

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NGÃ SƠN**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TÌM GIÁ
TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MÔĐUN
MỘT SỐ PHỨC TRONG ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM**

**Người thực hiện: Nguyễn Đức Văn
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán**

THANH HÓA NĂM 2017

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
I. MỞ ĐẦU	2
1. Lí do chọn đề tài	2
2. Mục đích nghiên cứu	2
3. Đối tượng nghiên cứu	2
4. Phương pháp nghiên cứu	2
II. NỘI DUNG	2
1. Cơ sở lí luận	2
2. Thực trạng vấn đề	3
3. Giải pháp thực hiện	3
3.1. Phương pháp đại số	3
3.2. Phương pháp hình học	6
Bài tập tương tự	12
4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm	13
III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ	14
Tài liệu tham khảo	15

I.MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Số phức được đưa vào giảng dạy ở chương trình lớp 12 là nội dung mới và thực sự gây không ít khó khăn cho các em học sinh bởi nguồn tài liệu tham khảo hạn chế. Bên cạnh đó các bài toán về số phức trong những năm gần đây không thể thiếu trong đề thi THPT Quốc gia. Bài toán “Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn số phức” không phải là bài toán quá khó đối với học sinh. Các em chỉ cần nắm được kiến thức cơ bản về số phức: phần thực, phần ảo, môđun của số phức, các phép toán về số phức kết hợp với kiến thức về phương trình đường thẳng, đường tròn, đường Elíp,... thì các em sẽ giải quyết tốt bài toán trên. Vấn đề là thông qua bài toán này học sinh biết khai thác kiến thức cơ bản của bài toán trên, kết hợp vận dụng kiến thức về bất đẳng thức, đạo hàm, lượng giác, bài toán cực trị trong hình học,.. để từ đó giải quyết được bài toán ***“Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức hay tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất thoả mãn điều kiện cho trước”***.

Năm học 2016-2017 là năm học đầu tiên thực hiện thi trắc nghiệm môn Toán đó là một khó khăn rất lớn đối với các em học sinh và với cả các thầy cô giáo. Việc thi trắc nghiệm đòi hỏi các em phải tìm được phương pháp nào nhanh nhất để giải quyết bài toán. Do đó ngoài việc nắm vững kiến thức cơ bản phương pháp tự luận để giải quyết bài toán các em còn phải nắm được những phương pháp để giải nhanh bài toán. Chính vì vậy mà tôi chọn đề tài ***“Một số phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức trong đề thi trắc nghiệm”*** để viết sáng kiến kinh nghiệm.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Trên cơ sở nghiên cứu đề tài: ***“Một số phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức trong đề thi trắc nghiệm”*** cùng quá trình ôn luyện cho học sinh tôi mong muốn học sinh nắm vững một số phương pháp để giải bài toán về cực trị của số phức, từ đó các em có tư duy linh hoạt để vận dụng vào các bài toán cực trị khác, giúp các em đạt kết quả cao trong kỳ thi THPT quốc gia và nâng cao hơn nữa chất lượng dạy học Toán.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU:

Phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết.

II. NỘI DUNG

1.CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1.Kiến thức cơ bản về số phức:

-Một số phức z là một biểu thức có dạng $z = x + yi$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

-Mỗi số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

-Môđun của một số phức z được ký hiệu $|z|$, đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu $z = x + yi$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Nếu $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thì $|z| = OM$

-Cho số phức $z = x + yi$. Số phức $\bar{z} = x - yi$ gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

1.2. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức thường gặp.

- Phương trình đường thẳng: $ax + by + c = 0$
- Phương trình đường tròn: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Phương trình đường Elíp: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ:

Số phức là vấn đề hoàn toàn mới đối với học sinh bậc trung học phổ thông hiện nay. Vì mới đưa vào chương trình Sách giáo khoa nên có rất ít tài liệu về số phức để học sinh và giáo viên tham khảo. Bên cạnh đó, lượng bài tập cũng như các dạng bài tập về số phức trong Sách giáo khoa còn nhiều hạn chế. Chính vì vậy mà việc giảng dạy và học tập của giáo viên và học sinh gặp không ít những khó khăn. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đại số nói chung và của một biểu thức liên quan tới số phức nói riêng là bài toán khó đối với đại đa số học sinh. Cứ nói đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là các em lại thấy ngại, thấy khó khăn khi tìm cách giải quyết bài toán đó. Vì vậy khi gặp bài toán tìm GTLN, GTNN của môđun một số phức hoặc tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất các em thường có xu hướng chọn bừa đáp án.

3. GIẢI PHÁP THỰC HIỆN:

Trước thực trạng trên tôi đưa ra hai phương pháp để giải quyết bài toán trên đó là phương pháp đại số và phương pháp hình học.

3.1. Phương pháp đại số:

Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $|z|$ thỏa mãn điều kiện cho trước K ta thực hiện:

Cách 1:

- Gọi $z = x + yi$, từ điều kiện cho trước K rút ra mối liên hệ y theo x .
- Thay y theo x vào biểu thức $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Sử dụng kiến thức tìm GTLN; GTNN của hàm số: khảo sát hàm số, đánh giá bất đẳng thức...

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức tam giác :

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$

VD 1: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1| = |z - i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức: $w = 2z + 2 - i$.

- A. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Đề thi thử trường Hà Huy Tập – Hà Tĩnh năm 2017

Giải: Gọi $z = x + yi$ khi đó: $|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x = y$.

$$\Rightarrow w = 2x + 2 + (2y - 1)i \Rightarrow |w| = \sqrt{(2x + 2)^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{8x^2 + 4x + 5}.$$

Xét hàm số: $f(x) = 8x^2 + 4x + 5$ có $f'(x) = 16x + 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Hàm số $f(x)$ đạt GTNN bằng $\frac{9}{2}$ khi $x = -\frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow \min|w| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ khi } z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i. \text{ Đáp án C.}$$

VD2: Xét các số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm GTNN của $|z|$?

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 10 D. 8

Đề thi thử chuyên Biên Hòa – Hà Nam năm 2017

Giải: Gọi $z = x + yi$ khi đó:

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \min|z| = 2\sqrt{2} \text{ khi } z = 2 + 2i. \text{ Đáp án B.}$$

VD3: Trong các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} - 3 + 4i| = |z|$, biết rằng số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $P = a^2 - b$ là:

- A. $P = \frac{1}{4}$ B. $P = \frac{1}{2}$ C. $P = -\frac{1}{4}$ D. $P = -\frac{1}{2}$

Đề của trang luyenthithukhoa.vn.

Giải: Gọi $z = x + yi$ khi đó:

$$|\bar{z} - 3 + 4i| = |z| \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (4 - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 8y = 25 - 6x \Leftrightarrow y = \frac{25}{8} - \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{16}x + \frac{625}{64}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{16}x + \frac{625}{64} \Rightarrow f'(x) = \frac{25}{8}x - \frac{75}{16}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \min f(x) = \frac{25}{4} \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Rightarrow \min|z| = \frac{5}{2} \text{ khi } z = \frac{3}{2} + 2i$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = 2 \Rightarrow P = \frac{1}{4}. \text{ Đáp án A.}$$

VD4: Trong các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} + 2z| = |z - i|$, tìm số phức z có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt GTLN?

- A. $z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2}i$ B. $z = \frac{1}{2}i$ C. $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8}i$ D. $z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{1}{8}i$.

Đề thi thử trường Yên Lạc – Vĩnh Phúc năm 2017

Giải: Gọi $z = a + bi$ ($a \geq 0$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$, khi đó:

$$|\bar{z} + 2z| = |z - i| \Leftrightarrow \sqrt{9a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \Leftrightarrow 2b = 1 - 8a^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - 4a^2.$$

Ta có $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ lớn nhất khi $|z|$ nhỏ nhất.

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a^2\right)^2 = 16a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \geq \frac{7}{64}$$

$$\Rightarrow |z| \geq \frac{\sqrt{7}}{8} \Rightarrow \min|z| = \frac{\sqrt{7}}{8} \text{ khi } \begin{cases} a^2 = \frac{3}{32} \\ b = \frac{1}{2} - 4a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{1}{8}i$$

Đáp án D.

VD5: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm GTLN của $|z|$?

- A. $1 + \sqrt{13}$ B. $\sqrt{13}$ C. $2 + \sqrt{13}$ D. $\sqrt{13} - 1$

Đề thi thử Sở GD Long An năm 2017

Giải: Ta có: $1 = |z - (2 + 3i)| \geq ||z| - |2 + 3i|| = ||z| - \sqrt{13}|$

$$\Rightarrow -1 \leq |z| - \sqrt{13} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 1 \leq |z| \leq 1 + \sqrt{13}.$$

$$\Rightarrow \max|z| = 1 + \sqrt{13} \text{ khi } z = k(2 + 3i) \text{ với } k \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{13} = |k|\sqrt{13} \Rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{13}}{\sqrt{13}}.$$

Đáp án A.

VD6: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm GTNN của $|\bar{z} + 1 + i|$?

- A. $\sqrt{13} - 1$ B. 4 C. 6 D. $1 + \sqrt{13}$

Đề thi thử THPT Kim Liên Hà Nội năm 2017

Giải: Ta có: $|\bar{z} + 1 + i| = |z + 1 - i| = |(z - 2 - 3i) + (3 + 2i)| \geq |z - 2 - 3i| - \sqrt{13} = \sqrt{13} - 1.$

$\Rightarrow \min|\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{13} - 1$. Đáp án A.

VD7: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M ; m lần lượt là GTLN, GTNN của $|z + 2 + i|$. Tính giá trị biểu thức $S = M^2 + m^2$?

- A. $S = 34$ B. $S = 82$ C. $S = 68$ D. $S = 36$

Đề thi thử Sở GD Hưng Yên năm 2017

Giải: Ta có:

$$4 = |z - (1 + 2i)| = |(z + 2 + i) - (3 + 3i)| \geq |z + 2 + i| - |3 + 3i| = |z + 2 + i| - 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -4 \leq |z + 2 + i| - 3\sqrt{2} \leq 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - 4 \leq |z + 2 + i| \leq 4 + 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow M = 4 + 3\sqrt{2}; m = 3\sqrt{2} - 4 \Rightarrow S = (4 + 3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2} - 4)^2 = 68. \text{ Đáp án C.}$$

VD8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$. Gọi $z_1; z_2$ lần lượt là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức $z_1; z_2$ bằng:

- A. $8i$ B. 4 C. -8 D. 8.

Đề thi thử Sở GD &ĐT Hà Tĩnh năm 2017

Giải: Ta có: $2 = |z - (2 + 4i)| \geq ||z| - 2\sqrt{5}| \Rightarrow 2\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq 2 + 2\sqrt{5}.$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max|z| &= 2 + 2\sqrt{5} \text{ khi } \begin{cases} z = \frac{A}{|A|}(2 + 4i) \Rightarrow z = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{5}}(2 + 4i) \Rightarrow z = 1 + \sqrt{5} \\ z = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}(2 + 4i) \end{cases} \\ \Rightarrow \min|z| &= 2\sqrt{5} - 2 \text{ khi } \begin{cases} z = \frac{A}{|A|}(2 + 4i) \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5} - 2}(2 + 4i) \Rightarrow z = \sqrt{5} - 1 \\ z = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}(2 + 4i) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Tổng phần ảo của } z_1; z_2 \text{ là: } 4\left(\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}\right) = 8. \text{ Đáp án D}$$

VD9: Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$. Ký hiệu $M = \max|z|$; $m = \min|z|$. Tìm môđun của số phức $w = M + mi$?

- A. $|w| = 2\sqrt{3}$ B. $|w| = \sqrt{3}$ C. $|w| = 2\sqrt{5}$ D. $|w| = \sqrt{5}$

Đề của trang luyenthithukhoa.vn năm 2017

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned} 2|z| &= |z^2 + 4| \Rightarrow 2|z| \geq |z|^2 - 4 \\ \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 &\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} - 1 \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5} \\ \Rightarrow M &= 1 + \sqrt{5}; m = \sqrt{5} - 1 \\ \Rightarrow |w| &= \sqrt{M^2 + m^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{5} - 1)^2} = 2\sqrt{3}. \text{ Đáp án A.} \end{aligned}$$

3.2. Phương pháp hình học:

*) Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $|z|$ thỏa mãn điều kiện cho trước K ta thực hiện:

- Tìm tập hợp (G) các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện K.
- Tìm điểm $M \in (G)$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Tìm OM.

*) Một số kết quả về tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn:

- Nếu $|z - (a + bi)| = r$ thì tập hợp điểm là đường tròn tâm I(a;b), bán kính r.
- Nếu $|z - (a_1 + b_1i)| = |z - (a_2 + b_2i)|$ thì tập hợp điểm là đường trung trực của đoạn AB với $A(a_1; b_1); B(a_2; b_2)$.
- Nếu $|z - (a_1 + b_1i)| + |z - (a_2 + b_2i)| = 2a$ và $2a = AB$ với $A(a_1; b_1); B(a_2; b_2)$ thì tập hợp điểm là đoạn thẳng AB.
- Nếu $|z - (a_1 + b_1i)| + |z - (a_2 + b_2i)| = 2a$ và $2a > AB$ với $A(a_1; b_1); B(a_2; b_2)$ thì tập hợp điểm là elip (E) nhận A,B làm tiêu điểm và độ dài trục lớn là 2a.

VD10: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Môđun lớn nhất của số phức z là :

A. $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$ B. $\frac{\sqrt{15(14 - 6\sqrt{5})}}{5}$ C. $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{15(14 + 6\sqrt{5})}}{5}$

Đề thi thử Sở GD&ĐT Đà Nẵng năm 2017

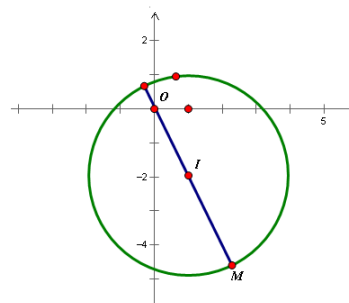
Giải:

Ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm I(1;-2) và bán kính $r = 3$.

Ta có $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

$$\Rightarrow \max|z| = OI + IM = IO + r = \sqrt{5} + 3 = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$$

Đáp án A.



VD11: Xét các số phức z thỏa mãn: $|z + i| = \sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 9 - 5i|$?

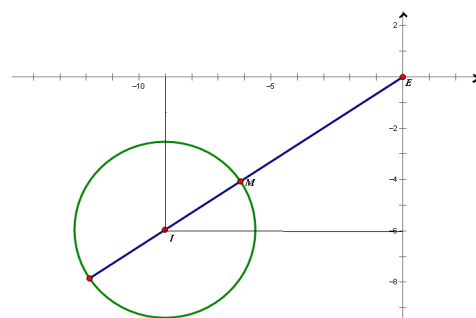
A. $T = 2\sqrt{13}$ B. $T = 3\sqrt{13}$ C. $T = \sqrt{13}$ D. $T = 4\sqrt{13}$

Đề khảo sát của Bộ dành cho 50 trường.

Giải:

$$\text{Gọi } w = z - 9 - 5i \Rightarrow z = w + 9 + 5i \Rightarrow z + i = w + 9 + 6i.$$

Theo bài ra ta có $|w - (-9 - 6i)| = \sqrt{13}$ nên tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm



$I(-9; -6)$, bán kính $r = \sqrt{13}$.

$$\Rightarrow \min T = \min |w| = OI - r = 3\sqrt{13} - \sqrt{13} = 2\sqrt{13}.$$

Đáp án A.

VD12: Nếu các số phức z thỏa mãn: $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 4 B. 3 C. 7 D. 6

Đề thi thử trường chuyên KHTN lần 1 năm 2017

Giải: Ta có:

$$|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| (1+i)\left(z + \frac{1-7i}{1+i}\right) \right| = \sqrt{2}$$

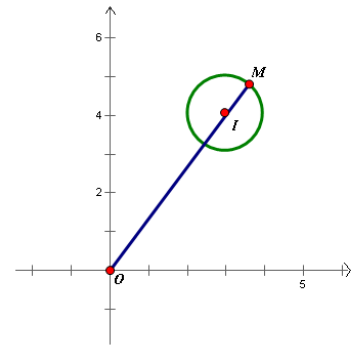
$$\Leftrightarrow |1+i| \left| z - (3+4i) \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} |z - (3+4i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường

tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $r=1$.

$$\Rightarrow \max |z| = OI + r = \sqrt{3^2 + 4^2} + 1 = 6$$



Đáp án D.

VD13: Nếu các số phức z thỏa mãn: $\left| \frac{-2-3i}{3-2i} + 1 \right| = 1$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 3

Giải: Ta có:

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i} + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |-i| \left| z + \frac{1}{-i} \right| = 1$$

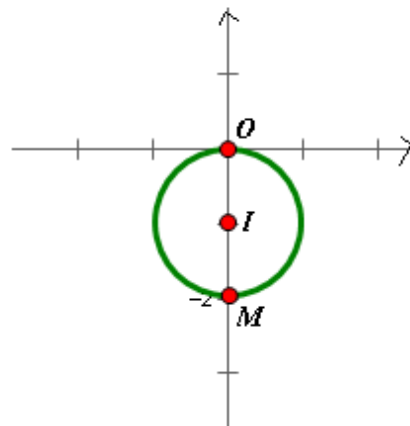
$$\Leftrightarrow |z + i| = 1 \Leftrightarrow |z - (-i)| = 1$$

Đề của trang luyenthithukhoa.vn năm 2017

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn

tâm $I(0;-1)$, bán kính $r=1$.

$$\Rightarrow \max |z| = OI + r = 1 + 1 = 2.$$



Đáp án B.

VD14: Trong tất cả các số phức thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$, gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức có $|z + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a(b+2)$?

- A. $P = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ B. $P = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ C. $P = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ D. $P = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$

Đề thi học kỳ II trường THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội năm 2017

Giải: Gọi $w = z + 4i = x + yi \Rightarrow z = w - 4i$

$$\Rightarrow |w - 4i - 2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |w - (2 + 2i)| = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn $w = z + 4i$ là đường tròn

tâm $I(2;2)$ bán kính $r=1$.

$$\Rightarrow \min|w| = \min OM = OI - r = 2\sqrt{2} - 1.$$

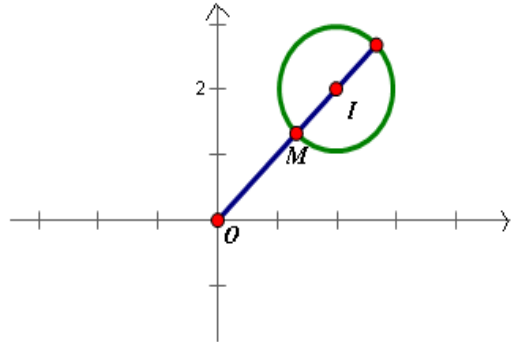
Đường thẳng OI có phương trình $y=x$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x=y \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}; b = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - 4 = \frac{-2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2 \right) = \frac{1}{2} - \sqrt{2}. \text{ Đáp án D.}$$



VD15: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất?

A. $z = 2 - 2i$

B. $z = 1 + i$

C. $z = 2 + 2i$

D. $z = 1 - i$

Đề thi thử của trường chuyên Biên Hòa – Hà Nam

Giải: Gọi $A(2;4); B(0;2)$;

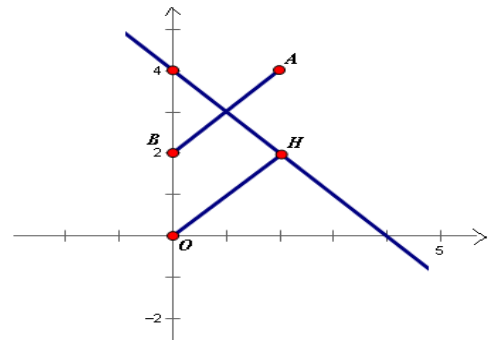
Tập hợp điểm biểu diễn z là đường trung trực của

AB có phương trình $x+y-4=0$ (d).

$|z|$ đạt GTNN hay OM đạt GTNN khi M là hình

chiếu H của O trên (d)

$$\Rightarrow H(2;2) \Rightarrow z = 2 + 2i. \text{ Đáp án C.}$$



VD16: Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 3| + |z - 3| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Đề thi thử trường THPT Trần Phú – Hà Nội năm 2017

Giải: Gọi $F_1(-3;0); F_2(3;0) \Rightarrow F_1F_2=6=2c < 10$.

Tập hợp điểm biểu diễn z là elip (E) có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ và độ dài trục lớn là $2a=10$

$$\Rightarrow a=5 \Rightarrow b=\sqrt{a^2 - c^2} = 4.$$

$\Rightarrow |z|_{\min} = OM_{\min} = 4$ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv B'$ (với $BB'=2b=8$ là độ dài trục bé của elip)

VD17: Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$ B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Đề minh họa lần 3 của Bộ giáo dục năm 2017

Giải: Gọi $w = z - 1 + i \Rightarrow z = w + 1 - i$. Khi đó :

$$|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow |w + 3 - 2i| + |w - 3 - 8i| = 6\sqrt{2} \quad (*)$$

Gọi $A(-3; 2); B(3; 8)$; M là điểm biểu diễn w ta có:

$$(*) \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2}. \text{ Mà } AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow MA + MB = AB.$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn w là đoạn thẳng AB .

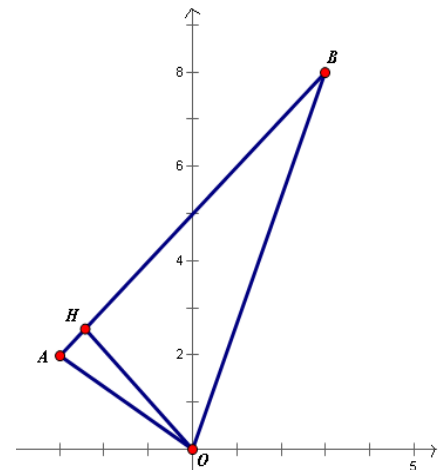
• $|w|_{\min} = OM_{\min}$ khi $M \equiv H$ với H là hình chiếu của

O trên AB

$$\Rightarrow H(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}) \Rightarrow m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet |w|_{\max} = OM_{\max} = OB = \sqrt{73} = M$$

$$\Rightarrow P = m + M = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$



Đáp án B.

VD18: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

A. $\frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{13}}{5}$ B. $\sqrt{5} + 5\sqrt{13}$ C. $\sqrt{2} + \sqrt{13}$ D. $\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$.

Đề của trang luyenthithukhoa.vn năm 2017

Giải: Gọi M, A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức

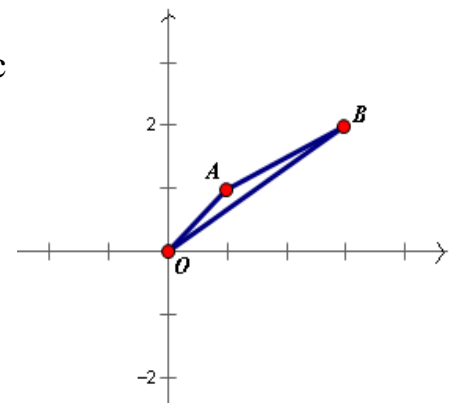
$$z; 1 + i; 3 + 2i \Rightarrow A(1; 1); B(3; 2)$$

$$\Rightarrow |z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = \sqrt{5} = AB$$

$\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB .

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$\begin{aligned} |z|_{\min} &= OM_{\min} = OA = \sqrt{2} \\ |z|_{\max} &= OM_{\max} = OB = \sqrt{13} \Rightarrow M + m = \sqrt{2} + \sqrt{13} \end{aligned}$$



Đáp án C.

VD19: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z + 2i|$. Tính $M + m$.

A. $\frac{5 + 5\sqrt{10}}{5}$ B. $5 + \sqrt{10}$ C. $\sqrt{2} + \sqrt{13}$ D. $2\sqrt{10} + 5$

Đề của trang luyenthithukhoa.vn năm 2017

Giải: Gọi $w = z + 2i \Rightarrow z = w - 2i$. Khi đó:

$$|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - 1 - 3i| + |w - 3 - 4i| = \sqrt{5} \quad (*)$$

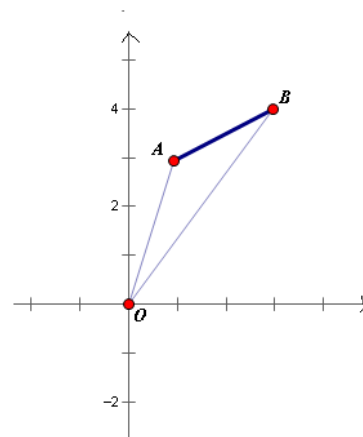
Gọi $A(1;3); B(3;4) \Rightarrow AB = \sqrt{5}$; gọi M là điểm biểu diễn w

Ta có: $(*) \Leftrightarrow MA + MB = \sqrt{5} = AB$

$\Rightarrow M$ thuộc đoạn AB .

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$\begin{aligned} |w|_{\min} &= OM_{\min} = OA = \sqrt{10} \\ |w|_{\max} &= OM_{\max} = OB = 5 \end{aligned} \Rightarrow M + m = 5 + \sqrt{10}$$



Đáp án B.

VD20: Xét các số phức thỏa mãn $4|z + i| + 3|z - i| = 10$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

A. $\frac{35\sqrt{2}}{15}$

B. $\frac{18}{7}$

C. $\frac{50}{11}$

D. $\frac{30}{7}$

Đề thi thử của trường THPT Lương Đức Trọng năm 2017

Giải: Gọi $A(0;-1); B(0;1)$; trung điểm của AB là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z .

Theo công thức trung tuyến ta có:

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

Theo giả thiết ta có $4MA + 3MB = 10$. Đặt $a = MA \Rightarrow MB = \frac{10 - 4a}{3}$.

$$\text{Vì } |MA - MB| = \frac{|10 - 7a|}{3} \leq AB = 2 \Rightarrow -6 \leq 10 - 7a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq a \leq \frac{16}{7}$$

$$\text{Ta có: } MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\frac{10 - 4a}{3}\right)^2 = \frac{25a^2 - 80a + 100}{9} = \frac{(5a - 8)^2 + 36}{9}$$

$$\text{Do } -\frac{36}{7} \leq 5a - 8 \leq \frac{34}{7} \Rightarrow 0 \leq (5a - 8)^2 \leq \frac{1296}{49} \text{ nên:}$$

$$\bullet MA^2 + MB^2 \geq 4 \Rightarrow |z|^2 \geq 1 \Rightarrow |z| \geq 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\bullet MA^2 + MB^2 \leq \frac{\frac{1296}{49} + 36}{9} = \frac{340}{49} \Rightarrow |z|^2 \leq \frac{121}{49} \Rightarrow |z| \leq \frac{11}{7} \Rightarrow M = \frac{11}{7} \Rightarrow M + m = \frac{18}{7}$$

Bài tập tương tự:

1. Cho số phức z thỏa mãn $w = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực, tìm môđun nhỏ nhất của số phức z ?

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. 1.

2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$, biết rằng số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng:

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\sqrt{2}$

3. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |(1 + i)z|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$?

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. 1 C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2}$

4. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{2}$

5. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$?

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{5} - 1$

6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z + 5i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 20|$?

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $7\sqrt{10}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
D. $2\sqrt{10}$

7. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{5}{2} - 2i\right| = \left|z + \frac{3}{2} + 2i\right|$. Biết biểu thức $Q = |z - 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $P = a - 4b$?

- A. $P = -2$ B. $P = \frac{1333}{272}$ C. $P = -1$ D. $P = \frac{691}{272}$

8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1 - i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i - 1}\right| = 4$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.m$?

- A. $M.m = 2$ B. $M.m = 1$ C. $M.m = 2\sqrt{2}$ D. $M.m = 2\sqrt{3}$

9. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{3 - 3\sqrt{2}i}{1 + 2\sqrt{2}i} - 1 - \sqrt{2}i\right| = \sqrt{3}$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 3 - 3i|$. Tính $M.m$?

- A. $M.m = 25$ B. $M.m = 20$ C. $M.m = 24$ D. $M.m = 30$

4. HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM:

Qua quá trình giảng dạy ôn thi THPT quốc gia, bồi dưỡng học sinh giỏi tại trường THPT Nga Sơn, khả năng tiếp thu và vận dụng các phương pháp trên để giải các bài tập tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức đã mang lại những kết quả đáng mừng. Số học sinh hiểu bài và vận dụng giải bài tập có hiệu quả cao dần thể hiện ở số lượng cũng như chất lượng học sinh có điểm thi THPT quốc gia. Đa số học sinh tỏ ra tự tin khi giải quyết các bài tập về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức khi được tiếp cận

với các phương pháp giải được nêu trong sáng kiến kinh nghiệm. Học sinh có thể tự chọn cho mình một phương pháp bất kỳ trong các phương pháp nêu trong sáng kiến kinh nghiệm.

Năm học 2016 -2017 , khi ôn thi THPT Quốc gia để giải các bài tập tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức, tôi có chia lớp thành hai nhóm: một nhóm thực nghiệm , một nhóm đối chứng cho đề tài của mình với 2 phương pháp giải ,tôi đã thu được kết quả sau :

	Phương pháp đại số(%)				Phương pháp hình học (%)			
	G	K	TB	<TB	G	K	TB	<TB
Lớp đối chứng	12	25	47	16	30	10	33	27
Lớp thực nghiệm	20	31	40	9	60	21	16	3

III. KẾT LUẬN

Trong quá trình dạy học , đối với mỗi bài toán nói chung và bài toán số phức nói riêng, nếu giáo viên biết tìm ra cơ sở lý thuyết , đưa ra phương pháp giải hợp lý và hướng dẫn học sinh vận dụng một cách linh hoạt thì sẽ tạo được sự hứng thú học tập của học sinh. Khi dạy học sinh giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức yêu cầu học sinh tìm mối liên hệ giữa các giả thiết của bài toán. Giáo viên cần xây dựng một hệ thống bài tập từ dễ đến khó để nâng cao khả năng tư duy và kỹ năng làm bài của học sinh.

Là một giáo viên tôi xác định cho mình phải luôn tạo cho học sinh niềm hứng thú say mê trong quá trình học tập; luôn cải tiến phương pháp dạy học, phát triển tư duy, vận dụng kiến thức phục vụ tốt cho bài dạy của mình.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của môđun một số phức rất đa dạng. Trong bài viết này tôi chỉ mới đưa ra một số ví dụ về bài toán hay gặp trong đề thi thử THPT quốc gia nên chưa thể đầy đủ, chưa bao quát hết, với mong muốn giúp cho học sinh có định hướng tốt hơn khi gặp các bài toán này , tôi mong nhận được những góp ý chân thành của đồng nghiệp để bài viết của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ:	Thanh Hóa ngày 25/5/2017 Tôi xin cam đoan đây là bài viết của mình không sao chép của người khác. Người viết:
---------------------------------	---

	Nguyễn Đức Văn
--	----------------

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Đề thi thử THPT Quốc gia của các trường THPT trong cả nước, của các Sở GD&ĐT năm 2017.
- Trang web: luyenthithukhoa.vn