),(-2;-1)$.

Bài 60.

Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với $(x+y)^3-2xy(x+y)=4(x+y)^2-4xy+12$.

Đặt $a=x+y;b=xy$ với a, b là các số nguyên.

Khi đó phương trình trên trở thành $a^3-2ab=4a^2-4b+12$

Hay ta được $2b(a-2)=a^3-4a^2-12$.

Xét $a=2$, khi đó từ phương trình trên ta được $0=-20$, vô lí.

Xét $a\neq 2$, khi đó phương trình trên trở thành $2b=\dfrac{a^3-4a^2-12}{a-2}=a^2-2a-4-\dfrac{20}{a-2}$.

Do b là số nguyên nên $a-2$ là ước của 20. Do đó $a-2\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm5;\pm10;\pm20\}$.

Xét các trường hợp cụ thể ta được các cặp số $(a;b)=(4;-3),(0;3),(12;57),(-8;30)$ thỏa mãn phương trình $2b(a-2)=a^3-4a^2-12$.

+ Với $a=4;b=-3$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=4\\xy=-3\end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

+ Với $a=0;b=3$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=0\\xy=3\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

+ Với $a=0;b=3$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=0\\xy=3\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

+ Với $a=12;b=57$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=12\\xy=57\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

+ Với $a=-8;b=30$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=-8\\xy=30\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với $(x^2+y^2)(x+y-4)=4xy+12$.

Từ phương trình ta nhận thấy x, y có cùng tính chẵn lẻ và $x+y-4$ là số chẵn.

Đến đây ta xét các trường hợp như sau.

- Trường hợp 1: Nếu $x+y-4\geq 4$, khi đó $x+y\geq 8$.

Từ đó ta được $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2=32$ và $x^2+y^2\ge 2xy$. Do đó ta suy ra được

$$\left(x^2+y^2\right)(x+y-4)\ge 4\left(x^2+y^2\right)=2\left(x^2+y^2\right)+2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\ge(x+y)^2+4xy=64+4xy>4xy+12$$

Như vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2: Nếu $x+y-4\le -2$, khi đó $x+y\le 2$.

Từ đó ta được $\left(x^2+y^2\right)(x+y-4)\le -2\left(x^2+y^2\right)<4xy<4xy+12$.

Như vậy trường hợp này phương trình cũng vô nghiệm.

- Trường hợp 3: Nếu $-2<x+y-4<4$, khi đó do $x+y-4$ là số chẵn nên suy ra $x+y-4=0$ hoặc $x+y-4=2$.

+ Với $x+y-4=0$ ta được $xy=-3$, ta có hệ $\begin{cases}x+y=4\\xy=-3\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Với $x+y-4=2$, khi đó từ phương trình trên ta được $2\left(x^2+y^2\right)=4xy+13\Rightarrow xy=\frac{15}{2}$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}x+y=6\\xy=\frac{15}{2}\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

Như vậy trường hợp này phương trình cũng không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 61. Do x, y là các số tự nhiên nên $2010^x\ge 1; 2011^y\ge 1$, do đó từ phương trình đã cho ta được $2012^z\ge 2$, điều này dẫn đến $z\ge 1$. Từ đó ta được 2012^z là số chẵn.

Mà ta lại có 2011^y là số lẻ nên 2010^x phải là số lẻ, do đó ta được $x=0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $1+2011^y=2012^z$, đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $z=1$, khi đó ta được phương trình $1+2011^y=2012$, suy ra $y=1$.
- Nếu $z\ge 2$, khi đó ta được $2012^z=4^z.503^z$ chia hết cho 8.

Ta lại thấy 2011 chia 8 dư 3.

Do đó nếu y là số chẵn thì ta được $2011^y=(8.251+3)^{2n}=(8k+1)^2=8t+1$ với n, k, t là các số tự nhiên. Do đó $1+2011^y$ chia 8 có số dư là 2. Như vậy với y chẵn thì phương trình không có nghiệm.

Nếu y là số lẻ thì ta được $2011^y=(8.251+3)^{2n+1}=2011.(8k+1)^2=8t+3$ với n, k, t là các số tự nhiên. Do đó $1+2011^y$ chia 8 có số dư là 4. Như vậy với y chẵn thì phương trình không có nghiệm.

Từ đó suy ra khi $z\ge 2$ thì không tồn tại số tự nhiên y thỏa mãn phương trình.

Vậy chỉ có bộ số $(x;y;z)=(0;1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 62.

a) Ta có $2002^x = 2001^y + 1 \equiv 2(\bmod 4)$ suy ra $x = y = 1$

b) Nếu x chẵn thì $5^x \equiv 1(\bmod 3)$ suy ra $2^y \equiv 0(\bmod 3)$, loại.

Nếu x lẻ thì $5^x \equiv 5(\bmod 8)$ suy ra $2^y \equiv 4(\bmod 8)$. Suy ra $y = 2$

Đáp số $(x;y)=(1;2)$

c) Nếu x lẻ thì $5^x + 1$ chia hết cho 3 còn 2^y không chia hết cho 3, loại.

Nếu x chẵn thì $5^x + 1 \equiv 2(\bmod 4)$ suy ra $2^y \equiv 2(\bmod 4)$. Suy ra $x = 0; y = 1$

d) Ta có $1 + 5^z \equiv 2(\bmod 4)$ suy ra $2^x.3^y \equiv 2(\bmod 4)$ do đó $x = 1$.

Khi đó ta có $2.3^y = 1 + 5^z$

+ Nếu $y = 0$ thì $y = 0$ và nếu $y = 1$ thì $z = 1$.

+ Nếu $y > 1$ thì $2.3^y \equiv 0(\bmod 9)$ nên $5^z \equiv -1(\bmod 9)$.

Suy ra z chia hết cho 3 và z lẻ.

Vậy z có dạng $z = 6k + 3 (k \in \mathbb{N})$. Nhưng khi đó $2.3^y = 1 + 125^{2k+1} \equiv 0(\bmod 7)$, loại

Vậy phương trình có 2 nghiệm tự nhiên là $(1;0;0)$ và $(1;1;1)$

Bài 63. Ta có $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 3zt)^2 = 1 \\ 3(xz + yt)^2 = 12 \end{cases}$

Cộng theo từng vế ta có $(x^2 + 3t^2)(y^2 + 3z^2) = 13$

Đáp số $(x;y;z;t) = (1;1;2;0), (-1;-1;-2;0), (1;1;0;2), (-1;-1;0;-2)$