Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp

TUYỂN TẬP
18 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 6

Thanh Hóa, tháng 10 năm 2019

TUYỂN TẬP 18 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 6

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em 18 chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 6. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để làm 18 chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 6 .

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng tuyển tập chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng 18 chuyên đề số học lớp 6 này có thể giúp ích nhiều cho học sinh lớp 6 phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian để sưu tầm và tổng hợp song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

Mục Lục

CHỦ ĐỀ 1:
TẬP HỢP VÀ ÔN TẬP VỀ SỐ TỰ NHIÊN

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Một tập hợp có thể có một ,có nhiều phần tử, có vô số phần tử,cũng có thể không có phần tử nào.

2.Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng.tập rỗng kí hiệu là : Ø.

3.Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì tập hợp A gọi là tập hợp con của tập hợp B, kí hiệu là $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Nếu $A \subset B$ và $B \supset A$ thì ta nói hai tập hợp bằng nhau,kí hiệu A=B.

B/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ TẬP HỢP

Dạng 1: Rèn kĩ năng viết tập hợp, viết tập hợp con, sử dụng kí hiệu

Bài 1: Cho tập hợp A là các chữ cái trong cụm từ "Thành phố Hồ Chí Minh"

a. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A.

b. Điền kí hiệu thích hợp vào ô vuông

a) b $\square$ A ; b) c $\square$ A;. c) h $\square$ A

Hướng dẫn

a/ A = {a, c, h, i, m, n, ô, p, t}

b/ $b \boxed{\notin} A$ $c \boxed{\in} A$ $h \boxed{\in} A$

Lưu ý HS: Bài toán trên không phân biệt chữ in hoa và chữ in thường trong cụm từ đã cho.

Bài 2: Cho tập hợp các chữ cái X = {A, C, O}

a/ Tìm cụm chữ tạo thành từ các chữ của tập hợp X.

b/ Viết tập hợp X bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của X.

Hướng dẫn

a/ Chẳng hạn cụm từ "CA CAO" hoặc "CÓ CÁ"

b/ X = {x: x-chữ cái trong cụm chữ "CA CAO"}

Bài 3: Cho các tập hợp

A = {1; 2; 3; 4; 5; 6;8;10} ; B = {1; 3; 5; 7; 9;11}

a/ Viết tập hợp C các phần tử thuộc A và không thuộc B.

b/ Viết tập hợp D các phần tử thuộc B và không thuộc A.

c/ Viết tập hợp E các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

d/ Viết tập hợp F các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

Hướng dẫn:

a/ C = {2; 4; 6} ;b/ D = {5; 9} ; c/ E = {1; 3; 5}

d/ F = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10;11}

Bài 4: Cho tập hợp A = {1; 2;3;x; a; b}

a/ Hãy chỉ rõ các tập hợp con của A có 1 phần tử.

b/ Hãy chỉ rõ các tập hợp con của A có 2 phần tử.

c/ Tập hợp B = {a, b, c} có phải là tập hợp con của A không?

Hướng dẫn

a/ {1} { 2} { a } { b} ….

b/ {1; 2} {1; a} {1; b} {2; a} {2; b} { a; b} ……

c/ Tập hợp B không phải là tập hợp con của tập hợp A bởi vì c $\in B$ nhưng c $\notin A$

Bài 5: Cho tập hợp B = {a, b, c}. Hỏi tập hợp B có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

Hướng dẫn

- Tập hợp con của B không có phần từ nào là $\varnothing$.
- Các tập hợp con của B có hai phần tử là …….
- Tập hợp con của B có 3 phần tử chính là B = {a, b, c}

Vậy tập hợp A có tất cả 8 tập hợp con.

Ghi chú. Một tập hợp A bất kỳ luôn có hai tập hợp con đặc biệt. Đó là tập hợp rỗng $\varnothing$ và chính tập hợp A. Ta quy ước $\varnothing$ là tập hợp con của mỗi tập hợp.

Bài 6: Cho A = {1; 3; a; b} ; B = {3; b}

Điền các kí hiệu $\in, \notin, \subset$ thích hợp vào dấu (….)

1 ……A ; 3 … A ; 3……. B ; B …… A

Bài 7: Cho các tập hợp

$A = \{x \in N / 9 < x < 99\}$; $B = \{x \in N^* / x < 100\}$

Hãy điền dấu $\subset$ hay $\supset$ vào các ô dưới đây

N …. N* ; A ……… B

Dạng 2: Các bài tập về xác định số phần tử của một tập hợp

Bài 1: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Hướng dẫn:

Tập hợp A có (999 – 100) + 1 = 900 phần tử.

Bài 2: Hãy tính số phần tử của các tập hợp sau:

a/ Tập hợp A các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số.

b/ Tập hợp B các số 2, 5, 8, 11, …, 296, 299, 302

c/ Tập hợp C các số 7, 11, 15, 19, …, 275 , 279

Hướng dẫn

a/ Tập hợp A có (999 – 101):2 +1 = 450 phần tử.

b/ Tập hợp B có (302 – 2): 3 + 1 = 101 phần tử.

c/ Tập hợp C có (279 – 7):4 + 1 = 69 phần tử.

Cho HS phát biểu tổng quát:

- Tập hợp các số chẵn từ số chẵn a đến số chẵn b có (b – a) : 2 + 1 phần tử.
- Tập hợp các số lẻ từ số lẻ m đến số lẻ n có (n – m) : 2 + 1 phần tử.
- Tập hợp các số từ số c đến số d là dãy số các đều, khoảng cách giữa hai số liên tiếp của dãy là 3 có (d – c): 3 + 1 phần tử.

Bài 3: Cha mua cho em một quyển số tay dày 145 trang. Để tiện theo dõi em đánh số trang từ 1 đến 256. Hỏi em đã phải viết bao nhiêu chữ số để đánh hết cuốn sổ tay?

Hướng dẫn:

- Từ trang 1 đến trang 9, viết 9 chữsố.
- Từ trang 10 đến trang 99 có 90 trang, viết 90 . 2 = 180 chữ số.
- Từ trang 100 đến trang 145 có (145 – 100) + 1 = 46 trang, cần viết 46 . 3 = 138 chữ số.

Vậy em cần viết 9 + 180 + 138 = 327số.

Bài 4: Các số tự nhiên từ 1000 đến 10000 có bao nhiêu số có đúng 3 chữ số giống nhau.

Hướng dẫn:

- Số 10000 là số duy nhất có 5 chữ số, số này có hơn 3 chữ số giống nhau nên không thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cần tìm chỉ có thể có dạng: $\overline{abbb}$, $\overline{babb}$, $\overline{bbab}$, $\overline{bbba}$ với a $\neq$ b là các chữ số.

- Xét số dạng $\overline{abbb}$, chữ số a có 9 cách chọn (a $\neq$ 0) $\Rightarrow$ có 9 cách chọn để b khác a.

Vậy có 9 . 8 = 71 số có dạng $\overline{abbb}$.

Lập luận tương tự ta thấy các dạng còn lại đều có 81 số. Suy ta tất cả các số từ 1000 đến 10000 có đúng 3 chữ số giống nhau gồm 81.4 = 324 số.

Bài 5: Có bao nhiêu số có 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 3?

Hướng dẫn

3 = 0 + 0 + 3 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 0 + 0

3000	1011	2001	1002
1110	2100	1200	
1101	2010	1020	

1 + 3 + 6 = 10 số

Bài 6: Tính nhanh các tổng sau

a, 29 + 132 + 237 + 868 + 763

b, 652 + 327 + 148 + 15 + 73

Hướng dẫn

a, 29 + 132 + 237 + 868 + 763 = 29 + (132 + 868) + (237 + 763)

= 29 + 1000 + 1000 = 2029

b, 652 + 327 + 148 + 15 + 73 = (652 + 148) + (327 + 73) + 15

= 700 + 400 + 15 = 1115

C/ BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Viết các tập hợp sau rồi tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $8 : x = 2$

b) Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 3 < 5$

c) Tập hợp C các số tự nhiên x mà $x - 2 = x + 2$

d) Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x : 2 = x : 4$.

e) Tập hợp E các số tự nhiên x mà $x + 0 = x$.

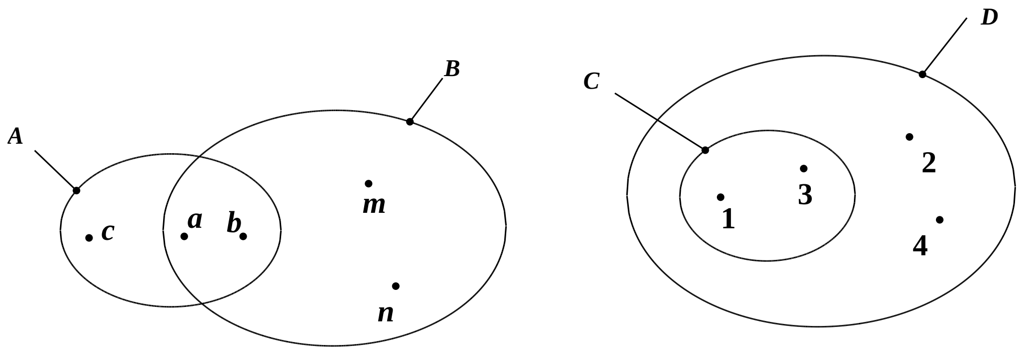
Bài 2. Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chũ lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Bài 3. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Bài 4. Các tập hợp $A,\ B,\ C,\ D$ được cho bởi sơ đồ sau (h.1)



Hình 1

Viết các tập hợp A; B; C; D bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp

Bài 5. Hãy xác định các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đắc trưng các phần tử thuộc tập hợp đó:

a) $A=\{1;3;5;7;...;49\}$

b) $B=\{11;22;33;44;...;99\}$

c) C = {tháng1; tháng 3; tháng 5; tháng 7; tháng 8; tháng 10; tháng 12}

Bài 6. Tìm tập hợp các số tự nhiên x, sao cho:

a) $x+3=4$ b) $8-x=5$

c) $x:2=0$ d) $0:x=0$

e) $5.x=12$

Bài 7. Tìm các số tự nhiên a và b, sao cho: $12<a<b<16$

Bài 8. Viết các số tự nhiên có bốn chữ số trong đó có hai chữ số 3, một số 2 và một chữ số 1.

Bài 9. Với cả hai chữ số I và X, viết được bao nhiêu số La Mã ? (mỗi chữ số có thể viết nhiều lần, nhưng không viết liên tiếp quá ba lần).

Bài 10. a) Dùng ba que diên, xếp dược các số La Mã nào?

b) Để viết các số La Mã từ 4000 trở lên, chẳng hạn số 19520, người ta đã viết $XIXmDXX$ (chữ m biểu thị *một nghìn*, m là chữ đầu của từ *mille*, tiếng Latinh là một nghìn). Hãy viết các số sau bằng chữ số La Mã :

7203;121512

Bài 11. Tìm số tự nhiên có tận cùng băng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Bài 12. Tìm số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị là 4 và nếu chuyển chữ số đó lên hàng đầu tiên thì số đó tăng lên gấp 4 lần.

Bài 13 Cho bốn chữ số *a,b,c,d* khác nhau và khác 0. Lập số tự nhiên lớn nhất và số tự nhiên nhỏ nhất có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số ấy. Tổng các chữ số này bằng 11330. Tìm tổng các chữ số $a+b+c+d$.

Bài 14. Cho ba chữ số *a, b, c* sao cho $0<a<b<c$.

a) Viết tập hợp *A* các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số *a, b, c.*

b) Biết tổng hai số nhỏ nhất trong tập hợp *A* bằng 488. Tìm ba chữ số *a, b, c* nói trên.

Bài 15. Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. a) $A=\{4\}$, có một phần tử.

b) $B=\{0;1\}$, có hai phần tử.

c) $C=\varnothing$, không có phần tử nào.

d) $D=\{0\}$ có một phần tử.

e) $E=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots.\}$, có vô số phần tử (E chính là $\mathbb{N}$)

Bài 2.

a) $A=\{97;\ 86;\ 75;\ 64;\ 53;\ 42;\ 31;\ 20\}$.

b) $B=\{300;\ 201;\ 210;\ 102;\ 111;\ 120\}$

Bài 3.

Cách 1: Gọi số phải tìm lad $\overline{abcde}$, ta có phép nhân:

$$\begin{array}{r} \overline{2abcde} \\ \times \quad 3 \\ \hline \overline{abcde2} \end{array}$$

Lần lượt tìm từng chữ số ở số bị nhân từ phải sang trái: $3e$ tận cùng 2 nên $e=4$, ta có $3.4=12$, nhớ 1 sang hàng chục;

$3d+1$tận cùng là 4 nên$d=1$;

$3c$ tận cùng là 1 nên $c=7$, ta có $3.7=21$, nhớ 2 sang hàng nghìn ;

$3a+1$ tận cùng là 5 nên $a=8$, ta có $3.8=24$, nhớ 2 sang hàng trăm nghìn ;

$3.2+2=8.$

Ta được :

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \times \quad 3 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Cách 2. Đặt $\overline{abcde}=x$, ta có $\overline{abcde2}=3.\overline{2abcde}$

Hay $10x+2=3.(200000+x)$

$10x+2=600000+3x$

$7x=599998$

$x=85714$

Số phải tìm là 85714.

Bài 4. $A=\{a,b,c\}$; $B=\{a,b,m,n\}$; $C=\{1;3\}$; $D=\{1;2;3;4\}$.

Bài 5. a) A là tập hợp các số lẻ nhỏ hơn 50.

b) B là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số, các chữ số giống nhau.

c) C là tập hợp các tháng có 31 ngày của năm dương lịch.

Bài 6. a) $\{1\}$; b) $\{3\}$; c) $\{0\}$; d) $\mathbb{N}^*$; e) $\varnothing$.

Bài 7. Có ba đáp số : $a = 13$; $b = 14$ và $a = 13$; $b = 15$ và $a = 14$; $b = 15$.

Bài 8. Có 12 số:

- Chữ số 3 đứng đầu : 3312; 3321; 3213; 3231; 3123; 3132.

- Chữ số 2 đứng đầu : 2133; 2313; 2331.

- Chữ số 1 đứng đầu : 1233, 1323, 1332.

Bài 9. Các số chứa một chữ số X là : IX, XI, XII, $XIII$.

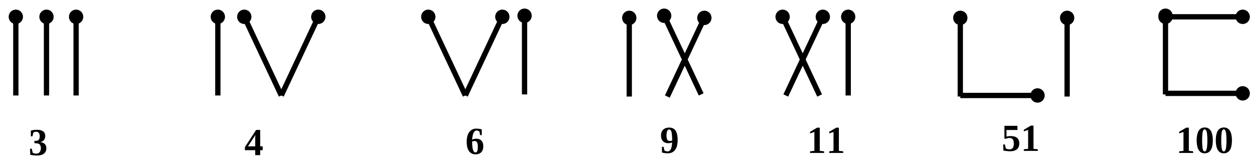
Các số chứa hai chữ số X là: XIX, XXI, $XXII$, $XXIII$.

Các số chứa ba chữ số X là: $XXIX$, $XXXI$, $XXXII$, $XXXIII$.

Số chứa bốn chữ số X là: $XXXIX$.

Tổng cộng có 13 số.

Bài 10. a) Ghi được bảy số:



b) $VIImCCIII$, $CXXImDXII$.

Bài 11. Biểu thị số còn lại sau khi xoá chữ số 3 là một phần thì số phải tìm gồm 10 phần và 3 đơn vị, hiệu của chúng bằng 1992.

Đáp số: Số phải tìm là 2213.

Bài 12. *Đáp số:* 102564.

Bài 13. Giả sử $a > b > c > d > 0$. Số lớn nhất : $\overline{abcd}$, số nhỏ nhất : $\overline{dcba}$.

Xét tổng:

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ + \\ \underline{\ d\ c\ b\ a} \\ 1\,1\,3\,3\,0 \end{array}$$

Lần lượt chứng tỏ: $d + a = 10$, $c + b = 12$. Suy ra: $a + b + c + d = 22$.

Bài 14. a) $A=\left\{\overline{abc},\overline{acb},\overline{bac},\overline{bca},\overline{cab},\overline{cba}\right\}$.

b)

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\ \\ \underline{a\ c\ b} \\ 4\ 8\ 8 \end{array}$$

Xét phép cộng ở cột hàng đơn vị và cột hàng chục, ta thấy $c+b$ không có nhớ.

Do đó : $c+b=8$; $a+a=4$. Suy ra: $a=2$.

Từ $2<b<c$ và $b+c=8$, ta được: $b=3$; $c=5$.

Vậy $a=2$; $b=3$; $c=5$.

Bài 15. Gọi các chữ số phải tìm là a, b, c trong đó $a>b>c>0$. Hai số lớn nhất lập bởi cả ba chữ số trên là $\overline{abc}$ và $\overline{acb}$, ta có $\overline{abc}+\overline{acb}=1444$.

So sánh các cột đơn vị và cột hàng chục, ta thấy phép cộng $c+b$ không có nhớ.

Vậy $c+b=4$, mà $b>c>0$ nên $b=3$, $c=1$.

Xét cột hàng trăm: $a+a=14$ nên $a=7$. Ba chữ số phải tìm là 7, 3, 1.

CHỦ ĐỀ 2:

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ TỰ NHIÊN

1/ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ VÀ CHỮ SỐ

Nội dung và phương pháp:

+) Tập hợp số tự nhiên: N

+) Tập hợp số tự nhiên khác O : (nguyên dương) : N^*

+) Chữ số: 0, 1, 2, 3, …..

+) Phân tích một số tự nhiên theo các chữ số: $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

Ví dụ minh họa:

Bài 1. Cho ba chữ số a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số a, b, c bằng 627. Tính tổng a + b + c?

Lời giải

$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{cb}+\overline{ca}+\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}=627 \Leftrightarrow 33(a+b+c)=627 \Leftrightarrow a+b+c=19.$

Bài 2. Cho ba chữ số a, b, c khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số khác nhau được lập từ ba chữ số đã cho là 418. Tính tổng a + b + c ?

Lời giải

Các số có hai chữ số là: $\overline{ab},\overline{ac},\overline{ba},\overline{bc},\overline{cb},\overline{ca}$

Có : $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{cb}+\overline{ca}=418 \Leftrightarrow 22(a+b+c)=418 \Leftrightarrow a+b+c=19.$

Bài 3. Tìm số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$, thỏa mãn: $\overline{abc}=(a+b+c)^3$

Lời giải

$\overline{abc}=(a+b+c)^3$ ($0 < a \le 9$; $0 \le b,c \le 9$)

Nhận thấy:

$100 \le \overline{abc} \le 999 \Rightarrow 100 \le (a+b+c)^3 \le 999 \Leftrightarrow 5^3 \le (a+b+c)^3 \le 9^3 (hoac < 10^3)$

$\Leftrightarrow 5 \le a+b+c \le 9 \Rightarrow a+b+c=5,6,7,8,9 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 125, 216, 343, 512, 729$

Thử lại ta thấy $\overline{abc}=512.$

Bài 4. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

Lời giải

Gọi số cần tìm là : $\overline{ab}$ ($a \ne 0$; a , $b < 10$)

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được : $\overline{12ab}$

Theo bài ra ta có :

$\overline{12ab}=\overline{ab}.26 \Leftrightarrow 1200+\overline{ab}=\overline{ab}.26(\overline{12ab}=1200+\overline{ab}) \Leftrightarrow \overline{ab}.26-\overline{ab}=1200$

$\Leftrightarrow \overline{ab}.(26-1)=1200 \Leftrightarrow \overline{ab}.25=1200 \Leftrightarrow \overline{ab}=48$

Thử lại : 1248 : 48 = 26.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm một STN có ba chữ số, biết rằng số đó gấp 5 lần tích các chữ số của nó

Bài 2. Tìm số có hai chữ số, biết rằng số mới viết theo thứ tự ngược lại nhân với số phải tìm được 3154, số nhỏ trong hai số đó thì lớn hơn tổng các chữ số của nó là 27.

Bài 3. Tìm số có ba chữ số, biết rằng số đó vừa chia hết cho 5 vừa chia hết cho 9, hiệu giữa số đó với số viết theo thứ tự ngược lại = 297.

Bài 4. Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho?

Bài 5. Tìm $\overline{abcd}$, biết : $(\overline{ab}.c+d).d=1977$

Bài 6. Tìm các chữ số a, b , c thỏa mãn:

a. $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{abc}$ b. $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$

Bài 7. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Bài 8. Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Bài 9. Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Bài 10. Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Bài 11. Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Bài 12. Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Bài 13. Một học sinh nhân một số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng một cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân?

Bài 14. Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi?

Bài 15. Khi chia một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, ta được thương là 2 và còn dư. Nếu xóa một chữ số ở số bị chia và xóa một chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 2 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

Bài 16. Một số có 3 chữ số, tận cùng bằng chữ số 7. Nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì ta được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó

Bài 17. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp 4 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó

Bài 18. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần

Bài 19. Cho hai số có 4 chữ số và 2 chữ số mà tổng của hai số đó bằng 2750. Nếu cả hai số được viết theo thứ tự ngược lại thì tổng của hai số này bằng 8888 . Tìm hai số đã cho

Bài 20. Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó . Tìm số ấy

Bài 21. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó vừa chia hết cho 5 và chia hết cho 9 , hiệu giữa số đó với số viết theo thứ tự ngược lại bằng 297.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Gọi số phải tìm là : $\overline{abc}(0 < a \le 9; 0 \le b, c \le 9)$

$$\overline{abc} = 5.a.b.c \Rightarrow a, b, c \ne 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0(loai) \\ c = 5 \Rightarrow \overline{ab5} = 25\overline{ab}(1) \end{array}\right.$$

Số có ba chữ số chia hết cho 25 khi $\overline{b5} \vdots 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 7 \end{array}\right.$

Ta có: VT (1) là lẻ nên VP lẻ suy ra b = 2 (loại) $\Rightarrow b = 7 \Rightarrow \overline{a75} = 25.a.7 = 175a \Rightarrow a = 1$

Bài 2.

Gọi số phải tìm là : $\overline{ab}(a \ne 0; a, b \le 9; a, b \in N) \Rightarrow$ số sau là : $\overline{ba}$, giả sử $\overline{ab} > \overline{ba}$, ta có :

$\overline{ba} - (b + a) = 27 \Leftrightarrow 10b + a - b = 27 \Leftrightarrow b = 3$, mà : $\overline{a3}.\overline{3a} = 3154$

Suy ra 3,a có tận cùng là 4 suy ra a = 8.

Thử lại : 83 . 38 = 3154 và 38 – (3 + 8) = 27.

Bài 3.

Gọi số cần tìm là : $\overline{abc}$, số viết theo thứ tự ngược lại là :

$\overline{cba}(a \ne 0; a, b, c < 10; a, b, c \in N)$

Theo đầu bài ta có : $\overline{abc} - \overline{cba} = 297 \Rightarrow a > c$

Mà : $\overline{abc} - \overline{cba} = 297 \Rightarrow a - c = 3 \Rightarrow a = c + 3$

Vì : $\overline{abc} \vdots 5 \Rightarrow c = 0; c = 5$

+) c = 0 nên a = 3, mà $\overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow \overline{3b0} \vdots 9 \Rightarrow b = 6$, thử lại : 360 – 63 = 297.

+) c = 5 nên a = 8, $\overline{8b5} \vdots 9 \Rightarrow b = 5$, thử lại: 855 – 558 = 297

Vậy có hai số cần tìm: 360 và 855.

Bài 4.

Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}(a \ne 0; a, b \in N; a, b < 10)$

Theo bài ra ta có : $\overline{ab} = (a - b).18 + 4 \Leftrightarrow 10a + b = 18a - 18b + 4 \Rightarrow 19b = 8a + 4$

Vì 8a + 4 là số chẵn nên b chẵn suy ra b = 0, 2, 4, 6, 8

+) b = 0 nên 8a + 4 = 0 (vô lý)

Tương tự : b = 4 , a = 9 thỏa mãn. Vậy số cần tìm là: 94

Bài 5.

Có : $(\overline{ab}.c+d)=1977:d$. Vì $\overline{ab}.c+d$ là STN nên 1977 STN chia hết cho d suy ra d là STN lẻ

Do đó d = 1,3,5,7,9 , vì thế d = 1 hoặc d = 3

+) d = 1 suy ra $\overline{ab}.c=1976 \Rightarrow \overline{ab}$ là số có 3 chữ số (Loại)

+) d = 3suy ra $\overline{ab}.c+3=1977 \Rightarrow \overline{ab}.c=656 \Rightarrow \overline{ab}=656:c$

Vì $\overline{ab}$ có hai chữ số nên c > 6 suy ra c = 7,8,9

Nhưng do 656 không chia hết cho 7 ; 656 không chia hết cho 9 suy ra c = 8

Thử lại: $\overline{ab}=656:8=82$ và (82.8 + 3). 3 = 1977 Suy ra $\overline{abcd}=8283$

Bài 6.

a. $\overline{abc}=11(a+b+c) \Leftrightarrow 100a+10b+c=11a+11b+11c \Leftrightarrow b+10c=89a \le 99$

$\Rightarrow a=1 \Rightarrow b=9; c=8(do: b+10c \le 99)$

b. $111a+111b+111c+d=4321 \Rightarrow 4321>1111a \Rightarrow a<4$

$1111a \ge 3214(b,c,d=9) \Rightarrow a=3$

Ta có: 111b + 11c + d = 988 nên b = 8

11c + d = 100 nên c = 9 ; d = 1.

Bài 7.

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}$ (a khác 0)

Theo bài ra ta có: $\overline{abcde2}=3.\overline{2abcde} \Rightarrow 10.\overline{abcde}+2=3.200000+3.\overline{abcde}$

$\Rightarrow 7.\overline{abcde}=599998$

$\Rightarrow \overline{abcde}=85714$

Thử lại: $857142=3.285714$

Vậy số cần tìm là 857142.

Bài 8.

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}, (a \ne 0)$

Theo bài ra ta có: $\overline{abc3}-1992=\overline{abc} \Rightarrow 10.\overline{abc}+3-1992=\overline{abc} \Rightarrow 9.\overline{abc}=1989 \Rightarrow \overline{abc}=221$

Vậy số cần tìm là 2213.

Bài 9.

Gọi ba chữ số cần tìm là a,b,c $(a>b>c>0)$.

Theo bài ra ta có:

$\overline{abc}+\overline{acb}=1444$

$100a+10b+c+100a+10c+b=1444$

$200a+11b+11c=1444$

$200a+11(b+c)=1400+11.4$

$a=7;b=3;c=1$.

Vậy 3 số cần tìm là: $1;3;7$.

Bài 10.

Gọi 2 số đó là $a,b \;\; (a>b)$

Theo bài ra ta có: $a-b=4 \Rightarrow b=a-4 \qquad (1)$

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60

$\Rightarrow 3a-b=60 \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có:

$3a-(a-4)=60 \Rightarrow 3a-a+4=60 \Rightarrow 2a=56 \Rightarrow a=28 \Rightarrow b=24 \Rightarrow$ Vậy số cần tìm là $28,24$.

Bài 11.

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1):2=3$ (phần).

Số bé là: $5-3=2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích = Số lớn x Số bé

Tích = 12 x Số bé

Số lớn là 12.

Số bé là: $12:3\text{x}\,2=8$

Bài 12.

Gọi thừa số được giảm là a, thừa số còn lại là b.

Theo đề bài ta có:

$a.b=6210$; $(a-7).b=5265 \Rightarrow a.b-7.b=5265 \Rightarrow 6210-7.b=5265 \Rightarrow 7.b=6210-5265$
$\Rightarrow 7.b=945$

$\Rightarrow b=945:7=135 \Rightarrow a=6210:135=46$

Vậy hai thừa số cần tìm là $46,135$.

Bài 13.

Do đặt sai vị trí các tích riêng nên bạn học sinh đó chỉ nhân số bị nhân với $4+6+3$.

Vậy số bị nhân bằng: $30524:13=2348$.

Bài 14.

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d . Ta có:

$a : b = c$ (dư d) $\Rightarrow a = c.b + d$; $(a+15):(b+5) = c$ (dư d) $\Rightarrow a+15 = c.(b+5)+d$

$\Rightarrow a+15 = c.b + c.5 + d$

Mà $a = c.b + d$ nên: $a+15 = c.b + c.5 + d$ $= c.b + d + 15 = c.b + c.5 + d$ $\Rightarrow 15 = c.5$ $\Rightarrow c = 3$.

Bài 15.

Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaa}$, số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$ số dư lúc đầu là r .

Ta có: $\overline{aaa} = 2.\overline{bbb} + r$ (1)

$\overline{aa} = 2.\overline{bb} + r - 100$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overline{aaa} - \overline{aa} = 2.(\overline{bbb} - \overline{bb}) + 100$

$\Rightarrow \overline{a00} = 2.\overline{b00} + 100$

$\Rightarrow a = 2b + 1$

Ta có:

b	1	2	3	4
a	3	5	7	9

Thử từng trường hợp ta được 3 đáp số:

555 và 222; 777 và 333; 999 và 444.

Bài 16.

Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị.

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là số hàng trăm.

Theo đề bài ta có: $\overline{7ab} : \overline{ab7} = 2$ dư 21

Hay: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$

Ta có: $\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c$ => $700 + \overline{ab} = 2(10\overline{ab} + 7) + 21$ =>

$700 + \overline{ab} = 20\overline{ab} + 14 + 21$

=> $700 - 14 - 21 = 20\overline{ab} - \overline{ab}$ => $665 = 19\overline{ab}$ => $\overline{ab} = 35$.

Vậy số tự nhiên có ba chữ số đó là: 357 .

Cách 2:

Gọi số phải tìm là $\overline{ab7}$, theo đề bài ta có: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$ => $2.\overline{ab7} + 21 = \overline{7ab}$

=> $2(100a + 10b + 7) = 700 + 10a + b$ => $200a + 20b + 28 = 700 + 10ab$ => $190a + 19b = 665$

=> $10a + b = 35$

Bài 17.

Gọi số tiền có năm chữ số là: $\overline{abcde}$

Theo đề bài: $\overline{7abcde} = 4.\overline{abcde7}$

Ta có: $\overline{7abcde} = 700000 + \overline{abcde}; 4.\overline{abcde7} = 4.(10.\overline{abcde} + 7)$

$\Rightarrow \overline{7abcde} = 4.\overline{abcde7}$ $\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 4.(10.\overline{abcde} + 7)$ $\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 40.\overline{abcde} + 28$

$\Rightarrow 700000 - 28 = 40.\overline{abcde} - \overline{abcde}$ $\Rightarrow 6999972 = 39.\overline{abcde}$

Bài 18.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$. Viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và bên phải ta được: $\overline{2ab2}$, số đo tăng lên gấp 36 lần.

=> $\overline{2ab2} = 36.\overline{ab}$ => 2000 + 10$\overline{ab}$ + 2 = 36$\overline{ab}$ => 26$\overline{ab}$ = 2002 => $\overline{ab}$ = 77

Bài 19.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ và $\overline{xy}$

Ta có: $\overline{abcd} + \overline{xy} = 2750$ (1)

$\overline{dcba} + \overline{yx} = 888$ (2)

Cả 2 phép cộng đều không nhớ sang hàng nghìn nên từ (1) ta có $a = 2$, (2) $d = 8$.

Cùng từ (1) ta có $d + y$ có tận cùng $= 0$, mà $d = 8$ nên $y = 2$

Từ (2) ta có $a + x$ có tận cùng $= 8$ mà $a = 2$ nên $x = 6$

Từ (1) ta có $x + c + 1$ có tận cùng là 5 mà $x = 6$ nên $c = 8$

Từ (2) ta có $b + y$ có tận cùng $= 8$ mà $y = 2$ nên $b = 6$.

Vậy số đó là 2688 và 62.

Bài 20.

Số cần tìm là $\overline{ab}$, viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta có số $\overline{a0b}$

Ta có: $\overline{a0b}$ = 9$\overline{ab}$ => 100a + b = 9(10a + b)

=> 10a = 8b ⋮ 8 => a = 4 hoặc a = 8

Vì 0 < b ≤ 9 => a = 4 và b = 5

=> Số cần tìm là 45

Bài 21.

Số cần tìm là $\overline{abc}$. Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{cba}$

Ta có: $\overline{abc}$ ⋮ {5, 9} => c = {0, 5}

Vì viết theo thứ tự ngược lại để được số $\overline{cba}$ => c = 5

Ta có: $\overline{ab5}$ và $\overline{5ba}$

Ta có $\overline{ab5}$ - $\overline{5ba}$ = 297 => 100a + 10b + 5 - (500 + 10b + a) = 297

=> 99a = 792 => a = 8

=> Có số $\overline{8b5}$ mà số này ⋮ 9 => 800 + 10b + 5 = 805 + 10b ⋮ 9 => b = 5

Vậy số cần tìm là $\overline{855}$

2/ CÁC BÀI TOÁN ĐẾM SỐ

Nội dung và phương pháp:

- Liệt kê: Các phần tử thỏa mãn điều kiện cho trước ta dùng phương pháp đếm đối với các bài toán ít phần tử.

- Dựa vào quy luật hình thành các phần tử để đếm (Chia hết cho 2 , 3 , … hoặc thỏa mãn điều kiện nào đó)

Ví dụ minh họa:

Bài 1. a. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số có chứa đúng một số 4?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số có chứa đúng 2 chữ số 4? (các chữ số không nhất thiết phải khác nhau)

Lời giải

a. Số có 3 chữ số và chứa đúng một số 4 có dạng: $\overline{ab4}, \overline{a4b}, \overline{4ab} (0 \le a \le 9; a, b \ne 4)$

Số có 3 chữ số thỏa mãn là:

Dạng : $\overline{ab4}$: có 8.9 = 72 số . Dạng $\overline{a4b}$ có : 8.9.= 72 số . Dạng $\overline{4ab}$ có 9.9 = 81 số

b. Gợi ý: $\overline{a44}(0 < a \le 9); \overline{4a4}; \overline{44a}(0 \le a \le 9), a \ne 4$ có 8 + 9 + 9 = 26 số thỏa mãn.

Bài 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Lời giải

Các số phải đếm có dạng $\overline{abc2}$

Chữ số a có 9 cách chọn

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn $(1,3,5,7,9)$ để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9.10.5 = 450$ số.

Bài 3. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Lời giải

Chia ra 3 loại số:

- Số đếm có dạng: $\overline{5ab}$: chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9.9 = 81$ số.

- Số điểm có dạng $\overline{a5b}$: chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ số.

- Số đếm có dạng $\overline{ab5}$: các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ số.

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81+72+72=225$ số.

Bài 4. Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Lời giải

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tắt c/s).

Từ trang 10 đến trang 99 phải dùng $(99-10)+1=90$ số có $2c/s=180c/s$.

Vì còn các trang gồm các số có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Còn lại: $1998-(180+9)=1809$ c/s là đánh dấu các trang có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Có: $1809:3=603$ số có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Cuốn sách đó có: $603+99=702$ (vì trang $1\to 99$ có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của 374.

Bài 5. Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

$\overline{4bc}$ có $9.9=81$ số

$\overline{a4c}$ có $8.9=72$ số

$\overline{ab4}$ có $8.9=72$ số

Tất cả có: $81+72+72=225$ số.

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng: $\overline{44c},\overline{a44},\overline{4b4}$, có 26 số.

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9=72$ số.

Vậy có $180-72=108$ số phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a+b=3k$ thì $c=0;3;6;9$, nếu $a+b=3k+1$ thì $c=2;5;8$.

Nếu $a+b=3k+2$ thì $c=1;4;7$, có $8.9.3=216$ số.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Bài 2. Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A.

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

b) Tính tổng các chữ số của số A?

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Bài 3. Từ các chữ số $1,2,3,4$, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng một lần. tính tổng các số ấy.

Bài 4. Có bao nhiêu số $\overline{abcd}$ mà $\overline{ab}<\overline{cd}$?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005 ; 1035; 1065; ....; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

=> Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là:

(9975 – 1005) : 30 + 1 = 300 số

Bài 2.

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: $1.9=9$ chữ số

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90.2=180$ chữ số

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900.3=2700$ chữ số

Số A có: $9+180+2700=2889$ chữ số.

b) Tính tổng các chữ số của số A?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của $A.B$ có: $3.1000=3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000:100=300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$(0+1+2+...+9).300=45.300=13500$

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 1 dãy: $1,2,3,...,999\,(1)$

Ta xét dãy: $000, 001, 002, ..., 999$ (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3.1000 : 10 = 300 \text{ (lần)}.$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);
- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);
- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300 - 111 = 189$ (lần).

Bài 3.

Ta lập được $4.3.2.1 = 24$ số tự nhiên bao gồm cả bốn chữ số $1, 2, 3, 4$. Mỗi chữ số có mặt 6 lần ở mỗi hàng. Tổng của 24 số nói trên bằng: $60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660$.

Bài 4.

Xét các trường hợp:

Nếu $\overline{ab} = 10$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng: $11, 12, ..., 99$ có 89 số.

Nếu $\overline{ab} = 11$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng: $12, 13, ..., 99$ có 88 số.

……………………..

Nếu $\overline{ab} = 97$ thì $\overline{cd}$ có thể bằng: $98, 99$ có 2 số.

Nếu $\overline{ab} = 98$ thì $\overline{cd}$ bằng: 99 có 1 số.

Vậy có tất cả: $1 + 2 + 3 + ... + 89 = 4005$ (số).

CHỦ ĐỀ 3:

CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

* Luỹ thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a..a.a.a.a....a$ (n thừa số a với $a \in \mathbb{Q}$).

Qui ước: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ và $a^1 = a$.

* Các phép tính luỹ thừa:

- Nhân hai luỹ thưa cùng cơ số: $a^m.a^n = a^{m+n}$.

- Chia hai luỹ thừa cùng cơ số : $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0;\ m \geq n)$.

- Luỹ thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n$.

- Luỹ thừa của một thương: $(a : b)^n = a^n : b^n (b \neq 0)$.

- Luỹ thừa của luỹ thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$.

- Luỹ thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

Ví dụ: $3^{2^3} = 3^8$.

- Luỹ thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

Ví dụ: $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3}$.

B/ CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA

I/ Phương pháp 1:

Cơ sở phương pháp: Để so sánh hai luỹ thừa ta thường đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

- Nếu 2 luỹ thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$a^m > a^n$ $(a > 1) \Leftrightarrow m > n$

- Nếu 2 luỹ thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn .

$a^n > b^n$ $(n > 0) \Leftrightarrow a > b$

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** So sánh các lũy thừa sau:

a) 128^7 và 4^{24} b) 81^8 và 27^{11}

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì 128 và 4 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 2, ở câu b) thì 81 và 27 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Hướng dẫn giải

a) Có : $\left.\begin{array}{l} 128^7 = (2^7)^7 = 2^{49} \\ 4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48} \end{array}\right\} \Rightarrow 128^7 > 4^{24}$

b) Có $\left.\begin{array}{l}81^8 = 3^{32}\\ 27^{11} = 3^{33}\end{array}\right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$

★**Thí dụ 2.** So sánh các lũy thừa sau:

a) 5^{36} và 11^{24} b) 32^{60} và 81^{50} c) 3^{500} và 7^{300}

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 12, ở câu b) và c) các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Hướng dẫn giải

a) Có $\left.\begin{array}{l}5^{36} = 125^{12}\\ 11^{24} = 121^{12}\end{array}\right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$

b) Có $\left.\begin{array}{l}32^{60} = 2^{300} = 8^{100}\\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100}\end{array}\right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$

c) Có $\left.\begin{array}{l}3^{500} = 243^{100}\\ 7^{300} = 343^{100}\end{array}\right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$

★**Thí dụ 3.** So sánh các lũy thừa:

a) 3^{2n} và 2^{3n} $(n \in N^*)$. b) 2^{100} và 3^{200}. c) 5^{100} và 3^{500}.

Hướng dẫn giải

a) $3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n; 2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n$

Vì $9 > 8 \Rightarrow 3^2 > 2^3 => (3^2)^n > (2^3)^n$

b) $2^{100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

c) $5^{300} = \left(5^3\right)^{100} = 125^{100}$ và $3^{500} = \left(3^3\right)^{100} = 243^{100}$

Vì $125^{100} < 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$.

✍ **Lời bình:** Qua ba ví dụ trên ta thấy rằng, trước khi so sánh hai lũy thừa với nhau trước hết ta cần làm hai việc sau:

+ Kiểm tra cơ số xem các cơ số có biến đổi được về cùng cơ số không.

+ Kiểm tra số mũ của các lũy thừa xem có ước chung lớn nhất không.

Việc làm này sẽ giúp chúng ta lựa chọn đúng phương pháp so sánh.

II/ Phương pháp 2:

Cơ sở phương pháp: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

A > B và B > C thì A > C

A.C < B.C (với C > 0) ⇔ A < B

C/ Các dạng toán thường gặp.

Dạng 1: So sánh hai số lũy thừa.

★**Thí dụ 1.** Hãy so sánh:

a) 107^{50} và 73^{75}.   b) 2^{91} và 5^{35}.

Phân tích: Trong câu a) mặc dù số mũ của hai lũy thừa có ước chung là 25, tuy nhiên khi đó cơ số sẽ là 73^3 và 107^2, các cơ số này khi tính ra sẽ rất lớn, do đó việc đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ sẽ không khả quan. Còn trong câu b) cả số mũ và cơ số đều không có ước chung nên cũng không thể áp dụng các phương pháp trong các ví dụ trên. Như vậy chúng ta chỉ còn cách lựa chọn dùng tính chất bắc cầu (so sánh qua lũy thừa trung gian).

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $107^{50} < 108^{50} = (4.\ 27)^{50} = 2^{100}.\ 3^{150}$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.\ 9)^{75} = 2^{225}.\ 3^{150}$$

Vì $2^{100} < 2^{225} \Rightarrow 2^{100}.3^{150} < 2^{225}.3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$.

b) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18}$

$$5^{35} < 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

Vì $32^{18} > 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$.

★**Thí dụ 2.** Hãy so sánh:

a) 107^{50} và 73^{75} b) 2^{91} và 5^{35}

c) 54^4 và 21^{12} d) 9^8 và 8^9

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $107^{50} < 108^{50} = 2^{100}.3^{150}$ và $73^{75} > 72^{75} = 2^{225}.3^{150}$ nên $107^{50} < 73^{75}$

b) Ta có : $2^{91} = \left(2^{13}\right)^7 = 8192^7$ và $5^{35} = \left(5^5\right)^7 = 3125^7$ nên $2^{91} > 5^{35}$

c) Ta có : $54^4 = \left(2.27\right)^4 = 2^4.3^{12}$ và $21^{12} = 3^{12}.7^{12}$ nên $54^4 < 21^{12}$

d) Ta có : $9^8 < 10^8 = 100^4 = 100.100^3$

Và $8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3.100^3 = 125.100^3$ nên $9^8 < 8^9$

✍ **Lời bình:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp ta nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

* Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật ......

* Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thữa ở phần B.

** Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của luỹ thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của luỹ thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.*

Với a, n, m, K $\in N^*$. *Ta có:*

- Nếu $m > n$ *thì* $K - \dfrac{a}{m} > K - \dfrac{a}{n}$ *và* $K + \dfrac{a}{m} < K + \dfrac{a}{n}$

- Nếu $m < n$ *thì* $K - \dfrac{a}{m} < K - \dfrac{a}{n}$ *và* $K + \dfrac{a}{m} > K + \dfrac{a}{n}$

(còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)

* Với biểu thức là tổng các số $\dfrac{1}{a^2}$ (với $a \in N^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

★**Thí dụ 1.** Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$. So sánh S với 5.2^8.

Phân tích: Trước khi so sánh biểu thức S với 5.2^8 ta cần dùng phương pháp tính tổng theo quy luật để tính S. Để làm việc này ta cần nhân 2 vào hai vế của biểu thức S, sau đó tính hiệu $2S - S$ thì sẽ triệt tiêu được các số hạng giống nhau và tính được S.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$

$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^9 + 2^{10}$

$\Rightarrow 2.S - S = S = 2^{10} - 1$

Mà $2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8.2^2 = 4.2^8$

$\Rightarrow S < 5.2^8$.

Lời bình: Để tính tổng S ta cần dùng phương pháp tính tổng của biểu thức tổng quát sau: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n \ (a \in N^*)$.

★Thí dụ 2. So sánh 2 biểu thức A và B trong từng trường hợp:

a) $A = \dfrac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \dfrac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$.

b) $C = \dfrac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$ và $D = \dfrac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$.

Phân tích:

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa luỹ thừa cơ số 10, nên ta so sánh $10A$ và $10B$.

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa luỹ thừa cơ số 2 nên ta so sánh $\dfrac{1}{2}C$ và $\dfrac{1}{2}D$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$$

$$\Rightarrow 10A = 10.\left(\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}\right) = \frac{10^{16}+10}{10^{16}+1} = \frac{10^{16}+1+9}{10^{16}+1} = 1 + \frac{9}{10^{16}+1}.$$

$$B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$$

$$\Rightarrow 10B = 10.\left(\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}\right) = \frac{10^{17}+10}{10^{17}+1} = \frac{10^{17}+1+9}{10^{17}+1} = 1 + \frac{9}{10^{17}+1}.$$

Vì $10^{16}+1 < 10^{17}+1$ nên $\dfrac{9}{10^{16}+1} > \dfrac{9}{10^{17}+1}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16}+1} > 1 + \frac{9}{10^{17}+1}$$

$\Rightarrow 10A > 10B$ hay $A > B$.

b) Ta có:

$$C=\frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}\right)=\frac{2^{2008}-3}{2^{2008}-2}=\frac{2^{2008}-2-1}{2^{2008}-2}=1-\frac{1}{2^{2008}-2}.$$

$$D=\frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}D=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}\right)=\frac{2^{2007}-3}{2^{2007}-2}=\frac{2^{2007}-2-1}{2^{2007}-2}=1-\frac{1}{2^{2007}-2}.$$

Vì $2^{2008}-2>2^{2007}-2$ nên $\dfrac{1}{2^{2008}-2}<\dfrac{1}{2^{2007}-2}$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^{2008}-2}>1-\frac{1}{2^{2007}-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C>\frac{1}{2}D \text{ hay } C>D.$$

Lời bình: Đôi khi để so sánh hai biểu thức với nhau, ta cần biến đổi hai biểu thức về dạng tổng hai số hạng, trong đó có một số hạng chung và khi đó ta chỉ cần so sánh số hạng riêng.

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.

* Với các số tự nhiên m, x, p và số dương a.

+ Nếu $a>1$ thì:

$$a^m<a^x<a^p \Rightarrow m<x<p.$$

+ Nếu $a<1$ thì:

$$a^m<a^x<a^p \Rightarrow m>x>p.$$

* Với các số dương a, b và số tự nhiên m, ta có:

$$a^m<b^m \Rightarrow a<b.$$

★Thí dụ 1. Tìm các số nguyên n thoã mãn: $3^{64}<n^{48}<5^{72}$.

Hướng dẫn giải

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64}<n^{48}$ và $n^{48}<5^{72}$.

Ta có: $n^{48}>3^{64}\Rightarrow \left(n^3\right)^{16}>\left(3^4\right)^{16}\Rightarrow \left(n^3\right)^{16}>81^{16}\Rightarrow n^3>81$

$\Rightarrow n>4$ (với $n\in\mathbb{Z}$) (1).

Mặt khác $n^{48} < 5^{72} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < \left(5^3\right)^{24} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$

$\Rightarrow -11 \le n \le 11$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \le 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

Lời bình: Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:

Bài số 1: Tìm tổng các số nguyên n thoã mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là:

$$5+6+7+8+9+10+11=56.$$

Bài số 2: Tìm tất cả các số nguyên có một chữ số sao cho: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là: 5; 6; 7; 8; 9.

Bài số 3: Tìm tất cả các số nguyên có 2 chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoã mãn là: 10; 11.

★Thí dụ 2. Tìm x thuộc N. Biết:

a) $16^x < 128^4$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100............0}_{18 \text{ chu so } 0} : 2^{18}$.

Hướng dẫn giải

a) $16^x < 128^4 \Rightarrow \left(2^4\right)^x < \left(2^7\right)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$

$\Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100............0}_{18 \text{ chu so } 0} : 2^{18}$

$\Rightarrow 5^{3x+3} \le 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \le 5^{18} \Rightarrow 3x+3 \le 18 \Rightarrow x \le 5$

$\Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Dạng 4: Một số bài toán khác.

★Thí dụ 1. Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1 ; 2 ; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

Hướng dẫn giải

Bài toán xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Không dùng luỹ thừa thì số lớn nhất viết được là 321.

Trường hợp 2: Dùng luỹ thừa để viết: (Bỏ qua trường hợp cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các luỹ thừa tầng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các luỹ thưa có số mũ là một chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $13^2, 31^2, 12^3, 21^3$, trong các số này số lớn nhất là 21^3.

* Xét các luỹ thưa mà số mũ có hai chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $2^{13}, 2^{31}, 3^{12}, 3^{21}$, nhận xét các số này như sau:

$$3^{21} = 3.3^{20} = 3.(3^2)^{10} = 3.9^{10},$$

$$2^{31} = 2.2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2.8^{10},$$

do đó trong các số này thì số lớn nhất là 3^{21}.

So sánh 3^{21} và 21^3:

$$3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$$

Vậy số lớn nhất viết được là số 3^{21} .

★Thí dụ 2.

a) Số 5^8 có bao nhiêu chữ số ?

b) Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

Phân tích: So sánh lũy thừa với một số luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000.$$

Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b) Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được $(a+b)$ chữ số.

Vì $10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a$ và $10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$

$\Rightarrow 10^{a-1}.10^{b-1} < 2^{2003}.5^{2003} < 10^{a}.10^{b}$

$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}$.

Do đó: $2003 = a+b-1 \Rightarrow a+b = 2004$.

Vậy số đó có 2004 chữ số.

★**Thí dụ 2.** Tìm số 5các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a) $n = 8^{3}.\ 15^{5}$.

b) $m = 4^{16}.\ 5^{25}$.

Phân tích: Nhóm các luỹ thừa thích hợp nhằm làm xuất hiện luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$n = 8^{3}.\ 15^{5} = \left(2^{3}\right)^{3}.\left(3.5\right)^{5} = 2^{9}.\ 3^{5}.\ 5^{5}$$
$$= 2^{4}.\ 3^{5}.\left(2.5\right)^{5} = 16.243\ .10^{5} = 3888.\ 10^{5}.$$

Số 3888.10^{5} gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy số n có 9 chữ số.

b) Ta có:

$$m = 4^{16}.\ 5^{25} = \left(2^{2}\right)^{16}.\ 5^{25}$$
$$= 2^{32}.5^{25} = 2^{7}.\left(2^{25}.5^{25}\right) = 128.10^{25}.$$

Số 128.10^{25} gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.

Vậy số m có 28 chữ số.

C/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1. So sánh:

a) 243^{5} và 3.27^{5} . c) 625^{5} và 125^{7} .

Bài 2: So sánh:

e) 99^{20} và 9999^{10}. b) 3^{500} và 7^{300}.

d) 202^{303} và 303^{202}. e) 11^{1979} và 37^{1320}.

Bài 3: So sánh:

c) 8^{5} và 3.4^{7}. f) 10^{10} và 48.50^{5}.

i) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ và 3.24^{10}. g) $1990^{10}+1990^{9}$ và 1991^{10}.

Bài 4: So sánh các số sau: 199^{20} và 2003^{15}.

Bài 5: So sánh:

a) $78^{12}-78^{11}$ và $78^{11}-78^{10}$.

b) $A=72^{45}-72^{44}$ và $B=72^{44}-72^{43}$.

Bài 6: So sánh các số sau: 3^{39} và 11^{21}.

Bài 7. Chứng tỏ rằng: $5^{27}<2^{63}<5^{28}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $2^{1995}<5^{863}$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $2^{1999}<7^{714}$.

Bài 10. So sánh: 3^{200} và 2^{300}.

Bài 11: So sánh: 71^{50} và 37^{75}.

Bài 12: So sánh các số:

a) 50^{20} và 2550^{10}.

b) 999^{10} và 999999^{5}.

Bài 13: Viết theo từ nhỏ đến lớn: $2^{100};3^{75}$ và 5^{50}.

Bài 14: So sánh 2 số: 1234^{56789} và 56789^{1234}.

Bài 15: Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0. Hãy so sánh m với 10.9^{8}.

Bài 16: Cho $A=1+2012+2012^{2}+2012^{3}+2012^{4}+\dots+2012^{71}+2012^{72}$ và $B=2012^{73}-1$. So sánh A và B.

Bài 17: So sánh hai biểu thức: $B=\dfrac{3^{10}.11+3^{10}.5}{3^{9}.2^{4}}$ và $C=\dfrac{2^{10}.13+2^{10}.65}{2^{8}.104}$.

Bài 18: So sánh: $M=\dfrac{3}{8^{3}}+\dfrac{7}{8^{4}}$ và $N=\dfrac{7}{8^{3}}+\dfrac{3}{8^{4}}$.

Bài 19: So sánh M và N biết: $M=\dfrac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$ và $N=\dfrac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$.

Bài 20: So sánh $\dfrac{1}{101^{2}}+\dfrac{1}{102^{2}}+\dfrac{1}{103^{2}}+\dfrac{1}{104^{2}}+\dfrac{1}{105^{2}}$ và $\dfrac{1}{2^{2}.3.5^{2}.7}$.

Bài 21: So sánh $A=\left(\frac{1}{2^2}-1\right).\left(\frac{1}{3^2}-1\right).\left(\frac{1}{4^2}-1\right)......\left(\frac{1}{100^2}-1\right)$ và $-\frac{1}{2}$.

Bài 22: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3<3^n\le 234$.

b) $8.16\ge 2^n\ge 4$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $4^{15}.\,9^{15}<2^n.\,3^n<18^{16}.\,2^{16}$.

Bài 24: Cho $A=3+3^2+3^3+....+3^{100}$. Tìm số tự nhiên n, biết $2A+3=3^n$.

Bài 25: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m-2^n=256$.

Bài 26: Tìm số nguyên dương n biết:

a) $64<2^n<256$.

b) $243>3^n\ge 9$.

Bài 27: Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200}<6^{300}$.

Bài 28: Tìm $n\in N$ biết:

a) $32<2^n<512$.

b*) $3^{18}<n^{12}\le 20^8$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Định hướng tư duy: Nhận thấy, ở câu a) thì 243 và 27 là các cơ số liên quan tới lũy thừ cơ số 3, ở câu b) thì 625 và 125 liên quan tới lũy thừa cơ số 5. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta có: $243^5=\left(3^5\right)^5=3^{25}$; $3.27^5=3.\left(3^3\right)^5=3.3^{15}=3^{16}$

Vì $3^{16}<3^{25}\Rightarrow 3.27^5<243^5$.

b) $625^5=(5^4)^5=5^{20};125=(5^3)^7=5^{21}$

Vì $5^{21}>5^{20}\Rightarrow 125^7>625^5$.

Bài 2:

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ 10, ở câu b) thì các lũy thừa có chung số mũ 100, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 101, ở câu d) các lũy thừa có chung số mũ 660. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta thấy: $99^{20}=\left(99^2\right)^{10}=\left(99.99\right)^{10}; 9999^{10}=\left(99.101\right)^{10}$

Vì $\left(99.99\right)^{10}<\left(99.101\right)^{10}\Rightarrow 99^{20}<9999^{10}$.

b) Ta có : $3^{500}=\left(3^5\right)^{100}=243^{100}$, $7^{300}=\left(7^3\right)^{100}=343^{100}$.

Vì $243^{100}<343^{100}$ nên $3^{500}<7^{300}$.

c) Ta có:

$$202^{303}=\left(2.101\right)^{3.101}=\left(2^3.101^3\right)^{101}=\left(8.101.101^2\right)^{101}=\left(808.101\right)^{101}$$

$$303^{202}=\left(3.101\right)^{2.101}=\left(3^2.101^2\right)^{101}=\left(9.101^2\right)^{101}$$

Vì $808.101^2>9.101^2$ nên $202^{303}>303^{202}$.

d) Ta có:

$$11^{1979}<11^{1980}=\left(11^3\right)^{660}=1331^{660} \qquad (1)$$

$$37^{1320}=\left(37^2\right)^{660}=1369^{660} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979}<37^{1320}$.

Bài 3:

a) Ta có: $8^5=2^{15}=2.2^{14}$, $3.4^7=3.2^{14}$

Vì $2<3\Rightarrow 2.2^{14}<3.2^{14}\Rightarrow 8^5<3.4^7$.

b) Ta có :

$$10^{10}=2^{10}.\,5^{10}=2.\,2^9.\,5^{10},\ 48.\,50^5=\left(3.\,2^4\right).\,\left(2^5.\,5^{10}\right)=3.\,2^9.\,5^{10}$$

Vì $2<3\Rightarrow 2.\,2^9.\,5^{10}<3.\,2^9.\,5^{10}\Rightarrow 10^{10}<48.\,50^5$.

c) Ta có: $4^{30}=(2^2)^{30}=(2.2)^{30}=2^{30}.2^{30}=(2^3)^{10}.(2^2)^{15}=8^{10}.4^{15}$,

$24^{10}.3=(8.3)^{10}.3=8^{10}.3^{10}.3=8^{10}.3^{11}$

Vì $3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10}.3^{11} < 8^{10}.4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

$\Rightarrow 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}$.

d) Ta có :

$1990^{10} + 1990^{9} = 1990^{9}.(1990+1) = 1991.\ 1990^{9}$

$1991^{10} = 1991.\ 1991^{9}$

Vì $1990^{9} < 1991^{9}$ nên $1990^{10} + 1990^{9} < 1991^{10}$.

Bài 4:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)20 = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

Vì $5^{45} > 5^{40} \Rightarrow 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$.

Bài 5:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

a) Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11}.(78-1) = 78^{11}.77$

$78^{11} - 78^{10} = 78^{10}.(78-1) = 78^{10}.77$

Vì $78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11}.77 > 78^{10}.77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$.

b) Ta có

$A = 72^{44}(72-1) = 72^{44}.71$ và $B = 72^{43}(72-1) = 72^{43}.71$

$72^{44} > 72^{43} \Rightarrow 72^{44}.71 > 72^{43}.71 \Rightarrow A > B$.

Bài 6:

Dùng tính chất bắc cầu: So sánh hai số với số lũy thừa 10.

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$

Vì $81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}$.

Bài 7.

Với bài này , học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm , giáo viên có thể gợi ý học sinh so sánh: $2^{63} > 5^{27}$ *và* $2^{63} < 5^{28}$.

Ta có : $2^{63} = \left(2^7\right)^9 = 128^9$, $5^{27} = \left(5^3\right)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > \ 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = \left(2^9\right)^7 = 512^7$, $5^{28} = \left(5^4\right)^7 = 625^7 \ \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^2$.

Bài 8:

Xét: a^n *biến đổi được về dạng:* $c^q.\mathrm{d}^k$

b^m *biến đổi được về dạng:* $e^p.\mathrm{g}^h$

Nếu $c^q < e^p$ *và* $d^k < g^h$ *thì* $c^q.\mathrm{d}^k < e^p.\mathrm{g}^h$.

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990}.2^5$; $5^{863} = 5^{860}.5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860}.

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10}.\ 3 \ < 5^5 \Rightarrow 2^{1720}.\ 3^{172} < 5^{860}$.

Có: $2^{1990} = 2^{1720}.2^{270}$, cần so sánh $2^{1720}.2^{270}$ với số $2^{1720}.3^{172}$ như sau:

$3^7 = 2187$; $2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$.

$3^{172} = \left(3^7\right)^{24}.\ 3^4 > \left(2^{11}\right)2^4 > \left(2^{11}\right).\ 2^6 = 2^{270}$.

Do đó: $2^{1720}.2^{270} < 2^{1720}.\ 3^{172} < \ 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 9:

Ta có: $2^{10} = 1025$; $7^3 = 343$

$\Rightarrow 2^{10} < 3.7^3 \Rightarrow \left(2^{10}\right)^{238} < 3^{238}.\left(7^3\right)^{238}$

$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238}.7^{714}$ (1)

Xét: $3^{238} = 3^3.3^{235} = 3^3.\left(3^5\right)^{47} < 3^3\left(2^8\right)^{47} < 2^5.2^{376} = 2^{381}$ (vì $3^5 < 2^8$)

$\Rightarrow 3^{238} < 2^{381}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $2^{2380} < 2^{381}.7^{714}$

$\Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$

Bài 10.

Đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ.

Ta có: $3^{200}=\left(3^2\right)^{100}=9^{100}$; $2^{300}=\left(2^3\right)^{100}=8^{100}$ mà $8^{100}<9^{100}$

$\Rightarrow 2^{300}<3^{200}$.

Bài 11:

Biến đổi a^n về dạng: $c.\mathrm{d}^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

Ta có: $71^{50}<72^{50}=\left(8.9\right)^{50}=2^{150}.3^{100}$ (1)

$37^{75}>36^{75}=\left(4.9\right)^{75}=2^{150}.\ 3^{150}$ (2)

Mà $2^{150}.\ 3^{150}>2^{150}.3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75}>71^{50}$.

Bài 12:

a) Ta có: $50^{20}=\left[\left(50\right)^2\right]^{10}=2500^{10}<2550^{10}\Rightarrow 5^{20}<2550^{10}$.

b) Ta có: $999^{10}=\left[\left(999\right)^2\right]^5<998001^5<999999^5\Rightarrow 999^{10}<999999^5$.

Bài 13:

$2^{100}=(2^2)^{50}=4^{50}<5^{50}$ (1).

$3^{75}=(3^3)=27^{25}=3^{75}>5^{50}$ (2).

$5^{50}=(5^5)^{25}=25^{25}$ (3).

Từ(1),(2) và (3) $\Rightarrow 2^{100}<5^{50}<3^{75}$.

Bài 14:

Ta có: $A=1234^{56789}>1000^{50000}=\left(10^3\right)^{50000}=10^{150000}$

$B=56789^{1234}<100000^{2000}=\left(10^5\right)^{2000}=10^{10000}$

Vì $10^{10000}<10^{150000}\Rightarrow 56789^{1234}<1234^{56789}$.

Bài 15:

Số có 9 chữ số là $\overline{a_1a_2....a_8a_9}$ trong đó các chữ số $a_i\neq 0$ $(i=\overline{1;\ 9})$ và có thể giống nhau. Từ tập hợp số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ mỗi chữ số a_i có 9 cách chọn . Do đó ta có số các số có 9 chữ số thỏa mãn bài toán là $m=9^9$ số.

Từ đó: $m = 9^9 = 9.9^8 < 10.9^8$.

Bài 16:

Ta có: $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \ldots + 2012^{71} + 2012^{72}$

$2012.A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \ldots + 2012^{71} + 2012^{73}$

$\Rightarrow 2012.A - A = 2011A = 2012^{73} - 1$

$\Rightarrow A = \left(2012^{73} - 1\right) : 2011 < 2012^{73} - 1$.

Vậy $A < B$.

Bài 17:

$$B = \frac{3^{10}.11 + 3^{10}.5}{3^9.2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9.16} = 3.$$

$$C = \frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8.104} = \frac{2^2.78}{104} = 3.$$

Vậy $B = C$.

Bài 18:

Ta có: $\frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^4}$.

$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^3}$.

Vì $\frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^3}$

$\Rightarrow M < N$.

Bài 19:

$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ nên $19M = \frac{19.(19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}$.

$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$ nên $19N = \frac{19.(19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$.

Vì $\frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$

$1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$ hay $19M > 19N \Rightarrow M > N$.

Bài 20:

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n-1)}{(n-1).n}=\frac{n-n+1}{(n-1).n}=\frac{1}{(n-1)n}>\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$
$$\frac{1}{102^2}<\frac{1}{101}-\frac{1}{102}$$
....
$$\frac{1}{105^2}<\frac{1}{104}-\frac{1}{103}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+...+\frac{1}{105^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{105}$$

$$=\frac{105-100}{100.105}=\frac{5}{2^2.5^2.5.3.7}=\frac{1}{2^2.5^2.3.7}.$$

Vậy $\frac{1}{102^2}+......+\frac{1}{105^2}<\frac{1}{2^2.5^2.3.7}$.

Bài 21:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$-A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)........\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2^2}.\frac{8}{3^2}.\frac{15}{4^2}.......\frac{9999}{100^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}........\frac{99.101}{100^2}.$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A=\frac{1.2.3.4.5.6..........98.99}{2.3.4.5.........99.100}.\frac{3.4.5..........100.101}{2.3.4..........99.100}=\frac{1}{100}.\frac{101}{2}=\frac{101}{200}>\frac{1}{2}$$

Vậy $A<-\frac{1}{2}$.

Bài 22:

Đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số .

a) $3 < 3^n \le 234 \Rightarrow 3^1 < 3^n \le 3^5 \Rightarrow 1 < n \le 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,\ 3,\ 4,\ 5$.

b) $8.16 \ge 2^n \ge 4 \Rightarrow 2^3.2^4 \ge 2^n \ge 2^2 \Rightarrow 2^7 \ge 2^n \ge 2^2 \Rightarrow 7 \ge n \ge 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,3,4,5,6,7$.

Bài 23:

$4^{15}.\ 9^{15} < 2^n.\ 3^n < 18^{16}.\ 2^{16} \Rightarrow (4.9)^{15} < (2.3)^n < (18.2)^{16}$

$\Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16}$

$\Rightarrow (6^2)^{15} < 6^n < (6^2)^{16}$

$\Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32}$

$\Rightarrow 30 < n < 32$

$\Rightarrow n = 31.$

Bài 24:

Có $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100}$

$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{101}$

$\Rightarrow 3A - A = 2A = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}$

Mà theo đề bài ta có $2A + 3 = 3^n$

$\Rightarrow 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101$.

Bài 25:

Ta có: $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$ (1).

Dễ thấy $m \ne n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$2^n.(2-1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ và $m = 9$.

Trường hợp 2: Nếu $m - n \ge 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tách ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

Bài 26:

a) Ta có: $64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8$, mà n nguyên dương, nên $n = 7$.

b) Ta có: $243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2$, mà n nguyên dương nên n nhận các giá trị là: 4; 3; 2.

Bài 27:

Ta có: $n^{200} = \left(n^2\right)^{100}$; $6^{300} = \left(6^3\right)^{100} = 216^{100}$

$$n^{200} < 6^{300} \Rightarrow \left(n^2\right)^{100} < 216^{100} \Rightarrow n^2 < 216 \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Số nguyên lớn nhất thoã mãn (*) là $n = 14$.

Bài 28:

a) Với $n \in$ N, ta xét:

$$32 < 2^n \Leftrightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n$$

$$2^n < 512 \Leftrightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9$$

Do đó: $5 < n < 9 \Rightarrow n \in \{6;7;8\}$.

b) Với $n \in$ N, ta xét:

$$3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow \left(3^3\right)^6 < \left(n^2\right)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$$

Nhận thấy: $5^2 < 27 < 6^2$, nên $6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n$.

$$n^{12} \leq 20^8 \Leftrightarrow \left(n^3\right)^4 < \left(20^2\right)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

Nhận thấy: $7^3 < 400 < 8^3$, nên $n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7$

Do đó: $6 \leq n \leq 7 \Rightarrow n \in \{6;7\}$.

CHỦ ĐỀ 4:
CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. *Định nghĩa*

Cho 2 số tự nhiên a và b, trong đó b khác 0, nếu có số tự nhiên x sao cho b.x = a, thì ta nói a chia hết cho b và ta có phép chia hết a: b = x

2.*Các dấu hiệu chia hết*

a) Dấu hiệu chia hết cho 2

Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.

b) Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9)

Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).

Chú ý: Một số chia cho 3 (hoặc 9) d bao nhiêu thì tổng các chữ số của số đó chia cho 3 (hoặc 9) cũng d bấy nhiêu và ngọc lại

c) Dấu hiệu chia hết cho 5

Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5

d) Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25)

Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi 2 chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25)

e) Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125)

Một số chia hết cho 8 hoặc 125 khi và chỉ khi 3 chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 hoặc 125.

f) Dấu hiệu chi hết cho 11

Một số chi hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11.

3. ***Tính chất của 2 quan hệ chia hết***

+ 0 chia hết cho b với b là số tự nhiên khác 0

+ a chia hết cho a với mọi a là số tự nhiên khác 0

+ Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho a thì a = b

+ Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a chia hết cho c

+ Nếu a chia hết cho b và a chia hết cho c mà (b, c) = 1 thì a chia hết cho b.c

+ Nếu a chia hết cho m và a chia hết cho n thì a chia hết cho BCNN(m,n)

+ Nếu a.b chia hết cho c và (b,c) =1 thì a chia hết cho c

+ Nếu a chia hết cho m thì k.a chia hết cho m với mọi k là số tự nhiên.

+ Nếu a chia hết cho m, b chia hết cho m thì (a±b) chia hết cho m

+ Nếu a chia hết cho m, b không chia hết cho m thì (a±b) không chia hết cho m

+ Nếu a chia hết cho m, b chia hết cho n thì a.b chia hết cho m.n

+ Nếu (a.b) chia hết cho m và m là số nguyên tố thì a chia hết cho m hoặc b chia hết cho m.

+ Nếu a chia hết cho m thì a^n chia hết cho m với n là số tự nhiên

+ Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n với n là số tự nhiên

II/ CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

1. phơng pháp 1: Dựa vào định nghĩa phép chia hết

Để chứng minh a chia hết cho b (b khác 0), ta biểu diễn số a dới dạng một tích các thừa số, trong đó có 1 thừa số bằng b (hoặc chia hết cho b). a = b.k (k $\in$ N) hoặc a =m.k (m chia hết cho b)

★Thí dụ 1. Chứng tỏ rằng số có dạng $\overline{aaaaaa}$ bao giờ cũng chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

$\overline{aaaaaa}$ = a.111111 = a. 7.15873 chia hết cho 7

★Thí dụ 2. Chứng tỏ rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ bao giờ cũng chia hết cho 11, chia hết cho 7 và chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = \overline{abc}.(1000+1) = \overline{abc}.1001 = \overline{abc}.11.7.13$ nên $\overline{abcabc}$ chia hết cho 11, chia hết cho 7 và chia hết cho 13.

★Thí dụ 3. Chứng minh rằng, nếu lấy một số có 2 chữ số cộng với số gồm 2 chữ số ấy viết theo thứ tự ngọc lại, ta luôn đọc một số chia hết cho 11

Hướng dẫn giải

Gọi 2 số đó là $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$. Ta có :

$\overline{ab} + \overline{ba}$ = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b) chia hết cho 11

2. Phong pháp 2 : Dùng các tính chất của phép chia hết.

2.1. Dùng tính chất chia hết của một tổng, một hiệu

* Để chứng minh a chia hết cho b (b $\neq$ 0) ta có thể làm nh sau:

- Viết a = m + n mà $m \,\vdots\, b$ và $n \,\vdots\, b$
- Viết a = m - n mà $m \,\vdots\, b$ và $n \,\vdots\, b$

* Để chứng minh a không chia hết cho b ta viết a dới dạng tổng của các số mà chỉ có một số hạng của tổng không chia hết cho b, còn các số hạng khác đều chia hết cho b.

★Thí dụ 1. Chứng tỏ rằng :

a) Tổng của 3 số tự nhiên liên tiếp là một số chia hết cho 3

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là một số không chia hết cho 4.

Hướng dẫn giải

a) Gọi 3 số tự nhiên liên tiếp là n, n +1 , n + 2.

Tổng của 3 số đó là : $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) \vdots 3$

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là : n , n+1, n+2, n+3. Tổng của 4 số đó là : $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4n + 4 + 2 = 4(n+1) + 2$ không chia hết cho 4

Vậy tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Chú ý: *Tổng của n số tự nhiên liên tiếp chưa chắc đã chia hết cho n.*

2.2 Dùng tính chất chia hết của 1 tích.

Để chứng minh a chia hết cho b ($b \neq 0$) ta có thể chứng minh bằng một trong các cách sau:

+ Ta chứng minh (a.m) chia hết cho b; $(m, b) = 1 \Rightarrow$ a chia hết cho b

+ Biểu diễn $b = m.n$ với $(m,n)= 1$, sau đó chứng minh a chia hết cho m, a chia hết cho n

+ Biểu diễn $a= a_1 . a_2$, $b = b_1.b_2$, rồi chứng minh a_1 chia hết cho b_1; a_2 chia hết cho b_2

★Thí dụ 1. chứng minh $(1980a + 1995b)$ chia hết cho 15 với $\forall$ a, b là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Vì 1980 chia hết cho 3 nên 1980.a chia hết cho 3 với $\forall$ a.

Vì 1995 chia hết cho 3 nên 1995.b chia hết cho 3 với $\forall$ b

Nên $(1980a + 1995b)$ chia hết cho 3.

Chứng minh tơng tự ta có: $(1980a + 1995b)$ chia hết cho 5 với $\forall$ a, b mà $(3,5) = 1$.

$\Rightarrow (1980a + 1995b)$ chia hết cho 15

★Thí dụ 2. Chứng minh rằng tích của 2 số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Hướng dẫn giải

Gọi 2 số chẵn liên tiếp là 2n, 2n +2 ($n \in N$)

Tích của 2 số chẵn liên tiếp là $2n.(2n +2) = 4.n.(n+1)$

Vì n và n + 1 là 2 số tự nhiên liên tiếp nên n.(n+ 1) chia hết cho 2

Mà 4 chia hết cho 4 nên 4.n.(n+1) chia hết cho (4.2)

⇒ 4.n.(n+1) chia hết cho 8

⇒ 2n.(2n + 2) chia hết cho 8

Nhận xét : *Nh vậy khi gặp những bài toán chứng minh một tổng, một hiệu hoặc một tích chia hết cho một số mà các tổng, hiệu, tích đó có thể phân tích đọc thành tích các thừa số, ta thòng sử dụng các tính chất của phép chia hết.*

3. Phong pháp 3: Dùng định lí về chia có d

Để chứng minh n chia hết cho p ta xét mọi tròng hợp về số d khi chia n cho p:

Ta viết n = p.k + r, trong đó r = 0, 1, ..., p-1; k ∈ N. Rồi xét tất cả các tròng hợp của r.

★Thí dụ 1. Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n thì tích (n + 3).(n +6) chia hết cho 2.

Hướng dẫn giải

Với mọi n ta có thể viết hoặc n = 2k + 1 hoặc n= 2k

- Với n= 2k +1 ta có:

(n+3).(n+6) = (2k+1 +3).(2k+1+6) = (2k+4).(2k+7) = 2.(k+2).(2k+7) chia hết cho 2.

- Với n= 2k ta có :

(n+3)(n+6) = (2k+3)(2k+6) = (2k+3)(k+3).2 chia hết cho 2.

Vậy với mọi n ∈ N thì (n+3)(n+6) chia hết cho 2.

★Thí dụ 2. Chứng minh rằng:

a) Tích của 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3

b) Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 4.

Hướng dẫn giải

a) Gọi 3 số tự nhiên liên tiếp là n, n+1, n+2

Tích của số tự nhiên liên tiếp là : n.(n+1).(n+2)

Mọi số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số d 0;1;2

- Nếu r = 0 thì n chia hết cho 3 ⇒ n.(n + 1).(n+ 2) chia hết cho 3

- Nết r = 1 thì n = 3 k + 1 (k là số tự nhiên)

⇒ n+2 = 3k +1 + 2 = (3 k +3) chia hết cho 3

⇒n. (n+1).(n+2) chia hết cho 3

- Nếu r = 2 thì n = 3k+ 2 (k là số tự nhiên)

⇒ n+1 = 3k +2 +1 = 3k +3 chia hết cho 3

⇒n.(n+1) . (n+2) chia hết cho 3

Tóm lại, n.(n+1).(n+2) chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

b) Chứng minh tơng tự ta có: n.(n+1).(n+2).(n+3) chia hết cho 4 với mọi n là số tự nhiên.

Sau khi giải bài tập tập này, giáo viên yêu cầu học sinh nêu bài tập này ở dạng tổng quát.

Nhận xét: *Tích của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n.*

Giáo viên nhận xét: Phương pháp này thường được sử dụng khi chứng minh một biểu thức có chứa biến chia hết cho các số tự nhiên có một chữ số. Khi chứng minh một biểu thức chia hết cho các số tự nhiên lớn hơn 10 ta không sử dụng phương pháp này vì phải xét nhiều trường hợp.

4. *Phương pháp 4*: Dùng các dấu hiệu chia hết có liên quan đến chữ số tận cùng.

★Thí dụ 1. Chứng minh rằng ($999993^{1999} - 555557^{1997}$) chia hết cho 10.

Hướng dẫn giải

Ta có : $999993^{1999} = [\,(999993^4)^{499}.\,999993^3] = \overline{...1}.\overline{...7} = \overline{...7}$

$555557^{1997} = (555557^4)^{499}.555557 = \overline{...1}.\overline{...7} = \overline{...7}$

⇨ $999993^{1999} - 555557^{1997} = \overline{...0}$ chia hết cho 10 (đpcm)

★Thí dụ 2. Chứng minh rằng : $10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Hướng dẫn giải

Ta có $10^{28} + 8 = (\underbrace{100...0}_{\text{28 chữ số 0}} + 8) = \underbrace{100...08}_{\text{27 chữ số 0}}$ có tổng các chữ số bằng 9 nên chia hết cho 9.

$10^{28} + 8 = = \underbrace{100...08}_{\text{27 chữ số 0}}$ có tận cùng bằng 008 nên chia hết cho 8.

Vì (8,9) =1 nên $10^{28}+ 8 \,\vdots\, (8.9)$ hay $10^{28}+ 8 \,\vdots\, 72$.

*** Nhận xét:** *Phơng pháp này thờng sử dụng để chứng minh các bài toán mà số chia là các số tròn chục (10, 100, ...) hay các số chia mà dấu hiệu chia hết có liên quan đến chữ số tận cùng (ví dụ : 5, 4, 8, 25, 125), hoặc số chia có thể phân tích thành tích các số có dạng nh trên.*

5. *Phơng pháp 5:* Sử dụng nguyên tắc Đirichlet.

Nội dung của nguyên tắc Đirichlet: "*Nếu có n+1 con thỏ, xếp vào n chuồng, thì ít nhất 1 chuồng chứa từ 2 con thỏ trở lên*".

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kì luôn tìm đọc 2 số có hiệu chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Một số khi chia cho 5 có thể nhận một trong các số d là : 0; 1; 2; 3; 4.

Trong 6 số tự nhiên bất kì khi chia cho 5 luôn tồn tại ít nhất 2 số có cùng số d (nguyên tắc Đirichlet).

⇨ Hiệu của 2 số chia hết cho 5.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. a) *Tìm tất cả các số x,y để số* $\overline{34x5y}$ *chia hết cho 36.*

b) *Tìm các chữ số x, y để* $\overline{21xy}$ *chia hết cho 3, 4 ,5 .*

Bài 2. Cho các chữ số 0, a, b. Hãy viết tất cả các số có 3 chữ số tạo bởi 3 số trên. Chứng minh rằng tổng tất cả các số đó chia hết 211

Bài 3. a) *Cho* $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{60}$. *Chứng minh rằng :* $A \vdots 3$; $A \vdots 7$; $A \vdots 15$

b) *Cho* $B = 3 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{1991}$. *Chứng minh rằng : B chia hết cho 13 và B chia hết cho 41.*

Bài 4. Cho a - b chia hết cho 6. Chứng minh các biểu thức sau chia hết cho 6.

a) a +5b ; b) a + 17b ; c) a - 13b.

Bài 5. Chứng minh rằng: $(9^{2n} + 1994^{93})$ chia hết cho 5

Bài 6. Tìm số tự nhiên n để (3n+10) chia hết cho (n+2)

Bài 7. Tìm số tự nhiên n để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì (3n +1, 4n + 1) = 1

Bài 9. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm đọc 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 10. Chứng minh rằng nếu $\overline{abc} \vdots 37$ thì $\overline{cab} \vdots 37$ và $\overline{bca} \vdots 37$

Bài 11. Chứng minh rằng nếu (6x + 11y) chia hết cho 31 thì (x + 7y) chia hết cho 31 với mọi số tự nhiên x, y.

Bài 12: Một số khi chia cho 6 d 4, khi chia cho 7 d 6, chia cho 11 d 3. Tìm d cho phép chia số đó cho 642.

Bài 13:

a) Phải viết thêm vào bên phải số 579 ba chữ số nào để đọc số chia hết cho các số 5, 7 ,9 ?

b) Phải viết thêm vào bên phải số 523 ba chữ số nào để đọc số chia hết cho các số 6, 7, 8, 9?

Bài 14: Một bạn viết các số từ 1 đến $\overline{abc}$. Bạn đó phải viết tất cả m chữ số. Biết rằng m chia hết cho $\overline{abc}$, tìm $\overline{abc}$.

Bài 15: Chứng minh rằng: 2n + $\underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số}}$ chia hết cho 3.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Vì (4;9) = 1 nên $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 ⇔ $\overline{34x5y}$ chia hết cho 9 và $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4.

Ta có: $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 ⇔ 5y chia hết cho 4 ⇔ y∈{ 2;6}.

$\overline{34x5y}$ chia hết cho 9 ⇔ (3+4+x+5+y) chia hết cho 9

⇔ (12+x+y) chia hết cho 9

Vì x,y là các chữ số nên x+y ∈ { 6;15}.

Nếu y = 2 thì x = 4 hoặc x = 13 >9 (loại)

Nếu y = 6 thì x = 0 hoặc x = 9

Vậy các số phải tìm là: 34452; 34056;34956

b) Ta có : $\overline{21xy}\ \vdots\ 5$ ⇔ y ∈ {0;5}.

Nếu y = 5 thì $\overline{21xy}$ không chia hết cho 4

Nếu y = 0 thì $\overline{21xy}$ chia hết cho 4 ⇔ $\overline{x0}\ \vdots\ 4 \Rightarrow$ x ∈ {0; 2; 4 ; 6 ; 8}. (1)

$\overline{21x0}\ \vdots\ 3$ ⇔ (2 + 1 + x + 0) ⋮ 3 ⇔ (3+ x)⋮ 3 ⇒ x∈ {0; 3; 6; 9}. (2)

Kết hợp (1) và (2) ⇒ x ∈ {0; 6}.

Vậy các số cần tìm là: 2100 ; 2160

Bài 2.

Tất cả các số có 3 chữ số tạo bởi 3 chữ số 0, a, b là: $\overline{a0b};\overline{ab0};\overline{ba0};\overline{b0a}$

Tổng của các số đó là: $\overline{a0b}+\overline{ab0}+\overline{ba0}+\overline{b0a}$ = 100a +b +100a +10b +100b +10a +100b +a = 211a +211b = 211(a+b) chia hết cho 211.

Bài 3.

*A = $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) =$

$= 2(1+2) + 2^3(1+2) + \dots + 2^{59}(1+2) = 2.3 + 2^3.3 + \dots + 2^{59}.3 =$

$= 3.(2 + 2^3 + \dots + 2^{59})$ chia hết cho 3

*A= $(2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$

$= 2.(1+2+4) + 2^4(1+2+4) + \dots + 2^{58}(1+2+4)$

$= 2.7 + 2^4.7 + \dots + 2^{58}.7 = 7(2 + 2^4 + \dots + 2^{58})$ chia hết cho 7

*A= $(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$

$= 2(1+2+4+8) + \dots + 2^{57}(1+2+4+8) = 15(2 + 2^5 + \dots + 2^{57})$ chia hết cho 15.

Vậy A chia hết cho 3, A chia hết cho 7 và A chia hết cho 15.

b) $B = 3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{1991}$

$= (3 + 3^3 + 3^5) + (3^7 + 3^9 + 3^{11}) + \dots + (3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$

$= 3(1 + 3^2 + 3^4) + 3^7(1 + 3^2 + 3^4) + \dots + 3^{1987}(1 + 3^2 + 3^4)$

$= 3.91 + 3^7.91 + \dots + 3^{1987}.91$

$= 91(3 + 3^7 + \dots + 3^{1987}) \vdots 13$ (vì $91 \vdots 13$)

$B = (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + (3^9 + 3^{11} + 3^{13} + 3^{15}) + \dots + (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$

$= 3(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3^9(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + \dots + 3^{1985}(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6)$

$= 3.820 + 3^9.820 + \dots + 3^{1985}.820$

$= 820(3 + 3^9 + \dots + 3^{1985}) \vdots 41$ (vì $820 \vdots 41$)

Bài 4.

a) Ta có : $a + 5b = a + 6b - b = (a - b) + 6b \vdots 6$ (vì $(a - b) \vdots 6$ và $6b \vdots 6$)

b) $a + 17b = (a - b) + 18b \vdots 6$ [vì $(a - b) \vdots 6$ và $18b \vdots 6$]

c) $a - 13b = (a - b) - 12b \vdots 6$ [vì $(a - b) \vdots 6$ và $12b \vdots 6$]

Bài 5.

Ta có: $9^{2n} = (9^2)^n = 81^n = \overline{\dots1}$

$1994^{93} = (1994^2)^{46}.1994 = \overline{\dots6}^{46}.1994 = \overline{\dots6}.1994 = \overline{\dots4}$

Do đó: $9^{2n} + 1994^{93} = \overline{\dots1} + \overline{\dots4} = \overline{\dots5}$ chia hết cho 5

Bài 6.

Cách 1: Ta có: 3n+10 = 3(n+2) +4

Mà 3.(n+2) chia hết cho (n+2)

Do đó (3n+10) chia hết cho (n+2) <=> 4 chia hết cho (n+2) ⇔ (n+2) là ớc của 4.

⇔ (n+2) $\in$ { 1; 2;4}

⇒ n $\in$ { 0;2}

Vậy với n $\in$ {0;2 } thì (3n+10) chia hết cho (n+2)

Cách 2: (3n+10) chia hết cho (n+2)

Mà (n+2) chia hết cho (n+2) => 3(n+2) chia hết cho (n+2)

=> [(3n +10) - (3n +6)] chia hết cho (n+2)

=> 4 chia hết cho (n+2)

đến đây giải tiếp nh ở cách 1.

Bài 7.

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì (n+15) chia hết cho n+3

=> [(n+15) - (n+3)] chia hết cho (n+3)

⇔ 12 chia hết cho (n+3)

⇔ (n+3) là U(12) = {1;2;3;4;6;12}

⇔ n $\in${0;1;3;9}

Vậy với n $\in$ {0;1;3;9} thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên

Bài 8.

Gọi d là ƯC(3n+ 1 , 4n + 1)

$$\begin{cases} 3n+1 \vdots d \\ 4n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.(3n+1) \vdots d \\ 3.(4n+1) \vdots d \end{cases}$$

⇒ (12n + 4 - 12n - 3) $\vdots$ d

⇒ 1 $\vdots$ d ⇒ d = 1

⇒ (3n + 1, 4n + 1) = 1

Bài 9.

Có 45 -2 = 43 học sinh đọc phân chia và 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi điểm trong 8 loại là điểm không có quá 5 học sinh, thì lớp học không có quá 8.5 = 40 học sinh (ít hơn 43 học sinh)

Vậy tồn tại ít nhất có 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 10.

Vì $\overline{abc} \vdots 37$ nên (100a + 10b + c) $\vdots$ 37

$\Rightarrow$ 10.(100a + 10b + c) $\vdots$ 37

$\Rightarrow$ [10.(100a + 10b + c) - 999a] $\vdots$ 37 (vì 999$\vdots$37)

$\Rightarrow$ (100b + 10c + a) $\vdots$ 37

$\Rightarrow \overline{bca} \vdots 37$

Mặt khác : $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}$ = 100a + 10b+ c + 100c + 10a + b + 100b + 10c + a = 37.3. (a + b + c) $\vdots$ 37

Mà $\overline{abc} + \overline{bca} \vdots 37$

$\Rightarrow \overline{bca} \vdots 37$

Bài 11.

Vì (6x + 11y) $\vdots$ 31 nên (6x + 11y + 31y) $\vdots$ 31

$\Rightarrow$ (6x + 42 y) $\vdots$ 31 $\Rightarrow$ 6 (x + 7y) $\vdots$ 31

mà (6, 31) = 1 $\Rightarrow$ (x + 7y) $\vdots$ 31 (đpcm).

Bài 12:

Gọi số đó là a.

Theo bài ra, ta có a = 6k + 4 = 7q + 6 = 11p + 3 (k, q, p là các thơng và là các số tự nhiên).

Suy ra : a + 8 = 6k + 4 + 8 = 6 (k+ 2) $\vdots$ 6

a + 8 = 7q + 6 + 8 = 7(q + 2) $\vdots$ 7

a + 8 = 11p + 3 + 8 = 11 (p + 1) $\vdots$ 11

suy ra (a + 8) là BC (6,7,11), mà BCNN(6,7,11) = 462

$\Rightarrow$ (a + 8) $\vdots$ 462

$\Rightarrow (a+8) = 462.m$ ($m \in N$)

$\Rightarrow a = 462.m - 8 = 462.(m-1) + 454$

$\Rightarrow a = 462.n + 454$ ($n \in N$)

Vậy a chia cho 462 d 454.

Bài 13:

a) Giả sử số viết thêm là $\overline{abc}$. Ta có $\overline{579abc}$ chia hết cho 5, 7 ,9 suy ra $\overline{579abc}$ chia hết cho 5. 7. 9 = 315. (vì 3, 5, 7 đôi một nguyên tố cùng nhau)

Mặt khác $\overline{579abc} = 579000 + \overline{abc} = (315.1838 + 30 + \overline{abc}) \vdots 315$

Mà $315.1838 \vdots 315$ suy ra $(30 + \overline{abc}) \vdots 315$

Do $30 \le 30 + \overline{abc} \le 30 + 999 = 1029$

nên $(30 + \overline{abc}) \in \{315; 630; 945\}$

suy ra $\overline{abc} \in \{285; 600; 915\}$

Vậy 3 số có thể viết thêm là 285; 600; 915.

b) Gọi số phải viết thêm là $\overline{abc}$. Ta có :

$\overline{523abc}$ chia hết cho 6, 7, 8, 9 nên $\overline{523abc}$ chia hết cho BCNN(6,7,8,9) = 504.

Mặt khác $\overline{523abc} = 523000 + \overline{abc} = 504.1037 + 352 + \overline{abc}$.

Vì $504.1037 \vdots 504$ nên $(352 + \overline{abc}) \vdots 504 \Leftrightarrow \overline{abc} = k.504 - 352$ với $k \in N \Rightarrow k \in \{1; 2\}$

$\Leftrightarrow \overline{abc} \in \{152 ; 656\}$

Vậy 2 số có thể viết thêm là 152 và 656.

Bài 14:

Từ 1 đến $\overline{abc}$, bạn đó phải viết số chữ số là :

$M = 1.9 + 2.90 + 3.(\overline{abc} - 99) = 3.\overline{abc} - 108$

Theo bài ra $m \vdots \overline{abc} \Leftrightarrow (3.\overline{abc} - 108) \vdots \overline{abc} \Leftrightarrow 108 \vdots \overline{abc}$

$\Leftrightarrow \overline{abc} = 108$

Vậy bạn đó đã viết các số tự nhiên từ 1 đến 108.

Bài 15: * *Cách 1:* Ta có : $2n + \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số}} = 3n + (\underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số}} - n)$

Vì một số chia cho 3 dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của số ấy chia cho 3 cũng dư bấy nhiêu nên $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}}$ và n có cùng số dư khi chia cho 3

$\Rightarrow \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} - n$ chia hết cho 3

Vậy $3n + (\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} - n) \vdots 3$ hay $2n + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} \vdots 3$

* *Cách 2:* với mọi $n \in N$ ta có hoặc $n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ ($k \in N$)

- Nếu $n = 3k \Rightarrow 2n + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} = 2.3k + \underbrace{11\ldots1}_{3k\text{ chữ số}} \vdots 3$

- Nếu $n = 3k + 1 \Rightarrow 2n + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} = 2(3k+1) + \underbrace{11\ldots1}_{3k+1\text{ chữ số}} = 6k + \underbrace{11\ldots1}_{3k\text{ chữ số 1}}3$ chia hết cho 3.

- Nếu $n = 3k+2 \Rightarrow 2n + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}} = 2(3k+2) + \underbrace{11\ldots1}_{3k+2\text{ chữ số}}$

$= 6k + 3 + \underbrace{11\ldots1}_{3k+1\text{ chữ số}}2$ chia hết cho 3

(vì số $\underbrace{11\ldots1}_{3k+1\text{ chữ số}}2$ có tổng các chữ số bằng $3k + 3$ chia hết cho 3)

CHỦ ĐỀ 5:

LIÊN HỆ PHÉP CHIA CÓ DƯ VỚI PHÉP CHIA HẾT. BÀI TOÁN ƯỚC VÀ BỘI. ƯỚC CHUNG (ƯCLN) VÀ BỘI CHUNG (BCNN).

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Ước và Bội của một số nguyên

Với $a, b \in \mathbf{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = b.q$ thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

2. Nhận xét

- Nếu $a = b.q$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a : b = q$.

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Liên hệ phép chia có dư với phép chia hết.

Nếu số tự nhiên **a** chia cho số tự nhiên **b** được số dư là **k** thì số **(a – k)** $\vdots$ **b**

4. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là ƯC(a, b, c).

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số a, b, c được kí hiệu là: BC(a, b, c).

6. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất

* Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

* Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Dạng 1: Tìm số tự nhiên n để thỏa mãn điều kiện chia hết (số đã cho là số tự nhiên, số nguyên)

Bài 1. Tìm số tự nhiên n để (3n + 14) chia hết cho (n + 2).

Lời giải

Ta có 5n + 14 = 5.(n + 2) + 4.

Mà 5.(n +2) chia hết cho (n +2).

Do đó (5n + 14) chia hết cho (n +2) $\Leftrightarrow$ 4 chia hết cho (n + 2) $\Leftrightarrow$ (n + 2) là ước của 4.

$\Leftrightarrow$ (n +2) $\in \{1 ; 2 ; 4\}$

$\Rightarrow$ n $\in \{0 ; 2\}$.

Vậy với n $\in \{0; 2\}$ thì (5n + 14) chia hết cho (n +2).

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì (n + 15) chia hết cho (n + 3).

$\Rightarrow$ [(n + 15) - (n + 3)] chia hết cho (n + 3).

$\Leftrightarrow$ 12 chia hết cho (n +3) .

$\Leftrightarrow$ (n + 3) là Ư(12) = $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$\Leftrightarrow$ n $\in \{0; 1; 3; 9\}$.

Vậy với n $\in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để 3n + 4 chia hết cho n – 1.

Lời giải

Để $3n+4 \vdots n-1 \Leftrightarrow \left[1.(3n+4)-3.(n-1)\right] \vdots n-1 \Leftrightarrow 7 \vdots n-1$ hay n – 1 $\in$ Ư(7)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n-1=1 \\ n-1=7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=8 \end{array}\right.$

Vậy với n = 2 hoặc n = 8 thì 3n + 4 ⋮ n – 1

Bài 4: Tìm số tự nhiên sao cho 4n - 5 chia hết cho 2n - 1

Lời giải

Ta có 4n - 5 = 2(2n-1) - 3

Để 4n - 5 chia hết cho 2n-1 thì 3 chia hết cho2n-1

Với 2n - 1=1 => n=1

Với 2n - 1=3 => n=2

vậy n = 1;2

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để n^2 + 3n + 6 ⋮ n + 3.

Lời giải

n^2 + 3n + 6 ⋮ n + 3

n (n + 3) + 6 ⋮ n + 3 ⇔ 6 ⋮ n + 3

=> n + 3 ∈ Ư(6) = {1; 2; 3; 6} => n = 0; n = 3.

Bài 6: Tìm a $\in N$ để a + 1 là bội của a – 1

Lời giải

Để a +1 là bội của a -1 nên thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$

=> a – 1 ∈ Ư(2) = {-1,1,2}

=> a ={0,2,3} (thỏa mãn a ∈ N)

Bài 7: Tìm số nguyên n để: $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Lời giải

Ta có $5+n^2-2n$ = 5 + n(n – 2)

=> $5+n^2-2n$ ⋮ (n – 2) khi 5 ⋮ (n – 2)

=> n – 2 ∈ Ư(5) = {-5, -1, 1, 5}

=> n ∈ {- 3, 1, 3, 7}

Bài 8: Tím tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

$\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) \vdots n-2$

Ta có : $n+1=\left[(n-2)+3\right]$

Vậy $(n+1) \vdots n-2$ khi $3 \vdots n-2 \rightarrow n-2 \in U(3)=\left\{\pm 1; \pm 3\right\} \rightarrow n \in \left\{-1;1;3;5\right\}$

Bài 9. Cho A = $\dfrac{n-1}{n+4}$. Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải

A = $\dfrac{n-1}{n+4} = \dfrac{n+4-5}{n+4} = 1 - \dfrac{5}{n+4}$

Với n nguyên, A nhận giá trị nguyên ⇔ $5 \vdots n+4$ hay $n + 4 \in Ư(5)$

Lập luận tìm ra được n = -9, -5, -3, 1

Bài 10: Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

Ta có: $\dfrac{4n+5}{2n-1} = \dfrac{4n-2+7}{2n-1} = \dfrac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \dfrac{7}{2n-1}$

Vì n nguyên nên để $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $\dfrac{7}{2n-1}$ nguyên

=> $2n - 1 \in Ư(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$

⇔ $2n \in \{-6; 0; 2; 8\}$ ⇔ $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài 11: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên: B = $\dfrac{2n+2}{n+2} + \dfrac{5n+17}{n+2} - \dfrac{3n}{n+2}$

Lời giải

B = $\dfrac{2n+2}{n+2} + \dfrac{5n+17}{n+2} - \dfrac{3n}{n+2} = \dfrac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \dfrac{4n+19}{n+2}$

B = $\dfrac{4n+19}{n+2} = \dfrac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \dfrac{11}{n+2}$

Để B là số tự nhiên thì $\dfrac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11 \vdots (n+2) \Rightarrow n + 2 \in Ư(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$

Do $n + 2 > 1$ nên $n + 2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy n = 9 thì $B \in N$

DẠNG 2. TÌM SỐ NGUYÊN DƯƠNG KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG ĐÓ CÓ CÁC DỮ KIỆN VỀ ƯCLN VÀ BCNN.

** Nếu biết ƯCLN(a, b) = K thì a = K.m và b = K.n với ƯCLN(m; n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm) , từ đó tìm được a và b.*

** Nếu biết BCNN (a, b) = K thì ta gọi ƯCLN(a; b) = d thì a = m.d và b = n.d với ƯCLN(m; n) = 1 (là diều kiện của số m, n cần tìm) , từ đó tìm được a và b.*

Bài 1. Tìm hai số tự nhiên a, b, biết rằng: a + b = 162 và ƯCLN(a, b) = 18

Lời giải

Giả sử $a \le b$

Ta có: $a+b=162;\quad (a,b)=18$

Đặt $\begin{cases} a=18m \\ b=18n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m,n)=1 \\ m \le n \end{cases}$

Từ $a+b=162 \Rightarrow 18(m+n)=162 \Leftrightarrow m+n=9$

Lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loai	72
b	144	126		90

Do (m, n) = 1

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18,144);(36,126);(72,90)$

Bài 2. Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a, b ($a,b \in N; a,b < 200$)

Ta có: $a-b=90;(a,b)=15$

Đặt $\left.\begin{matrix} a=15m \\ b=15.n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (m,n)=1 \\ 15(m-n)=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m,n)=1 \\ m-n=6 \end{cases}$

Lại có: $a,b<200 \Rightarrow \begin{cases} 15m<200 \\ 15n<200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le 13 \\ n \le 13 \end{cases}$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

Vậy: $(a,b)=(195,105);(65,75);(85,15)$

Bài 3. Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6

Lời giải

Ta có:

$ab=432;\quad (a,b)=6\ (a<b)$

Đặt $a = 6m; b = 6n \Rightarrow \begin{cases} mn = 12 \\ (m,n) = 1 \\ m < n \end{cases}$

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a,b) = (6,72);(18,24)$

Bài 4. Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: $BCNN(a,b) = 300; UCLN(a,b) = 15$

Lời giải

Ta có: $ab = 300.15 = 4500(1)$

Giả sử $a \le b; UCLN(a,b) = 15$

Đặt $\left.\begin{matrix} a = 15m \\ b = 15n \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} (m,n) = 1 \\ m \le n \end{cases}; (1) \to 15m.15n = 4500 \to \begin{cases} mn = 20 \\ m \le n \end{cases}$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	20	15	300
4	5	60	75

Bài 5. Tìm hai số a, b biết 7a=11b và UCLN(a; b)= 45

Lời giải

Từ giả thiết => a > b

Từ UCLN(a; b) = 45=> $\begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases} (a_1; b_1) = 1, (a_1 \ge b_1)$

Mà: $\frac{a}{b} = \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{11}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ b_1 = 7 \end{cases}$ vì $(a_1; b_1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 45.11 = 495 \\ b = 45.7 = 315 \end{cases}$

Vậy hai số a,b cần tìm là a = 495 và b = 315

Bài 6. Tìm hai số tự nhiên a, b sao cho tổng của UCLN và BCNN là 15

Lời giải

Giả sử a < b

Gọi d=UCLN(a; b) => $\begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases} (a_1 < b_1), (a_1; b_1) = 1$, và d<15

Nên BCNN(a; b) = $a_1.b_1.d$

Theo bài ra ta có: $d + a_1.b_1d = 15 \Rightarrow d(1 + a_1.b_1) = 15 \Rightarrow d \in U(15) = \{1;3;5;15\}$, Mà d < 15,

Nên

TH1 : $d = 1 \Rightarrow a_1.b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$

TH2 : $d = 3 \Rightarrow a_1.b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b_1 = 4 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$

TH3 : $d = 5 \Rightarrow a_1.b_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 5 \\ b_1 = 2 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (1 ;14), (2 ; 7), (3 ; 12), (5 ; 10) và đảo ngược lại

DẠNG 3: LIÊN HỆ PHÉP CHIA CÓ DƯ VỚI PHÉP CHIA HẾT, BCNN, ƯCLN.

** Nếu số tự nhiên **a** chia cho số tự nhiên **b** được số dư là **k** => **a – k ⋮ b***

** Nếu a ⋮ b và a ⋮ c mà ƯCLN(a, b) = 1 => a chia hết cho tích b.c (a, b, c ∈ N)*

** Nếu a ⋮ b và a ⋮ c mà a là số nhỏ nhất => a = BCNN(a, b) (a, b, c ∈ N)*

** Nếu a ⋮ b và m ⋮ b mà b lớn nhất => b = Ư CLN(a, m) (a, b, m ∈ N)*

Bài 1: Bạn Nam nghĩ 1 số có 3 chữa số, nếu bớt số đó đi 8 thì được 1 số ⋮ 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được 1 số ⋮ 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được 1 số ⋮ 9, Hỏi bạn Nam nghĩ số nào?

Lời giải

Gọi x là số bạn Nam đã nghĩ,   ĐK: 99<x<1000

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} x - 8 \vdots 7 \\ x - 9 \vdots 8 \\ x - 10 \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \vdots 7 \\ x - 1 \vdots 8 \\ x - 1 \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow x - 1 \vdots 7;8;9 \Rightarrow x - 1 \in BC(7;8;9)$

$x - 1 \in \{0;504;1008;.....\} \Rightarrow x \in \{1;505;1009;....\}$, Mà 99 < x < 1000 nên x = 505

Vậy số có ba chữ số mà bạn Nam nghĩ là 505

Bài 2: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được các số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = 3m + 2 \\ a = 5n + 3 \; (m, n, p \in N) \\ a = 7p + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6m + 4 \\ 2a = 10n + 6 \\ 2a = 14p + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 \vdots 3 \\ 2a - 1 \vdots 5 \\ 2a - 1 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 \in BC(3;5;7)$$

Vì a nhỏ nhất nên 2a - 1 nhỏ nhất khác 0 hay 2a - 1 =BCNN(3; 5; 7) = 105 => 2a = 106 => a = 53

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 53

Bài 3: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a:

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = 5m+3 \\ a = 7n+4 \\ a = 9p+5 \end{cases} (m,n,p \in N) => \begin{cases} 2a = 10m+6 \\ 2a = 14n+8 \\ 2a = 18p+10 \end{cases} => \begin{cases} 2a-1 \vdots 5 \\ 2a-1 \vdots 7 \\ 2a-1 \vdots 9 \end{cases} => 2a-1 \in BC(9;5;7)$$

Vì a nhỏ nhất nên 2a - 1 nhỏ nhất khác 0 hay 2a - 1 = BCNN(9; 5; 7) = 315 => 2a = 316 => a = 158

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 158

Bài 4: Linh và Mai cùng mua một số hộp bút chì màu, số bút đựng trong mỗi hộp bằng nhau và lớn hơn 1. Kết quả Linh có 15 bút chì màu và Mai có 18 bút chì màu hỏi mỗi hộp có bao nhiêu chiếc bút?

Lời giải

Gọi số bút trong mỗi hộp là a ĐK : $a \in N, a < 15$ và a>1

Theo bài ra ta có : 15 $\vdots$ a và 18 $\vdots$ a, Nên a là 1 ước chung của 15 và 18

Và a phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn 15 => kết quả được a=3

Bài 5: Hai lớp 6A và 6B tham gia phong trào tết trồng cây, mỗi em tròng 1 số cây như nhau, kết quả lớp 6A trồng được 132 cây vag 6B được 135 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Lời giải

Gọi số cây mỗi em trồng được là a, ĐK : $a \in N, a < 132, a > 1$ và a>1

Theo bài ra ta có: 132 $\vdots$ a và 135 $\vdots$ a khi đó ta thấy $a \in UC(132;135) = \{1;3\}$

Vậy a = 3, Khi đó lớp 6A có 132 : 3 = 44 học sinh và lớp 6B có 135 : 3 = 45 học sinh

Bài 6: Trong cuộc thi HSG cấp tỉnh có ba môn Toán Văn Anh ,số học sinh tham gia như sau:Văn có 96 học sinh, Toán có 120 học sinh và Anh có 72 học sinh.Trong buổi tổng kết các bạn được tham gia phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi mỗi môn bằng nhau.Hỏi có thể phân học sinh đứng thành ít nhất bao nhiêu hàng?

Lời giải

Gọi số hs đứng ở mỗi hàng là a, ĐK : $a \in N, a < 72$ và a>1

Vì mỗi hàng có số học sinh mỗi môn bằng nhau nên ta có:

96 $\vdots$ a ;120 $\vdots$ a và 72 $\vdots$ a ,

Để có ít nhất bao nhiêu hàng thì số học sinh phải là lớn nhất hay a lớn nhất

Hay a = UCLN (96 ; 120 ; 72) = 24, Vậy số hàng cần tìm là : (96 + 120 + 72) : 24 = 12 hàng

BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài 1: Hai dội công nhân, Trồng 1 số cây như nhau, mỗi công nhân đội I phải trồng 8 cây, đội II phải trồng 9 cây, Tính số cây mỗi đội phải trồng biết rằng số cây đó trong khoảng từ 100 - 200

Bài 2: Một bộ phận của máy có hai bánh xe răng cưa khớp với nhau, bánh xe 1 có 18 răng cưa, bánh xe 2 có 12 răng cưa, Hỏi mỗi bánh xe phải quay bao nhiêu vòng để 2 răng cưa đã khớp với nhau lần đầu sẽ khớp với nhau lần 2

Bài 3: Số học sinh của 1 trường THCS là 1 số có ba chữ số và lớn hơn 800, mỗi lần xếp hàng 5, 6, 7, 8 đều vừa đủ, hỏi trường đó có bao nhiêu hs?

Bài 4: Ba đội công nhân cùng trồng 1 số cây như nhau, tính ra mỗi công nhân đội 1 trồng 7 cây, đội 2 trồng 8 cây, đội 3 trồng 6 cây, Tính số công nhân mỗi đội, biết số cây mỗi đội trong khoảng từ 100-200
Bài 5: Một công ty vận tải hàng hóa dùng ba ca nô để chở hàng, ca nô thứ nhất 7 ngày cập bến 1 lần, ca nô thứ hai 6 ngày cập bến 1 lần, ca nô thứ ba 8 ngày cập bến 1 lần. Hỏi nếu ba ca nô cùng đang cập bến, thì ít nhất sau bao nhiêu ngày sau :
a, Ca nô thứ nhất và ca nô thứ hai cùng cập bến ?
b, Ca nô thứ nhất và ca nô thứ ba lại cùng cập bến ?
c, Ca nô thứ hai và ca nô thứ ba lại cùng cập bến ?
d, Cả ba ca nô cùng cập bến ?
Bài 6: Một trường tổ chức cho khoảng 800 đến 900 học sinh tham quan, Tính số học sinh biết nếu xếp 35 hoặc 40 học sinh lên xe thì vừa đủ
Bài 7: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho chia nó cho 31 dư 15 và chi cho 35 dư 1
Bài 8: Tìm dạng chung cả các số tự nhiên a chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 thì dư 4, chi 6 thì dư 5 và chia hết cho 3
Bài 9: Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia 8 dư 7, chia cho 31 dư 28
Bài 10: Một số tự nhiên a khi chia cho 7 dư 4, chia cho 9 dư 6, tìm số dư khi chia a cho 63
Bài 11: Chia số tự nhiên a cho 7 dư 5, chia số b cho 7 dư 3, chia số c cho 7 dư 2. Tìm số dư khi
a, Chia a+b cho 7
b, Chia a+b+c cho 7
Bài 12: Trong một buổi liên hoan ban tổ chức đã mua 96 cái kẹo và 36 cái bánh và được chia đều ra các đĩa gồm cả kẹo và bánh, có thể chia được nhiều nhất bào nhiêu đĩa, mỗi đĩa có bao nhiêu bánh bao nhiêu kẹo?
Bài 13: Lớp 6A có 54 học sinh, 6B có 42 và 6C có 48 học sinh, trong ngày khai giảng ba lớp cùng xếp thành 1 số hàng dọc như nhau, mà không có người lẻ hàng. Tính số hàng dọc nhiều nhất có thể sếp được?
Bài 14: Có 48 bút chì, 64 quyển vở, cô giáo muốn chia số bút và số vở thành 1 số phần thưởng như nhau,có thể chia được nhiều nhất bào nhiêu phần thưởng,số bút số vở ở mỗi phần thưởng?
Bài 15: Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia a dư 24 và 363 chia a dư 43
Bài 16: Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 111 cho a thì dư 15 còn khi chia 180 cho a thì dư 20
Bài 17: Nếu ta chia 2 số 3972 và 170 cho cùng 1 số thì sẽ được số dư tương ứng là 4 và 42. Hỏi số chia là bao nhiêu?
Bài 18: Tìm hai số tự nhiên a,b biết rằng a.b =72 và UCLN (a;b)=6
Bài 19: Tìm hai số tự nhiên a,b biết rằng a.b =3750 và UCLN (a;b)=25

Vậy các cặp số tự nhiên (a ; b) cần tìm là : (25 ;650) ,(50 ; 75), (75 ; 50), (150 ;25)

Bài 20: Tìm hai số tự nhiên a,b biết rằng a.b bằng 24300 và UCLN (a;b)=45
Bài 21: Cho UCLN(a;b)=1 Chứng minh rằng UCLN(a; a+b)=1
Bài 22: Cho 2 số 3n+1 và 5n+4 là hai số không nguyên tố cùng nhau, tìm UCLN (3n+1;5n+4)
Bài 23: Tìm UCLN của 2n-1 và 9n +4 với $n \in N$
Bài 24: Tìm a,b biết a+ b= 42 bà BCNN(a; b)= 72

Bài 25: Tìm a,b biết a - b =7 và BCNN(a; b)= 140

Bài 26: Tìm hai số nguyên dương biết a+ 2b= 48 và UCLN(a; b) +3.BCNN(a; b)= 114

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Gọi x là số cây mỗi đội phải trồng => 100 < x < 200 và x là số tự nhiên

Theo bài ra ta có:

$x \vdots 8 \Rightarrow x \in B(8)$

$x \vdots 9 \Rightarrow x \in B(9)$

$\Rightarrow x \in BC(8; 9) = \{0; 72; 144; 216; \ldots\}$

Vì 100 < x < 200 nên x = 144

Vậy số cây phải trồng của mỗi đội là 144 cây

Bài 2:

Để hai răng của hai bánh xe đã khớp với nhau lần đầu lại khớp với nhau lần 2 thì số răng cưa ở mỗi bánh xe đã quay được là x :

Khi đó x = BCNN(12;18)=36

Bánh xe 1 quay là 36:18=2 vòng. Bánh xe 2 quay 36:12 = 3 vòng

Bài 3:

Gọi x (học sinh) là số học sinh của 1 trường => 800 < x < 1000

Theo bài ra ta có :

$x \vdots 5 \Rightarrow x \in B(5)$

$x \vdots 6 \Rightarrow x \in B(6)$

$x \vdots 7 \Rightarrow x \in B(7)$

$x \vdots 8 \Rightarrow x \in B(8)$

$\Rightarrow x \in BC(5; 6; 7; 8) = \{0; 840; 1680; \ldots\ldots\}$

Vì 800 < x < 1000 nên x = 840

Vậy số học sinh của trường là 840 học sinh

Bài 4:

Gọi x là số cây mỗi đội phải trồng => 100 < x < 200 và x là số tự nhiên

Theo bài ra ta có:

$x \vdots 7 \Rightarrow x \in B(7)$

$x \vdots 8 \Rightarrow x \in B(8)$

$x \vdots 6 \Rightarrow x \in B(6)$

$\Rightarrow x \in BC(7; 8; 6) = \{0; 168; 336; \ldots\}$

Vì 100 < x < 200 nên x = 168

Vậy số cây phải trồng của mỗi đội là 168 cây

Bài 5:

a, Gọi x là số ngày ít nhất ca nô thứ nhất và ca nô thứ hai lại cùng cập bến

Khi đó ta có :

$x \vdots 7 \Rightarrow x \in B(7)$

$x \vdots 6 \Rightarrow x \in B(6)$ và x là nhỏ nhất nên

=> x = BCNN(6; 7) = 42 => Vậy sau 42 ngày thì ca nô 1 và ca nô 2 giặp nhau tại bến

b, Gọi x là số ngày ít nhất ca nô thứ nhất và ca nô thứ ba lại cùng cập bến

Khi đó ta có :

x ⋮ 7 => x∈B(7)

x ⋮ 8 => x∈B(8) và x là nhỏ nhất nên

=> x = BCNN(8 ; 7) = 56 => Vậy sau 56 ngày thì ca nô 1 và ca nô 3 giặp nhau tại bến

c, Gọi x là số ngày ít nhất ca nô thứ hai và ca nô thứ ba lại cùng cập bến

Khi đó ta có :

x ⋮ 6 => x∈B(7)

x ⋮ 8 => x∈B(8) và x là nhỏ nhất nên

=> x = BCNN(8 ; 6) = 24 . Vậy sau 24 ngày thì ca nô 2 và ca nô 3 giặp nhau tại bến

d, Gọi x là số ngày ít nhất ca nô thứ hai và ca nô thứ ba lại cùng cập bến

Khi đó ta có :

x ⋮ 6 => x∈B(6)

x ⋮ 7 => x∈B(7)

x ⋮ 8 => x∈B(8) và x là nhỏ nhất nên

=> x = BCNN(8 ; 6 ; 7) = 168. Vậy sau 168 ngày thì cả ba ca nô giặp nhau tại bến

Bài 6:

Gọi số học sinh của trường đi tham quan là x=> 800< x< 900 và x là số tự nhiên

theo bài ra ta có :

x ⋮ 35 => x∈ B(35)

x ⋮ 40 => x∈ B(40)

=> x∈ BC(35 ; 40) = {0 ; 280 ; 560 ; 840 ; 1120 ; ...}

Mà 800 < x < 900 nên x = 840

Vậy số học sinh đi tham quan của trường là 840 học sinh

Bài 7:

Gọi số tự nhiên cần tìm là x:

Theo bài ra ta có:

x = 31a + 15 và x = 35b + 18 => 31a + 15 = 35b + 18 => 31a - 31b = 4b + 3 => 31(a-b) = 4b + 3

Vì VT ⋮31 nên VP ⋮ 31 => 4b + 3 ⋮ 31, Mà x nhỏ nhất nên a, b cũng nhỏ nhất khi đó b = 7

Thay b =7 vào ta được x =35.7 + 18 = 263

Vậy tập số tự nhiên x cần tìm là 263

Bài 8:

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a-3\vdots 4 \\ a-4\vdots 5 \\ a-5\vdots 6 \end{cases} => \begin{cases} a-3+4\vdots 4 \\ a-4+5\vdots 5 \\ a-5+6\vdots 6 \end{cases} => \begin{cases} a+1\vdots 4 \\ a+1\vdots 5 \\ a+1\vdots 6 \end{cases} => a+1\in BC(6;5;4) => a+1\vdots 60$

Và a + 1 - 300 ⋮ 60 và a⋮13=> a - 13.23⋮13 => a - 299⋮13 => a - 299 ⋮ BCNN (60; 13) =780

=> a = 780k +299

Vậy dạng chung của số tự nhiên trên là a = 780k + 299

Bài 9:

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} n-7\vdots 8 \\ n-28\vdots 31 \end{cases} => \begin{cases} n-7+72\vdots 8 \\ n-28+93\vdots 31 \end{cases} => \begin{cases} n+65\vdots 8 \\ n+65\vdots 31 \end{cases} => n+65\in BC(8;31)$

$n+65\in B(248)=\{0;248;496;744;992;....\} => n\in\{183;431;679;927;...\}$

Vì n là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên n = 927

Vậy số cần tìm là 927

Bài 10:

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a-4 \vdots 7 \\ a-6 \vdots 9 \end{cases} => \begin{cases} a-3+7 \vdots 7 \\ a-6+9 \vdots 9 \end{cases} => \begin{cases} a+3 \vdots 7 \\ a+3 \vdots 9 \end{cases} => a+3 \vdots 63$ Vì UCLN(7;9) =1

Vậy a chia cho 63 dư 60

Bài 11:

Theo bài ra ta có:

a = 7k + 5, b = 7h + 3 và c = 7m + 2, với k, h, m là các số tự nhiên

Khi đó a + b = (7k + 5) + (7h + 3) =7(h + k) + 8 chia 7 dư 1

Vậy a + b chia 7 dư 1

b, Ta có: a + b + c = (7k + 5) + (7h + 3) + (7m + 2) = 7(k + h + m) + 10 chia cho 7 dư 3

Vậy a + b + c chia 7 dư 3

Bài 12:

Gọi a (chiếc) là số đĩa có thể chia được ĐK : $a \in N, a < 36$

Theo bài ra ta có: 96 $\vdots$ a và 36 $\vdots$ a và a là số lớn nhất

Nên a = UCLN(96 ; 36)

Sau khi tìm được a, ta lấy 96 :a là ra số kẹo trong mỗi đĩa, và 36 : a là ra số bánh trong mỗi đĩa

Bài 13:

Gọi a là số hàng dọc có thể xếp được ĐK : $a \in N, a < 42$

Theo bài ra ta có : 54 $\vdots$ a và 42 $\vdots$ a và 48 $\vdots$ a đồng thời a là số lớn nhất

Khi đó a = UCLN(54 ; 42 ; 48)

Bài 14:

Gọi a là số phần thưởng có thể chia theo yêu cầu đầu bài ĐK : $a \in N, a < 48$

Theo bài ra ta có : 48 $\vdots$ a và 64 $\vdots$ a đồng thời a là số lớn nhất

Khi đó a = UCLN(48 ; 64)

Sau khi tìm được a ta lấy 48 chia a là ra số bút chì trong mỗi phần thưởng

Và lấy 64 chia cho a là ra số quyển vở trong mỗi phần thưởng

Bài 15:

Vì 264 chia a dư 24 nên 264 - 24 =240 chia hết cho a hay a $\in$ U(240) và a > 24

Tương tự thì a $\in$ U(320) và a > 43, do đó

a $\in$ UC(240; 320) và a > 43

Bài 16:

Vì 111 chia a dư 15 nên 111 - 15 = 96 chia hết cho a hay a $\in$ U(96) và a > 15

Tương tự thì a $\in$ U(160) và a > 20, do đó

a $\in$ UC(96; 160) và a > 20

Bài 17:

Gọi số chia cần tìm là a,

Ta có số chia là ước của (3972 - 4) và (170 - 42)

Hay $a \in UC(3968;128)$, đồng thời $42 < a < 170 => \left[\begin{array}{l} a=64 \\ a=128 \end{array}\right.$

Bài 18:

Vì UCLN(a; b) = 6 nên $\begin{cases} a = 6a_1 \\ b = 6b_1 \end{cases}$ và (a_1:b_1) = 1, Mà:

$a.b = 72 => 6a_1.6b_1 = 72 => a_1.b_1 = 2$

Mà (a_1:b_1) = 1 và a> b nên $a_1 > b_1$

Do đó ta có bảng sau:

a_1	1	2
a	6	12
b_1	2	1
b	12	6

Vậy các cặp số tự nhiên (a ; b) cần tìm là : (6 ; 12), (12 ; 6)

Bài 19:

Vì UCLN(a; b) = 6 nên $\begin{cases} a = 25a_1 \\ b = 25b_1 \end{cases}$ và (a_1:b_1) = 1, Mà:

$a.b = 3750 => 25a_1.25b_1 = 3750 => a_1.b_1 = 6$

Mà (a_1:b_1) = 1

Do đó ta có bảng sau:

a_1	1	2	3	6
a	25	50	75	150
b_1	6	3	2	1
b	650	75	50	25

Vậy các cặp số tự nhiên (a ; b) cần tìm là : (25 ;650) ,(50 ; 75), (75 ; 50), (150 ;25)

Bài 20:

Vì UCLN(a; b) = 6 nên $\begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases}$ và (a_1:b_1) = 1, Mà:

$a.b = 24300 => 45a_1.45b_1 = 24300 => a_1.b_1 = 12$

Mà (a_1:b_1) = 1

Do đó ta có bảng sau:

a_1	1	3	4	12
a	45	135	180	540
b_1	12	4	3	1
b	540	180	135	45

Bài 21:

Ta có đặt d=UCLN (a+b; a) =>d $\in N^*$

$\begin{cases} a+b \vdots d \\ a \vdots d \end{cases} \to a+b-a \vdots d \to b \vdots d$ mà a $\vdots$ d nên d $\in$UC(a;b) hay d $\in$U(1)=>d=1

Bài 22:

Gọi UCLN (3n+1;5n+4) = d =>7 ⋮ d => d=7 hoặc d=1

Mà d $\neq 1$ nên d=7

Bài 23:

Gọi d=UCLN(2n-1 ; 9n+4),=> d $\in N^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n-1 \vdots d \\ 9n+4 \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 9(2n-1) \vdots d \\ 2(9n+4) \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 18n-9 \vdots d \\ 18n+8 \vdots d \end{cases} => (18n+8)-(18n-9) \vdots d => 17 \vdots d$$

$$=> d \in U(17) = \{\pm1; \pm17\}$$

Do đó UCLN là các số dương nên ta có : d=1 hoặc d=17

Vậy UCLN(2n-1 ; 9n+4) =1 hoặc 17

Bài 24:

Gọi $UCLN(a;b) = d => \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases} (a_1; b_1) = 1$

Giả sử: $a \le b => a_1 \le b_1 => a+b = 42 => d(a_1+b_1) = 42 => d \in U(42)$ (1)

Ta lại có: BCNN(a; b). UCLN(a; b) = a.b

$=> 72.d = a.b = a_1.d.b_1 d => a_1.b_1.d = 72 => d \in U(72)$ (2)

Từ (1) và (2) => $d \in UC(42;72) = \{1;2;3;6\}$

TH1 : d = 1=> $\begin{cases} a_1+b_1 = 42 \\ a_1.b_1 = 72 \end{cases}$ (loại) TH2 : $d = 2 => \begin{cases} a_1+b_1 = 21 \\ a_1.b_1 = 36 \end{cases}$ (loại)

TH3: $d = 3 => \begin{cases} a_1+b_1 = 14 \\ a_1.b_1 = 24 \end{cases}$ (loại)

$$d = 6 => \begin{cases} a_1+b_1 = 7 \\ a_1.b_1 = 12 \end{cases} => \begin{cases} a_1 = 3 => a = 18 \\ b_1 = 4 => b = 24 \end{cases}$$

Vậy a = 18, b = 24 hoặc a=24 và b=18

Bài 25:

Gọi $UCLN(a;b) = d => \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases} (a_1; b_1) = 1$

$=> a-b = 7 => d(a_1-b_1) = 7 => d \in U(7)$ (1)

Ta lại có: BCNN(a; b). UCLN(a; b) = a.b

$=> 140.d = a.b = a_1.d.b_1 d => a_1.b_1.d = 140 => d \in U(140)$ (2)

Từ (1) và (2) => $d \in UC(7;140) = \{1;7\}$

TH1 : d = 1=> $\begin{cases} a_1-b_1 = 7 \\ a_1.b_1 = 140 \end{cases}$ (loại) TH2 :

$$d = 7 => \begin{cases} a_1-b_1 = 1 \\ a_1.b_1 = 20 \end{cases} => \begin{cases} a_1 = 5 => a = 35 \\ b_1 = 4 => b = 28 \end{cases}$$

Vậy a = 35, b = 28

Bài 26:

Gọi $UCLN(a;b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases} (a_1;b_1) = 1$

Mà : $a + 2b = 48 \Rightarrow da_1 + 2db_1 = 48 \Rightarrow d(a_1 + 2b_1) = 48 \Rightarrow d \in U(48)$ (1)

Ta lại có: 3.BCNN(a; b) + UCLN(a; b) = 114

$\Rightarrow d + 3.a_1.b_1.d = 114 \Rightarrow d(1 + 3a_1.b_1) = 114 \Rightarrow d \in U(114)$ (2)

Từ (1) và (2) => $d \in UC(48;114) = \{1;2;3;6\}$

Mà : $d(1 + 3a_1.b_1) = 114 = 3.38 \Rightarrow d \vdots 3$ => d = 3 hoặc d = 6

TH1 : d = 3=> $\begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 3a_1.b_1 = 37 \end{cases}$ (loại)

TH2 : $d = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ a_1.b_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 12 \\ b_1 = 3 \Rightarrow b = 18 \end{cases}$

Vậy a = 12 và b = 18

CHỦ ĐỀ 6:

TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG.
VẬN DỤNG CHỨNG MINH CHIA HẾT CHO MỘT SỐ.

A/ TÌM MỘT CHỮ SỐ TẬN CÙNG.

I/ PHƯƠNG PHÁP.

*** Tính chất 1:**

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên x = a^m, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 3, 7, 9:

Phân tích: $a^m = a^{4n+r} = a^{4n}.a^r$ với r = 0, 1, 2, 3

Từ **tính chất 1c** => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r.

- Nếu chữ số tận cùng của **a** là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên

Từ **tính chất 1d** => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

*** Tính chất 2:**

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

*** Tính chất 3:**

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

*** Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số A =** n^k với n, $k \in N$.

- Nếu A = 10a + b = $\overline{ab}$ $\Rightarrow$ b là chữ số cuối cùng của A.

Ta viết: A = $n^k = (10q + r)^k = 10^t + r^k$ với $r \in N; 0 \le r \le 9$

Chữ số cuối cùng của A chính là chữ số cuối cùng của số r^k

- Nếu A = 100a + $\overline{bc}$ = $\overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A.
- Nếu A = 1000a + $\overline{bcd}$ = $\overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A.
- Nếu A=$10^m.a_m$ + $\overline{a_{m-1}...a_0}$ = $\overline{a_m...a_1a_0}$ thì $\overline{a_{m-1}...a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A.

TÌM MỘT CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Tính chất 1 :

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Bài 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số :

a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + \ldots + 9 + 1)$ chia hết cho 4

=> 99 = 4k + 1 (k thuộc N) => $7^{99} = 7^{4k+1} = 7^{4k}.7$

Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) => 7^{99} có chữ số tận cùng là 7.

b) Dễ thấy $14^{14} = 4k$ (k thuộc N) => theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $5^{67} - 1$ chia hết cho 4 => $5^{67} = 4k + 1$ (k thuộc N)

=> $4^{567} = 4^{4k+1} = 4^{4k}.4$, theo tính chất 1d, 4^{4k} có chữ số tận cùng là 6 nên 4^{567} có chữ số tận cùng là 4.

Tính chất sau được => từ tính chất 1.

Tính chất 2 : *Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2004^{8009}$.

Lời giải

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :

$(2 + 3 + \ldots + 9) + 199.(1 + 2 + \ldots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \ldots + 9) + 9 = 9009.$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Từ tính chất 1 tiếp tục => tính chất 3.

Tính chất 3 :

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2004^{8011}$.

Lời giải

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; …

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng : $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

Bài 4 : Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.

Lời giải

1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 => $n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 => $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.

Sử dụng tính chất *"một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9"*, ta có thể giải được bài toán sau :

Bài 5 : Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương :

a) $M = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn)

b) $N = 2004^{2004k} + 2003$

Sử dụng tính chất *"một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9"*, ta tiếp tục giải quyết được bài toán :

Bài 6 : Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng : $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

* Các bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài 1 : Tìm số dư của các phép chia :

a) $2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2003^{8005}$ cho 5

b) $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2003^{8007}$ cho 5

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của X, Y :

$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \ldots + 2004^{8010}$

$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \ldots + 2004^{8016}$

Bài 3 : Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau :

$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2005^{8013}$

$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2005^{8015}$

Bài 4 : Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn :

$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004$.

* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Nếu $x \in N$ và $x = 100k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

Hiển nhiên là $y \le x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 4$ ta có :

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^{n-1} \vdots 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của aq.

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \le v < n$) ta có :

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1 \vdots 100 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v.

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v.

Bài 7 : Tìm hai chữ số tận cùng của các số :

a) a^{2003} b) 7^{99}

Lời giải

a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác :

$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8$ (k $\in$ N).

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 74 - 1 \vdots 100$.

Mặt khác : $9^9 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1$ (k $\in$ N)

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7$ (q $\in$ N) tận cùng bởi hai chữ số 07.

Bài 8 : Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Lời giải

Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517}. Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác : $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243$, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp.

Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu a = 2 hoặc a = 3 thì n = 20 ; nếu a = 7 thì n = 4.

Một câu hỏi đặt ra là : Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 4 : Nếu a $\in$ N và (a, 5) = 1 thì $a^{20} - 1 \vdots 25$.

Bài 9 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + ... + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2004^{2003}$

Lời giải

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi a $\in$ N và (a, 5) = 1 ta có a100 - 1 $\vdots$ 25.

Vậy với mọi a $\in$ N ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.

Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + ... + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$. áp dụng công thức :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + ... + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, $S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + ... + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$.

áp dụng công thức :

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

=> $1^3 + 2^3 + \ldots + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 5 : Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu :

+ A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;

+ A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;

+ A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;

+ A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;

+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Bài 10 : Cho $n \in N$ và $n - 1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Do $n - 1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r$ ($r \in \{0, 2, 3\}$). Ta có $7^4 - 1 = 2400 : 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$ ($r = 0, 2, 3$) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \le x$).

Do $1000 = 8 \times 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m$ chia hết cho 2^m. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 125.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để a^q chia hết cho 8 ta có :

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 125 => $a^{pn} - 1$ chia hết cho 125. Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1)$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q.

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 1000.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \le v < n$) ta có :

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 1000 => $a^{un} - 1$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v.

Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6 :

Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh : Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80} khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

=> $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

Bài 11 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}.

Lời giải

Theo *tính chất 6*, do $(123, 5) = 1$ => $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác :

$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ => $123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $123^{100} - 1$ chi hết cho 1000

=> $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \cap N$).

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài 12 : Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$.

Lời giải

Theo *tính chất 6*, do $(9, 5) = 1$ => $9^{100} - 1$ chi hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 => $3^{399...98} = 9^{199...9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ ($p, q \in N$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99}.

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 => ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$ => ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{??9} \times 9 = \overline{...001}$ để xác định $\overline{??9} = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước : Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài 13 : Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200}.

Lời giải

do $(2004, 5) = 1$ (*tính chất 6*)

=> 2004^{100} chia cho 125 dư 1

=> $2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

=> 2004^{200} chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.

Sau đây là một số bài tập vận dụng :

Bài 1 : Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 2 : Chứng minh $9^{20002003}$, $7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 3 : Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) 3^{999} b) 11^{1213}

Bài 4 : Tìm hai chữ số tận cùng của :

$S = 2^3 + 2^{23} + ... + 2^{40023}$

Bài 5 : Tìm ba chữ số tận cùng của :

$S = 1^{2004} + 2^{2004} + ... + 2003^{2004}$

Bài 6 : Cho (a, 10) = 1. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.

Bài 7 : Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200}.

Bài 8 : Tìm ba chữ số tận cùng của số :

$1993^{19941995...2000}$

Bài 9 : Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21}.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Chứng minh rằng: $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10.

Bài 2. Tìm hai số tận cùng của 2^{100}

Bài 3. Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}.

Bài 4. Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1992}.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Ta thấy một số có tận cùng bằng 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6 (vì nhân hai số có tận cùng bằng 6 với nhau, ta được số có tận cùng bằng 6). Do đó ta biến đổi như sau:

$$8^{102} = \left(8^4\right)^{25}.8^2 = (...6)^{25}.64 = (...6).64 = ...4;$$

$$2^{102} = \left(2^4\right)^{25}.2^2 = 16^{25}.4 = (...6).4 = ...4.$$

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ có chữ số tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10.

Nhận xét: Để tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa ta làm như sau:

- Các số có tận cùng bằng 0; 1; 5; 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0; 1; 5; 6
- Các số có tận cùng bằng 2; 4; 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 6
- Các số có tận cùng bằng 3, 5, 7 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 1

Bài 2.

Chú ý rằng: $2^{10} = 1024$, bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76. Do đó:

$2^{100}=\left(2^{10}\right)^{10}=1024^{10}=\left(1024^{2}\right)^{5}=(...76)^{5}=...76$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{100} là 76.

Bài 3.

Ta thấy: $7^4=2401,$ số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 01. Do đó: $7^{1991}=7^{1988}.7^{3}=\left(7^{4}\right)^{497}.343=(...01)^{497}.343=(...01).343=...43.$

Vậy 7^{1991} có hai chữ số tận cung là 43.

Nhận xét: Để tìm hai chữ số tận cùng của một lũy thừa, cần chú ý đến những số đặc biệt:

- Các số có tận cùng bằng 01, 25, 76 khi nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01, 25, 76;
- Các số 3^{20} (hoặc 81^{5})$;7^{4};51^{2};99^{2}$ có tận cùng bằng 01;
- Các số $2^{20};6^{5};18^{4};24^{2};68^{4};74^{2}$ có tận cùng bằng 76;
- Số $26^{n}\,(n>1)$ có tận cùng bằng 76.

Bài 4. $5^{1992}=\left(5^{4}\right)^{498}=(0625)^{498}=...0625.$

CHỦ ĐỀ 7:

SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số nguyên tố

+ Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 có 2 ước dương là 1 và chính nó.

+ Số nguyên tố nhỏ nhất là 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.Tất cả số nguyên tố còn lại đều là số lẻ.

2. Hợp số

+ Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có nhiều hơn 2 ước dương.

+ Ước nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số không vượt quá $\sqrt{a}$.

3. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

+ Là viết số đó dưới dạng tích của nhiều thừa số, mỗi thừa số là một số nguyên tố hoặc là lũy thừa của một số nguyên tố.

+ Dù phân tích một thừa số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được một kết quả duy nhất.

4. Số nguyên tố cùng nhau.

+ Hai hay nhiều số được gọi là nguyên tố cùng nhau khi UCLN của chúng bằng 1.

+ Hai số tự nhiên liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

5. Hệ quả.

+ Số a > 1 không có ước nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{a}$ thì a là một số nguyên tố.

+ Tập hợp số nguyên tố là vô hạn.

B.CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1. SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIA SỐ NGUYÊN.

** Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.*

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng* $4n \pm 1$.

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng* $6n \pm 1$.

Chứng minh:

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 2*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 4n – 1; 4n ; 4n + 1; 4n + 2 .

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và 4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đề có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 4. 4 - 1 = 15 không là số nguyên tố .

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 3*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 6n – 1; 6n ; 6n + 1; 6n + 2 ; 6n + 3

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 4n và 6n; 6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đề có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in N)$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 6. 4 + 1 = 25 không là số nguyên tố.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số 8p+1 và 8p-1 là 2 số nguyên tố, hỏi số thứ 3 (ngoài 2 số nguyên tố, số còn lại) là số nguyên tố hay hợp số?

Lời giải

Với p =3 ta có 8p + 1 = 25 là hợp số, còn 8p-1 là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ ta có 8p-1,8p,8p+1 là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3.Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3,do đó 8p-1 hoặc 8p+1 có một số chia hết cho 3.

Vậy số thứ 3 là hợp số.

Bài 2. Hai số $2^n - 1$ và $2^n + 1$ (n>2) có thể đồng thời là số nguyên tố được không? Tại sao?

Lời giải

Trong 3 số nguyên liên tiếp $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng 2^n không chia hết cho 3, do đó $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3 và lớn hơn 3. Vậy $2^n - 1, 2^n + 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu p và p + 2 là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Lời giải

Ta có: p + (p + 2) = 2(p+1).

. p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ suy ra: $p + 1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4$ (*)

. p, p + 1, p + 2 là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p+2 không chia hết cho 3 nên:

$$p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3 \text{ (**)}$$

Từ (*) và (**) suy ra: $2(p+1) \vdots 12$. (đpcm)

Bài 4. Tìm số nguyên tố p sao cho p + 10 và p + 14 là các số nguyên tố.

Lời giải

Với p = 3 thì p+3 = 13 và p + 14 = 17 là các số nguyên tố.

Với p >3 thì $p = 3k \pm 1$.

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+14 = 3k+15 \vdots 3$;

Nếu $p = 3k-1$ thì $p+10 = 3k+9 \vdots 3$;

Vậy với $p = 3$ thì $p+10$ và $p+14$ là số nguyên tố.

Bài 5.

a) Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Lời giải

a) Trong 3 số lẻ liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy trong 3 số nguyên tố đã cho phải có một số chia hết cho 3 và 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp là 3, 5, 7.

b) giả sử $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ $p = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố. Vì p_1, p_2 là số nguyên tố nên $p > 2$, suy ra p lẻ. Trong hai số p_1, p_2 phải có một số chẵn, trong hai số p_3, p_4 cũng phải có một số chẵn. Chẳng hạn $p_2 = p_4 = 2$. Khi đó: $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_3 = p_1 + 4$. Ta có $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là các số nguyên tố lẻ liên tiếp nên theo câu a) $p_1 = 3$ từ đó $p = 5$. Thử lại: $5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

Bài 6. Tìm các số tự nhiên k để dãy: $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải

Với k = 0 ta có dãy $1, 2, 3, ..., 10$ chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.

Với k =1 ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.

Với k = 2 ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.

Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này lớn hơn 3 nên chia có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại k = 1 thì dãy $k+1, k+2, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 7. Ta gọi p, q là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k\pm1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2 ⋮ 3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy p = 3, q = 5, r = 7, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Bài 8. Tìm 3 số nguyên tố sao cho $p^q+q^p=r$.

Lời giải

Giả sử có 3 số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q+q^p=r$. Khi đó $r>3$ nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử p = 2 và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q+q^2=r$. Nếu q không chia hết cho 3 thì $q^2\equiv1$(mod 3). Mặt khác vì q lẻ nên $2^q\equiv-1$(mod 3), từ đó suy ra $2^q+q^2 ⋮ 3 \Rightarrow r ⋮ 3$, vô lí. Vậy q = 3, lúc đó $r=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Vậy $p=2, q=3, r=17$ hoặc $p=3, q=2, r=17$.

Bài 9. a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 30 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n,30) = 1.

Lời giải

a) Giả sử p là số nguyên tố và $p=30k+r$ với $0<r<30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q\le\sqrt{30}\Rightarrow q=2;3;5$. Nhưng với q =2; 3; 5 thì q lần lượt chia hết cho 2; 3; 5, vô lí.Vậy r = 1 hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn p= 109= 60.1+ 49, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với r=1, 11, 19, 29 thì $p^2\equiv1$ (mod 30).

Với r =7, 13, 17, 23 thì $p^2\equiv19$ (mod 30).

Suy ra $p^4\equiv1$ (mod 30).

Giả sử $p_{1,}p_2,...p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q=p_1{}^4+p_2{}^4+...+p_n{}^4\equiv n(\text{mod }30)\Rightarrow q=30k+n$ là số nguyên tố nên (n,30)=1.

Bài 10. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc<ab+bc+ca$.

Lời giải

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a\le b\le c$.

Khi đó $ab+bc+ca\le3bc\Rightarrow abc<3bc\Rightarrow a<3\Rightarrow a=2$ (vì a là số nguyên tố). Với a =2 ta có $2bc<2b+2c+bc\Rightarrow bc<2(b+c)\le4c\Rightarrow b<4\Rightarrow b=2$ hoặc b=3.

Nếu b = 2 thì $4c<2+4c$ thõa với c là số nguyên tố bất kì.

Nếu b = 3 thì $6c<6+5c\Rightarrow c<6\Rightarrow c=3$ hoặc $c=5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 11. Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1a_2a_3...a_{n-1} + 1$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng $a_k \ne 5$ với mọi k.

Lời giải

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3....a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$, suy ra $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3....a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_{3,...}a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố của 5, tức là $a_k \ne 5$, $\forall k \in N^*$.

Bài 12. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Với p = 2 ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với p = 3 ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với p > 3 ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với p = 3 thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

DẠNG 2. ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ FERMAT.

p là số nguyên tố và (a,p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Bài 1. Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2n} + 1$ để tìm các số nguyên tố với mọi n tự nhiên.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi n = 4.
2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải

1. Ta thay n= 4 vào công thức Fermat và được:

$2^{2^4} + 1 = 65537$ là số nguyên tố.

2.Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối 6+7=13 đúng bằng tỏng ba chữ số còn lại 5+5+3=13.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2 = 36 + 25 + 25 + 9 + 49 = 144$ là số chính phương vì $144 = 12^2$.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2+7^2=36+49=85$. Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là $5^2+5^2+3^2=25+25+9=59$. Tổng các chữ số đó là $6+5+5+3+7=26$.

Ta nhận thấy rằng $85-59=26$. Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố 65537.

Bài 2. Cho $n\in N^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}}+19$ và $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là những hợp số.

Lời giải

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$ với mọi $n\geq 1$.

Ta có: $2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,1)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2(\text{mod}\,22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2,(k\in N)$.

Theo định lý Fermat:

$2^{22}\equiv 1(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}\equiv 4(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19\vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n\in N*$.

Ta chứng minh: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5\vdots 11$ với mọi $n\geq 1$.

Bài 3. Tìm số nguyên tố p sao cho 2^p+1 chia hết cho p.

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa: $2^p+1\vdots p$.

Theo định lý Fermat:

$2^p\equiv 2(\text{mod}\,p)\Rightarrow 2^p-2\vdots p\Rightarrow 3=(2^p+1)-(2^p-2)\vdots p\Rightarrow p=3$.

Với p=3 ta có $2^p+1=9\vdots 3$.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n-1$ chia hết cho p.

Lời giải

Ta có $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod}\,p)$, ta tìm $n=(p-1)$ sao cho $n.2^n\equiv 1(\text{mod}\,p)$.

Ta có: $n.2^n=m(p-1).2^{m(p-1)}(\text{mod}\,p)\Rightarrow n.2^n\equiv -m\equiv 1(\text{mod}\,p)\Rightarrow m=kp-1,(k\in N*)$.

Vậy, với $n=(kp-1)(p-1),(k\in N*)$ thì $n.2^n-1\vdots p$.

Bài 5. Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số 2^p-1 chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk+1$.

Lời giải

Gọi q là ước nguyên tố của 2^p-1 thì q lẻ, nên theo định lí Fermat:

$2^{q-1}-1\vdots q\Rightarrow (2^p-1,2^{q-1}-1)=2^{(p,q-1)}-1\vdots q\Rightarrow q-1\vdots p$, vì nếu $(q-1,p)=1$ thì $1\vdots q$, vô lí.

Mặt khác: q-1 chẵn suy ra $q-1\vdots 2p\Rightarrow q=2pk+1$.

Bài 6. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\dfrac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1}\equiv 1$ (mod m).

Lời giải

Ta có: $m=\frac{3^p-1}{2}.\frac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\frac{3^p-1}{2}, b=\frac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9 \vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9 \vdots 8p \Rightarrow m-1 \vdots \frac{9^p-9}{8} \vdots p$.

Vì $m-1 \vdots 2$ nên $m-1 \vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \frac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 7. Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay

$p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p=2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p=3 có $2003+23.8=3^7$

Với p=4 có $2003+23.6=2141$

Với p=2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 8. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Lời giải

Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}.....,p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6 \equiv 1(\bmod 7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3 = (7k+r)^3 = 7t \pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0 \le r \le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0 \le k \le 7$.

. Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$7.7.7.7.7.7.7 = 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6$ thỏa mãn (*).

. Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.

Bài 1. Tìm $n \in N^*$ để:

a) $n^4 + 4$ là số nguyên tố. b) $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có:

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n).$$

Nếu $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Thử lại: Với $n = 1$ thì $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy, với n=1 thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

b) Ta có: $n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$.

Với $n > 1$ ta có:

$n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1$ do đó: $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^3 + n + 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số.

Với n = 1 thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 2.

a) Tìm các số nguyên số p để 2p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p+1 là lập phương của một số tự nhên.

Lời giải

a) Giả sử $2p + 1 = n^3$ (với $n \in N$); n là số lẻ nên $n = 2m + 1$ ($m \in N$), khi đó

$$2p + 1 = (2m+1)^3 \Rightarrow p = m(4m^2 + 6m + 3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m = 1$, suy ra $p = 13$.

Thử lại: $2p + 1 = 2.13 + 1 = 27 = 3^3$. Vậy $p = 13$.

b) Giả sử $13p + 1 = n^3 (n \in N)$; $p \ge 2$ suy ra $n \ge 3$.

$$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743 \Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13 \Rightarrow n=3$, khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy với p = 2, p = 211 thì 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa $x^2-2y^2=1$.

Lời giải

Giả sử x, y là các số nguyên tố thỏa: $x^2-2y^2=1$. Khi đó $x^2=2y^2+1$, suy ra x là số lẻ, đặt $x=2n+1(n\in N^*)$. Ta có:

$(2n+1)^2=2y^2+1 \Rightarrow 4n^2+4n+1=2y^2+1 \Rightarrow y^2=2(n^2+n)\vdots 2 \Rightarrow y\vdots 2$, mà y là số nguyên tố nên suy ra y = 2.

Với y = 2, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2-2y^2=1$.

Bài 4. Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y+1=z$.

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x\ge 2, y\ge 2$ suy ra $z\ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x=2, khi đó $z=2^y+1$.

Nếu y lẻ thì $2^y+1\vdots 3$, suy ra $z\vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z=2^2+1=5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x=y=2; z=5$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n (n\in N^*)$ là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k\in N$.

Lời giải

Đặt $n=3^k.m$ với (m, 3)=1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)}=1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a=2^{3^k}$), suy ra

$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1 \Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2, (l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 6. Cho $a, b, c, d\in N^*$ thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng: $A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số với mọi $n\in N$.

Lời giải

Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a = ta_1, c = tc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1 b = c_1 d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt: $b = kc_1 \Rightarrow c_1 d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó: $A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^n a_1^n + k^n c_1^n + t^n c_1^n + k^n a_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 7. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (n \geq 1)$.

Lời giải

Ta có:

$$p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\dfrac{n-1}{2} > 1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 8. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Lời giải

Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\dfrac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Từ * ta có ab = ap - bp $(a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 9. Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố $(a, b, c \in N^*)$. Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Lời giải

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a,b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn, vậy p = 2.

Từ đó suy ra a = b = 1; q = c + 1 và r = c + 1 nên q = r.

Bài 10.

a) Cho $2^k + 1$ là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Cho 2^k - 1 là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Lời giải

a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó k = 2^n . t, với t lẻ > 1. Vô lí với 2^k + 1 là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó 2^k - 1 = $\left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì 2^t-1 >1.

Vậy k là số nguyên tố.

DẠNG 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN NHỜ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT SỐ NGUYÊN TỐ.

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các số nguyên tố của số dạng $n = a^{2^t} + b^{2^t}$.

Một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình:

** **Mệnh đề 1**. Nếu số nguyên tố* $p = 2^t k + 1$ *với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước của số* $n = a^{2^t} + b^{2^t}$ *thì p là ước số chung của a và b.*

<u>Chứng minh:</u>

+ Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số b

$\Rightarrow (a, p) = (b, p) = 1$. *Theo định lí nhỏ Fermat thì* $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$ *hay* $a^{2^t k} \equiv 1$ *(mod p).*

+ Tương tự $b^{2^t k} \equiv 1$ *(mod p) suy ra* $a^{2^t k} + b^{2^t k} \equiv 2$ *(mod p)* *

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $(a^{2^t})^k + (b^{2^t})^k = (a^{2^t} + b^{2^t}).M = n.M$ *trong đó k lẻ và M là số nguyên.*

Theo giả thiết $n \vdots p \Rightarrow (a^{2^t} + b^{2^t}) \vdots p$*, mâu thuẫn với *.*

Tương tự p không là ước của số p thì p không là ước của số a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b.

** **Mệnh đề 2**: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của* $a^2 + b^2$ *chỉ có dạng 4m + 1 (mà không có dạng 4m + 3) trong đó m là số nguyên dương.*

<u>Chứng minh:</u>

+ Xét ước số nguyên tố p = 4m + 3 = 2(2m + 1) +1. Theo mệnh đề 1 nếu p là ước số nguyên tố của n = $a^2 + b^2$ *thì p là ước số chung của a và b* $\Rightarrow p = 1$*, mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng p = 4m + 1.*

+ Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - y^3 = 7$ (1)

Lời giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2+1=y^3+2^3 \Leftrightarrow x^2+1=(y+2)(y^2-2y+4)$ (2)

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x=2t+1 \Rightarrow x^2+1=4t^2+4t+2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y=2k+1 \Rightarrow y^2-2y+4=4k^2+3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng 4m + 3 (vì tích các số dạng 4m + 1 lại có dạng 4k + 1). Suy ra x^2+1 có ước số nguyên tố dạng p = 4m + 3, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Lời giải

Giả sử $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d=(x, y)$ thì $x=du, y=dv$ với $(u,v)=1$.

Theo giả thiết $x^2+y^2=k(x-y) \Leftrightarrow d(u^2+v^2)=k(u-v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì u^2+v^2 không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d=k.t$. Từ (1) có $t(u^2+v^2)=u-v$, do đó $u^2<u^2+v^2\le u-v<u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2+v^2)=5m(u-v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$t(u^2+v^2)=5(u-v)$ (2)

Từ (2) có $u^2+v^2\le 5(u-v)$

$A=u^2+v^2-5(u-v)\le 0$ (3)

Mặt khác

$$4A=4u^2-20u+25+4v^2+20v+25-50=(2u-5)^2+(2v+5)^2-50\ge 1^2+7^2-50\ge 0 \Rightarrow A\ge 0$$

Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u-5=\pm 1$ và v = 1,

nghĩa là $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t=1 \Rightarrow d=m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x=3m \\ y=m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 3. Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng 15a + 16b và 16a -15b với a, b là các số nguyên dương nào đó.

Lời giải

Giả sử 15a + 16b =m^2 và 16a -15b = n^2 (1) với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó:

$$m^4+n^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=(15^2+16^2)(a^2+b^2)=481(a^2+b^2)$$

hay $m^4+n^4=13.37(a^2+b^2)$ (2)

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p=2^2k+1$ với k lẻ.

Giả sử $(m,n)=d\Rightarrow m=du, n=dv$ với (u,v) =1 thì (2) trở thành $d^4(u^4+v^4)=481(a^2+b^2)$ (3)

Vì (u,v) = 1 nên u^4+v^4 không chứa các ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của d $\Rightarrow d=481.t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy t = 1. Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4+v^4)=a^2+b^2$ (4)

Từ (1) có $m^2-n^2=31b-a$ hay $481^3(u^2-v^2)=31a-b$ (5).

Có thể chọn $u=v=1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó a = 31b và $a^2+b^2=481^3.2$. Từ đó có b = 481 và a = 31.481 suy ra m = n = 481.

Bài 4. Tìm số có 3 chữ số mà có đúng 5 ước.

Lời giải

Giả sử p và q là hai số nguyên tố khác nhau, khi đó pq có 4 ước đó là 1, p, q, pq và số p^2q có 6 ước đó là 1, p, p^2, q, pq, p^2p. Do đó số phải tìm có dạng p^n.

Vì số p^n có n + 1 ước nên muốn có đúng 5 ước thì rõ ràng n = 4.

Số p^4 là số có 3 chữ số khi p = 5.

Vậy số phải tìm là 5^4 = 625.

Bài 5. Tìm 3 số nguyên tố biết rằng một trong ba số đó bằng hiệu các lập phương của hai số kia.

Lời giải

Gọi ba số nguyên tố đó là a, b, c. Ta có $c=a^3-b^3$ chẳng hạn. Thế thì

$c=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Muốn c là số nguyên tố thì a - b = 1, điều này chỉ xảy ra khi các số nguyên tố là a = 3, b = 2. Suy ra: c = 27 - 8 = 19.

Vậy ba số nguyên phải tìm là 2; 3; 19.

Bài 6. Xét dãy số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;... ta lập hai dãy số 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7; 18 = 7 + 11; 24 = 11 + 13; ... và 6 = 2.3; 15 = 3.5; 35 = 5.7; 77 = 7.11; 143 = 11.13; ... Có hay không một số hạng nào đó của dãy thứ nhất bằng một số hạng nào đó của dãy thứ hai.

Lời giải

Trước hết ta nhận xét rằng:

. Ở dãy thứ nhất các số hạng theo thứ tự là tổng của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 5) đều là chẵn.

. Ở dãy thứ hai các số hạng theo thứ tự là tích của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 6) đều là lẻ.

Do đó ta có thể kết luận rằng: không có một số hạng nào của dãy thứ nhất bằng một số hạng của dãy thứ hai.

Bài 7. Tìm số nguyên tố p biết rằng p + 2 và p + 4 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Do $p \neq 1$ vì 1 không phải là số nguyên tố, nên p có thể có dạng p = 3k.

Nếu p = 3k + 1 thì p + 2 = 3k + 3 là hợp số.

Nếu p = 3k + 2 thì p + 4 = 3k + 6 cũng là hợp số.

Do đó p chỉ có thể bằng 3 và p + 2 = 3 + 2 =5 là số nguyên tố,

p + 4 =3 +4 =7 là số nguyên tố.

Bài 8. Có bao nhiêu số có ba chữ số mà mỗi chữ số của nó là ước nguyên tố của chúng?

Lời giải

Các ước nguyên tố có 1 chữ số là: 2; 3; 5 và 7. Nếu số phải tìm bắt đầu bằng chữ số 2 thì nó phải chia hết cho 2 và tận cùng bằng 2.Chữ số thứ hai phải là 2, vì số 232 không chia hết cho 3, số 252 không chia hết cho 5 và số 272 không chia hết cho 7. Vậy số phải tìm là 222.

Tương tự số phải tìm mà bắt đầu bằng chữ số 5 thì đó là số 555.

Bây giờ nếu bắt đầu bằng 3 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 3, do đó chúng chỉ có thể là 3 và 3 hoặc 5 và 7.

Thử lại thấy rằng chỉ có số 333 là thích hợp.

Cuối cùng nếu bắt đầu bằng 7 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 7. Thử lại thấy rằng chỉ có hai số 777 và 735 là thích hợp.

Tóm lại có 5 số thỏa mãn bài ra là: 222; 333; 555; 735; 777.

Bài 9. Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Lời giải

Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a+n)+10(b-n)+(c-n)=n(100a+10b+c)$ hay

$100a+100n+10b-10n+c-n=100an+10bn+cn$.

Từ đó ta được:

$$100a+10b+c=\frac{89n}{n-1}.$$

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1.

Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc}=178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 10. Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng 111...11?

Lời giải

Trước hết ta nhận xét rằng số có dạng 111...11 không chia hết cho 2 số nguyên tố 2 và 5.

Giả sử p là số nguyên tố khác 2 và 5. Ta hãy xét p + 1 số sau:

1, 11, 111, 1111, ...,111...11.

ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, thế thì hiệu của chúng 11...1100..0 chia hết cho p.

vậy số có dạng 111...11 có ước là tất cả số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

DẠNG 5. CÁC BÀI TOÁN VỀ HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau   ƯCLN(a, b) = 1.
Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau   ƯCLN(a, b, c) = 1.
Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau
ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, c) = ƯCLN(c, a) = 1.

Bài 1. Chứng minh rằng:

a)Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 ($n\in N$) là hai số nhuyên tố cùng nhau.

Lời giải

a) Gọi $d\in uc(n,n+1)\Rightarrow (n+1)-n\,\vdots\, d\Rightarrow 1\,\vdots\, d\Rightarrow d=1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d\in uc(2n+1,2n+3)\Rightarrow (2n+3)-(2n+1)\,\vdots\, d\Rightarrow 2\,\vdots\, d\Rightarrow d\in\{1,2\}$. Nhưng $d\neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d=1.

c) Gọi $d\in ƯC(2n+1,3n+1)\Rightarrow 3(2n+1)-2(3n+1)\,\vdots\, d\Rightarrow 1\,\vdots\, d\Rightarrow 1\,\vdots\, d$.

Bài 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.

a) a và a + b. b) a^2 và a + b. c) ab và a + b.

Lời giải

a) Gọi $d \in ƯC(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên $d \in ƯC(a,b)$, do đó d = 1(vì a, b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.

Vậy a^2 và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.

Vậy (ab, a + b) = 1.

Bài 3. Tìm số tự nhiên n để các số 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$9n + 24 - 3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2;3\}$.

Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số 9n + 4 và 3n + 4 không chia hết cho 2. Ta thấy:

9n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 9n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ,

3n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 3n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ.

Vậy điều kiện để (9n + 4, 3n + 4) = 1 là n là số lẻ.

C/ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1:

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

c) p +2, p + 6, p +8, p + 12, p + 14.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a, k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

Dạng 2.

Bài 10. Cho $n \in N*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) A = $2^{2^{2n+1}}+3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}}+7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}}+13$.

Bài 11. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

Bài 12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

Bài 13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Dạng 3.

Bài 14. Tìm $n \in N*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 15. Tìm các số $x, y \in N*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

Bài 16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ $(n \geq 1)$.

Bài 17. Cho $n \in N*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với n>1.

Dạng 4.

Bài 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b)+b-a=y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

Bài 19. Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + y^2 = 585$

b) $x^2 + y^2 = 1210$.

Dạng 5.

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) $7n + 10$ và $5n + 7$;

b) $2n + 3$ và $4n + 8$.

Bài 20. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và a - b $(a > b)$;

b) $a^2 + b^2$ và ab.

Bài 21. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

Bài 22. Tìm số tự nhiên n, sao cho:

a) $4n - 5$ chia hết cho 13 ;

b) $5n + 1$ chia hết cho 7 ;

c) $25n + 3$ chia hết cho 53.

Bài 23. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) $4n + 3$ và $2n + 3$;

b) $7n + 13$ và $2n + 4$;

c) $9n + 24$ và $3n + 4$;

d) $18n + 3$ và $21n + 7$

Bài 24. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n + 15$ và $n + 72$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 25.

a) Viết các số 7, 8, 9, 10 thành tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 6 đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Dạng 1.

Bài 1. a) b) Đáp số: $p = 3$. Xét p dưới các dạng: $p = 3k$, $p = 3k + 1$, $p = 3k + 2$ $(k \in N)$.

c) Đáp số: $p = 5$. Xét p dưới các dạng : $p = 5k$, $p = 5k + 1$, $p = 5k + 2$,

$p = 5k + 3$, $p = 5k + 4$ $(k \in N)$.

Bài 2. $n = 3$.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1)⋮3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)⋮3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy (p - 1)(p + 1) ⋮ 24.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r (k, r $\in$N, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r (k,r $\in$N,0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p=1010...101=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9. Tất cả đều là hợp số.

a) $A=\underbrace{11...1}_{2001}=\underbrace{1+1+...+1}_{2001}⋮3$.

b) $B=\underbrace{11...1}_{2000}⋮11$.

c) $C=1010101⋮101$.

d) $D=1112111=1111000+1111⋮1111$.

e) $E⋮3$ vì $1!+2!=3⋮3$, còn $3!+4!+...+100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

Dạng 2.

Bài 10. Chứng minh $A \vdots 7; B \vdots 11; C \vdots 29$.

Bài 11. 240 = 2^4. 3. 5.

Bài 12. n = 6k + 4, k$\in$N.

Bài 13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

Dạng 3.

Bài 14. $n^3 - n^2 + n - 1 = (n-1)(n^2+1)$, n =2.

Bài 15.

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$x = y = 1$ thì $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố.

Bài 16. $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n \geq 4$ thì n +3 >6 và n^2 + 2 > 17.

n + 3 và n^2 +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

Bài 17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 (k$\in$N*), ta có:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k+1} = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2.n^2.2^{2k+1} \\ &= (n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}) \\ &= \left[(n-2^k)^2 + 2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2 + 2^{2k}\right] \end{aligned}$$

Dạng 4.

Bài 18. Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b) > 0$, suy ra b < x <a. Đặt $a - x = m, x - b = n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn - m - n = y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi $(2) \Leftrightarrow (4m-1)(4n-1) = 4y^2 + 1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1) \vdots p$ hay $4y^2 \equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow \left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Dạng 5.

Bài 20. a) Gọi $d \in ƯC(7n+10, 5n+7)$ thì

$5(7n+10) - 7(5n+7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

b) Gọi d là ƯCLN (2n + 3, 4n + 8).

(4n + 8) - 2(2n + 3) $\vdots$ d $\Rightarrow 2 \vdots d$.

Do d là ước của số lẻ 2n + 3 nên d = 1.

Bài 21.

a) Gọi d $\in$ ƯC$(b, a-b)$ thì $a-b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a,b)=1$

nên d = 1.

b) Giả sử a^2+b^2 và ab cùng chia hết cho cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 21.

Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 22.a)

$$4n-5 \vdots 13$$
$$\Rightarrow 4n-5+13 \vdots 13$$
$$\Rightarrow 4n+8 \vdots 13$$
$$\Rightarrow 4(n+2) \vdots 13$$

Do (4, 13) = 1 nên n + 2 $\vdots$ 13.

Đáp số: n = 13k - 2 (k $\in N^*$).

b) Đáp số: n = 7k - 3 (k $\in$ N).

c) $25n+3 \vdots 53 \Rightarrow 25n+3-53 \vdots 53$.

Đáp số: n = 53k + 2 (k $\in$ N).

Bài 23.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử 18n + 3 và 21n + 7 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$6(21n+7)-7(18n+3) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d$.

Vậy $d \in \{3;7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 21n + 7 không chia hết cho 3. Như vậy (18n +3, 21n + 7) $\neq 1 \Leftrightarrow 18n+3 \vdots 7$ (còn 21n + 7 luôn chia hết cho 7) $\Leftrightarrow 18n+3-21 \vdots 7 \Leftrightarrow 18(n-1) \vdots 7 \Leftrightarrow n-1 \vdots 7$.

Vậy nếu n $\neq 7k+1 (k \in N)$ thì $(18n+3, 21n+7)=1$.

Bài 24.

Bài toán không yêu cầu tính mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+15, n+72)=1$. Do đó ngoài cách giải trên có thể giải như sau:

Gọi $d \in ƯC(n+15, n+72)$ thì $57 \vdots d$. Do $n+15 \vdots d, 57 \vdots d$ nên nếu tồn tại n sao cho n + 15 = 57k + 1 thì d = 1. Nếu ta chọn n = 57k - 14 (k = 1, 2, 3, ….) thì

(n + 15, n + 72) = 1, rõ ràng có vô số giá trị n.

CHUYÊN ĐỀ 8:

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. Định nghĩa:

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

A : là số chính phương thì $A = k^2$ ($k \in N$)

II. Tính chất:

1) Số chính phương chỉ có thể tận cùng bằng: 0;1; 4; 5; 6; 9; không thể tận cùng bằng 2; 3; 7; 8.
2) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chức các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa các thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

Chứng minh:

Giả sử $A = k^2$ và $k = a^x.b^y.c^z$… (a; b; c; … là các số nguyên tố)

thì $A = (a^x.b^y.c^z…)^2 = a^{2x}.b^{2y}.c^{2z}$… (đpcm)

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

a. Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4
b. Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9
c. Số chính phương chia hết cho 5 phải chia hết cho 25
d. Số chính phương chia hết cho 8 thì phải chia hết cho 16
e. Tích của các số chính phương là một số chính phương
f. A = a.b, nếu a là số chính phương thì b cũng là số chính phương.

3) Số lượng các ước của một số chính phương là lẻ. Ngược lại, một số có số lượng các ước là lẻ thì số đó là số chính phương

Chứng minh:

Nếu A = 1 thì A là số chính phương có một ước. Ta giả sử A > 1 có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là $A = a^x.b^y.c^z$… thì số lượng các ước của A là (x+1)(y+1)(z+1) …

a) Nếu A là số chính phương thì x; y; z; … là các số chẵn, nên x+1; y+1; z+1; … là lẻ, do đó số lượng các ước của A là lẻ.;
b) Nếu số lượng các ước của A là lẻ thì (x+1)(y+1)(z+1) … là lẻ

Do đó các thừa số x+1; y+1; z+1; … đều là số lẻ,

Suy ra x; y; z; … là các số chẵn.

Đặt x = 2x’, y = 2y’; z = 2z’; … (x’; y’; z’;… ∈ N) thì

$A = (a^{x'}b^{y'}c^{z'}…)^2$ nên A là số chính phương (đpcm)

4) Nếu số A bao hàm giữa bình phương hai số tự nhiên liên tiếp thì A không thể là số chính phương. Nghĩa là : nếu $n^2 < A < (n+1)^2$ thì A không là số chính phương.

III. Các kiến thức liên quan:

1. Nếu mỗi số hạng của một tổng (hoặc hiệu) chia hết cho một số thì tổng (hoặc hiệu) đó chia hết cho số đó.
2. Số có chữ số tận cùng chia hết cho 2 thì số đó chia hết cho 2

Số có hai chữ số tận cùng chia hết cho 4 thì số đó chia hết cho 4
Số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì số đó chia hết cho 8
Số có chữ số tận cùng chia hết cho 5 thì số đó chia hết cho 5
Số có hai chữ số tận cùng chia hết cho 25 thì số đó chia hết cho 25
Số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì số đó chia hết cho 3
Số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9

3. Dấu hiệu chia hết cho 11

Cho A = $\overline{\ldots a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$

A $\vdots$ 11 $\Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \vdots 11$

IV. Các dạng bài tập thường gặp:

Dạng 1: Kiểm tra một số có phải là số chính phương hay không:

Ví dụ 1: Cho số chính phương n^2 , tìm các số chính phương biết

$$n \in \left\{11;101;1001;10001;100001;1000001;\ldots;\underbrace{100\ldots01}_{k \text{ chữ số } 0}\right\}$$

Lời giải

Ta có $11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$10001^2 = 100020001$

$100001^2 = 10000200001$

$1000001^2 = 1000002000001$

…………

Tổng quát $\underbrace{100\ldots01}_{k \text{ chữ số } 0}{}^2 = \underbrace{100\ldots0}_{k \text{ chữ số } 0}2\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ chữ số } 0}1$

Ví dụ 2: Các tổng sau có phải là số chính phương không ?

a) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20}$
b) $B = 11 + 11^2 + 11^3$
c) $C = 10^{10} + 8$
d) $D = 100! + 7$
e) $E = 10^{10} + 5$
f) $F = 10^{100} + 10^{50} + 1$

Lời giải

a) Ta có $3^n \vdots 9$ với mọi $n \geq 2$ nên $3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20} \vdots 9$

Suy ra $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20}$ chia cho 9 dư 3

Vì A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không phải là số chính phương (t/c 2)

b) Ta có $B = 11 + 11^2 + 11^3$

$= 11.(1 + 11 + 11^2)$

$= 11.(1 + 11 + 121)$

$= 11.133$

= 1463

Có chữ số tận cùng là 3 nên B không phải là số chính phương (t/c 1)

c) Ta có $10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không phải là số chính phương (t/c 1)
d) Ta có $100! + 7$ có chữ số tận cùng là 7 nên không phải là số chính phương (t/c 1)
e) Ta có $10^{10} + 5$ có chữ số tận cùng là 05 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không phải là số chính phương (t/c 2)
f) Ta có $10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số là 3 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không phải là số chính phương (t/c 2)

Ví dụ 3:

a) Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A + 4$ không là số chính phương

b) Cho $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương

Lời giải

a) Ta có $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{20}$

nên $2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{21}$

suy ra $2A - A = 2^{21} - 2^222$

do đó $A - 4 = 2^{21} - 2^222 - 4 = 2^{21} = (2^{10})^2.2$ không là số chính phương vì 2 không là số chính phương.

b) Ta có $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100}$

nên $3B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{101}$

suy ra $3B - B = 3^{101} - 3$

do đó $2B + 3 = 3^{101} - 3 + 3 = 3^{101} = 3^{100}.3 = (3^{50})^2.3$ không là số chính phương vì 3 không là số chính phương.

Ví dụ 4: Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số A = 1234 … 1112. Số A có thể có 81 ước được không ?

Lời giải

Giả sử A có 81 ước.

Vì số lượng các ước của A là 81 (là số lẻ) nên A là số chính phương (1)

Mặt khác, tổng của các chữ số của A là 1+2+3+…+12 = 51

Vì $51 \vdots 3$; $51 \vdots 51$ nên A chia hết cho 3 nhưng A không chia hết cho 9, do đó A không là số chính phương mâu thuẫn với (1).

Vậy A không thể có 81 ước

Dạng 2 : Lập số chính phương từ các chữ số đã cho

Ví dụ 1 :

Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số 3, 6, 8, 8.

Lời giải :

Gọi n^2 là số chính phương phải tìm

Vì số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 nên do đó n^2 phải tận cùng bằng 6

Số tận cùng của n^2 bằng 86 hoặc 36

Nếu tận cùng là 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không phải là số chính phương (tính chất 2.a)

Suy ra: n^2 có tận cùng bằng 36

Vậy số chính phương đó là $8836 = 94^2$

Dạng 3: Áp dụng tính chất 4

Ví dụ: Chứng minh rằng không tồn tại hai số tự nhiên x và y sao cho $x^2 + y$ và $x + y^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $x \geq y$. Ta có : $x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x + 1)^2$

Dạng 4: Kiểm chứng một số thỏa mãn điều kiện cho trước có là số chính phương hay không.

Ví dụ 1: Một số tự nhiên gồm một số chữ số 0 và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không ?

Lời giải

Giả sử n^2 là số chính phương cần tìm

Nếu n^2 tận cùng bằng 0 thì nó phải tận cùng bằng một số chẵn chữ số 0.

Ta bỏ tất các chữ số 0 tận cùng này đi thì số còn lại tận cùng bằng 6 và phải là số chính phương. Ta xét hai trường hợp : Số còn lại tận cùng là 06 hoặc 66. Trong cả hai trường hợp đều chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không phải là số chính phương (t/c 2)

Nếu n^2 tận cùng là 6 thì tương tự như trên cũng không phải là số chính phương

Vậy số có tính chất như đề bài không thể là một số chính phương.

Ví dụ 2: Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số phải tìm là n, ta có $135n = a^2$ ($a \in \mathbf{N}$) hay $3^3.\ 5.\ n = a^2$. Số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên $n = 3.\ 5.\ k^2$ ($k \in N$).

Với k = 1 thì n = 15; với k = 2 thì n = 60; với $k \geq 3$ thì $n \geq 135$; có nhiều hơn hai chữ số (loại)

Vậy số phải tìm là 15 hoặc 60.

Ví dụ 3: Tìm số chính phương có bốn chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ cuối giống nhau.

Lời giải :

Cách 1:

Gọi số chính phương phải tìm là $n^2 = \overline{aabb}$ ($a,b \in N$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$).

Ta có $n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(99a + a + b)$ (1).

Do đó $99a + a + b$ chia hết cho 11 nên $a + b$ chia hết cho 11,

Vậy $a + b = 11$.

Thay $a + b = 11$ vào (1) ta được $n^2 = 11(99a + 11) = 11^2(9a + 1)$.

Do đó $9a + 1$ phải là số chính phương .

Thử với a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9a+1	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta thấy chỉ có a = 7 thì $9a + 1 = 64 = 8^2$ là số chính phương

Vậy a = 7 => b = 4 ta có số cần tìm là $7744 = 11^2 .\ 8^2 = 88^2$

Cách 2 :

Biến đổi $n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11.\overline{a0b}$, Do đó $\overline{a0b} = 11k^2$ (k∈N).

Ta có $100 \le 11k^2 \le 909 \Rightarrow 9\frac{11}{9} \le k^2 \le 82\frac{7}{11} \Rightarrow 4 \le k \le 9$

k	4	5	6	7	8	9
$11k^2$	176	275	396	539	704	891

Ta chọn 704 vì có chữ số hàng chục là 0

Suy ra k = 8 và $n^2 = \overline{aabb} = 11 . 11 . 8^2 = 7744$.

Ví dụ 4: Tìm số nguên tố $\overline{ab}$ (a > b > 0) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b$

$= 9(a - b) = 3^2(a - b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương thì a – b phải là số chính phương.

Ta thấy $1 \le a - b \le 8$ nên a – b ∈ {1; 4}.

Với a – b = 1 thì $\overline{ab}$ ∈ {21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98}loại các hợp số 21; 32; 54; 65; 76; 87; 98; còn lại 43 là số nguyên tố.

Với a – b = 4 thì $\overline{ab}$ ∈ {51; 62; 73; 84; 95} loại các hợp số 51; 62; 84; 95; còn 73 là số nguyên tố.

Vậy $\overline{ab}$ bằng 43 hoặc 73.

Dạng 4: Toán chứng minh:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử trong bốn số tự nhiên liên tiếp ta chọn số tự nhiên nhỏ nhất là a, ta phải xét tích số a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 có là số chính phương hay không?

Ta biết a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 $= a(a+3)(a+1)(a+2) + 1$

$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$

$= (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) + 1$

$= (a^2 + 3a + 1)^2$

Vì a là một số tự nhiên nên $(a^2 + 3a + 1)^2$ phải là một số chính phương

Suy ra điều cần phải chứng minh.

Thông qua bài chứng minh trên ta không chỉ biết được a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 là một số chính phương mà còn biết được nó còn là bình phương của số nào.

Ví dụ :

a) $1. 2. 3. 4 + 1 = 25 = 5^2$

$2. 3. 4. 5 + 1 = 121 = 11^2$

$3. 4. 5. 6 + 1 = 361 = 19^2$

$4. 5. 6. 7 + 1 = 841 = 29^2$

b) Biểu thức sau đây là bình phương của số tự nhiên nào ?

+ 10 . 11 . 12 . 13 + 1 = ?

Biết a = 10 nên $a^2 + 3a + 1 = 10^2 + 3.10 + 1 = 131$

Nên $10 . 11 . 12 . 13 + 1 = 131^2$

+ 15 . 16 . 17 . 18 + 1 = ?

Biết $a = 15$ nên $a^2 + 3a + 1 = 15^2 + 3.15 + 1 = 271$

Nên $10 . 11 . 12 . 13 + 1 = 271^2$

Với cách chứng minh tương tự như trên ta có các tính chất sau:

i) Tích của 4 số tự nhiên chẵn liên tiếp cộng 16 là một số chính phương.

ii) Tích của 4 số tự nhiên lẻ liên tiếp cộng 16 là một số chính phương.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng một số tự nhiên viết toàn bằng chữ số 2 thì không phải là số chính phương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $2 \not\vdots 4$; $22 \not\vdots 4$. Giả sử có số tự nhiên A được ghi bởi n chữ số 2 với $n > 2$ thì :

$A = 222\ldots222 = 222\ldots200 + 22 = 100.A_1 + 22$

Trong đóA_1 làsố được ghi bởi $n - 2$ chữ số 2

$A = 4.25A_1 + 22$

Vì $4.25A_1 \vdots 4$; $22 \not\vdots 4 \Rightarrow A \not\vdots 4$

A là số chẵn chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên A không là số chính phương.

Cách 2:

Ta có một số tự nhiên viết toàn bằng chữ số 2 thì có chữ số tận cùng là 2 nên không thể là số chính phương.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là a; a+1; a+2; a+3;

Ta có $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Bởi vì $4a \vdots 2$; $6 \vdots 2 \Rightarrow S \vdots 2$; $4a \vdots 4$; $6 \not\vdots 4 \Rightarrow S \not\vdots 4$

Vậy S chia hết cho 2 nhưng S không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

V. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN:

Bài 1. (Dạng 1) Các số sau có phải là số chính phương không ?

a) $A = 2004000$ b) $B = 2001^{2001}$

Bài 2. (Dạng 3) Chứng tỏ rằng các số sau không là số chính phương.

a) $\overline{abab}$ b) $\overline{abcabc}$ c) $\overline{ababab}$

Bài 3. (Dạng 3) Chứng tỏ rằng tổng sau không là số chính phương.

$A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

Bài 4. (Dạng 2) Cho bốn chữ số 0, 2, 3, 4. Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số trên.

Bài 5. (Dạng 2) Cho bốn chữ số 7, 4, 2, 0. Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số trên.

Bài 6. (Dạng 2) Cho bốn chữ số 0, 2, 3, 5. Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số trên.

Bài 7. (Dạng 3)

a) Cho một số tự nhiên gồm 15 chữ số 2. Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không ?

b) Một số tự nhiên gồm một chữ số 1, hai chữ số 2, ba chữ số 3, bốn chữ số 4, có thể là một số chính phương hay không?

Bài 8. (Dạng 1) Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 101 làm thành một số A

a) A có là hợp số hay không ?

b) A có là số chính phương hay không ?

c) A có thể có 35 ước hay không ?

Bài 9. (Dạng 1) Từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5, lập tất cả các số có năm chữ số gồm cả năm chữ số ấy. Trong tất cả các số đó có số nào là số chính phương không?

Bài 10. (Dạng 3) Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số, biết rằng 2n + 1 và 3n + 1 là các số chính phương.

Bài 11. (Dạng 3) Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

Bài 12. (Dạng 4)

a) Các số tự nhiên n và 2n có tổng các chữ số bằng nhau. Chứng minh rằng n chia hết cho 9.

b) Tìm số chính phương n có ba chữ số, biết rằng n chia hết cho 5 và nếu nhân n với 2 thì tổng các chữ số của nó không đổi.

Bài 13. (Dạng 3) Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu cộng nó với số có hai chữ số ấy viết theo chiều ngược lại thì ta được một số chính phương.

Bài 14. (Dạng 3) Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng : các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, hàng chục, hàng đơn vị theo thứ tự đó làm thành bốn số tự nhiên liên tiếp tăng dần.

Bài 15. (Dạng 3) Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị và số chính phương đó viết được dưới dạng $(5n+4)^2$ với $n \in N$.

Bài 16. (Dạng 1) Cho số tự nhiên A gồm 100 chữ số 1, số tự nhiên B gồm 50 chữ số 2. Chứng minh rằng A – B là một số chính phương.

Bài 17. (Dạng 1) Có hay không có một số chính phương mà số đó gồm 1995 chữ số 1 và các chữ số còn lại là chữ số 0

Bài 18. (Dạng 1) Các số sau có là số chính phương không :

a) A = 10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20

b) $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100}$

c) $C = 11 + 11^2 + 11^3$

Bài 19. (Dạng 1) Tìm số tự nhiên n sao cho tổng

$1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ là một số chính phương.

Bài 20. (Dạng 1) Số nào là số chính phương; số nào không là số chính phương?

a) 2^{1000} b) 3^{1993} c) 4^{161} d) $19^{2^{1945}}$

Bài 21. (Dạng 1) Chứng minh rằng số $22\underbrace{499...9}_{n-2 \text{ số } 9}\underbrace{100...0}_{n \text{ số } 0}9$ là số chính phương

Bài 22. (Dạng 1) Chứng minh rằng 100! không phải là số chính phương.

Bài 23. (Dạng 4) Chứng minh rằng tổng của n số lẻ đầu tiên là một số chính phương: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$

Bài 24. (Dạng 4) Chứng minh rằng: Tổng lập phương các số tự nhiên liên tiếp từ 1 là một số chính phương: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

Bài 25. Chứng minh rằng tổng các chử số của một số chính phương không thể bằng 5.

Bài 26. Bình phương các số 1, 2, 3, …, 1982 rồi viết chúng liên nhau theo một thứ tự nào đó. Có được một số có nhiều chữ số là số chính phương không ?

Bài 27. Số chính phương có thể bắt đầu bằng 1983 chữ số 9 không ?

Bài 28. Tồn tại hay không số tự nhiên A mà khi viết thêm chính nó vào bên phải sẽ được số chính phương không ?

Bài 29. Số tự nhiên N là một số chính phương và không tận cùng bằng chữ số 0. Sau khi xóa hai chữ số cuối cùng của nó ta lại được một số chính phương. Tìm số N lớn nhất có tính chất trên.

Bài 30. Chứng minh rằng các số 16, 1156, 111556, … trong đó mỗi số bắt đầu bằng chữ số thứ hai, bằng số liền trước nó xen số 15 vào giữa, là những số chính phương. (xem mục "Bạn tin không ?")

Bài 31. Tìm tất cả các số có bốn chữ số mà khi viết nó vào bên phải số 400 sẽ được một số chính phương.

Bài 32. Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng 1983 không? 1984 không?

Bài 33. Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy số 11, 111, 1111, … không thể là số chính phương.

Bài 34. Viết tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 1976 theo thứ tự bất kì. Chứng minh rằng số viết được không là số chính phương.

HƯỚNG DẪN GIẢI HOẶC ĐÁP SỐ

Bài 1. a) Số A không tận cùng một số chẵn chữ số 0 (3 chữ số 0). nên không là số chính phương.

b) Ta có $B = 2001^{2001} = (2001^{1000})^2 \cdot 2001$

Số 2001 có tổng các chữ số là 3 chia hết cho ba nhưng không chia hết cho 9 => B không là số chính phương.

Bài 2. a) $n^2 = \overline{abab} = 101.\overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} \vdots 101$, vô lí.

b) $n^2 = \overline{abcabc} = 1001.\overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \vdots 1001$, vô lí.

c) $n^2 = \overline{ababab} = 10101.\overline{ab} = 3.7.13.37.\overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} \vdots 10101$, vô lí.

Bài 3. A = $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$

$= 3.37.(a + b + c)$

số chính phương chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn,

do đó $a+b+c = 37k^2$ ($k \in N$). Vô lí vì $a+b+c \le 27$.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 4. Đáp số : $2304 = 48^2$

Bài 5. Đáp số : $2704 = 52^2$

Bài 6. Đáp số : $3025 = 55^2$

Bài 7. a) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

b) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

Bài 8. a) Tổng các chữ số của A là 903 nên $A \vdots 3$ do đó là hợp số

b) A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không là số chính phương.

Hay A có số gốc là 3 nên không phải là số chính phương

c) A không là số chính phương nên số lượng các ước không thể là lẻ.

Bài 9. Tổng các chữ số từ các số lập được là 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên mỗi số lập được không phải là số chính phương

Bài 10. Vì n có 2 chữ số nên $10 \le n \le 99$ nên $21 \le 2n + 1 \le 199$. Các số chính phương lẻ trong khoảng trên là 25; 49; 81; 121; 169.

	25	49	81	121	169
n	12	24	40	60	84
3n + 1	37	73	121	181	253

Chỉ có số 3n + 1 = 121 là số chính phương. Vậy n = 40

Bài 11. Đáp số : 20; 45; 80

Bài 12. a) Gọi tổng các chữ số của n và của số 2n là k => ta có $n - k \,\vdots\, 9$ và $2n - k \,\vdots\, 9$; do đó $(2n - k) - (n - k) \,\vdots\, 9$ hay $n \,\vdots\, 9$

b) số chính phương phải tìm $\vdots\, 5$; $\vdots\, 9$ và có 3 chữ số nên có 2 đáp số : 225 và 900

Bài 13. $n^2 = \overline{ab} + \overline{ba}$; có 8 đáp số: 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92.

Bài 14. Giả sử $n^2 = \overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}$ chữ số tận cùng của số chính phương là a + 3 chỉ có thể bằng 4; 5; 6; 9.

Tương ứng ta có n^2 bằng 2134; 3245; 4356; 7689

Chỉ có $4356 = 66^2$ còn các trường hợp còn lại loại

Bài 15. Số 5n + 4 tận cùng là 4 hoặc 9. Ta xét 2 trường hợp:

TH 1: Số 5n + 4 tận cùng là 4 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng là 6. Cần tìm các số có dạng $\overline{6{*}{*}6}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 4. Không có số nào thỏa mãn vì $74^2 = 5476 < \overline{6{*}{*}6} < 7056 = 84^2$

TH 2: Số 5n + 4 tận cùng là 9 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng là 1. Cần tìm các số có dạng $\overline{1{*}{*}1}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 9.

Ta thấy $29^2 = 841 < \overline{1{*}{*}1} < 2401 = 49^2$ còn $39^2 = 1521$

Vậy số cần tìm là 1521

Bài 16. Ta có $A = \underbrace{11...1}_{50 \text{ chữ số}}\underbrace{00...0}_{50 \text{ chữ số}} + \underbrace{11...1}_{50 \text{ chữ số}}$

Đặt $C = \underbrace{11...1}$ thì $B = 2C$

Suy ra $A = C.10^{50} + C$

do đó $A - B = C.10^{50} + C - 2C = C(10^{50} - 1)$.

Ta có $10^{50} - 1 = \underbrace{99...9}_{50 \text{ chữ số}} = 9C$

Vậy $A - B = C.\ 9C = 9C^2 = (3C)^2 = \underbrace{99...9}_{50 \text{ chữ số}}$ là số chính phương.

Bài 17. Giả sử $A = \underbrace{11...1}_{1995 \text{ số } 1}00...0$

Tổng các chữ số của A bằng:

$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1995 \text{ số } 1} + 0 + 0 + ... + 0 = 1995$ là một số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không là số chính phương.

Bài 18. a) Không vì A tận cùng 3 chữ số 0

b) Không (xem ví dụ 2 dạng 1)

c) Không vì C có chữ số tận cùng là 3

Bài 19. Với n = 1 thì $1! = 1 = 1^2$

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$ là số chính phương

Với $n \ge 4$ thì $1! + 2! +\ldots+ n!$ tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương. (Thậy vậy $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, còn $5!; 6! \ldots$ đều tận cùng bằng 0).

Vậy $n = 1$ hay $n = 3$

Bài 20. a) $2^{1000} = 2^{2.500} = (2^{500})^2$

b) $3^{1993} = 3^{1992}.3 = (3^{996})^2.3$

c) $4^{161} = (2^2)^{161} = (2^{161})^2$

d) $19^{2^{1945}} = 19^{2^{1994}.2} = (19^{2^{1994}})^2$

Bài 21. Ta có

$$22\underbrace{499...9}_{\text{n-2 số 9}}\underbrace{100...09}_{\text{n số 0}} = 224.10^{2n} + \underbrace{99...9}_{\text{n-2 số}}.10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$= 224.10^{2n} + (10^{n-2} - 1).10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$= 224.10^{2n} + 10^{n-2}.10^{n+2} - 1.10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$= 224.10^{2n} + 10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$= 225.10^{2n} - (10^2 - 10).10^n + 9$$

$$= (15.10^n)^2 - 2.3.15.10^n + 9$$

$$= (15.10^n - 3)^2 \text{ là số chính phương}$$

Bài 22. Ta có $100! = 1.2.3\ldots100$

Ta đi tìm số có tận cùng là 2 hoặc 5 (vì $2.5 = 10$)và tận cùng là 0

Có 10 số tận cùng là 2 là: 2; 12; 22; 32; 42; 52; 62; 72; 82; 92.

Có 10 số tận cùng là 5 là: 5; 15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95.

=> Tích của chúng có 10 chữ số 0 tận cùng

Có 9 số tận cùng là 1 số 0 : 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.

Có 1 số tận cùng là 2 số 0 : 100

Vậy 100! có $10 + 9 + 2 = 21$ (lẻ) chữ số 0 tận cùng nên không là số chính phương.

Bài 23. Giả sử công thức: $1 + 2 + 3 + \ldots + (2n + 1) = n^2$ (1) đúng với n=k, ta chứng minh công thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Theo quy nạp ta có:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 24. Theo bài toán của Gauss ta có:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bài tóan trở thành cmr: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

Giả sử công thức (1) đúng với n, ta chứng minh công thức (1) đúng với $n + 1$. Theo quy nạp ta có :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1) + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 9:

ĐIỀN CHỮ SỐ

Các bài toán về điền chữ số không chỉ yêu cầu kĩ năng tính toán đúng mà còn đòi hỏi cả lập luận chính xác và hợp lí.

CÁC BÀI TOÁN

Bài 1.

Thay các chữ bởi các chữ số thích hợp:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ + \; \overline{acb} \\ \hline \overline{bca} \end{array}$$

Lời giải

So sánh cột hàng đơn vị và hàng chục, ta thấy c + b có nhớ. Do đó ở cột hàng chục :

$b + c + 1$ (nhớ) $= 10 \Rightarrow b = 9$.

ở cột hàng trăm:

$a + 1 + 1$ (nhớ) $= 9 \Rightarrow a = 4$.

ở cột hàng đơn vị:

$c + 9 = 14 \quad \Rightarrow c = 5$.

Các chữ số được điền đầy đủ như sau:

$$\begin{array}{r} 495 \\ + \; 459 \\ \hline 954 \end{array}$$

Bài 2:

Tìm các chữ số a, b, c, biết rằng tổng a + b + c bằng tổng của bốn số chẵn liên tiếp và các chữ số a, b, c thỏa mãn cả hai phép trừ sau:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ - \; \overline{cba} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{bac} \\ - \; \overline{abc} \\ \hline \end{array}$$

9 9   2 7 0

Lời giả

Xét phép trừ thứ nhất: ở cột hàng trăm ta có $a \geq c$ nên phép trừ ở hàng đơn vị và hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm:

a - c -1 (nhớ) =0 $\Rightarrow$ c = a - 1   (1)

Xét phép trừ thứ hai: ở cột hàng trăm ta có $b > a$ nên phép trừ ở hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm:

b - a -1 (nhớ) = 2 $\Rightarrow$ a = b -3   (2)

Từ (1) và (2) suy ra: c = b - 4   (3)

Từ (2) và (3) suy ra :

a + b + c = (b - 3) + b + (b - 4) = 3b - 7 $\leq$ 20.

Số không quá 20 và là tổng của bốn số chẵn liên tiếp có thể bằng: 0 + 2 + 4 + 6 = 12 hoặc 2 + 4 + 6 + 8 = 20.

Trường hợp 3b - 7 =12 cho 3b = 19, (loại).

Trường hợp 3b - 7 = 20 cho 3b = 27 nên b = 9.

Từ đó: a = 9 - 3 = 6; c = 9 - 4 = 5.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 695 \\ - \\ 596 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 965 \\ - \\ 695 \\ \hline 270 \end{array}$$

Bài 3.

Thay các dấu * bằng các chữ số thích hợp trong phép chia sau:

$$\begin{array}{lll|l} & * * * * * & & * * \\ \cline{4-4} A & * * * & & \\ \cline{2-2} B & 0\,0\,0 * * & & * * 8 \\ C & \quad * * & & \\ \cline{2-2} & \quad 0\,0 & & \end{array}$$

Lời giải

Gọi thương là $\overline{ab8}$, ta thấy a nhân với số chia được tích riêng A có ba chữ số, còn 8 nhân với số chia được tích riêng C có hai chữ số. Do đó a > 8, vậy a = 9.

Ở dòng B, ta hạ liền hai chữ số ở số bị chia xuống, do đó b = 0.

Số chia nhân với 9 được tích riêng A có ba chữ số nên số chia lớn hơn 11.

Số chia nhân với 8 ta được tích riêng C có hai chữ số nên số chia nhỏ hơn 13.

Vậy số chia bằng 12.

Số bị chia bằng 908 . 12 = 10896. Toàn bộ phép tính là:

$$\begin{array}{r|l} 10896 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{108} & 908 \\ 00096 & \\ \underline{96} & \\ 00 & \end{array}$$

Bài 4.

Thay các chữ a, b, c bằng các chữ số thích hợp khác nhau thích hợp trong phép nhân sau:

$$\overline{ab}.\overline{cc}.\overline{abc} = \overline{abcabc}.$$

Lời giải

Biến đổi đẳng thức đã cho thành:

$\overline{ab}.11.c = \overline{abcabc} : \overline{abc} = 1001$

$\overline{ab}.c = 1001:11 = 91.$

Phân tích ra thừa số nguyên tố: 91 = 7.13, do đó $\overline{ab}.c$ chỉ có thể là 13. 7 hoặc 91. 1.

Trường hợp thứ nhất cho $\overline{ab} = 13, c = 7$.

Trường hợp thứ hai cho $\overline{ab} = 91, c = 1$, loại vì b = c =1.

Vậy ta có 13. 17. 137 = 137137.

Bài 5.

Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng trong hai cách viết: viết thêm số 5 vào đằng sau số đó hoặc viết thêm chữ số 1 vào đằng trước số đó thì cách viết thứ nhất cho số lớn gấp 5 lần so với cách viết thứ hai.

Lời giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c \\ \times\quad 5 \\ \hline a\,b\,c\,5 \end{array}$$

Nếu lần lượt tìm từng chữ số, chẳng hạn tìm c ở số bị nhân thì c có thể bằng 1, 3, 5, 7, 9 nên lời giải sẽ phức tạp. Để giải gọn hơn, ta có thể đặt $\overline{abc} = x$, ta có $(100 + x).5 = 10x + 5$.

Tìm x từ đẳng thức này ta được $x = 999$. Số phải tìm là: 999.

Bài 6.

Điền các chữ số thích hợp vào các chữ số trong phép nhân sau:

$$\begin{array}{r} abcdmn \\ \times \quad 2 \\ \hline cdmnab \end{array}$$

Lời giải

Ở bài toán này, nếu tìm lần lượt từng chữ số thì lời giải rất phhức tạp. Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cdmn} = y$, ta có:

$2.(10000x + y) = 100y + x$

$19999x = 98y$

$2857x = 14y$.

Như vậy 14y chia hết cho 2857, mà (14, 2857) = 1 nên y chia hết cho 2857.

Chú ý rằng y là số có 4 chữ số nên có các trường hợp: y = 2857, x = 14; y = 5714, x = 28; y = 8571, x = 42. Ta có ba đáp số:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad 2 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 285714 \\ \times \quad 2 \\ \hline 571428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 428571 \\ \times \quad 2 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Bài 7.

Điền các chữ số thích hợp vào các dấu * trong phép nhân sau

$$** . ** = ***$$

biết rằng cả hai thừa số đều chẵn và tích là số có ba chữ số như nhau.

Lời giải

Gọi tích là $\overline{aaa}$, ta có $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ nên tích chia hết cho 37 mà 37 là số nguyên tố, do đó phải có một thừa số chia hết cho 37. Thừa số này là số chẵn và có hai chữ số nên bằng 74.

Mặt khác tích chia hết cho 4 (vì mỗi thừa số chia hết cho 2) nên $\overline{aa}$ chia hết cho 4, do đó $a \in \{4, 8\}$.

Xét hai trường hợp: 444 : 74 = 6, loại;

888 : 74 = 12 .

Ta có đáp số: 74 . 12 = 888.

Bài 8.

Tìm các chữ số a và b, biết rằng:

$900:(a+b)=\overline{ab}$.

Lời giải

Biến đổi đẳng thức đã cho thành phép nhân: $\overline{ab}.(a+b)=900$.

Như vậy $\overline{ab}$ và $a+b$ là các ước của 900. Ta có các nhận xét:

a) $a+b\le 18$;

b) $\overline{ab}\le 100$ nên $a+b>9$;

c) Tích $\overline{ab}(a+b)$ chia hết cho 3 nên tồn tại một thừa số chia hết cho 3. Do $\overline{ab}$ và $a+b$ có cùng số dư trong phép chia cho 3 nên cả hai cùng chia hết cho 3.

Từ ba nhận xét đó, ta có $a+b$ bằng 12, hoặc 15 hoặc 18.

Nếu a + b = 12 thì $\overline{ab}=900:12=75$, thỏa mãn 7 + 5 = 12.

Nếu a + b = 15 thì $\overline{ab}=900:15=60$, loại.

Nếu a + b = 18 thì $\overline{ab}=900:18=50$, loại.

Ta có đáp số : a = 7,b = 5.

Bài 9.

Hãy thay chữ bằng chữ số thích hợp trong phép nhân sau đây:

$\overline{HANOI}\times\overline{HANOI}=\overline{*****HANOI}$.

Lời giải

Để cho gọn ta đặt số $\overline{HANOI}=m$, thế thì $m^2-m=m(m-1)$ tận cùng bằng năm chữ số 0 nên chia hết cho 100 000 = $5^5.2^5$.

Vì các số m và m - 1 không có ước chung nên một trong chúng chia hết cho 5^5 = 3125 và số kia chia hết cho 2^5 = 32.

Trước hết ta xét trường hợp m chia hết cho 3125 và m - 1 chia hết cho 32. Từ sơ đồ phép nhân ở trên ta thấy ngay A = 0. Do mỗi số trong hai số $\overline{H0NOI}$ và $\overline{H0000}$ chia hết cho 625 nên hiệu của chúng là $\overline{NOI}$ cũng chia hết cho 625.

Vậy $\overline{NOI}=625$.

Nhưng số $\overline{H0625}=10000H+625$ khi chia cho 625 cho thương là 16 H + 1và để cho thương này chia hết cho 5 thì chữ số H phải là 4 hoặc 9.

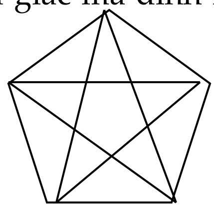
Với H = 4 ta được số 40 625 không thỏa mãn bài ra. Với H = 9 ta được số 90 625 thích hợp.

Trường hợp thứ hai cũng xét tương tự, nhưng không cho nghiệm mới.

Tóm lại ta có: 90 625 × 90 625 = 8 212 890 625.

Bài 10.

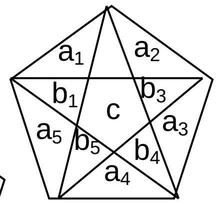
Một ngũ giác được chia làm 11 phần (hình bên). Hãy viết các số từ 1 đến 11 (mỗi số chỉ viết một lần) sao cho tổng các số trong tất cả tam giác mà đỉnh là đỉnh của ngũ giác đều bằng nhau.

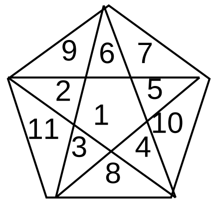


Lời giải

Ta có cả thảy 5 tam giác mà đỉnh là đỉnh của ngũ giác.

Ta gọi các số viết trong 11 phần là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ và c (c ở chính giữa ngũ giác).





Do tổng các số từ 1 đến 11 bằng 66, nên tổng các số trong mỗi tam giác bằng 22. Nếu ta đặt $a_1 + ... + a_5 = A, b_1 + ... + b_5 = B$, rồi xét tất cả các tam giác:

$2A + B = 5.22; A + 3B + 5c = 66$. Từ đó ta tìm được A = 45, B = 20, c = 1.

Như thế ở tâm ngũ giác là số c = 1. Ngoài ra do $A = a_1 + ... + a_5 = 45$ và mỗi số không lớn hơn 11 nên đẳng thức chỉ xảy ra khi A = 7 + 8 + 9 + 10 + 11.

Thay $a_5 = 11$ thì khi đó tổng $b_2 + c + b_4 = 11$ (so sánh hai tam giác có các số a_1, b_1, a_5 và a_1, b_1, b_2, c, b_4).

Do c = 1 nên $b_2 + b_4 = 10$, vì $b_1, b_2, ..., b_5$ là các số 2, 3, 4, 5, 6.

Đẳng thức cuối này xảy ra khi $b_2 = 4$, $b_4 = 6$ (hoặc $b_4 = 4$, $b_2 = 6$).

Tương tự $a_1 + b_1 = 11$ và $a_4 + b_5 = 11$. Suy ra cách viết các số trong 11 phần như hình vẻ bên.

Bài 11.

Thay dấu * bằng các chữ số thích hợp theo sơ đồ phép chia ở dưới:

3 * * * | * 3

* 3

* 3 *

* * *

0

Lời giải

Nhìn vào sơ đồ ta thấy ngay rằng: chữ số đầu tiên của thương phải là 1, chữ số đầu tiên của số chia là phải là 2. Như thế số chia là 23, còn thương bây giờ là 1 * *.

Do chữ số cuối cùng của thương nhân với 23 phải * 3 *, nên chữ số cuối của thương là 6 (vì 6 . 23 = 138).

Từ đó suy ra thương là 136, số chia là 23. Vậy số bị chia là 3128.

Bài 12.

Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp:

a) $\overline{abc}+\overline{ab}+a=874$;

b) $\overline{abc}+\overline{ab}+a=1037$.

Lời giải

a) Đổi các chữ số ở cùng một cột:

$$\begin{array}{r} abc \\ +\quad ab \\ a \\ \hline 874 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} aaa \\ +\quad bb \\ a \\ \hline 874 \end{array}$$

Do $\overline{bb}+c<110$ nên:

$$874\ge\overline{aaa}>874-110=764\Rightarrow\overline{aaa}=777.$$

Suy ra: $\overline{bb}+c=874-777=97$.

Ta có: $97\ge\overline{bb}>97-10=87\Rightarrow\overline{bb}=88$.

Do đó: c = 97 - 88 = 9.

Ta được: 789 + 78 + 7 = 874.

b) Tương tự như trên, ta cũng viết đẳng thức thành: $\overline{aaa}+\overline{bb}+c=1037$ rồi lần lượt tìm được a = 9, b = 3, c = 5.

Bài 13.

Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp.

$\overline{abc}-\overline{ca}=\overline{ca}-\overline{ac}$.

Lời giải

Ta có:

$\overline{abc}-\overline{ca}=\overline{ca}-\overline{ac}$ (1)

Vế phải của (1) nhỏ hơn 100 nên $\overline{abc}-\overline{ca}<100$, do đó a = 1. Ta có:

$\overline{1bc}-\overline{c1}=\overline{c1}-\overline{1c}$ (2).

Xét vế phải của (2): c > 1. Phép trừ ở cột đơn vị của vế phải là 11 - c, phép trừ ở cột đơn vị của vế trái là c - 1. Do đó c - 1 = 11 - c, suy ra c = 6.

Ta có: 106 - 61 = 61 - 16.

Bài 14.

Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp.

$\overline{abcd}+\overline{abc}=3576$.

Lời giải

Ta viết lại dưới dạng

$$3576-\overline{abc}=\overline{abcd}.$$

Thêm chữ số d vào cuối của số bị trừ và số trừ:

$\overline{3576d}-\overline{abcd}=\overline{abcd0}$

$\Rightarrow \overline{3576d}=11.\overline{abcd}$

Thực hiện phép chia $\overline{3576d}$ cho 11, ta tìm được d = 1. Từ đó ta tìm được $\overline{abc}=325$.

Ta có: 3251 + 325 = 3576.

Bài 15.

Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp.

a) $\overline{ab}.b=\overline{1ab}$.

b) $\overline{260abc}:\overline{abc}=626$.

Lời giải

Ta thấy:

$\overline{1ab}\,\vdots\,\overline{ab}$

$\Rightarrow 100+\overline{ab}\,\vdots\,\overline{ab}$

$\Rightarrow 100\,\vdots\,\overline{ab}$

$\overline{ab}\in\{10,20,25,50\}$.

Dễ thấy $b\neq 0$ nên $\overline{ab}=25$.

Thử:

25. 5 = 125, đúng.

b) Áp dụng tính chất chia một tổng cho một số:

$(260000+\overline{abc}):\overline{abc}=626$

$260000:\overline{abc}+1=626$

$260000:\overline{abc}=625$

$\overline{abc}=260000:625$

$\overline{abc}=416$.

Vậy 260416 : 416 = 626.

Bài 16.

Tìm chữ số a và số tự nhiên x, sao cho:

$(12+3x)^2=\overline{1a96}$.

Lời giải

$(12+3x)^2=[3(4+x)]^2=9(4+x)^2$. Như vậy $\overline{1a96}$ chia hết cho 9 $\Rightarrow$ a = 2.

Suy ra $(4+x)^2 = 1296:9 = 144 = 12^2$.

Vậy a = 2, x = 8.

Bài 17. Tìm số tự nhiên x có chữ số tận cùng bằng 2, biết rằng x, 2x, 3x đều là các số có ba chữ số và chín chữ số của ba số đó đều khác nhau và khác 0.

Lời giải

Đặt $x = \overline{ab2}$, ta có:

$$\begin{array}{r} x = a\ b\ 2 \\ \times \quad 2 \\ \hline 2x = c\ d\ 4 \end{array} \quad (1) \qquad\qquad \begin{array}{r} x = a\ b\ 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3x = e\ g\ 6 \end{array} \quad (2)$$

a, b, c, d, e, g khác nhau và nhận các giá trị 1, 3, 5, 7, 8, 9

Vì d chẵn nên d = 8. Từ (1/) suy ra b = 9. Từ (2) suy ra g = 7. Do đó

$a, c, e \in \{1;3;5\}$.

Dễ thấy a < c < e nên a = 1; c = 3; e = 5.

Thử lại:

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 2 \\ \times \quad 2 \\ \hline 3\ 8\ 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\ 9\ 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 5\ 7\ 6 \end{array}$$

Bài 18. Tìm số tự nhiên x có sáu chữ số, biết rằng các tích 2x, 3x, 4x, 5x, 6x cũng là số có sáu chữ số gồm cả sáu chữ số ấy.

a) Cho biết sáu chữ số của số phải tìm là 1, 2, 4, 5, 7, 8.

b) Giải bài toán nếu không cho điều kiện a.

Lời giải

a) Ta có:

x = * * * * * *

2x = * * * * * *

3x = * * * * * *

4x = * * * * * *

5x = * * * * * *

6x = * * * * * *

Ta chú ý rằng trong sáu số trên, hiệu của hai số bất kì là một trong sáu số ấy.

Mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 không thể có mặt hai lần ở cùng một cột. Thật vậy, nếu một chữ số a có ở cùng một cột của số 5x và 2x chẳng hạn thì hiệu của hai số này (là 3x) phải có chữ số 0 hoặc 9 ở cột đó (chữ số 0 ứng với trường hợp phép trừ không có nhớ ở cột bên phải sang, chữ số 9 ứng với trường hợp ngược lại). Điều này vô lí vì các chữ số 0 và 9 không thuộc tập các số đã cho.

Do đó mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 có mặt đúng một lần ở mỗi cột. Tổng các chữ số ở mỗi cột bằng:

1 + 2 + 4 +5 +7 + 8 = 27. Suy ra:

x + 2x + 4x +5x +7x + 8x = 27. 111111

21x = 2999997

x = 142857.

Các số 2x, 3x, 4x, 5x, 6x thứ tự bằng 285714, 428571, 571428, 714285, 857142.

b) Gọi x = $\overline{abc\deg}$. Ta có a = 1 để 6x vẫn có 6 chữ số .

Xét sáu số x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x, chữ đầu tiên của số sau lớn hơn chữ số đầu tiên của số trước ít nhất là 1 nên sáu chữ số đầu tiên của sáu số trên đều khác nhau và khác 0.

Các chữ số đầu tiên này cũng là các chữ số của x, do đó sáu chữ số của x đều khác nhau, khác 0, trong đó có chữ số 1.

Các chữ số tận cùng của x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x cũng phải khác nhau (vì nếu có hai số tận cùng giống nhau thì hiệu của chúng tận cùng bằng 0, tức là có một trong sáu số tận cùng bằng 0, trái với nhận xét ở trên). Do đó phải có một chữ số tận cùng bằng 1.

Các số 2x, 3x, 4x, 5x, 6x hiển nhiên không tận cùng bằng 1, còn x cũng vậy vì các chữ số đầu tiên của x đã bằng 1.

Vậy 3x tận cùng bằng 1, do đó x tận cùng bằng 7. Suy ra 2x, 3x, 4x, 5x, 6x theo thứ tự tận cùng bằng 4, 1, 8, 5, 2.

Như vậy số x gồm sáu chữ số 4, 1, 8, 5, 2, 7. Sau đó giải tiếp như câu a.

Bài 19. Tìm số có 6 chữ số $\overline{abc\deg} = (\overline{abc} + \overline{\deg})^2$.

Lời giải.

Đặt $\overline{abc} = A, \overline{\deg} = B (100 \le A; A, B \le 999)$.

Ta có: $100A + B = (A + B)^2$

$\Leftrightarrow 999A = (A + B)(A + B - 1)$ (1).

Do $A \le 999$ nên $(A + B)(A + B - 1) \le 999^2$

Suy ra: $A + B \le 999$.

Nếu A + B = 999 thì từ (1) ta suy ra A = 998; B = 1.

Từ đó $\overline{abc\deg} = 998001$.

Nếu A + B < 999. Ta có: 999 = 27. 37.

Mặt khác $((A+B),(A+B-1)) = 1$ nên trong hai số A + B và A + B -1 có một số chia hết cho 27 và số kia chia hết cho 37.

Xét hai trường hợp: $\begin{cases} A+B \vdots 27 \\ A+B-1 \vdots 37 \end{cases}$

Ta có A + B -1 = 37m (m$\in N^+$) hay $37m+1 \vdots 27 \Rightarrow 10m+1 \vdots 27 \Rightarrow 80m+8 \vdots 27$.

Mặt khác $81m \vdots 27$. Từ đó suy ra $m-8 \vdots 27$ hay $m = 27n+8 (n \in N^*)$. Do đó có :

$A+B-1 = 37(27n+8)(n \in N^*)$.

Nhưng 0 < A + B -1 $\leq$997 nên suy ra: A + B -1 = 296.

Kết hợp với (1) ta có : A = 88 (loại).

Xét trường hợp $\begin{cases} A+B \vdots 37 \\ A+B-1 \vdots 27 \end{cases}$

Ta có: A + B = 37k ($k \in N^+$) hay $37k-1 \vdots 27 \Rightarrow 10k-1 \vdots 27 \Rightarrow 80k-8 \vdots 27$.

Mặt khác: $81k \vdots 27$ suy ra $k+8 \vdots 27$ hay $k = 27r-8 (r \in N)$.

Do đó có A + B = 37(27r -8) = 999r - 296.

Với r = 1 ta có A + B = 703.

Kết hợp với (1) ta có A = 494; B = 209.

Từ đó ta có $\overline{abc\deg} = 494209$.

Vậy hai số có 6 chữ số thỏa mãn đề bài là:

$\overline{abc\deg} = 998001$ và 494209.

BÀI TẬP.

Thay các dấu * và các chữ bởi các chữ số thích hợp (từ bài 1 đến bài 11).

Bài 1.

a) $\overline{acc}.b = \overline{dba}$ (biết a là chữ số lẻ).

b) $\overline{ac}.\overline{ac} = \overline{acc}$

c) $\overline{ab}.\overline{ab} = \overline{acc}$.

Bài 2.

a) $\overline{1ab}.2 = \overline{abc8}$;

b) $\overline{ab} = 9.b$.

Bài 3.

$\overline{abc\deg}.4 = \overline{gabcde}$ và $\overline{abcde} + g = 15930$.

Bài 4.

$$\begin{array}{r} * * * * \\ \times \quad * * \\ \hline * * * * \\ * * * 7 \quad \\ \hline * * * * * \end{array}$$

biết rằng số bị nhân có tổng các chữ số bằng 18 và không đổi khi đọc từ phải sang trái.

Bài 5.

$$\begin{array}{r} * * * \\ \times \quad 8 * * \\ \hline * * * 9 \\ * * * \quad \\ \hline * * * * * \end{array}$$

Bài 6.

a) $\overline{ab}.\overline{cb} = \overline{ddd}$.

b) $\overline{ab}.\overline{cd} = \overline{bbb}$.

c) $* * \, . * = \; * * *$.

biết tích là số có ba chữ số như nhau.

Bài 7.

$\overline{abc\deg}.6 = \overline{\deg abc}$.

Bài 8.

$20 * * : 13 = * * 7$.

Bài 9. a)

$$\begin{array}{l|l} * * * * * & * * \\ \cline{2-2} \underline{* *} \quad & * * 2 \\ \quad * * * & \\ \quad \underline{* * *} & \\ \qquad\; 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} * * * * * * * & * * \\ \cline{2-2} \underline{* * *} & * * 8 * * \\ \;\; * * & \\ \;\; \underline{* *} & \\ \quad * * * & \\ \quad \underline{* * *} & \\ \qquad\; 0 & \end{array}$$

Bài 10. $\overline{abc} : 11 = a + b + c$.

Bài 11. $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 2002$.

Bài 12. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp 4 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó.

Bài 13. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần.

Bài 14. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết xen vào giữa hai chữ số của nó chính số đó thì số đó tăng gấp 99 lần.

Bài 15. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm 4 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Bài 16. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Bài 17.

a) Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng trăm thì số ấy giảm đi 9 lần.

b) Giải bài toán trên nếu không cho biết chữ số bị xóa thuộc hàng nào.

Bài 18. Tìm số tự nhiên n có 3 chữ số khác nhau, biết rằng nếu xóa bất kì chữ số nào của nó ta cũng được một số là ước của n.

Bài 19. Một số tự nhiên tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy.

Bài 20. Tìm số tự nhiên A biết rằng nếu xóa một hoặc nhiều chữ số tận cùng của nó thì được số B mà A = 130B.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) a là chữ số lẻ nên b và c cũng là lẻ. Ta lại có b và c khác 1 và 5 để $a \neq c$. Vậy b, c $\in \{3, 7, 9\}$.

Lần lượt xét b bằng 9, 7, 3 và chú ý rằng a, b, c lẻ, khác nhau.

Đáp số: 177 . 3 = 531.

b) $\overline{ac}.\overline{ac} = \overline{acc}$.

Thực hiện phép chia $\overline{acc}$ cho $\overline{ac}$ được 10. Vậy c = 0, a = 1.

Đáp số: 10 . 10 = 100.

c) Xét chữ số đầu tiên bên trái của các thừa số và tích, ta có a . a $\leq$ a nên

Ta có: $\overline{1b}.\overline{1b} = \overline{1cc}$.

Ta thấy b ≤ 4 vì nếu b ≥ 5 thì: $\overline{1b}.\overline{2b} \geq 15.15 = 225 > \overline{1cc}$. Xét các tích 10 .10, 11 .11, 12 .12, 13 .13, 14 .14, ta có đáp số 12. 12 = 144.

Bài 2. a) Đặt $\overline{abc} = A$ thì:

$$(1000 + A).2 = 10A + 8$$

$$2000 + 2A = 10A + 8$$

$$1992 = 8A$$

$$A = 294.$$

Đáp số: 1249 . 2 = 2498.

b) Chuyển thành phép trừ: $\overline{ab} = \overline{b0} - b$.

Đáp số: 45 = 9 . 5.

Bài 3. Đặt $\overline{abcde} = A$ thì:

$(10A + g).4 = 100000g + A$ (1)

và $A + g = 15390$. (2)

Từ (1) ta tìm được: A = 2564g.

Đưa về bài toán tìm hai số biết tổng và tỉ số, ta được: g = 6; A = 15384.

Bài 4.

```
        a b b a
      ×     c d
(1)     * * * *
(2)   * * * 7
      * * * * *
```

Xét tích riêng (2)

```
  a b b a
×       c
  * * * 7
```

Ta thấy ac <10 mà ac tận cùng bằng 7 nên ac= 7.

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp a = 1, c = 7: Khi đó b = 8 (do a + b = 9), ta có:

1881 . 7 được tích riêng (2) có 5 chữ số, loại.

- Trường a = 7; c = 1: khi đó d = 1 (để tích riêng (1) có 4 chữ số), thỏa mãn đề bài:

```
   7 2 2 7
 ×     1 1
   7 2 2 7
 7 2 2 7
 7 9 4 9 7.
```

Bài 5.

Chữ số hàng chục của số nhân bằng 0, chữ số đơn vị của số nhân bằng 9. Gọi số bị nhân là $\overline{abc}$. Để tích riêng thứ nhất tận cùng bằng 9 thì c = 1. Để tích riêng thứ hai có 3 chữ số thì a = 1.

Số bị nhân là $\overline{1b1}$. Chú ý rằng $\overline{1b1}.9$ được số có 4 chữ số nên b > 1, còn $\overline{1b1}.8$ được số có 3 chữ số nên b < 3, do đó b = 2.

Số bị nhân là 121, số nhân là 809, tích là 97889.

Bài 6.

a) $\overline{ab}.\overline{cb} = \overline{ddd} = d.111 = 3.3.37$.

Hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$ có tích chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một số chia hết cho 37, giả sử $\overline{ab} \vdots 37$. Khi đó $\overline{ab} \in \{37, 74\}$

Nếu $\overline{ab} = 37$ thì $37.\overline{c7} = 999$. Khi đó $\overline{c7} = 999 : 37 = 27$.

Nếu $\overline{ab} = 74$ thì $74.\overline{c4} = 666$ .Khi đó $\overline{c4} = 666 : 74 = 9$, loại.

Đáp số: 37. 27 = 999.

b) Tích chia hết cho 111 nên chia hết cho các số nguyên tố 3 và 37. Do đó số bị nhân chia hết cho 37(hoặc 74), số nhân chia hết cho 3.

Có 6 đáp số: $37.3 = 111; 37.6 = 222; 37.9 = 333; 74.3 = 222; 74.6 = 444; 74.9 = 666$.

c) Có 2 đáp số: $37.21 = 777; 15.37 = 555$.

Bài 6.

Đặt $\overline{abc} = x, \overline{\deg} = y$ thì $6(1000x + y) = 1000y + x$, suy ra $857x = 142y$.

Chú ý rằng (857, 142) = 1 nên y chia hết cho 857 và bằng 857, còn x = 142.

Ta có: 142857 . 6 = 857142.

Bài 7.

Thương $\overline{**7} \geq \dfrac{2000}{13} \Rightarrow \overline{**7} > 153$. Mặt khác $\overline{**7} \leq \dfrac{2099}{13} \Rightarrow \overline{**7} \leq 161$.

Do đó $\overline{**7} = 157$.

Số bị chia: 157 . 13 = 2041.

Bài 8.

a) 10098 : 99 = 102.

b) 1089708 : 12 = 90809.

Bài 9.

Ta có $\overline{abc} = 11(a + b + c)$.

$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$

$\Rightarrow 89a = 10c + b \Rightarrow 89a = \overline{cb} \Rightarrow a = 1, \overline{cb} = 89$

Vậy 198 : 11 = 1+ 9 + 8.

Bài 10. Không tồn tại hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.

Bài 12. Đáp số: 17948.

Bài 13. Đáp số: 77.

Bài 14. Cách 1. Viết $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$ thành $\overline{aabb} + \overline{ab} = \overline{ab}00$.

Cách 2. $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$

$\Rightarrow 1100a + 11b = 990a + 99b$

$\Rightarrow 110a = 88b$

$\Rightarrow 5a = 4b \Rightarrow a = 4, b = 5$

Bài 15. Xét phép nhân

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 4 \\ \hline d\,c\,b\,2 \end{array}$$

4d tận cùng bằng a nên a chẵn, ta lại có 4a < 10 nên a = 2.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d \\ \times \quad 4 \\ \hline d\,c\,b\,2 \end{array}$$

d $\geq$ 2. 4 = 8, mà 4d tận cùng bằng 2 nên d = 8.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8\,c\,b\,2 \end{array}$$

4c + 3 tận cùng bằng b nên b lẻ, ta laịi có 4b < 10 nên b = 1.

4c + 3 tận cùng bằng 1 nên 4c tận cùng bằng 8. Suy ra $c \in \{2, 7\}$.

c = 2 không thỏa mãn bài toán, c = 7 cho số phải tìm là: 2178. Thử lại:

2178 . 4 = 8712.

Bài 16.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$. Ta có phép nhân (1).

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 9 \quad (1) \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array}$$

Từ (1) ta tìm được: a = 1, d = 9.

Ta có phép nhân (2).

1 b c 9	Từ (2): b < 2 vì nếu b $\geq$ 2 thì tích có 5 chữ số.
× 9 (2)	Xét b = 1 thì c = 7,
9 c b 1	khi đó 1179 . 9 có 5 chữ số, loại.
	Xét b = 0 thì c = 8, khi đó 1089 . 9 =9801, thỏa mãn đề bài.

Đáp số: 1089.

Bài 17. a) $\overline{abc} = 9.\overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9.\overline{bc}$

$8.\overline{bc} = 100a \Rightarrow 2.\overline{bc} = 25a$.

Như vậy $\overline{bc} \vdots 25$. Có 3 đáp số: 225, 450, 675.

b) Nếu xóa chữ số tận cùng thì số ban đầu giảm từ 10 lần trở lên.

Nếu xóa chữ số hàng chục: có 4 đáp số là 135, 225, 315, 405.

Nếu xóa chữ số hàng trăm: có 3 đáp số như câu a).

Bài 18.

Gọi n = $\overline{abc}$.

Số $\overline{abc}$ xóa c được $\overline{ab}$. Ta có $\overline{abc} \vdots \overline{ab} \Rightarrow c = 0$.

Số $\overline{ab0}$ xóa b được $\overline{a0}$. Ta có $\overline{ab0} \vdots \overline{a0} \Rightarrow \overline{ab} \vdots a \Rightarrow b \vdots a$. (1)

Số $\overline{ab0}$ xóa a được $\overline{b0}$. Ta có $\overline{ab0} \vdots \overline{b0} \Rightarrow \overline{ab} \vdots b \Rightarrow 10a + b \vdots b \Rightarrow 10a \vdots b$. (2)

Từ (1) đặt b = ka (k $\in$ N). Thay b = ka vào (2): $10a \vdots ka \Rightarrow 10 \vdots k$

Do b $\neq$ a nên $k \in \{2,5\}$.

Với k = 2 ta có $\overline{abc}$ bằng 120, 240, 360, 480.

Với k = 5 ta có $\overline{abc}$ bằng 150.

Bài 19.

Đáp số: 45.

Bài 20.

Gọi C là số tạo bởi k chữ số tận cùng bị xóa của A, ta có

A = 10^k . B + C, do đó 10^k . B + C = 130B.

Như vậy $10^k.B \leq 130B \Rightarrow k = 1, k = 2$.

Với k= 1 thì 10B + C = 130B$\Rightarrow$C = 120B và C có 1 chữ số, loại.

Với k= 2 thì 100B + C = 130B$\Rightarrow$C = 30B và C có 2 chữ số. Vậy C bằng 30; 60; 90.

Có ba số thỏa mãn bài toán là 130; 260; 390.

CHỦ ĐỀ 10:

TÍNH TỔNG THEO QUY LUẬT

DẠNG 1: TỔNG CÁC SỐ HẠNG CÁCH ĐỀU

Việc tính tổng của các biểu thức thông thường (hữu hạn số hạng) ta chỉ áp dụng đúng thứ tự và quy tắc phép toán là có thể giải được bài toán. Vấn đề đặt ra là cách khai thác để giải bài toán tính tổng có dạng: $S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_n$ (n =1,2,3…) thì chúng ta phải làm như thế nào ?

Sau đây tôi đưa ra một số dạng bài cơ bản và phương pháp khai thác để giải các dạng bài toán đó.

II.1. Phương pháp tách số hạng:

1. Dạng 1:

Tính tổng: $S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + ... + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$

Phương pháp:

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = 1$ thì:

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = k > 1$ thì:

$$S = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right)$$

Ví dụ minh họa:

1.1. Ví dụ 1: Tính

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2004.2005}$$

Ta có:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; .... \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được.

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2004}\right) - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

1.2. Ví dụ 2:

Tính tổng $S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + ... + \frac{1}{2004.2005}$

Nhận xét: Ta thấy tổng này giống hệt như tổng ở ví dụ 1 ta dùng cách tách các số hạng như ở ví dụ 1:

$$S = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + ... + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{2005} = \frac{1996}{18045}$$

Nhận xét tổng quát: Nếu số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)}$

Thì ta tách như sau: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Từ đó ta có công thức tổng quát để tính tổng như sau:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Số hạng tổng quát của dãy số có dạng tử số là 1, mẫu là tích hai thừa số hơn kém nhau "k" đơn vị.

2.1. Ví dụ 1:

$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{2003.2005}$$

Cách 1

Học sinh phải nhận dạng được các số hạng đều có dạng

- Tử số của các số hạng đó là 1
- Mẫu là tích của hai số tự nhiên hơn kém nhau hai đơn vị.

Ta có thể tách như sau:

$$\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

....

$$\frac{1}{2003.2005} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right)$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được:

$$S = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2005}\right) = \frac{1002}{2005}$$

Nhận xét kết quả:

- Thừa số nhỏ nhất, lớn nhất của mẫu các số hạng là 1; 2005
- Kết quả bằng tích của hiệu các nghịch đảo thừa số nhỏ nhất và thừa số lớn nhất với nghịch đảo đơn vị kém hơn.

Cách 2

$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{2003.2005}$$

Ta thấy: $\frac{a-b}{b.a} = \frac{a}{b.a} - \frac{b}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ (a,b$\in$N, a>b)

Ta phải biến đổi sao cho tử số của tất cả các số hạng phải là khoảng cách hai thừa số dưới mẫu thì tất cả các hạng tử đều tách ra được:

$$\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

....

$$\frac{2}{2003.2005} = \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{2003.2005}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)=1-\frac{1}{2005}=\frac{2004}{2005}$$

Mà $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2003.2005}$

$$\Rightarrow 2S=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{2003.2005}=\frac{2004}{2005}$$

$$S=\frac{2004}{2005}:2=\frac{1002}{2005}$$

Chú ý: Thông qua ví dụ trên cần phải khắc phục cho học sinh sai hay gặp:

$\frac{1}{3.5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ là sai

Nhận xét tổng quát: $\frac{M}{b.a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ với a-b=M

Bài toán tổng quát.

$S_n=\frac{1}{a(a+m)}+\frac{1}{(a+m)(a+2m)}+...+\frac{1}{\{a+(n-1)m\}\{a+nm\}}$ với m=1;2;3.. n=1;2;3.

$$S_n=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nm}\right)$$

3. Dạng 3: Mẫu các số tự nhiên liên tiếp.

3.1. Ví dụ 1: Tính tổng sau:

$$S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Nhận xét đề bài:

- Tử các số đều là 1
- Mẫu các số hạng đều là 3 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta có

$$\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được.

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Nhận xét kết quả

Nếu mẫu có 3 thừa số thì tổng bằng tích nghịch đảo của(3-1) với hiệu nghịch đảo của tích 2 thừa số có giá trị nhỏ nhất và tích 2 thừa số có giá trị lớn nhất

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

3.2 Ví dụ 2. Tính tổng sau.

$$S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Nhận xét đề bài

- Tử các số hạng là 1
- Mẫu các số hạng đều là 4 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5}\right)$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Bài toán tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2.3...m} + \frac{1}{2.3.4...(m+1)} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)}$$

Ta có ngay $S_n = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1.2.3...(m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m-1)}\right)$

với m = 2;3;4... n =1; 2; 3……

Chú ý: Ví dụ 1: Có thể khai thác cho học sinh thấy trong tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Thì 3 - 1= 4 - 2 =…..= n + 2 - n = 2

$$\Rightarrow 2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + ... + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2S_n = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=> S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Như vậy:

$$* \frac{2m}{a(a+m)(a+2m)} = \frac{1}{a(a+m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)}$$

$$* \frac{3m}{a(a+m)(a+2m)(a+3m)} = \frac{1}{a(a+m)(a+2m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)(a+3m)}$$

Một số bài tập áp dụng

Tính các tổng sau:

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$ ĐS: $\frac{7}{8}$

$B = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + ... + \frac{1}{2002.2005}$ ĐS: $\frac{668}{2005}$

$C = \frac{3}{15.22} + \frac{3}{22.29} + ... + \frac{3}{85.92}$ ĐS: $\frac{11}{460}$

$D = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ĐS: $\frac{n}{2n+1}$

$E = \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ ĐS: $\frac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$

II.2. Tính tổng bằng phương pháp giải phương trình (làm trôi)

Tính tổng dạng: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n$

Phương pháp:

B1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số **a** ta được.

$a.S = a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^{n+1}$ (2)

B2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế được:

$$a.S - S = a^{n+1} - 1 => S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

1. Dạng 1: các số hạng của tổng luôn nhỏ hơn hoặc băng 1

1.1 Ví dụ 1. Tính tổng sau

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2005}} \quad (1)$$

Ta thấy mỗi số hạng liền sau của tổng đều kém số hạng liền trước của nó “2” lần

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2004}} \quad (2)$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được

$$S = 1 - \frac{1}{2^{2005}} = \frac{2^{2005}-1}{2^{2005}}$$

1.2 Ví dụ 2. Tính tổng

$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{2003.2005}$$

Ta thấy: $\frac{a-b}{b.a} = \frac{a}{b.a} - \frac{b}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ (a,b∈N, a > b)

Ta phải biến đổi sao cho tử số của tất cả các số hạng phải là khoảng cách hai thừa số dưới mẫu thì tất cả các hạng tử đều tách ra được:

$$2S=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{2003.2005}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2005}=\frac{2004}{2005}$$

$$S=\frac{2004}{2005}:2=\frac{1002}{2005}$$

2. Dạng 2:Các số hạng của tổng lớn hơn hoặc bằng 1

2.1 Ví dụ 1: Tính tổng sau

$$S=3^0+3^1+3^2+...+3^{100}$$

Ta thấy mỗi số hạng sau gấp số hạng liền trước nó "2" lần .

Cách làm tương tự như bài toán ở dạng 1

Ta có :

$$3S=3^1+3^2+...+3^{100}+3^{101}$$

$$2S=3^{101}-1$$

$$S=\frac{3^{101}-1}{2}$$

2.2 Ví dụ 2: Tính tổng sau

S_n=1.2+2.3+3.4+…+n.(n+1) với $n\in \mathbf{N}^*$

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của 2 số nhằm triệt tiêu từng cặp 2 số ta nhân mỗi số hạng của tổng với 3. Thừa số 3 này được viết dưới dạng:

3-0 ở số hạng thứ nhất

4-1 ở số hạng thứ hai

5-2 ở số hạng thứ ba

(n+2)-(n-1) ở số hạng thứ cuối cùng

Ta có

$3S_n$ = 1.2.(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) +…+ n(n + 1){(n + 2)-(n - 1) = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 +…+ n(n + 1)(n + 2)) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 +…+ (n - 1)n(n + 1)) = n(n + 1)(n + 2)

=>$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Tổng quát cho 2 trường hợp trên ta có

$$S_n=1+a+a^2+...+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\text{ với } n\in\mathbf{N};\ 1<a\in\mathbf{N}$$

II.3. Tính tổng bằng phương pháp qui nạp toán học

Trong một số trường hợp tính tổng của một dãy số, ta chỉ thông qua một số phép tính một vài số hạng đầu tiên ta có thể dự đoán kết quả. Phương pháp này dễ dàng thực hiện được phép tính tổng, tuy nhiên việc vân dụng phương pháp này chỉ giải quyết một số ít bài toán ở dạng tính tổng của dãy số. Lí do là một số bài toán việc tìm ra giả thiết quy nạp còn gặp nhiều khó khăn.

Ví dụ: Muốn tính hay chứng minh một mệnh đề S_k(k=1;2;3…) nào đó mà ta thấy mệnh đề đó đúng với 1; 2; 3 giá trị đầu tiên của k thì ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học để tính hoặc chứng minh mệnh đề đó.

Các bước giải bài toán này như sau:

Bước 1: Thử một vài giá trị đầu tiên xem tính đúng đắn của mệnh đề

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với n=k. Nghĩa là S_k đúng .

Bước 3: Ta phải chứng minh mệnh đề đó đúng với n=k+1, tức là S_{k+1} đúng

Bước 4: Kết luận bài toán.

Ví dụ: Tính tổng

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \quad \text{với } n \in \mathbf{N}$$

Dự đoán kết quả: $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Với n = 1thì $S_1 = 1$ (đúng)

Với n=2 thì $S_2 = 1 + 2 = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$ (đúng)

Với n=3 thì $S_3 = 1 + 2 + 3 = \dfrac{3(3+1)}{2} = 6$ (đúng)

Giả sử kết quả trên đúng với n = k tức là

$S_k = 1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Ta phải chứng minh kết quả trên đúng với n=k+1

Tức là phải chứng minh $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Thật vậy $S_{k+1} = 1+2+3+\ldots+k+(k+1)$

$= \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ (ĐPCM)

Suy ra dự đoán trên là đúng

Vậy $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Sau đây là một số bài tập tương tự

Tính các tổng sau:

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ với $n \in \mathbf{N}^*$ ĐS : $S_n = n^2$
2. $S_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ với $n \in \mathbf{N}^*$ ĐS: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $S_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ với $n \in \mathbf{N}^*$ ĐS: $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $S_n = 1^3+3^3+5^3\ldots+(2n-1)^3$ với $n \in \mathbf{N}^*$ ĐS: $S_n = n^2(2n^2-1)$

II.4. Phương pháp tính tổng thông qua tổng đã biết.

Qua thực tế giải toán ta gặp những tổng của dãy số cần tính có thể biểu diễn qua tổng hữu hạn của tổng khác mà ta đã biết khi đó ta có thể biến đổi tổng cần tính làm xuất hiện các tổng mà ta đã biết kết quả. Việc làm như vậy có thể tính được tổng phức tạp thông qua tổng đã biết

1. Dạng 1: Tách tổng đã cho thành các tổng đã biết (tổng đã tính được)

Tính tổng: $S = a_1.a_2 + a_2.a_3 + a_3.a_4 + a_4.a_5 + \ldots + a_{n-1}.a_n$ (1)

Phương pháp:

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = 2$

$S = a_1.(a_1 + 2) + a_2.(a_2 + 2) + a_3.(a_3 + 2) + a_4.(a_4 + 2) + \ldots + a_{n-1}.(a_{n-1} + 2)$

$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right) + 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}\right)$

$= S_1 + k.S_2$

Trong đó ta đã biết tính tổng $S_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2$

$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = k > 2$

Nhân cả hai vế với 3k , rồi tách 3k ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng

1.1 Ví dụ 1: Tính tổng sau

$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n + 1)$ với $n \in \mathbf{N}^*$

Ta thấy $n.(n+1) = n^2 + n$

Nên ta có $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$$

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trên băng cách khác như sau:

$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n + 1)$ với $n \in \mathbf{N}^*$

$3S_n = 1.2.(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+\ldots+n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\} = (1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n(n+1)(n+2))-(0.1.2+1.2.3+2.3.4+\ldots+(n-1)n(n+1))$

$= n(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1.2 Ví dụ 2: Tính tổng sau:

$S_n = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n - 1)(2n + 1)$

Nhận xét đề bài :

- Khai thác từ số hạng tổng quát ta có

$(2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 - 1$

$$\sum_{a=1}^{n} S_n = \sum_{a=1}^{n}\left(4a^2 - 1\right) = \sum_{a=1}^{n} 4a^2 - 1.n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n$$

2. Dạng 2: Tính tổng thông qua việc lập hiệu hai tổng trung gian

Ví dụ: Tính tổng sau.

$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n + 1)^3$

Nhận xét đề bài: Đây là tổng lập phương của các số lẻ liên tiếp.

Muốn tính tổng trên ta lập một tổng là tổng lập phương của các số tự nhiên liên tiếp rồi bới đi phần cộng thêm.

Giải

$S_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3+(2n+1)^3-\{2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3\}$

$= 1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3+(2n+1)^3-2^3\{1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3\}$

$$=\left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2-2^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$= \{n(2n + 1)\}^2 - 2\{n(n + 1)\}^2$

$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2)$

$= n^2(2n^2 - 1)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài 1: Tính nhanh tổng sau:

a, $A=\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+...+\frac{1}{24.25}$ b, $B=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{99.101}$

Bài 2: Tính nhanh tổng sau:

a, $D=\frac{5^2}{1.6}+\frac{5^2}{6.11}+...+\frac{5^2}{26.31}$ b, $K=\frac{4}{11.16}+\frac{4}{16.21}+\frac{4}{21.26}+...+\frac{4}{61.66}$

Bài 3. Tính nhanh tổng sau: $P=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{10.11.12}$

Bài 4. Tính nhanh các tổng sau

a, $A= 1.2+2.3+3.4+\dots+98.99$ b, $B= 1.2+3.4+5.6+...+99.100$

Bài 5: Tính nhanh các tổng sau

a, $F= 1.3+5.7+9.11+...+97.101$ b, $G= 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+98.99.100$

Bài 6: Tính nhanh các tổng sau

a, $H= 1.99+2.98+3.97+...+50.50$ b, $K= 1.99+3.97+5.95+...+49.51$

Bài 7: Tính nhanh các tổng sau : $C= 1.3+3.5+5.7+...+97.99$

Bài 8: Tính tổng: $D=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+...+\frac{1}{20}(1+2+...+20)$

Bài 9: Tính tổng: $F=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+...+\frac{1}{2016}(1+2+...+2016)$

Bài 10: Tính: $1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+...+\frac{1}{16}(1+2+...+16)$

Bài 11: Tính tổng: $G=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+...+\frac{1}{100}(1+2+...+100)$

Bài 12: Tính tích

a, $A=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{20^2}{19.21}$ b, $B=\frac{1^2}{1.2}.\frac{2^2}{2.3}.\frac{3^2}{3.4}...\frac{10^2}{10.11}$

Bài 13: Tính tổng $C=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+2016}\right)$

Bài 14: Tính: $A=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)...\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{99}\right)$

Bài 15: Tính: $\dfrac{\left(1+\frac{1999}{1}\right)\left(1+\frac{1999}{2}\right)...\left(1+\frac{1999}{1000}\right)}{\left(1+\frac{1000}{1}\right)\left(1+\frac{1000}{2}\right)...\left(1+\frac{1000}{1999}\right)}$

Bài 16: Tính: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{400}\right)$

Bài 17: Tổng cùng số mũ:

a, A= $1^2+2^2+3^2+...+98^2$ b, B= $-1^2+2^2-3^2+4^2-...-19^2+20^2$

Bài 18: Tổng cùng số mũ :

a, D= $1^2+3^2+5^2+...+99^2$ b, E= $11^2+13^2+15^2+...+199^2$

Bài 19: Tổng cùng cơ số:

a, A= $1+3+3^2+3^3+...+3^{2000}$ b, B= $2+2^3+2^5+2^7+...+2^{2009}$

Bài 20: Tổng cùng cơ số:

a, C= $5+5^3+5^5+5^7+...+5^{101}$ b, D= $1+3^2+3^4+3^6+...+3^{100}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a, Ta có : $A=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{4}{25}$

b, Ta có : $B=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

Bài 2:

a, Ta có :

$$D=5\left(\frac{5}{1.6}+\frac{5}{6.11}+\frac{5}{11.16}+....+\frac{5}{26.31}\right)=5\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+...+\frac{1}{26}-\frac{1}{31}\right)$$

$$D=5\left(1-\frac{1}{31}\right)=5.\frac{30}{31}=\frac{150}{31}$$

b, Ta có:

$$K=4\left(\frac{1}{11.16}+\frac{1}{16.21}+\frac{1}{21.26}+...+\frac{1}{61.66}\right)\Rightarrow 5K=4\left(\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+\frac{5}{21.26}+...+\frac{5}{61.66}\right)$$

$$5K=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{21}+...+\frac{1}{61}-\frac{1}{66}\right)=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{66}\right)\Rightarrow 5K=4.\frac{55}{11.66}\Rightarrow K=\frac{4}{66}=\frac{2}{33}$$

Bài 3.

Ta có :

$$2P=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{10.11.12}=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+...+\left(\frac{1}{10.11}-\frac{1}{11.12}\right)$$

$$2P=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{11.12}=\frac{65}{132}\Rightarrow P=\frac{65}{264}$$

Bài 4.

a, Ta có: $3A=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+...+98.99(100-97)$

$$3A=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+(3.4.5-2.3.4)+...+(98.99.100-97.98.99)$$

$$3A=98.99.100\Rightarrow A=\frac{98.99.100}{3}$$

b, Ta có: $B=2+(2+1).4+(4+1).6+...+(98+1).100$

$$B=2+(2.4+4)+(4.6+6)+...+(98.100+100)$$

$$B=(2.4+4.6+6.8+...+98.100)+(2+4+6+...+100)$$

Đặt $M=2.4+4.6+6.8+...+98.100$

$6M=2.4(6-0)+4.6(8-2)+6.8(10-4)+...+98.100(102-96)$

$6M=(2.4.6-0.2.4)+(4.6.8-2.4.6)+(6.8.10-4.6.8)+...+(98.100.102-96.98.100)$

$6M=98.100.102 \Rightarrow M=\dfrac{98.100.102}{6}$

Tính $N=2+4+6+....+100$ rồi thay vào B

Bài 5:

a, $F=1.(1+2)+5(5+2)+9(9+2)+...+97(97+2)$

$F=(1.1+1.2)+(5.5+5.2)+(9.9+9.2)+...+(97.97+97.2)$

$F=(1.1+5.5+9.9+...+97.97)+2(1+5+9+...+97)$

Đặt $A=1.1+5.5+9.9+...+97.97, B=1+5+9+...+97$, Tính rồi thay vào F

b, $4G=1.2.3(4-0)+2.3.4(5-1)+3.4.5(6-2)+...+98.99.100(101-97)$

$4G=(1.2.3.4-0.1.2.3)+(2.3.4.5-1.2.3.4)+(3.4.5.6-2.3.4.5)+...+(98.99.100.101-97.98.99.100)$

$4G=98.99.100.101 \Rightarrow G=\dfrac{98.99.100.101}{4}$

Bài 6:

a, $H=1.99+2.(99-1)+3.(99-2)+...+50(99-49)$

$H=1.99+(2.99-1.2)+(3.99-2.3)+...+(50.99-49.50)$

$H=(1.99+2.99+3.99+...+50.99)-(1.2+2.3+3.4+...+49.50)$

Đặt $A=99(1+2+3+...+50), B=1.2+2.3+3.4+...+49.50$

Tính A và B rồi thay vào H

b, $K=1.99+3(99-2)+5.(99-4)+...+49(99-48)$

$K=1.99+(3.99-2.3)+(5.99-4.5)+...+(49.99-48.49)$

$K=(1.99+3.99+5.99+...+49.99)-(2.3+4.5+...+48.49)$

Đặt $A=99(1+3+5+...+49), B=(2.3+4.5+6.7+...+48.49)$

Tính A và B rồi thay vào K

Bài 7:

$C=1.(1+2)+3.(3+2)+5(5+2)+...+97.(97+2)$

$C=(1.1+1.2)+(3.3+3.2)+(5.5+5.2)+...+(97.97+97.2)$

$C=(1.1+3.3+...+97.97)+2(1+3+5+...+97)$

Đặt $A=1.1+23.3+5.5+...+97.97, B=1+3+5+7+...+97$

Tính A và B rồi thay vào C

Bài 8:

Ta có: $D=1+\dfrac{1}{2}.\dfrac{2.3}{2}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{3.4}{2}+...+\dfrac{1}{20}.\dfrac{20.21}{2}=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2}+\dfrac{5}{2}+...+\dfrac{21}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(2+3+4+...+20+21)=\dfrac{1}{2}.230=115$

Bài 9:

Ta có: $F=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+....+\frac{1}{2016}.\frac{2016.2017}{2}$

$F=1+\frac{2+1}{2}+\frac{3+1}{2}+\frac{4+1}{2}+...+\frac{2016+1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}+\frac{2+3+4+...+2016}{2}$

$F=1+\frac{1}{2}.2015+\frac{2018.2015}{2}=1+\frac{2015.2019}{2}$

Bài 10:

Ta có: $F=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+....+\frac{1}{16}.\frac{16.17}{2}$

$F=1+\frac{2+1}{2}+\frac{3+1}{2}+\frac{4+1}{2}+...+\frac{16+1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}+\frac{2+3+4+...+16}{2}$

Bài 11:

Ta có: $G=1+\frac{1}{2}.\frac{(1+2).2}{2}+\frac{1}{3}.\frac{(1+3).3}{2}+...+\frac{1}{100}.\frac{(1+100).100}{2}$

$G=1+\frac{2+1}{2}+\frac{3+1}{2}+\frac{4+1}{2}+...+\frac{100+1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}+\frac{2+3+4+...+100}{2}$

Bài 12:

a, Ta có: $A=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}....\frac{20.20}{19.21}=\frac{(2.3.4...20)(2.3.4...20)}{(1.2.3....19)(3.4.5...21)}=\frac{20.2}{21}=\frac{40}{21}$

b, Ta có: $B=\frac{1.1}{1.2}.\frac{2.2}{2.3}.\frac{3.3}{3.4}....\frac{10.10}{10.11}=\frac{(1.2.3....10)(1.2.3...10)}{(1.2.3...10)(2.3.4...11)}=\frac{1}{11}$

Bài 13:

Ta có: $C=\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right).\left(1-\frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right).\left(1-\frac{1}{\frac{(1+4).4}{2}}\right)....\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2016).2016}{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{9}{10}.....\frac{2017.2016-2}{2016.2017}=\frac{4}{6}.\frac{10}{12}.\frac{18}{20}....\frac{2016.2017-2}{2016.2017}$

$C=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}....\frac{2015.2018}{2016.2017}=\frac{1004}{3009}$

Bài 14:

Ta có: $A=\frac{1}{2.3}.\frac{3}{2.5}.\frac{5}{2.7}....\frac{97}{2.99}=\frac{(1.3.5....97)}{2^{49}.(3.5.7...99)}=\frac{1}{2^{49}.99}$

Bài 15:

Ta có: $A=\left(\frac{2000}{1}.\frac{2001}{2}.\frac{2002}{3}...\frac{2999}{1000}\right):\left(\frac{1001}{1}.\frac{1002}{2}.\frac{1003}{3}....\frac{2999}{1999}\right)$

$A=\left(\frac{2000.2001.2002...2999}{1.2.3.4...1000}\right).\left(\frac{1.2.3...1999}{1001.1002....2999}\right)=\frac{1001.1002....1999}{1001.1002...1999}=1$

Bài 16:

Ta có: $=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}....\frac{399}{400}=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}...\frac{19.21}{20.20}=\frac{(1.2.3...19)(3.4.5...21)}{(2.3.4...20)(2.3.4.5...20)}=\frac{21}{20.2}=\frac{21}{40}$

Bài 17:

a, Ta có : $A=1.1+2.2+3.3+...+98.98$

$=> A=1(2-1)+2(3-1)+3(4-1)+...+98(99-1)$

$=> A=(1.2+2.3+3.4+...+98.99)-(1+2+3+...+98)$

Đặt $B=1.2+2.3+3.4+...+98.99$, Tính tổng B ta được :

$3B=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+...+98.99(100-97)$

$3B=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+(3.4.5-2.3.4)+...+(98.99.100-97.98.99)$

$3B=98.99.100-0.1.2=98.99.100 => B=\dfrac{98.99.100}{3}$

Thay vào A ta được : $A=B+\dfrac{98.99}{2}=\dfrac{98.99.100}{3}+\dfrac{98.99}{2}$

b, Ta có : $B=-1^2+2^2-3^2+4^2-...-19^2+20^2 \; => B=-(1^2-2^2+3^2-4^2+...+19^2-20^2)$

$B=-\left[\left(1^2+2^2+3^2+...+19^2+20^2\right)-2\left(2^2+4^2+6^2+...+20^2\right)\right]$

$B=-\left[\left(\dfrac{20.21.22}{3}+\dfrac{20.21}{2}\right)-2.2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)\right]$

$B=-20.22.7-20.7-8\left(\dfrac{10.11.12}{3}+\dfrac{10.11}{2}\right)=-20.7.23-8(10.11.4+5.11)$

Bài 18:

a, Ta có : $D=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+...+99^2+100^2\right)-\left(2^2+4^2+6^2+...+100^2\right)$

$=> D=\left(\dfrac{100.101.102}{3}+\dfrac{100.101}{2}\right)-2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+50^2\right)$

Đặt $A=1^2+2^2+3^2+...+50^2 => A=\dfrac{50.51.52}{3}+\dfrac{50.51}{2}$, Thay vào D ta được :

$D=100.101.34+50.101-4(50.52.17+25.51)$

b, Ta có : $E=11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+...+199^2+200^2-\left(12^2+14^2+...+200^2\right)$

Đặt $A=11^2+12^2+13^2+...+200^2, B=12^2+14^2+...+200^2$

Tính ta được :

$A=11.11+12.12+13.13+...+200.200=11.(12-1)+12.(13-1)+...+200.(201-1)$

$=> A=(11.12-11)+(12.13-12)+(13.14-13)+...+(200.201-200)$

$A=(11.12+12.13+13.14+...+200.201)-(11+12+13+...+200)$

$A=\left(\dfrac{200.201.202}{3}-\dfrac{10.11.12}{2}\right)-\left(\dfrac{211.190}{2}\right)$

Và $B=2^2\left(6^2+7^2+8^2+...+100^2\right)=4\left(\dfrac{100.101.102}{3}-\dfrac{5.6.7}{2}\right)-\left(\dfrac{106.95}{2}\right)$

Vậy $E=A-B$

Bài 19:

a, Ta có : $3A=3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2000}+3^{2001}$

$=> 3A-A=2A=(3-3)+\left(3^2-3^2\right)+...+\left(3^{2000}-3^{2000}\right)+\left(3^{2001}-1\right)$

$$=> 2A = 3^{2001} - 1 => A = \frac{3^{2001}-1}{2}$$

b, Ta có : $2^2 B = 2^3 + 2^5 + 2^7 + ... + 2^{2009} + 2^{2011}$

$$=> 4B - B = 3B = \left(2^3 - 2^3\right) + \left(2^5 - 2^5\right) + ... + \left(2^{2009} - 2^{2009}\right) + \left(2^{2011} - 2\right)$$

$$=> 3B = 2^{2011} - 2 => B = \frac{2^{2011}-2}{3}$$

Bài 20:

a, Ta có : $5^2 C = 5^3 + 5^5 + 5^7 + ... + 5^{101} + 5^{103}$

$$=> 25C - C = 24C = \left(5^3 - 5^3\right) + \left(5^5 - 5^5\right) + ... + \left(5^{101} - 5^{101}\right) + \left(5^{103} - 5\right)$$

$$=> 24C = 5^{103} - 5 => C = \frac{5^{103}-5}{24}$$

b, Ta có : $3^2 D = 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{100} + 3^{102}$

$$=> 9D - D = 8D = \left(3^2 - 3^2\right) + \left(3^4 - 3^4\right) + ... + \left(3^{100} - 3^{100}\right) + \left(3^{102} - 1\right)$$

$$=> 8D = 3^{102} - 1 => D = \frac{3^{102}-1}{8}$$

CHỦ ĐỀ 11:

SO SÁNH PHÂN SỐ

Để so sánh 2 phân số:

+ Tùy theo một số trường hợp cụ thể của đặc điểm các phân số , ta có thể sử dụng nhiều cách tính nhanh và hợp lí .

+ Kết hợp vận dụng Tính chất bắc cầu của thứ tự: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $\frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ *thì* $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$, trong đó việc phát hiện ra một số trung gian để làm cầu nối là rất quan trọng.

A/ CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH .

I/ Phương pháp 1: Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

Ví dụ: So sánh $\frac{-11}{12}$ *và* $\frac{17}{-18}$?

Ta viết : $\frac{-11}{12} = \frac{-33}{36}$ *và* $\frac{17}{-18} = \frac{-17}{18} = \frac{-34}{36}$

Vì $\frac{-33}{36} > \frac{-34}{36} \Rightarrow \frac{-11}{12} > \frac{17}{-18}$

Chú ý :*Phải viết phân số dưới dạng phân số có mẫu dương.*

II/ Phương pháp 2: Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu có cùng dấu "+" hay cùng dấu "-": mẫu nào nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn

Ví dụ 1: $\frac{2}{-5} > \frac{2}{-4}$ vì $-5 < -4$; $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$ vì $7 > 5$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$?

Ta có : $\frac{2}{5}=\frac{10}{25};\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$. Vì $\frac{10}{25}<\frac{10}{14}\Rightarrow\frac{2}{5}<\frac{5}{7}$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$?

Ta có : $\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=\frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7}=\frac{6}{-7}$

Vì $\frac{6}{-8}>\frac{6}{-7}\Rightarrow\frac{-3}{4}>\frac{-6}{7}$

Chú ý : ***Khi quy đồng tử các phân số thì phải viết các phân số dưới dạng phân số có tử dương.***

III/ Phương pháp 3: (Tích chéo với các mẫu b và d đều là dương)

+ *Nếu* $a.d>b.c$ *thì* $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

+ *Nếu* $a.d<b.c$ *thì* $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

+ *Nếu* $a.d=b.c$ *thì* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Ví dụ 1: $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$ vì $5.8<6.7$ $(40<42)$

Ví dụ 2: $\frac{-4}{5}<\frac{-4}{8}$ vì $(-4).8<(-4).5$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{3}{-4}$ và $\frac{4}{-5}$. Ta viết $\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}$ và $\frac{4}{-5}=\frac{-4}{5}$

Vì $(-3).5>(-4).4$ nên $\frac{3}{-4}>\frac{4}{-5}$

Chú ý : ***Phải viết các mẫu của các phân số là các mẫu dương.***

(vì chẳng hạn $\frac{3}{-4}<\frac{-4}{5}$ do $3.5<(-4).(-4)$ là sai)

IV/ Phương pháp 4: Dùng số hoặc phân số làm trung gian

1/ Dùng số 1 làm trung gian:

a) Nếu $\frac{a}{b}>1$ và $1>\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b}-M=1;$ $\frac{c}{d}-N=1$ mà M > N thì $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

* M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho .

* Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

c) Nếu $\frac{a}{b}+M=1;$ $\frac{c}{d}+N=1$ mà M > N thì $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

* M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.

* Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

Ví dụ 1: So sánh $\frac{19}{18}$ *và* $\frac{2005}{2004}$?

Ta có : $\frac{19}{18}-\frac{1}{18}=1;\frac{2005}{2004}-\frac{1}{2004}=1$

$Vì \frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{72}{73}$ *và* $\frac{98}{99}$?

Ta có : $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1; \frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1.$ $\quad Vì \frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{7}{9}$ *và* $\frac{19}{17}$?

Ta có $\frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$

2/ Dùng một phân số làm trung gian

** Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất , có mẫu là mẫu của phân số thứ hai*

***Ví dụ**: Để so sánh* $\frac{18}{31}$ *và* $\frac{15}{37}$ *ta xét phân số trung gian* $\frac{18}{37}$.

$Vì \frac{18}{31} > \frac{18}{37} \& \frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$

** Nhận xét:* ***Trong hai phân số , phân số nào vừa có tử lớn hơn , vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương).***

** Tính bắc cầu :* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \& \frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ *thì* $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$

Ví dụ 1: So sánh $\frac{72}{73}$ *và* $\frac{58}{99}$?

– Xét phân số trung gian là $\frac{72}{99}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{72}{99}$ *và* $\frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

– Hoặc xét số trung gian là $\frac{58}{73}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{58}{73}$ *và* $\frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n+1}{n+2} (n \in N^*)$

Dùng phân số trung gian là $\frac{n}{n+2}$

Ta có : $\frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2}$ và $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2} (n \in N^*)$

Ví dụ 3: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{12}{49}$ và $\frac{13}{47}$?

b) $\frac{64}{85}$ và $\frac{73}{81}$?

c) $\frac{19}{31}$ và $\frac{17}{35}$?

d) $\frac{67}{77}$ và $\frac{73}{83}$?

e) $\frac{456}{461}$ và $\frac{123}{128}$?

f) $\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$?

g) $\frac{149}{157}$ và $\frac{449}{457}$?

h) $\frac{1999.2000}{1999.2000+1}$ và $\frac{2000.2001}{2000.2001+1}$?

(Gợi ý: Từ câu a $\rightarrow$ c: Xét phân số trung gian.

Từ câu d $\rightarrow$ h: Xét phần bù đến đơn vị)

3/ Dùng một phân số xấp xỉ là trung gian.

Ví dụ 1: So sánh $\frac{12}{47}$ *và* $\frac{19}{77}$?

Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{4}$.

Ta có : $\frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ và $\frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}$

Bài tập áp dụng :

Dùng phân số xấp xỉ làm phân số trung gian để so sánh :

$a)\frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}$; $b)\frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}$; $c)\frac{12}{37}$ và $\frac{19}{54}$; $d)\frac{18}{53}$ và $\frac{26}{78}$

$e)\frac{13}{79}$ và $\frac{34}{204}$; $f)\frac{25}{103}$ và $\frac{74}{295}$; $h)\frac{58}{63}$ và $\frac{36}{55}$.

IV/ Phương pháp 5: Dùng tính chất sau với m ≠ 0 :

$*0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$; $\frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$

$*\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}$.

$*\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$; $\frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}$

$*\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Ví dụ 1: So sánh $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

Ta có : $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < 1$ (vì tử < mẫu)

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = B$$

Vậy A < B .

Ví dụ 2: So sánh $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004+2005}{2005+2006}$?

Ta có : $\left.\begin{array}{l} \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005+2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005+2006} \end{array}\right\}$ Cộng vế theo vế ta có kết quả M > N.

Ví dụ 3: So sánh $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Giải: $\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700+37}{3900+39} = \frac{3737}{3939}$ (áp dụng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$)

VI/ Phương pháp 6: Đổi phân số lớn hơn đơn vị ra hỗn số để so sánh :

+ Hỗn số nào có phần nguyên lớn hơn thì hỗn số đó lớn hơn.

+ Nếu phần nguyên bằng nhau thì xét so sánh các phân số kèm theo

Ví dụ 1: So sánh $\frac{5}{8}$ *và* $\frac{12}{15}$?

Ta có $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{12}{15} = 0{,}8$.

Vì $0,625 < 0,8$ nên $\frac{5}{8} < \frac{12}{15}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{3}{-4}$ *và* $\frac{4}{-5}$?

Ta có $\frac{3}{-4} = -0,75$; $\frac{4}{-5} = -0,8$

Vì $-0,75 > -0,8$ nên $\frac{3}{-4} > \frac{4}{-5}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: So sánh qua phân số trung gian:

b, $\frac{18}{31}$ và $\frac{15}{37}$ b $\frac{72}{73}$ và $\frac{58}{99}$

Bài 2: So sánh:

a, $A = \frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}$ và $B = \frac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}$ b, $A = \frac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ và $B = \frac{100^{101}+1}{100^{100}+1}$

Bài 3: So sánh:

a, $A = \frac{13^{15}+1}{13^{16}+1}$ và $B = \frac{13^{16}+1}{13^{17}+1}$ b, $A = \frac{1999^{1999}+1}{1999^{1998}+1}$ và $B = \frac{1999^{2000}+1}{1999^{1999}+1}$

Bài 4: So sánh:

a, $A = \frac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ và $B = \frac{100^{98}+1}{100^{97}+1}$ b, $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Bài 5: So sánh:

a, $A = \frac{10^{7}+5}{10^{7}-8}$ và $B = \frac{10^{8}+6}{10^{8}-7}$ b, $A = \frac{10^{8}+2}{10^{8}-1}$ và $B = \frac{10^{8}}{10^{8}-3}$

Bài 6: So sánh:

a, $A = \frac{19^{20}+5}{19^{20}-8}$ và $B = \frac{19^{21}+6}{19^{21}-7}$ b, $A = \frac{100^{2009}+1}{100^{2008}+1}$ và $B = \frac{100^{2010}+1}{100^{2009}+1}$

Bài 7: So sánh:

a, $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$ b, $A = \frac{10^{2004}+1}{10^{2005}+1}$ và $B = \frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}$

Bài 8: So sánh:

a, $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B = \frac{10^{1993}+3}{10^{1992}+3}$ b, $A = \frac{10^{10}+1}{10^{10}-1}$ và $B = \frac{10^{10}-1}{10^{10}-3}$

Bài 9: So sánh:

a, $A = \frac{10^{20}+6}{10^{21}+6}$ và $B = \frac{10^{21}+6}{10^{22}+6}$ b, $A = \frac{15^{2016}+5}{15^{2017}+5}$ và $B = \frac{15^{2017}+1}{15^{2018}+1}$

Bài 10: So sánh:

a, $A = \frac{10^{20}+3}{10^{21}+3}$ và $B = \frac{10^{21}+4}{10^{22}+4}$ b, $A = \frac{20^{21}+3}{20^{22}+4}$ và $B = \frac{20^{22}+8}{20^{23}+28}$

Bài 11: So sánh: $A = \frac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ Và $B = \frac{100^{69}+1}{100^{68}+1}$

Bài 12: So sánh:

a, $A = \frac{2^{18}-3}{2^{20}-3}$ và $B = \frac{2^{20}-3}{2^{22}-3}$ b, $A = \frac{15^{23}-3}{15^{22}-138}$ và $B = \frac{15^{22}+4}{15^{21}-5}$

Bài 13: So sánh:

a, $A=\frac{2004}{2005}+\frac{2005}{2006}$ và $B=\frac{2004+2005}{2005+2006}$

b, $A=\frac{2000}{2001}+\frac{2001}{2002}$ và $B=\frac{2000+2001}{2002+2002}$

Bài 14: So sánh:

a, $A=\frac{1985.1987-1}{1980+1985.1986}$ và 1

b, $A=\frac{5(11.13-22.26)}{22.26-44.54}$ và $B=\frac{138^2-690}{137^2-548}$

Bài 15: So sánh:

a, $A=\frac{33.10^3}{2^3.5.10^3+7000}$ và $B=\frac{3774}{5217}$

b, $A=\frac{244.395-151}{244+395.243}$ và $B=\frac{423134.846267-423133}{423133.846267+423134}$

Bài 16: So sánh $M=\frac{5(11.13-22.26)}{22.26-44.52}$ và $N=\frac{138^2-690}{137^2-548}$

Bài 17: So sánh: $A=\frac{244.395-151}{244+395.243}$ và $B=\frac{423134.846267-423133}{423133.846267+423134}$

Bài 18: So sánh:

a, $A=\frac{1919.171717}{191919.1717}$ và $B=\frac{18}{19}$

b, $A=\frac{4}{7}+5+\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^3}+\frac{6}{7^4}$ và $B=\frac{5}{7^4}+5+\frac{6}{7^2}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}$

Bài 19: So sánh:

a, $A=\frac{10}{2^7}+\frac{10}{2^6}$ và $B=\frac{11}{2^7}+\frac{9}{2^6}$

b, $A=\frac{10}{2^7}+\frac{9}{2^6}+\frac{1}{2^6}$ và $B=\frac{10}{2^7}+\frac{9}{2^6}+\frac{1}{2^7}$

Bài 20: So sánh:

a, $M=\frac{7.9+14.27+21.36}{21.27+42.81+63.108}$ và $B=\frac{37}{333}$

b, $A=\frac{19}{41}+\frac{23}{53}+\frac{29}{61}$ và $B=\frac{21}{41}+\frac{23}{45}+\frac{33}{65}$

Bài 21: So sánh:

a, $A=\frac{12}{14^{11}}+\frac{23}{14^{12}}$ và $B=\frac{12}{14^{12}}+\frac{23}{14^{11}}$

b, $A=\frac{5^0+5^1+...+5^9}{5^0+5^1+...+5^8}$ và $B=\frac{3^0+3^1+...+3^9}{3^0+3^1+...+3^8}$

Bài 22: So sánh:

a, $A=\frac{n}{n+1}$ và $B=\frac{n+2}{n+3}$ (n>0)

b, $A=\frac{n^2-1}{n^2+1}$ và $B=\frac{n^2+3}{n^2+4}$ (n>1)

Bài 23: So sánh:

a, $A=\frac{10}{50^{10}}+\frac{10}{50^8}$ và $B=\frac{11}{50^{10}}+\frac{9}{50^8}$

b, $A=\frac{2016}{100^{20}}+\frac{2016}{100^{30}}$ và $B=\frac{2017}{100^{20}}+\frac{2015}{100^{30}}$

Bài 24: So sánh:

a, $A=\frac{n}{n+3}$ và $B=\frac{n-1}{n+4}$

b, $A=\frac{n}{2n+1}$ và $B=\frac{3n+1}{6n+3}$

Bài 25: So sánh:

a, $A=\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}$ và $B=\frac{7}{8^3}+\frac{3}{8^4}$

b, $A=\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $B=\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$

Bài 26: So sánh :

a, $A=\dfrac{2^{2010}+1}{2^{2007}+1}$ và $B=\dfrac{2^{2012}+1}{2^{2009}+1}$ b, $A=\dfrac{3^{123}+1}{3^{125}+1}$ và $B=\dfrac{3^{122}}{3^{124}+1}$

Bài 27: So sánh : $A=\dfrac{2}{60.63}+\dfrac{2}{63.66}+...+\dfrac{2}{117.120}+\dfrac{2}{2011}$ và

$B=\dfrac{5}{40.44}+\dfrac{5}{44.48}+\dfrac{5}{48.52}+...+\dfrac{5}{76.80}+\dfrac{5}{2011}$

Bài 28: So sánh tổng $S=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{42}$ với $\dfrac{1}{2}$

Bài 29: So sánh không qua quy đồng : $A=\dfrac{-7}{10^{2005}}+\dfrac{-15}{10^{2006}}$ và $B=\dfrac{-15}{10^{2005}}+\dfrac{-7}{10^{2006}}$

Bài 30: So sánh: $A=\dfrac{-9}{10^{2012}}+\dfrac{-19}{10^{2011}}$ và $B=\dfrac{-9}{10^{2011}}+\dfrac{-19}{10^{2012}}$

Bài 31: So sánh : $A=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

Bài 32: So sánh phân số : $\dfrac{a-1}{a}$ và $\dfrac{b+1}{b}$ với a, b là số nguyên cùng dấu và a # b

Bài 33: So sánh $A=\dfrac{2006}{2007}+\dfrac{2007}{2008}+\dfrac{2008}{2009}+\dfrac{2009}{2006}$ với B = 4

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a, Xét phân số trung gian là: $\dfrac{18}{37}$, Khi đó ta có: $\dfrac{18}{31}>\dfrac{18}{37}>\dfrac{15}{37}$

b, Xét phân số trung gian là $\dfrac{72}{99}$, Khi đó ta có: $\dfrac{72}{73}>\dfrac{72}{99}>\dfrac{58}{99}$

Bài 2:

a, $A=\dfrac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}<1 \Rightarrow A<\dfrac{2008^{2008}+1+2007}{2008^{2009}+1+2007}=\dfrac{2008^{2008}+2008}{2008^{2009}+2008}=\dfrac{2008\left(2008^{2007}+1\right)}{2008\left(2008^{2008}+1\right)}=B$

b, Ta có : $B=\dfrac{100^{101}+1}{100^{100}+1}>1 \Rightarrow B>\dfrac{100^{101}+1+99}{100^{100}+1+99}=\dfrac{100^{101}+100}{100^{100}+100}=\dfrac{100\left(100^{100}+1\right)}{100\left(100^{99}+1\right)}=A$

Bài 3:

a, $B=\dfrac{13^{16}+1}{13^{17}+1}<1 \Rightarrow B<\dfrac{13^{16}+1+12}{13^{17}+1+12}=\dfrac{13^{16}+13}{13^{17}+13}=\dfrac{13\left(13^{15}+1\right)}{13\left(13^{16}+1\right)}=A$ Vậy A>B

b, $B=\dfrac{1999^{2000}+1}{1999^{1999}+1}>1 \Rightarrow B>\dfrac{1999^{2000}+1+1998}{1999^{1999}+1+1998}=\dfrac{1999^{2000}+1999}{1999^{1999}+1999}=\dfrac{1999\left(1999^{1999}+1\right)}{1999\left(1999^{1998}+1\right)}$=A

Bài 4:

a, $A=\dfrac{100^{100}+1}{100^{99}+1}>1 \Rightarrow A>\dfrac{100^{100}+1+9999}{100^{99}+1+9999}=\dfrac{100^{100}+10^{2}}{100^{99}+10^{2}}=\dfrac{100^{2}\left(100^{98}+1\right)}{100^{2}\left(100^{97}+1\right)}=B$ Vậy A>B

b, $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1}<1 \Rightarrow A<\dfrac{10^{11}-1+11}{10^{12}-1+11}=\dfrac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\dfrac{10\left(10^{10}+1\right)}{10\left(10^{11}+1\right)}=B$

Bài 5:

a, $A=\dfrac{10^7+5}{10^7-8}=\dfrac{10^7-8+13}{10^7-8}=1+\dfrac{13}{10^7-8}$

$B=\dfrac{10^8+6}{10^8-7}=\dfrac{10^8-7+13}{10^8-7}=1+\dfrac{13}{10^8-7}$ mà: $\dfrac{13}{10^7-8}>\dfrac{13}{10^8-7}$ => $A>B$

b, $A=\dfrac{10^8+2}{10^8-1}=\dfrac{10^8-1+3}{10^8-1}=1+\dfrac{3}{10^8-1}$

$B=\dfrac{10^8}{10^8-3}=\dfrac{10^8-3+3}{10^8-3}=1+\dfrac{3}{10^8-3}$ Mà: $\dfrac{3}{10^8-1}<\dfrac{3}{10^8-3}$ => $A<B$

Bài 6:

a, $A=\dfrac{19^{20}+5}{19^{20}-8}=\dfrac{19^{20}-8+13}{19^{20}-8}=1+\dfrac{13}{19^{20}-8}$

$B=\dfrac{19^{21}+6}{19^{21}-7}=\dfrac{19^{21}-7+13}{19^{21}-7}=1+\dfrac{13}{19^{21}-7}$, Mà: $\dfrac{13}{19^{20}-8}>\dfrac{13}{19^{21}-7}$ => $A>B$

b, $B=\dfrac{100^{2010}+1}{100^{2009}+1}>1 \Rightarrow B>\dfrac{100^{2010}+1+99}{100^{2009}+1+99}=\dfrac{100\left(100^{2009}+1\right)}{100\left(100^{2008}+1\right)}=A$, vậy A<B

Bài 7:

a, $B=\dfrac{10^{16}+1}{10^{17}+1}<1 \Rightarrow B<\dfrac{10^{16}+1+9}{10^{17}+1+9}=\dfrac{10\left(10^{15}+1\right)}{10\left(10^{16}+1\right)}=A$ Vậy: A>B

b, $B=\dfrac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}<1 \Rightarrow B<\dfrac{10^{2005}+1+9}{10^{2006}+1+9}=\dfrac{10\left(10^{2004}+1\right)}{10\left(10^{2005}+1\right)}=A$ Vậy A>B

Bài 8:

a, $B=\dfrac{10^{1993}+3}{10^{1992}+3}>1 \Rightarrow B>\dfrac{10^{1993}+3+7}{10^{1992}+3+7}=\dfrac{10\left(10^{1992}+1\right)}{10\left(10^{1991}+1\right)}=A$ vậy B>A

b, $A=\dfrac{10^{10}+1}{10^{10}-1}=\dfrac{10^{10}-1+2}{10^{10}-1}=1+\dfrac{2}{10^{10}-1}$

$B=\dfrac{10^{10}-1}{10^{10}-3}=\dfrac{10^{10}-3+2}{10^{10}-3}=1+\dfrac{2}{10^{10}-3}$, mà: $\dfrac{2}{10^{10}-1}<\dfrac{2}{10^{10}-3}$ => $A<B$

Bài 9:

a, $B=\dfrac{10^{21}+6}{10^{22}+6}<1 \Rightarrow B<\dfrac{10^{21}+6+54}{10^{22}+6+54}=\dfrac{10^{21}+60}{10^{22}+60}=\dfrac{10\left(10^{21}+6\right)}{10\left(10^{21}+6\right)}=A$, Vậy A>B

b, $B=\dfrac{15^{2017}+1}{15^{2018}+1}<1 \Rightarrow B<\dfrac{15^{2017}+1+74}{15^{2018}+1+74}=\dfrac{15^{2017}+75}{15^{2018}+75}=\dfrac{15\left(15^{2016}+5\right)}{15\left(15^{2017}+5\right)}=A$ vậy A>B

Bài 10:

a, $B=\dfrac{10^{21}+4}{10^{22}+4}<1 \Rightarrow B<\dfrac{10^{21}+4+26}{10^{22}+4+26}=\dfrac{10^{21}+30}{10^{22}+30}=\dfrac{10\left(10^{20}+3\right)}{10\left(10^{21}+3\right)}=A$, vậy A>B

b, $B=\dfrac{20^{22}+8}{20^{23}+28}<1 \Rightarrow B<\dfrac{20^{22}+8+52}{20^{23}+28+52}=\dfrac{20^{22}+60}{20^{23}+80}=\dfrac{20\left(20^{21}+3\right)}{20\left(20^{22}+4\right)}=A$ Vậy A>B

Bài 11:

Quy đồng mẫu ta có:

$A=\left(100^{100}+1\right)\left(100^{68}+1\right)$, và $B=\left(100^{69}+1\right)\left(100^{99}+1\right)$

Xét hiệu $A-B=\left(100+1\right)\left(100^{68}+1\right)-\left(100^{89}+1\right)\left(100^{99}+1\right)$ $=100^{100}-100^{99}-100^{69}+100^{68}$

$=100.100^{99}-100^{99}-100.100^{68}+100^{68}=99.100^{99}-99.100^{68}=99\left(100^{99}-100^{68}\right)>0=>A>B$

Bài 12:

a, Chú ý trong trường hợp ta trừ cả tử và mẫu với cùng 1 số thì ta đảo chiều của bất đẳng thức $B=\dfrac{2^{20}-3}{2^{22}-3}<1=>B>\dfrac{2^{20}-3-9}{2^{22}-3-9}=\dfrac{2^{20}-12}{2^{22}-12}=\dfrac{2^2\left(2^{18}-3\right)}{2^2\left(2^{20}-3\right)}=A$ Vậy B>A

b, $A=\dfrac{15^{23}-3}{15^{22}-138}>1=>A>\dfrac{15^{23}-3+63}{15^{22}-138+63}=\dfrac{15^{23}+60}{15^{22}-75}=\dfrac{15\left(15^{22}+4\right)}{15\left(15^{21}-5\right)}=B$, Vậy A>B

Bài 13:

a, $B=\dfrac{2004+2005}{4011}=\dfrac{2004}{4011}+\dfrac{2005}{4011}<\dfrac{2004}{2005}+\dfrac{2005}{2006}=A$

b, $B=\dfrac{2000+2001}{4004}=\dfrac{2000}{4004}+\dfrac{2001}{4004}<\dfrac{2000}{2001}+\dfrac{2001}{2002}=A$

Bài 14:

a, $A=\dfrac{1985.(1986+1)-1}{1980+1985.1986}=\dfrac{1985.1986+1985-1}{1980+1985.1986}=\dfrac{1985.1986+1984}{1985.1986+1980}>1$

b, $A=\dfrac{5(11.13-22.26)}{4.(11.13-22.26)}=\dfrac{5}{4}=1+\dfrac{1}{4}$ và $B=\dfrac{138}{137}=1+\dfrac{1}{137}$ mà: $\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{137}=>A>B$

Bài 15:

a, $7000=7.10^3=>A=\dfrac{33}{47}$ và $B=\dfrac{34}{47}$=> A<B

b, $A=\dfrac{(243+1).395-151}{244+395.243}=\dfrac{243.395+395-151}{244+395.243}=\dfrac{243.395+244}{244+395.243}=1$,

Tương tự ta có: Tử số của B là

$(423133+1).846267-423133=423133.846267+846267-423133$

$=423133.846267+423134$ bằng với mẫu số của B nên B=1. Vậy A=B

Bài 16:

Ta có: $M=\dfrac{5(11.13-22.26)}{4(11.13-22.26)}=\dfrac{5}{4}=1+\dfrac{1}{4}$ và $N=\dfrac{138}{137}=1+\dfrac{1}{137}$

Bài 17:

Ta có: A có $TS=(243+1)395-151=243.395+395-151=243.395+244=MS=>A=1$

Và $TS=(423133+1)846267-423133=423133.846267+846256-423133$

$=423133.846267+423134=MS=>B=1$

Bài 18:

a, Ta có : $A=\dfrac{19.101.17.10101}{19.10101.17.101}=1>\dfrac{18}{19}=B$

b, Ta có :

$$A=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{6}{7^4}\right)=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^4}+\frac{1}{7^4}\right)$$

$$B=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{6}{7^2}+\frac{5}{7^4}\right)=\left(5+\frac{4}{7}+\frac{5}{7^3}\right)+\left(\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^4}\right)$$

Mà: $\frac{1}{7^4}=\frac{1}{2401}<\frac{3}{7^2}=\frac{3}{49}$

Bài 19:

a, Ta có : $A=\frac{10}{2^7}+\frac{10}{2^6}=\frac{10}{2^7}+\frac{9}{2^6}+\frac{1}{2^6}$

$B=\frac{11}{2^7}+\frac{9}{2^6}=\frac{10}{2^7}+\frac{1}{2^7}+\frac{9}{2^6}$, mà: $\frac{1}{2^6}>\frac{1}{2^7}\Rightarrow A>B$

b, Ta có : $\frac{1}{2^6}>\frac{1}{2^7}\Rightarrow A>B$

Bài 20:

a, Rút gọn M ta có: $A=\frac{7.9(1+2.3+3.4)}{21.29(1+2.3+3.4)}=\frac{1}{9}$ $\quad B=\frac{37:37}{333:37}=\frac{1}{9}$

b, $A=\frac{19}{41}+\frac{23}{53}+\frac{29}{61}<\frac{19}{38}+\frac{23}{46}+\frac{29}{58}=\frac{3}{2}$ và $B=\frac{21}{41}+\frac{23}{45}+\frac{33}{65}>\frac{21}{42}+\frac{23}{46}+\frac{33}{66}=\frac{3}{2}$

Vậy A<B

Bài 21:

a, Ta có : $A=\frac{12}{14^{11}}+\frac{23}{14^{12}}=\frac{12}{14^{11}}+\frac{12}{14^{12}}+\frac{11}{14^{12}}$

$B=\frac{12}{14^{12}}+\frac{23}{14^{11}}=\frac{12}{14^{11}}+\frac{11}{14^{11}}+\frac{12}{14^{12}}$, mà: $\frac{11}{14^{12}}<\frac{11}{14^{11}}\Rightarrow A<B$

b, Ta có : $A=\frac{1+5\left(5^0+5^1+5^2+...+5^8\right)}{5^0+5^1+5^2+...+5^8}=\frac{1}{1+5+5^2+...+5^8}+5$>2+3

$B=\frac{1+3\left(3^0+3^1+3^2+...+3^8\right)}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}=\frac{1}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}+3$

Nhận thấy $\frac{1}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}<2\Rightarrow A>B$

Bài 22:

a, Ta có : $A=\frac{n}{n+1}<1\Rightarrow A<\frac{n+2}{n+1+2}=\frac{n+2}{n+3}=B$

b, Ta có : $A=\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=1+\frac{-2}{n^2+1}$

Và $B=\frac{n^2+3}{n^2+4}=\frac{n^2+4-1}{n^2+4}=1+\frac{-1}{n^2+4}=1+\frac{-2}{2n^2+8}$, Mà: $\frac{-2}{n^2+1}<\frac{-2}{2n^2+8}\Rightarrow A<B$

Bài 23:

a, $A=\frac{10}{50^{10}}+\frac{9}{50^8}+\frac{1}{50^8}$ và $B=\frac{10}{50^{10}}+\frac{1}{50^{10}}+\frac{9}{50^8}$, Mà: $\frac{1}{50^8}>\frac{1}{50^{10}}\Rightarrow A>B$

b, $A=\frac{2016}{100^{20}}+\frac{2015}{100^{30}}+\frac{1}{100^{30}}$ và $B=\frac{2016}{100^{20}}+\frac{1}{100^{20}}+\frac{2015}{100^{30}}$, mà: $\frac{1}{100^{30}}<\frac{1}{100^{20}}\Rightarrow A<B$

Bài 24:

a, $A=\dfrac{n}{n+3}>\dfrac{n-1}{n+3}>\dfrac{n-1}{n+4}=B$

b, $A=\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{3n}{6n+3}<\dfrac{3n+1}{6n+3}=B$

Bài 25:

a, $A=\dfrac{3}{8^3}+\dfrac{7}{8^4}=\dfrac{3}{8^3}+\dfrac{3}{8^4}+\dfrac{4}{8^4}$, và $B=\dfrac{7}{8^3}+\dfrac{3}{8^4}=\dfrac{3}{8^3}+\dfrac{4}{8^3}+\dfrac{3}{8^4}$, Mà: $\dfrac{4}{8^4}<\dfrac{4}{8^3}\Rightarrow A<B$

b, $A=1+\dfrac{-1}{2003.2004}$, $B=1+\dfrac{-1}{2004.2005}$, Mà: $\dfrac{-1}{2003.2004}<\dfrac{-1}{2004.2005}\Rightarrow A<B$

Bài 26:

a, $A=\dfrac{2^{2010}+2^3-7}{2^{2007}+1}=2^3-\dfrac{7}{2^{2002}+1}$ $\quad B=\dfrac{2^{2012}+2^3-7}{2^{2009}+1}=2^3-\dfrac{7}{2^{2009}+1}$

b, $A=\dfrac{3^{123}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{8}{9}}{3^{125}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{3^2}\left(3^{125}+1\right)+\dfrac{8}{9}}{3^{125}+1}=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{\dfrac{8}{9}}{3^{125}+1}$, Tương tự : $B=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{\dfrac{8}{9}}{3^{124}+1}$

Bài 27:

$$3A=2\left(\frac{3}{60.63}+\frac{3}{63.66}+...+\frac{3}{117.120}+\frac{3}{2011}\right)=2\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{120}+\frac{3}{2011}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{120}+\frac{3}{2011}\right)=\frac{1}{60}+\frac{6}{2011}$$

$$A=\frac{1}{180}+\frac{2}{2011}$$

$$4B=5\left(\frac{4}{40.44}+\frac{4}{44.48}+...+\frac{4}{76.80}+\frac{4}{2011}\right)=5\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{80}+\frac{4}{2011}\right)$$

$$=5\left(\frac{1}{80}+\frac{4}{2011}\right)=\frac{1}{16}+\frac{20}{2011}$$

$$B=\frac{1}{64}+\frac{5}{2011}>\frac{1}{180}+\frac{2}{2011}=A$$

Bài 28:

$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}<\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{42}<\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{40}=\dfrac{1}{20}$ nên $S<\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{2}$

Bài 29:

$A=\dfrac{-7}{10^{2005}}+\dfrac{-8}{10^{2006}}+\dfrac{-7}{10^{2006}}$, $B=\dfrac{-7}{10^{2005}}+\dfrac{-8}{10^{2005}}+\dfrac{-7}{10^{2006}}$

Bài 30:

$A=\dfrac{-9}{10^{2012}}+\dfrac{-9}{10^{2011}}+\dfrac{-10}{10^{2011}}$

$B=\dfrac{-9}{10^{2011}}+\dfrac{-9}{10^{2012}}+\dfrac{-10}{10^{2012}}$, Mà: $\dfrac{-10}{10^{2011}}<\dfrac{-10}{10^{2012}}\Rightarrow A<B$

Bài 31:

$B < 1 \Rightarrow B < \frac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = A$

Bài 32:

Ta có : $\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ & $\frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$

*Nếu a>0 và b>0 thì $\frac{1}{a} > 0$ và $\frac{1}{b} > 0$ *Nếu $a < 0$ và $b < 0$ thì $\frac{1}{a} < 0$ & $\frac{1}{b} < 0$

Bài 33:

$A = \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} = 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} > 4$

CHỦ ĐỀ 12.
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GTLN-GTNN

A/ BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng 1: So sánh tổng các lũy thừa với một số

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$A < \frac{1}{1} - \frac{1}{100} < 1$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}$ và Chứng minh $A > \frac{1}{6}$

Ta có: $A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + ... + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + ... + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$

$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505}$ đến đây, ta sẽ so sánh $\frac{96}{505}$ với $\frac{1}{6}$ như sau:

Ta có: $\frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6}$ bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số $\frac{1}{6}$ với 96 để được hai phân số cùng tử rồi so sánh khi đó ta có: $A > \frac{96}{505} > \frac{96}{567} = \frac{1}{6}$

(1)

Chiều thứ hai, ta cần chứng minh: $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Ta làm tương tự như sau :

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \ldots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \ldots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{1}{6} < A < \frac{1}{4}$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta biến đổi: $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \ldots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{99.100}$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Lời giải

Nhận thấy bài này là tổng cùng lũy thừa nhưng cơ số lại chẵn, nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa hai liên tiếp như sau :

$$A = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{50^2}\right) < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{49.50}\right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4}\left(1 + 1 - \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

Dạng 2: Tổng phân số tự nhiên

Ví dụ 1: CMR: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: CMR: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \ldots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Nhóm thành 2 ngoặc: Khi đó ta có:

$$VT = \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \ldots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \ldots + \frac{1}{80}\right)$$

$$\Rightarrow VT > \left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+...+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{80}+...+\frac{1}{80}\right)=\frac{20}{60}+\frac{20}{80}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

Ví dụ 3: So sánh A và B biết : $A=\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2010}$ và $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{17}$

Lời giải

$$A=\left(1-\frac{1}{2011}\right)+\left(1-\frac{1}{2012}\right)+\left(1+\frac{2}{2010}\right)=3+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2012}\right)>3$$

$$B=\left(\frac{1}{3}+...+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+...+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{13}+...+\frac{1}{17}\right)<\frac{5}{3}+\frac{5}{8}+\frac{5}{10}$$ Tổng B có 15 số

Ví dụ 4: Cho $M=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{17}$, CMR: M < 2

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}<\frac{1}{5}.5=1$ và $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{17}<\frac{1}{8}.8=1$

Do đó: M < 2.

Ví dụ 5: Cho $S=\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}$, CMR: $1<S<2$

Lời giải

Ta có:

$$S=\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}>\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}=\frac{15}{15}=1\Rightarrow S>1$$

$$S=\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}<\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{15}{10}=1,5<2\Rightarrow S<2$$

Dạng 3: Tích của một dãy

Ví dụ 1: Cho $A=\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7}...\frac{200}{199}$ Chứng minh rằng: 14 < A < 20

Lời giải

Ta thấy: Phân số $\frac{n+1}{n}>1\Rightarrow\frac{n+1}{n}>\frac{n+2}{n+1}$ nên ta có:

$A>\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}...\frac{201}{200}$ khi đó :

$$A^2>\frac{(2.4.6....200)(3.5.7...201)}{(1.3.5...199)(2.4.6...200)}\Rightarrow A^2>201>196=14^2\Rightarrow A>14$$

Mặt khác : $\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n-1}$ nên ta có :

$A<\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}.....\frac{199}{198}$ khi đó :

$$A^2<\frac{(2.4.6...200)(2.3.5.7...199)}{(1.2.4.6...198)(1.3.5.7...199)}\Rightarrow A^2<200.2=20^2\Rightarrow A<20$$

Ví dụ 2: Cho $A=\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{208}{210}$ Chứng minh rằng $A<\frac{1}{25}$

Lời giải

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2}<1=>\frac{n}{n+2}<\frac{n-1}{n+1}<\frac{n-1}{n}$,

$A<\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.....\frac{207}{208}=>A^2<\frac{(1.4.7.10....208)(1.3.6...207)}{(3.6.9...210)(3.4.7...208)}=>A^2<\frac{1}{3.210}=\frac{1}{630}$

$<\frac{1}{625}=>A<\frac{1}{25}$

Ví dụ 3: Cho $A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{99}{100}$ Chứng minh rằng $\frac{1}{15}<A<\frac{1}{10}$

Lời giải

A có dạng $\frac{n}{n+1}<1=>\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$ khi đó ta có :

$A<\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.....\frac{100}{101}$ khi đó : $A^2<\frac{(1.3.5....99)(2.4.6...100)}{(2.4.6...100)(3.5.7...101)}=>A^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}=>A<\frac{1}{10}$

Mặt khác :

$A>\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}....\frac{98}{99}=>A^2>\frac{(1.3.5...99)(1.2.4...98)}{(2.4.6...100)(2.3.5.7...99)}=\frac{1}{200}$

$=>A^2>\frac{1}{200}>\frac{1}{225}=\frac{1}{15^2}=>A>\frac{1}{15}$

Dạng 4: Bất đẳng thức chứa chữ

Ví dụ 1: Cho các số x,y,z nguyên dương, CMR: $1<\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<2$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$,

Tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}>1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\right)+\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}\right)=3$ Nên $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<2$

Ví dụ 2: Cho a,b,c là ba cạnh của 1 tam giác : CMR : $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có :

$b+c>a=>a(b+c)>a^2=>ab+ac>a^2$

Tương tự ta có :

$bc+ba>b^2$ và $ac+cb>c^2$

Cộng theo vế ta được : $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$

Ví dụ 3: Cho ba số dương $0\le a\le b\le c\le 1$, CMR: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\le 2$

Lời giải

Vì $0\le a\le b\le c\le 1=>\begin{cases}a-1\le 0\\ b-1\le 0\end{cases}=>(a-1)(b-1)\ge 0=>ab-a-b+1\ge 0$

$$=> ab+1 \ge a+b => \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{a+b} \;=> \frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{a+b},(c \ge 0)$$

Mà $\frac{c}{a+b} \le \frac{2c}{a+b+c},(c \ge 0) => \frac{c}{ab+1} \le \frac{2c}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{b}{ac+1} \le \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \le \frac{2a}{a+b+c}$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1} \le \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$ (ĐPCM)

2/ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2005^2}<\frac{2004}{2005}$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4}<\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{2016}{5^{2016}}<\frac{1}{3}$

Bài 3: Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Bài 4: Chứng minh rằng: $A=\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+...+\frac{19}{9^2.10^2}<1$

Bài 5: Chứng minh rằng : $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+...+\frac{4019}{2009^2.2010^2}<1$

Bài 6: Cho $A=\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{80}$, Chứng minh rằng: 1< A <2

Bài 7: Chứng minh rằng: $A=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{2499}{2500}>48$

Bài 8: Chứng minh rằng: $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{2016}-1}>\frac{2016}{2}$

Bài 9: Cho : $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{100}-1}$, chứng minh rằng A > 50 và A < 100

Bài 10: Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{64}>4$

Bài 11: Cho $A=\frac{455}{1}+\frac{454}{2}+\frac{453}{3}+...+\frac{2}{454}+\frac{1}{455}$, So sánh A với 2007

Bài 12: Chứng minh rằng: $P=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}...\frac{199}{200}$ Chứng minh rằng $P^2<\frac{1}{201}$

Bài 13: Cho $S=\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}...\frac{200}{199}$ Chứng minh rằng: $101<S^2<400$

Bài 14: Cho $A=\left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)...\left(\frac{1}{100^2}-1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$A<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2004.2005}=1-\frac{1}{2005}=\frac{2004}{2005}$$

Bài 2:

$4A = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^{2005}}\right) - \frac{2016}{5^{2016}}$, Đặt tổng trong ngoặc bằng B rồi tính B ta có :

$4B = 1 - \frac{1}{5^{2015}} \Rightarrow B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{2015}}$, thay vào A ta được :

$4A = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4} \Rightarrow A < \frac{5}{16} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ (1)

Mặt khác : $A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + ... + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được ĐPCM

Bài 3:

Tính tổng A , ta được : $4A = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... - \frac{1}{3^{99}}) - \frac{100}{3^{100}}$, Đặt tổng trong ngoặc bằng B

$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4.3^{99}} \Rightarrow 4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99}.4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 4:

Ta có : $A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + ... + \frac{10^2 - 9^2}{9^2.10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2}\right)$

$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$

Bài 5:

Ta có : $A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2.4^2} + ... + \frac{2010^2 - 2009^2}{2009^2.2010^2}$

$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2} = 1 - \frac{1}{2010^2} < 1$

Bài 6:

Tổng A có 60 số hạng: $A = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{80}\right) + \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{79}\right) + ... + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51}\right)$ (30 ngoặc)

$A = 101\left(\frac{1}{21.80} + \frac{1}{22.79} + ... + \frac{1}{50.51}\right) < 101.\frac{30}{21.80} = \frac{303}{168} = \frac{101}{56} < \frac{112}{56} = 2$

Mặt khác: $A > 101.\frac{30}{50.51} = \frac{303}{255} > 1$

Bài 7:

Nhận thấy các mẫu của tổng A là bình phương cảu các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là 1

nên ta tách A như sau:

$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{50^2}\right)$

Mà $B = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{50^2}\right) < 1 \Rightarrow -B > -1 \Rightarrow A = 49 - B > 49 - 1 = 48$

Bài 8:

Nhận thấy tổng A có phân số cuối có dạng $\frac{1}{2^n}$, nên muốn Chứng minh tổng A lớn hơn 1 số ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc :

Ta có : $A=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{2005}+1}+...+\frac{1}{2^{2006}}\right)-\frac{1}{2^{2006}}$

$$A>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{2006}}+...+\frac{1}{2^{2006}}\right)-\frac{1}{2^{2006}}$$

$$A>1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2^2}+2^2.\frac{1}{2^3}+...+2^{2005}.\frac{1}{2^{2006}}-\frac{1}{2^{2006}}$$

$$A>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2006}}=1+2016.\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2016}}=\frac{2016}{2}+\left(1-\frac{1}{2^{2016}}\right)>\frac{2016}{2}$$

Bài 9:

Nhận thấy tổng A giống với bài 10, muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc :

$$A=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{99}+1}+...+\frac{1}{2^{100}}\right)-\frac{1}{2^{100}}$$

$$A>1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2^2}+2^2.\frac{1}{2^3}+...+2^{99}.\frac{1}{2^{100}}-\frac{1}{2^{100}}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{100}}=\frac{100}{2}+\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)>50$$

Mặt khác muốn chứng minh A <100, ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ nằm ở đầu ngoặc :

$$A=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+...+\frac{1}{15}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

$$A<1+2.\frac{1}{2}+2^2.\frac{1}{2^2}+2^3.\frac{1}{2^3}+...+2^{99}.\frac{1}{2^{99}}=1+1+1+...+1=100 \text{ vậy } A<100$$

Bài 10:

$$A=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^5+1}+...+\frac{1}{2^6}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2^2}+2^2.\frac{1}{2^3}+...+2^5.\frac{1}{2^6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}=4$$

Bài 11:

Ta có: $A=\left(\frac{454}{2}+1\right)+\left(\frac{453}{3}+1\right)+...+\left(\frac{1}{455}+1\right)+1$

$$=\frac{456}{2}+\frac{456}{3}+...+\frac{456}{455}+\frac{456}{456}=456\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{456}\right)=456.B$$

Xét

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{456}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^7+1}+...+\frac{1}{2^8}\right)+\left(\frac{1}{257}+\frac{1}{258}+...+\frac{1}{456}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^8} + \ldots + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{456} + \ldots + \frac{1}{456}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \ldots + \frac{2^7}{2^8} + \frac{200}{456} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\right) + \frac{200}{456} = 4 + \frac{200}{456} = \frac{2024}{456}$$

Khi đó: $A > 456.\frac{2024}{456} = 2024 > 2007$

Bài 12:

Ta có : $P < \frac{2}{3}.\frac{4}{5}......\frac{200}{201} \Rightarrow P^2 < \frac{(1.3.5.....199)(2.4.6...200)}{(2.4.6......200)(3.5.7.9.....201)} \Rightarrow P^2 < \frac{1}{201}$

Bài 13:

Ta có : $S < \frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{5}{4}......\frac{199}{198} \Rightarrow S^2 < \frac{(2.4.6....200)(2.3.5...199)}{(1.3.5.7...199)(1.2.4.6...198)} = 400$

Mặt khác : $S > \frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}......\frac{201}{200} \Rightarrow S^2 > \frac{(2.4.6.....200)(3.5.7....201)}{(1.3.5.....199)(2.4.6....200)} = 201 > 101$

Bài 14:

Ta thấy tích A gồm 99 số âm :

$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{9} - 1\right).......\left(\frac{1}{10000} - 1\right) = -\left(\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}......\frac{99.101}{100.100}\right) = \frac{-101}{200}$, Mà :

$\frac{101}{200} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-101}{200} < \frac{-1}{2}$

Vậy $A < \frac{-1}{2}$

B/ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

BÀI TOÁN: Tìm số nguyên n (số tự nhiên n) để biểu thức A(n) có GTLN – GTNN.

LOẠI 1: Với A = $\frac{a}{b.n + c}$ với a, b, c là các số nguyên đã biết.

+ Nếu a ∈ Z^+ thì:

A có GTLN khi b.n + c là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

A có GTNN khi b.n + c là số nguyên âm lớn nhất ứng với n nguyên

+ Nếu a ∈ Z^- thì:

A có GTLN khi b.n + c là số âm lớn nhất ứng với n nguyên

A có GTNN khi b.n + c là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên n để A = $\frac{15}{n-9}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có A = $\frac{15}{n-9}$ nên A lớn nhất khi $n - 9$ là số dương nhỏ nhất với n nguyên

Do đó $n - 9 = 1$ hay $n = 10$, khi đó A = 15

Vậy giá trị lớn nhất của A là 15 khi $n = 10$.

LOẠI 2: Với A = $\frac{a.n + d}{b.n + c}$ với a, b, c, d là các số nguyên đã biết.

+ Tách A = $\frac{a.n+d}{b.n+c}=e+\frac{f}{b.n+c}$ (f ∈ Z)

+ Việc tìm n nguyên để A có GTLN – GTNN trở thành bài toán tìm n nguyên để $\frac{f}{b.n+c}$ có GTLN hoặc có GTNN (Bài Toán LOẠI 1)

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên *n* để phân số M = $\frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $M=\frac{6n-3}{4n-6}=\frac{3}{2}+\frac{6}{4n-6}$

M đạt giá trị lớn nhất khi *4n – 6* đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số nguyên

Do đó *4n – 6 = 2 với n =2* , khi đó $M=\frac{3}{2}+\frac{6}{2}=\frac{9}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 4,5 khi n = 2.

LOẠI 3: Với A = ǀf(x)ǀ + b hoặc A = - ǀf(x)ǀ + b

+ Vì ǀf(x)ǀ ≥ 0 => A = ǀf(x)ǀ + b ≥ b => A nhỏ nhất = b khi f(x) = 0

+ Vì - ǀf(x)ǀ ≤ 0 => A = - ǀf(x)ǀ + b ≤ b => A lớn nhất = b khi f(x) = 0

Ví dụ 3. Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : A = ǀ x - y ǀ + ǀ x + 1 ǀ + 2016 đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có: $|x-y|\ge 0; |x+1|\ge 0 \Rightarrow M=|x-y|+|x+1|+2016\ge 2016$

Dấu "=" xảy ra khi x – y = -1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của của M là 2016 khi x = y = -1.

2/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài tập 3. Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Bài tập 4. Tìm số tự nhiên n để phân số B = $\frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài tập 5. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Bài tập 6. Tìm x để phân số $\frac{1}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất.

Bài tập 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của của biểu thức sau: A=$\frac{6n-1}{3n+2}$ (với n là số nguyên)

Bài tập 8: Cho phân số A=$\frac{n+1}{n-3}$ (n ∈ Z) . Tìm n để A có giá trị lớn nhất.

Bài tập 9: Cho phân số: $p=\frac{6n+5}{3n+2}(n\in N)$. Với giá trị nào của n thì phân số p có giá trị lớn nhất? tìm giá trị lớn nhất đó.

CHỦ ĐỀ 13.

THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Phương pháp:

- Trong dãy tính có các phép cộng, trừ, nhân, chia ta thực hiện theo quy tắc: Nhân, chia trước; cộng, trừ sau, theo thứ tự từ trái sang phải.
- Đối với một tích có chứa nhiều thừa số ta có thể áp dụng các tính chất giao hoán, kết hợp để thực hiện phép tính hợp lý nhất.
- Chúng ta áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế, vận dụng quan hệ thừa số với tích của chúng

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tính:

a) $\frac{3}{5}.\frac{6}{7}+\frac{3}{7}:\frac{5}{3}-\frac{2}{7}:1\frac{2}{3}$;

b) $\left(-13\frac{2}{5}+\frac{-2}{9}:2\frac{1}{2}+\frac{2}{5}.\frac{11}{9}\right).2\frac{1}{2}$;

c) $\left(\frac{-4}{5}+\frac{5}{7}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{-1}{5}+\frac{2}{7}\right):\frac{2}{3}$;

d) $\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{15}-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{11}-\frac{5}{22}\right)$.

Lời giải

a) $\frac{3}{5}.\frac{6}{7}+\frac{3}{7}:\frac{5}{3}-\frac{2}{7}:1\frac{2}{3}=\frac{3}{5}.\frac{6}{7}+\frac{3}{7}.\frac{3}{5}-\frac{2}{7}.\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\left(\frac{6}{7}+\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{7}.1=\frac{3}{7}$;

b) $\left(-13\frac{2}{5}+\frac{-2}{9}:2\frac{1}{2}+\frac{2}{5}.\frac{11}{9}\right).2\frac{1}{2}=\left(-13.\frac{2}{5}+\frac{-2}{9}.\frac{2}{5}+\frac{2}{5}.\frac{11}{9}\right).\frac{5}{2}=\left(-13+\frac{-2}{9}+\frac{11}{9}\right).\frac{2}{5}.\frac{5}{2}$

$=-13+\left(\frac{-2}{9}+\frac{11}{9}\right)=-13+1=-12$;

c) $\left(\frac{-4}{5}+\frac{5}{7}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{-1}{5}+\frac{2}{7}\right):\frac{2}{3}=\left(\frac{-4}{5}+\frac{5}{7}+\frac{-1}{5}+\frac{2}{7}\right):\frac{2}{3}=\left[\left(\frac{-4}{5}+\frac{-1}{5}\right)+\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)\right].\frac{3}{2}=(-1+1).\frac{3}{2}=0$;

d) $\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{15}-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{11}-\frac{5}{22}\right)=\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{15}-\frac{10}{15}\right)+\frac{4}{9}:\left(\frac{2}{22}-\frac{5}{22}\right)=\frac{4}{9}:\left(\frac{-5}{3}\right)+\frac{4}{9}.\frac{-22}{3}$

$=\frac{4}{9}\left(\frac{-5}{3}+\frac{-22}{3}\right)=\frac{4}{9}.\frac{-27}{3}=-4$.

Ví dụ 2. Tính giá trị các biểu thức:

$$A=\frac{\frac{-6}{7}+\frac{6}{13}-\frac{6}{29}}{\frac{9}{7}-\frac{9}{13}+\frac{9}{29}}$$

$$B=\frac{\frac{2}{15}-\frac{2}{21}+\frac{2}{39}}{0,25-\frac{5}{28}+\frac{5}{52}}$$

Lời giải

$$A=\frac{\frac{-6}{7}+\frac{6}{13}-\frac{6}{29}}{\frac{9}{7}-\frac{9}{13}+\frac{9}{29}}=\frac{-2\left(\frac{3}{7}-\frac{3}{13}+\frac{3}{29}\right)}{3.\left(\frac{3}{7}-\frac{3}{13}+\frac{3}{29}\right)}=\frac{-2}{3}\ \left(\text{do}\,\frac{3}{7}-\frac{3}{13}+\frac{3}{29}\neq 0\right).$$

$$B=\frac{\frac{2}{15}-\frac{2}{21}+\frac{2}{39}}{0,25-\frac{5}{28}+\frac{5}{52}}=\frac{\frac{2}{15}-\frac{2}{21}+\frac{2}{39}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{28}+\frac{5}{52}}=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\right)}{\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\right)}=\frac{2}{3}:\frac{5}{4}=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\ \left(\text{do}\,\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\neq 0\right).$$

Ví dụ 3: Thực hiện phép tính:

a, $\frac{2^{12}.3^5-4^6.9^2}{(2^2.3)^6}-\frac{5^{10}.7^3-25^5.49^2}{(125.7)^3+5^9.14^3}$ b, $\frac{2^{18}.18^7.3^3+3^{15}.2^{15}}{2^{10}.6^{15}+3^{14}.15.4^{13}}$ c, $\frac{4^6.9^5+6^9.120}{8^4.3^{12}-6^{11}}$

Lời giải

a, Ta có: $\frac{2^{12}.3^5-4^6.9^2}{(2^2.3)^6}-\frac{5^{10}.7^3-25^5.49^2}{(125.7)^3+5^9.14^3}=\frac{2^{12}.3^5-\left(2^2\right)^6.\left(3^2\right)^2}{2^{12}.3^6}-\frac{5^{10}.7^3-\left(5^2\right)^5.\left(7^2\right)^2}{\left(5^3\right)^3.7^3+5^9.2^3.7^3}$

$=\frac{2^{12}.3^5-2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6}-\frac{5^{10}.7^3-5^{10}.7^4}{5^9.7^3+5^9.2^3.7^3}=\frac{2^{12}.3^4(3-1)}{2^{12}.3^6}-\frac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3(1+8)}=\frac{2}{3^2}-\frac{5.6}{9}=\frac{-28}{9}$

b, Ta có: $\frac{2^{18}.18^7.3^3+3^{15}.2^{15}}{2^{10}.6^{15}+3^{14}.15.4^{13}}=\frac{2^{18}.2^7.3^{14}.3^3+3^{15}.2^{15}}{2^{10}.2^{15}.3^{15}+3^{14}.3.5.2^{28}}=\frac{2^{25}.3^{17}+3^{15}.2^{15}}{2^{25}.3^{15}+3^{15}.2^{28}.5}$

$=\frac{2^{15}.3^{15}\left(2^{10}.3^2+1\right)}{2^{25}.3^{15}\left(1+2^3.5\right)}=\frac{\left(2^{10}.3^2+1\right)}{2^{10}41}$

c, Ta có: $\frac{4^6.9^5+6^9.120}{8^4.3^{12}-6^{11}}=\frac{\left(2^2\right)^6.\left(3^2\right)^5+2^9.3^9.2^3.3.5}{\left(2^3\right)^4.3^{12}-2^{11}.3^{11}}=\frac{2^{12}.3^{10}+2^{12}.3^{10}.5}{2^{12}.3^{12}-2^{11}.3^{11}}$

$=\frac{2^{12}.3^{10}(1+5)}{2^{11}.3^{11}(2.3-1)}=\frac{2.6}{3.5}=\frac{4}{5}$

Ví dụ 4: Thực hiện phép tính:

a, $\frac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^9.9^{16}-7.2^{29}.27^6}$ b, $\frac{2^4.5^2.11^2.7}{2^3.5^3.7^2.11}$ c, $\frac{5^{11}.7^{12}+5^{11}.7^{11}}{5^{12}.7^{11}+9.5^{11}.7^{11}}$

Lời giải

a, Ta có: $\frac{5.4^{15}.9^9-4.3^{20}.8^9}{5.2^{29}.3^{16}-7.2^{29}.27^6}=\frac{5.2^{30}.3^{18}-2^{29}.3^{20}}{5.2^{29}.3^{16}-7.2^{29}.3^{18}}=\frac{2^{29}.3^{18}\left(5.2-3^2\right)}{2^{29}.3^{16}\left(5-7.3^2\right)}=\frac{3^2}{-58}=\frac{-9}{58}$

b, Ta có: $\frac{2^4.5^2.11^2.7}{2^3.5^3.7^2.11}=\frac{2.11}{5.7}=\frac{22}{35}$

c, Ta có: $\frac{5^{11}.7^{12}+5^{11}.7^{11}}{5^{12}.7^{11}+9.5^{11}.7^{11}}=\frac{5^{11}.7^{11}(7+1)}{5^{11}.7^{11}(5+9)}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

Ví dụ 4: Thực hiện phép tính: $\frac{\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003}+\frac{5}{2004}-\frac{5}{2005}}-\frac{\frac{2}{2002}+\frac{2}{2003}-\frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002}+\frac{3}{2003}-\frac{3}{2004}}$

Lời giải

Ta có : $\dfrac{\dfrac{1}{2003}+\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2005}}{\dfrac{5}{2003}+\dfrac{5}{2004}-\dfrac{5}{2005}}-\dfrac{\dfrac{2}{2002}+\dfrac{2}{2003}-\dfrac{2}{2004}}{\dfrac{3}{2002}+\dfrac{3}{2003}-\dfrac{3}{2004}}=$

$$\frac{\dfrac{1}{2003}+\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2005}}{5\left(\dfrac{1}{2003}+\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2005}\right)}-\frac{2\left(\dfrac{1}{2002}+\dfrac{1}{2003}-\dfrac{1}{2004}\right)}{3\left(\dfrac{1}{2002}+\dfrac{1}{2003}-\dfrac{1}{2004}\right)}=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=\frac{-7}{15}$$

Ví dụ 5: Thực hiện phép tính: $\left(\dfrac{1,5+1-0,75}{2,5+\dfrac{5}{3}-1.25}+\dfrac{0,375-0,3+\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{12}}{-0,625+0,5-\dfrac{5}{11}-\dfrac{5}{12}}\right):\dfrac{1890}{2005}+115$

Lời giải

Ta có : $\left(\dfrac{1,5+1-0,75}{2,5+\dfrac{5}{3}-1.25}+\dfrac{0,375-0,3+\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{12}}{-0,625+0,5-\dfrac{5}{11}-\dfrac{5}{12}}\right):\dfrac{1890}{2005}+115$

$$=\left(\frac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{3}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{4}}+\frac{\dfrac{3}{8}-\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{12}}{\dfrac{-5}{8}+\dfrac{5}{10}-\dfrac{5}{11}-\dfrac{5}{12}}\right):\frac{378}{401}+115=\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{-5}\right):\frac{378}{401}+115=0:\frac{378}{401}+115=115$$

Ví dụ 6: Thực hiện phép tính: $\dfrac{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}}{\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{11}}+\dfrac{0,6-\dfrac{3}{25}-\dfrac{3}{125}-\dfrac{3}{625}}{\dfrac{4}{5}-0,16-\dfrac{4}{125}-\dfrac{4}{625}}$

Lời giải

Ta có : $\dfrac{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}}{\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{11}}+\dfrac{0,6-\dfrac{3}{25}-\dfrac{3}{125}-\dfrac{3}{625}}{\dfrac{4}{5}-0,16-\dfrac{4}{125}-\dfrac{4}{625}}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$

Ví dụ 7: Thực hiện phép tính: $564.\left(\dfrac{12+\dfrac{12}{7}-\dfrac{12}{25}-\dfrac{12}{71}}{4+\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{25}-\dfrac{4}{71}}:\dfrac{3+\dfrac{3}{13}+\dfrac{3}{19}+\dfrac{3}{101}}{5+\dfrac{5}{13}+\dfrac{5}{19}+\dfrac{5}{101}}\right)$

Lời giải

Ta có : $564.\left(\dfrac{12+\dfrac{12}{7}-\dfrac{12}{25}-\dfrac{12}{71}}{4+\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{25}-\dfrac{4}{71}}:\dfrac{3+\dfrac{3}{13}+\dfrac{3}{19}+\dfrac{3}{101}}{5+\dfrac{5}{13}+\dfrac{5}{19}+\dfrac{5}{101}}\right)=564.\left(\dfrac{12}{4}:\dfrac{3}{5}\right)=564.5=2820$

Ví dụ 8: Thực hiện phép tính:

a, $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}$ b, $\dfrac{5-\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\frac{5}{27}}{8-\frac{8}{3}+\frac{8}{9}-\frac{8}{27}}:\dfrac{15-\frac{15}{11}+\frac{15}{121}}{16-\frac{16}{11}+\frac{16}{121}}$

Lời giải

a, Ta có : $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\dfrac{16\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)}{16\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)}=\dfrac{16+8+4+2+1}{16-8+4-2+1}=\dfrac{31}{11}$

b, Ta có : $\dfrac{5-\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\frac{5}{27}}{8-\frac{8}{3}+\frac{8}{9}-\frac{8}{27}}:\dfrac{15-\frac{15}{11}+\frac{15}{121}}{16-\frac{16}{11}+\frac{16}{121}}=\dfrac{5}{8}:\dfrac{15}{16}=\dfrac{5}{8}.\dfrac{16}{15}=\dfrac{2}{3}$

Ví dụ 9 : Thực hiện phép tính:

a, $\dfrac{2-\frac{2}{19}+\frac{2}{43}-\frac{2}{1943}}{3-\frac{3}{19}+\frac{3}{43}-\frac{3}{1943}}:\dfrac{4-\frac{4}{29}+\frac{4}{41}-\frac{4}{2941}}{5-\frac{5}{29}+\frac{5}{41}-\frac{5}{2941}}$ b, $\dfrac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\dfrac{3+\frac{3}{13}+\frac{3}{169}+\frac{3}{91}}{7+\frac{7}{13}+\frac{7}{169}+\frac{7}{91}}$

Lời giải

a, Ta có : $\dfrac{2-\frac{2}{19}+\frac{2}{43}-\frac{2}{1943}}{3-\frac{3}{19}+\frac{3}{43}-\frac{3}{1943}}:\dfrac{4-\frac{4}{29}+\frac{4}{41}-\frac{4}{2941}}{5-\frac{5}{29}+\frac{5}{41}-\frac{5}{2941}}=\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{6}$

b, Ta có : $\dfrac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\dfrac{3+\frac{3}{13}+\frac{3}{169}+\frac{3}{91}}{7+\frac{7}{13}+\frac{7}{169}+\frac{7}{91}}=\dfrac{12}{4}:\dfrac{3}{7}=3.\dfrac{7}{3}=7$

Bài tập vận dụng:

Bài 1: Thực hiện phép tính:

a, $1024:\ (17.2^5+15.2^5)$ b, $5^3.2+(23+4^0):2^3$ c, $(5.3^5+17.3^4):6^2$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

a, $(10^2+11^2+12^2):(13^2+14^2)$ b, $(2^3.9^4+9^3.45):(9^2.10-9^2)$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

a, $\left[(3^{14}.69+3^{14}.12):3^{16}-7\right]:2^4$ b, $24^4:3^4-32^{12}:16^{12}$

Bài 4: Thực hiện phép tính : $2010^{2010}\left(7^{10}:7^8-3.2^4-2^{2010}:2^{2010}\right)$

Bài 5: Thực hiện phép tính:

a, $\dfrac{\left(\frac{-5}{7}-\frac{7}{9}+\frac{9}{11}-\frac{11}{13}\right)(3-\frac{3}{4})}{\left(\frac{10}{21}+\frac{14}{27}-\frac{6}{11}+\frac{22}{39}\right):(2-\frac{2}{3})}$ b, $\dfrac{3+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}+\frac{3}{1001}-\frac{3}{13}}{\frac{9}{1001}-\frac{9}{13}+\frac{9}{7}-\frac{9}{11}+9}$

Bài 6: Tính nhanh: $\dfrac{50-\frac{4}{13}+\frac{2}{15}-\frac{2}{17}}{100-\frac{8}{13}+\frac{4}{15}-\frac{4}{17}}$

Bài 7: Tính:

a, $A=\dfrac{24.47-23}{24+47.23}.\dfrac{3+\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{1001}-\dfrac{3}{13}}{\dfrac{9}{1001}-\dfrac{9}{13}+\dfrac{9}{7}-\dfrac{9}{11}+9}$

b, $\dfrac{\dfrac{2}{3}+3.\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}{\dfrac{7}{60}:\left(\dfrac{35}{31.37}+\dfrac{35}{37.43}+\dfrac{105}{43.61}+\dfrac{35}{61.67}\right)}$

Bài 8: Tính tổng tự nhiên

a, A= $9+99+999+...+999...9$ (10 số 9)

b, B= $1+11+111+...+111...1$ (10 số 1)

Bài 9: Tính tổng tự nhiên

a, C= $4+44+444+...+444...4$ (10 số 4)

b, D= $2+22+222+...+222...2$ (10 số 2)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a, Ta có: 1024: $(17.2^5+15.2^5)$ $=2^{10}:\left[2^5(17+15)\right]=2^{10}:\left(2^5.2^5\right)=1$

b, Ta có: $5^3.2+(23+4^0):2^3$ $=5^3.2+24:2^3=250+3=253$

c, Ta có: $(5.3^5+17.3^4):6^2$ $\left[3^4(3.5+17)\right]:3^2.2^2=\left(3^4.32\right):3^2.2^2=\dfrac{3^4.2^5}{3^2.2^2}=9.8=72$

Bài 2:

a, Ta có: $(10^2+11^2+12^2):(13^2+14^2)$ $=(100+121+144):(169+196)=365:365=1$

c Ta có : $(2^3.9^4+9^3.45):(9^2.10-9^2)$ =

$\left(2^3.3^8+3^{11}.5\right):\left(3^2.10+3^2\right)=\dfrac{3^8\left(8+3^3.5\right)}{3^2.11}=\dfrac{3^6.143}{11}=13.3^6$

Bài 3:

a, Ta có:

$\left[(3^{14}.69+3^{14}.12):3^{16}-7\right]:2^4$

$=\left[\left(3^{14}.3.23+3^{14}.3.2^2\right):3^{16}-7\right]:2^4=\left[\left(3^{15}.23+3^{15}.4\right):3^{16}-7\right]:2^4$

$=\left[3^{15}.27:3^{16}-7\right]:2^4=(9-7):2^4=\dfrac{1}{2^3}$

b, Ta có: $24^4:3^4-32^{12}:16^{12}=(24:3)^4-(32:16)^{12}=8^4-2^{12}=2^{12}-2^{12}=0$

Bài 4:

Ta có : $2010^{2010}\left(7^{10}:7^8-3.2^4-2^{2010}:2^{2010}\right)=2010^{2010}(49-3.16-1)=0$

Bài 5:

a, Ta có : $\dfrac{\left(\dfrac{-5}{7}-\dfrac{7}{9}+\dfrac{9}{11}-\dfrac{11}{13}\right)(3-\dfrac{3}{4})}{\left(\dfrac{10}{21}+\dfrac{14}{27}-\dfrac{6}{11}+\dfrac{22}{39}\right):(2-\dfrac{2}{3})}=\dfrac{-\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{7}{9}-\dfrac{9}{11}+\dfrac{11}{13}\right).\dfrac{9}{4}}{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{7}{9}-\dfrac{9}{11}+\dfrac{11}{13}\right):\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\dfrac{-9}{4}}{\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}}=\dfrac{-9}{4}:\dfrac{1}{2}=\dfrac{-9}{2}$

b, Ta có : $\dfrac{3+\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{1001}-\dfrac{3}{13}}{\dfrac{9}{1001}-\dfrac{9}{13}+\dfrac{9}{7}-\dfrac{9}{11}+9}=\dfrac{3\left(1+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{1001}-\dfrac{1}{13}\right)}{9\left(1+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{1001}-\dfrac{1}{13}\right)}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

Bài 6:

Ta có : $\dfrac{50-\frac{4}{13}+\frac{2}{15}-\frac{2}{17}}{100-\frac{8}{13}+\frac{4}{15}-\frac{4}{17}}=\dfrac{50-\frac{4}{13}+\frac{2}{15}-\frac{2}{17}}{2\left(50-\frac{4}{13}+\frac{4}{15}-\frac{4}{17}\right)}=\dfrac{1}{2}$

Bài 7:

a, Ta có : $\dfrac{24.47-23}{24+47.23}=\dfrac{47(23+1)-23}{47.23+24}=\dfrac{47.23+24}{47.23+24}=1$

và $\dfrac{3\left(1+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{1001}-\frac{1}{13}\right)}{9\left(1+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{1001}-\frac{1}{13}\right)}=\dfrac{3}{9}\Rightarrow A=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

b, Ta có :

$TS=\dfrac{2}{3}+3.\dfrac{2}{3}-\dfrac{25}{36}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{25}{36}=\dfrac{71}{36}$

$MS=\dfrac{7}{60}:\left(\dfrac{5.7}{31.37}+\dfrac{5.7}{37.43}+\dfrac{3.5.7}{43.61}+\dfrac{5.7}{61.67}\right)=\dfrac{7}{6}:\left[\dfrac{35}{6}\left(\dfrac{6}{31.37}+\dfrac{6}{37.43}+\dfrac{18}{43.61}+\dfrac{6}{61.67}\right)\right]$

$MS=\dfrac{7}{60}:\left[\dfrac{35}{6}\left(\dfrac{1}{31}-\dfrac{1}{37}+\dfrac{1}{37}-\dfrac{1}{43}+\dfrac{1}{43}-\dfrac{1}{61}+\dfrac{1}{61}-\dfrac{1}{67}\right)\right]$

$MS=\dfrac{7}{60}:\left[\dfrac{35}{6}\left(\dfrac{1}{31}-\dfrac{1}{67}\right)\right]=\dfrac{2077}{1800}\Rightarrow B=\dfrac{71}{36}:\dfrac{2077}{1800}$

Bài 8:

a, Ta có: $A=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^{10}-1)$

$=(10+10^2+10^3+...+10^{10})-10=111...10-10=111...100$ (9 số 1)

b, Ta có: $9B=9+99+999+....+9999...99$ (10 số 9). Tính như câu a

Bài 9:

a, Ta có: $C=4(1+11+111+...+111...11)$ (10 số 1)

$9C=4(9+99+999+...+999...99)$ (10 số 9). Tính như tính ở trên

b, Ta có :

$D=2(1+11+111+...+111...11)$ (10 số 1)

$9D=2(9+99+999+...+999...99)$ (10 số 9)

CHỦ ĐỀ 14.

TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Toán tìm x là một trong các chủ đề thường gặp trong các kì thi HSG. Để giải toán tìm x học sinh phải có kĩ năng cộng, trừ, nhân, chia các phân số, lũy thừa để giúp cho việc biến đổi đưa đẳng thức chứa x về dạng A.x = B từ đó suy ra được x = B : A

Bài toán tìm x đôi khi còn kết hợp phép tính tổng các số , tổng các phân số, tổng các tích,tổng các lũy thừa theo quy luật nên HS cần nắm vững và luyện thật chắc các bài toán tính tổng theo quy luật.

Dạng 1: Các bài toán thông thường

Ví dụ 1: Tìm x biết:

a) $720:\left[41-\left(2x-5\right)\right]=2^3.5$

b) $6\left(x+11\right)-7\left(2-x\right)=26$

Lời giải

a) Ta có: $720:\left[41-\left(2x-5\right)\right]=2^3.5$

$720:\left[46-2x\right]=40$

$46-2x=18$

$2x=46:18$

$2x=\dfrac{23}{9}$

$x=\dfrac{23}{18}$

b) Ta có:

$6\left(x+11\right)-7\left(2-x\right)=26$

$6x+66-14+7x=26$

$13x=-26$

$x=-2$

Ví dụ 2: Tìm x biết:

a, $-4x\left(x-5\right)-2x\left(8-2x\right)=-3$

b, $-7\left(x+9\right)-3\left(5-x\right)=2$

Lời giải

a, Ta có:

$-4x\left(x-5\right)-2x\left(8-2x\right)=-3$

$-4x^2+20x-16x+4x^2=-3$

$4x=-3$

$x=\dfrac{-3}{4}$

b, Ta có:

$-7\left(x+9\right)-3\left(5-x\right)=2$

$-7x-63-15+3x=2$

$-4x-78=2$

$-4x=80$

$x=-20$

Ví dụ 3: Tìm x biết:

a, $\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{3x}{5}-\dfrac{13}{5}\right)=\left(\dfrac{7}{5}+\dfrac{7}{10}x\right)$

b, $\dfrac{13}{x-1}+\dfrac{5}{2x-2}=\dfrac{6}{3x-3}$

Lời giải

a) Ta có:

$\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{3x}{5}-\dfrac{13}{5}\right)=\left(\dfrac{7}{5}+\dfrac{7}{10}x\right)$

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{13}{5}=\dfrac{7}{5}+\dfrac{7}{10}x$

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{3x}{5}-\dfrac{7x}{10}=\dfrac{7}{5}-\dfrac{13}{5}$

b) Ta có:

$\dfrac{13}{x-1}+\dfrac{5}{2x-2}=\dfrac{6}{3x-3}$

$\dfrac{78}{6x-6}+\dfrac{15}{6x-6}=\dfrac{12}{6x-6}$

$\dfrac{93}{6x-6}=\dfrac{12}{6x-6}$

$93=12$ (vô lý)

$$\frac{-4}{5}x=\frac{-6}{5}$$

$$x=\frac{-6}{5}:\frac{-4}{5}$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Vậy $x=\frac{3}{2}$

Ví dụ 4: Tìm x biết:

a) $\frac{2x-3}{3}+\frac{-3}{2}=\frac{5-3x}{6}-\frac{1}{3}$

b, $\frac{2}{3x}-\frac{3}{12}=\frac{4}{5}-\left(\frac{7}{x}-2\right)$

Lời giải

a, Ta có:

$$\frac{2x-3}{3}+\frac{-3}{2}=\frac{5-3x}{6}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{4x-6+(-9)}{6}=\frac{5-3x-2}{6}$$

$$4x-15=3-3x$$

$$7x=18$$

$$x=\frac{18}{7}$$

b) Ta có:

$$\frac{2}{3x}-\frac{3}{12}=\frac{4}{5}-\left(\frac{7}{x}-2\right)$$

$$\frac{2}{3x}-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}-\frac{7}{x}+2$$

$$\frac{2}{3x}+\frac{7}{x}=\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+2$$

$$\frac{23}{3x}=\frac{61}{20}$$

$$3x=\frac{460}{61}$$

$$x=\frac{460}{183}$$

Dạng 2: Đưa về phương trình tích

Ở cấp độ 2, bài toán tìm x đã bắt đầu đòi hỏi mức độ khó hơn với việc cộng, trừ, nhân, chia nhiều phân số một lúc, làm việc với các phép tính lũy thừa phức tạp hơn, đồng thời cũng đòi hỏi kĩ năng tính toán, biến đổi, thứ tự thực hiện phép tính.

Ví dụ 1: Tìm x biết: $(x-20)\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+\ldots+\frac{199}{1}}=\frac{1}{2000}$

Lời giải

Đặt $A=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+\ldots+\frac{199}{1}}$. Ta có mẫu của

$$A=\left(\frac{1}{199}+1\right)+\left(\frac{2}{198}+1\right)+\ldots+\left(\frac{198}{2}+1\right)+1=\frac{200}{199}+\frac{200}{198}+\ldots+\frac{200}{2}+\frac{200}{200}$$

Khi đó $A=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{200}}{200\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{200}\right)}=\dfrac{1}{200}$

Như vậy ta có: $(x-20).\dfrac{1}{200}=\dfrac{1}{2000}$ => $x-20=\dfrac{1}{10}$ => $x=\dfrac{1}{10}-20=\dfrac{-199}{10}$

Ví dụ 2: Tìm x biết: $\dfrac{(1.2+2.3+3.4+...+98.99).x}{26950}=12\dfrac{6}{7}:\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Đặt : $A=1.2+2.3+3.4+...+98.99$

Tính A ta được : $3A=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+...+98.99(100-97)$

$3A=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+...+(98.99.100-97.98.99)=98.99.100$

$A=\dfrac{98.99.100}{3}$

Thay vào ta có : $\dfrac{98.99.100.x}{3.26950}=12\dfrac{6}{7}:\dfrac{3}{2}$ => $12x=\dfrac{60}{7}$ => $x=\dfrac{5}{7}$

Ví dụ 3: Tìm x biết: $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{10})x=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{3}{7}+...+\dfrac{9}{1}$

Lời giải

Ta có : $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{3}{7}+...+\dfrac{9}{1}=\left(\dfrac{1}{9}+1\right)+\left(\dfrac{2}{8}+1\right)+\left(\dfrac{3}{7}+1\right)+...+\left(\dfrac{8}{2}+1\right)+1$

=> $\dfrac{10}{9}+\dfrac{10}{8}+\dfrac{10}{7}+...+\dfrac{10}{2}+\dfrac{10}{10}=10\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}\right)$

Khi đó : $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{10}\right).x=10\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{10}\right)$ => $x=10$

Ví dụ 4: Tìm x biết: $\left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+...+\dfrac{1}{98.99.100}\right)x=\dfrac{49}{200}$

Lời giải

Ta có : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{1.2.3}+\dfrac{2}{2.3.4}+\dfrac{2}{3.4.5}+...+\dfrac{2}{98.99.100}\right).x=\dfrac{49}{200}$

=> $\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}\right)+\left(\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}\right)+...+\left(\dfrac{1}{98.99}-\dfrac{1}{99.100}\right)\right].x=\dfrac{49}{200}$

=> $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{99.100}\right).x=\dfrac{49}{200}$ => $x=\dfrac{99}{101}$

Ví dụ 5: Tìm x biết: $\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{99.100}\right)x=\dfrac{2012}{51}+\dfrac{2012}{52}+...+\dfrac{2012}{100}$

Lời giải

Ta có : $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{99.100}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$

$=\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{100}\right)-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+...+\dfrac{1}{100}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}$$

Khi đó : $\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}\right).x=2012\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}\right)$ => $x=2012$

Dạng 3: Phương trình nghiệm nguyên

Ở cấp độ này, bài tập thường là các bài tìm hai số x và y với x, y là các số tự nhiên hoặc là các số nguyên hoặc là các số nguyên tố.

MỘT SỐ KIẾN THỨC VẬN DỤNG:

*+ Nếu f(x). f(y) = **a nguyên** với f(x) và f(y) là các đa thức chỉ chứa biến x hoặc biến y*

- Khi x, y là các số nguyên thì f(x) và f(y) cũng là các số nguyên.

*- Ta có f(x) và f(y) là các ước của số nguyên **a***

+ Nếu f(x) + f(y) ⋮ 2 thì f(x) và f(y) cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Nếu a.f(x) = b.f(y) mà a, b là các số tự nhiên thì f(x) và f(y) phải cùng dấu

+ Nếu x là số nguyên tố chẵn thì x = 2

Ví dụ 1: Tìm a, b, c biết: $(x-13+y)^2+(x-6-y)^2=0$

Lời giải

Vì $(x-13+y)^2\geq 0,(x-6-y)^2\geq 0$ Nên để: $(x-13+y)^2+(x-6-y)^2=0$ Thì:

$$\begin{cases}x-13+y=0\\x-6-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=13\\x-y=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{19}{2}\\y=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $|x+5|+(3y-4)^{2010}=0$

Lời giải

Vì $|x+5|\geq 0$ và $(3y-4)^{2010}\geq 0$ Nên để: $|x+5|+(3y-4)^{2010}=0$ Thì $\begin{cases}x+5=0\\3y-4=0\end{cases}$

Hay x = - 5 và y = $\frac{4}{3}$

Ví dụ 3: Tìm các cặp số nguyên (x, y) sao cho: $x^2-2x-11=y^2$

Lời giải

Đưa về phương trình ước số:

$x^2-2x+1-12=y^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2=12$

$\Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y)=12$

Ta có các nhận xét:

a) Vì (1) chùa y có số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng $y\geq 0$. Thế thì $x-1+y\geq x-1-y$

b) $(x-1+y)-(x-1-y)=2y$ nên $x-1+y$ và $x-1-y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp:

x – 1 + y	6	-2

x – 1 - y	2	-6

Do đó:

x - 1	4	-4
y	2	2
x	5	-3

Đáp số: (5 ; 2), (5 ; -2), (-3 ; 2), (-3 ; -2)

Ví dụ 4 : Tìm các cặp số nguyên (x, y) sao cho:

5x – 3y = 2xy – 11

Lời giải

Biểu thị y theo x:

(2x + 3)y = 5x + 11

Dễ thấy 2x + 3 $\neq$ 0 (vì x nguyên) do đó:

$$y=\frac{5x+11}{2x+3}=2+\frac{x+5}{2x+3}$$

Để $y\in\mathbb{Z}$ phải có $x+5 \vdots 2x+3$

$\Rightarrow 2(x+5)\vdots 2x+3$

$\Rightarrow 2x+3+7\vdots 2x+3$

$\Rightarrow 7\vdots 2x+3$

Ta có:

2x + 3	1	-1	7	-7
x	-1	-2	2	-5
y	6	-1	3	2

Thử lại các cặp giá trị trên của (x , y) đều thỏa mãn phương trình đã cho.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Tìm x biết : $-\frac{7}{4}x\left(\frac{33}{12}+\frac{3333}{2020}+\frac{333333}{303030}+\frac{33333333}{42424242}\right)=22$

Bài 2: Tìm x biết: $\frac{1}{2016}:2015x=\frac{-1}{2015}$

Bài 3: Tìm x, biết:

a, $\frac{x+14}{86}+\frac{x+15}{85}+\frac{x+16}{84}+\frac{x+17}{83}=-4$ b, $\frac{x-90}{10}+\frac{x-76}{12}+\frac{x-58}{14}+\frac{x-36}{16}+\frac{x-15}{17}=15$

Bài 4, Tìm x, biết:

a, $\frac{x-1}{2011}+\frac{x-2}{2010}-\frac{x-3}{2009}=\frac{x-4}{2008}$ b, $\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$

Bài 5 Tìm x, biết: $\frac{x+1}{10}+\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$

Bài 6 Tìm x, biết:

$$\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}+\frac{6}{(x+8)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

Bài 7: Tìm x biết: $2^{x-1}+5.2^{x-2}=\frac{7}{32}$

Bài 8: Tìm x biết:

a, $(x-7)^{x+1}-(x-7)^{x+11}=0$ b, $2^{x+2}.3^{x+1}.5^{x}=10800$ c, $(2x-15)^{5}=(2x-15)^{3}$

Bài 9: Tìm x biết:

a, $(x-5)^{2}=(1-3x)^{2}$ b, $x^{2}+x=0$ c, $3^{4}.3^{n}=3^{7}$

Bài 10: Tìm x biết:

a, $(4x-3)^{4}=(4x-3)^{2}$ b, $(x-1)^3 = 125$ c, $2^{x+2}-2^{x}=96$

Bài 11: Tìm x nguyên biết:

a, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ b, $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$ c, $\frac{2}{y}-\frac{1}{x}=\frac{8}{xy}+1$

Bài 12: Tìm x nguyên biết:

a, $x-\frac{1}{y}-\frac{4}{xy}=-1$ b, $\frac{-3}{y}-\frac{12}{xy}=1$ c, $\frac{x}{8}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$

Bài 13: Tìm x nguyên biết:

a, $\frac{-2}{x}-\frac{2}{y}=-1$ b, $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=1$ c, $\frac{3}{x}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}$

Bài 14: Tìm x nguyên biết:

a, $\frac{5}{x}-\frac{y}{3}=\frac{1}{6}$ b, $\frac{x}{3}-\frac{4}{y}=\frac{1}{5}$ c, $\frac{x}{6}-\frac{2}{y}=\frac{1}{30}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Ta có : $-\frac{7}{4}x\left(\frac{33}{12}+\frac{33}{20}+\frac{33}{30}+\frac{33}{42}\right)=22 => -\frac{7}{4}x.33\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\right)=22$

$$=>-\frac{7}{4}x.33\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)=22 => \frac{-7}{4}x.33.\frac{4}{21}=22 => x=-2$$

Bài 2:

$$\frac{1}{2016.2015}x=\frac{-1}{2015} => x=\frac{-1}{2015}:\frac{1}{2016.2015}=-2016$$

Bài 3:

a, Ta có:

$$\frac{x+14}{86}+\frac{x+15}{85}+\frac{x+16}{84}+\frac{x+17}{83}=-4$$

$$=>\left(\frac{x+14}{86}+1\right)+\left(\frac{x+15}{85}+1\right)+\left(\frac{x+16}{84}+1\right)+\left(\frac{x+17}{83}+1\right)=0$$

$$=>\frac{x+100}{86}+\frac{x+100}{85}+\frac{x+100}{84}+\frac{x+100}{83}=0 => x+100=0 => x=-100$$

b, Ta có: $\frac{x-90}{10}+\frac{x-76}{12}+\frac{x-58}{14}+\frac{x-36}{16}+\frac{x-15}{17}=15$

$$=>\left(\frac{x-90}{10}-1\right)+\left(\frac{x-76}{12}-2\right)+\left(\frac{x-58}{14}-3\right)+\left(\frac{x-36}{16}-4\right)+\left(\frac{x-15}{17}-5\right)=0$$

$$=> \frac{x-100}{10}+\frac{x-100}{12}+\frac{x-100}{14}+\frac{x-100}{16}+\frac{x-100}{17}=0 => x-100=0 => x=100$$

Bài 4

a, Ta có: $\frac{x-1}{2011}+\frac{x-2}{2010}-\frac{x-3}{2009}=\frac{x-4}{2008}$

$$=> \left(\frac{x-1}{2011}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2010}-1\right)-\left(\frac{x-3}{2009}-1\right)-\left(\frac{x-4}{2008}-1\right)=0$$

$$=> \frac{x-2012}{2011}+\frac{x-2012}{2010}-\frac{x-2012}{2009}-\frac{x-2012}{2008}=0 => x-2012=0 => x=2012$$

b, Ta có: $\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$

$$=> (x+1)\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\right)=0 => x+1=0 => x=-1$$

Bài 5

$$\frac{x+1}{10}+\frac{x+1}{11}+\frac{x+1}{12}=\frac{x+1}{13}+\frac{x+1}{14}$$

$$=> (x+1)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\right)=0$$

$$=> x+1=0 => x=-1$$

Bài 6

$$\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}+\frac{6}{(x+8)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$=> \left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+14}\right)=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$=> \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+14}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$=> \frac{12}{(x+2)(x+14)}=\frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow x=12$$

Bài 7:

$$2^{x-1}+5.2^{x-2}=\frac{7}{32} => 2^{x-1}\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{32} <=> 2^{x-1}.\frac{7}{2}=\frac{7}{32} => 2^{x-1}=\frac{1}{16}=2^{-4} => x=-3$$

Bài 8:

a, $(x-7)^{x+1}\left[1-(x-7)^{10}\right]=0 => \left[\begin{array}{l} x-7=0 \\ (x-7)^{10}=1 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x-7=\pm 1 \end{array}\right.$

b, $2^{x+2}.3^{x+1}.5^{x}=10800$

$$2^{x}.4.3^{x}.3.5^{x}=10800 => 2^{x}.3^{x}.5^{x}=\frac{10800}{12}=900$$

$$=> (2.3.5)^{x}=900 => 30^{x}=900=30^{2} => x=2$$

c, $(2x-15)^5-(2x-15)^3=0 \Rightarrow (2x-15)^3\left[(2x-15)^2-1\right]=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-15=0\\2x-15=\pm1\end{array}\right.$

Bài 9:

a, $(x-5)^2=(1-3x)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-5=1-3x\\x-5=3x-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x=6\\2x=-4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=-2\end{array}\right.$

b, $x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x+1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

c, $3^4.3^n=3^7 \Rightarrow 3^n=3^7:3^4=3^3 \Rightarrow n=3$

Bài 10:

a, $(4x-3)^4-(4x-3)^2=0 \Rightarrow (4x-3)^2\left[(4x-3)^2-1\right]=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x-3=0\\4x-3=\pm1\end{array}\right.$

b, $(x-1)^3=5^3 \Rightarrow x-1=5 \Rightarrow x=6$

c, $2^{x+2}-2^x=96 \Rightarrow 2^x(4-1)=96 \Rightarrow 2^x=32=2^5 \Rightarrow x=5$

Bài 11:

a, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow 5(x+y)=xy \Rightarrow xy-5x-5y=0$

$\Rightarrow x(y-5)-5y+25=25$

$\Rightarrow x(y-5)-5(y-5)=25$

$\Rightarrow (x-5)(y-5)=25=1.25=5.5$

b, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$

$\Rightarrow 2y+x=3xy \Rightarrow 3xy-x-2y=0$

$\Rightarrow x(3y-1)-2y+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow x(3y-1)-2\left(y-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow 3x(3y-1)-2(3y-1)=2 \Rightarrow (3x-2)(3y-1)=2$

c, Ta có:

$\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{xy}+1$

$\Rightarrow 2x-y=8+xy > xy-2x+y=-8$

$\Rightarrow x(y-2)+y-2=-10$

$\Rightarrow (x+1)(y-2)=-10$

Bài 12:

a, $x-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{xy}=-1$

$\Rightarrow x^2y-x-4=-xy \Rightarrow x^2y+xy-x-4=0 \Rightarrow xy(x+1)-x-1-3=0$

$\Rightarrow xy(x+1)-(x+1)=3 \Rightarrow (xy-1)(x+1)=3=1.3$

b, $\frac{-3}{y}-\frac{12}{xy}=1$

$=> -3x-12=xy => xy+3x=-12$

$=> x(y+3)=-12=-1.12=-2.6=-3.4$

c, $\frac{x}{8}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4} => xy-8=2y => xy-2y=8 => y(x-2)=8=1.8=2.4$

Bài 13:

a, $\frac{-2}{x}-\frac{2}{y}=-1$

$=> -2y-2x=-xy => xy-2x-2y=0$

$=> x(y-2)-2y+4=4 => x(y-2)-2(y-2)=4$

$=> (x-2)(y-2)=4$

b, $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=1$

$=> 4y+2x=xy => xy-2x-4y=0$

$=> x(y-2)-4y+8=8$

$=> (y-2)(x-4)=8$

c, $\frac{3}{x}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6} => \frac{3}{x}=\frac{5}{6}-\frac{y}{3}=\frac{5-2y}{6} => x(5-2y)=18$

Bài 14

a, $\frac{5}{x}-\frac{y}{3}=\frac{1}{6} => \frac{5}{x}=\frac{1}{6}+\frac{y}{3} => \frac{5}{x}=\frac{1+2y}{6} => x(2y+1)=30$

b, $\frac{x}{3}-\frac{4}{y}=\frac{1}{5} => \frac{x}{3}-\frac{1}{5}=\frac{4}{y} => \frac{5x-3}{15}=\frac{4}{y} => y(5x-3)=60$

c, $\frac{x}{6}-\frac{2}{y}=\frac{1}{30} => \frac{x}{6}-\frac{1}{30}=\frac{2}{y} => \frac{5x-1}{30}=\frac{2}{y} => y(5x-1)=60$

CHUYÊN ĐỀ 15:

NGUYÊN LÝ DIRICHLET
VỚI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ HÌNH HỌC

I. Giới thiệu nguyên Tắc Dirichlet:

Nguyên tắc Dirichlet là một định lý có thể chứng minh dễ dàng bằng phản chứng đã được nhà toán học Đức Dirichlet (1805-1859) áp dụng để chứng minh nhiều định lý toán học.

Nguyên tắc Dirichlet thường được phát biểu dưới dạng hình ảnh đơn giản như sau:" Nếu nhốt 9 chú thỏ vào 4 cái chuồng thì phải có một cái chuồng nhốt ít nhất là 3 chú thỏ. Nguyên tắc này còn phát biểu dưới dạng khác:

-Dạng 1: nếu có một ánh xạ từ tập hợp M có n+1 phần tử vào tập hợp N có n phần tử thì ít nhất cũng có hai phần tử của tập hợp M có cùng một ảnh là một phần tử của tập hợp M có cùng một ảnh là một phần tử của tập hợp N qua ánh xạ đó

-Dạng 2: Nếu tập hợp E gồm n phần tử được phân ra thành n tập hợp con đôi một không giao nhau mà N>nk thì có ít nhất một tập hợp con chứa nhiều hơn k phần tử

-Dạng 3: Minh hoạ bằng hình ảnh

Nếu nhốt N chú thỏ vào n chuồng mà N>nk thì có ít nhất một chuồng nhốt nhiều hơn k chú thỏ .

II. Vận dung nguyên lý Dirichlet vào các bài toán đại số

Ví dụ 1: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 20032003 …. 200300…0 chia hết cho 2002

Lời giải

-Xét dãy số gồm 2002 số hạng sau:

2003,2003 …. 2003 2003 ….2003

2002 lần 2003

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2002 có 2002 số dư từ 1 đến 2002 (không thể có số dư 0 vì các số hạng của dãy là các số lẻ). Có 2002 phép chia, nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2002.

Giả sử hai số đó là am và an (m,n N); 1<=m <n< 2002)

Với a_m = 2003 2003… 2003 ; a_n = 2003 2003 … 2003

Ta có: (a_n –a_m) chia hết cho 2002

Hay 2003 2003 … 2003 00 ….00 chia hết 2002

Vậy tồn tại một số có dạng 2003 2003 … 2003 00 … 00 luôn chia hết cho 2002

Ví dụ 2: CMR từ 52 số nguyên bất kỳ luôn có thể chọn ra hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100

Lời giải

Tất cả các số dư trong phép chia cho 100 được chia thành 51 nhóm như sau: {0} ;{1;99},{ 2;98}, … ,{49;51}; {50}. Có 52 số nên theo nguyên tắc Dirichlet có hai số mà cacù số dư khi chia cho 100 thuộc cùng một nhóm trên. Hai số này có hiệu chia hết cho 100 (Nếu số dư của chúng bằng nhau) hoặc có tổng chia hết cho 100 (nếu số dư của chúng khác nhau)

Ví dụ 3: Cho 2002 số tự nhiên khác 0 sau cho 4 số khác nhau bất kỳ trong chúng đều lập thành một tỷ lệ thức. Chứng minh rằng trong các số đã cho luôn luôn tồn tại ít nhất 501 số bằng nhau.

Lời giải

Ta chứng minh trong 2002 số tự nhiên đã cho chỉ nhận nhiều nhất 4 giá trị khác nhau. Thực vậy, giả sử trong các số đã cho có nhiều hơn 4 số khác nhau, giả sử a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là 5 số khác nhau.

Không mất tính tổng quát giả sử $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ (1)

Theo đề bài ta có : $a_1.a_4 = a_2.a_3$ (2)

Từ (1) không xảy ra : $a_1.a_2 = a_3.a_4$ hoặc $a_1.a_3 = a_2.a_4$.

Tương tự 4 số khác nhau: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thì $a_1.a_5 = a_2.a_3$ (3)

Từ (2)và (3) có: $a_1.a_4 = a_1.a_5$

Suy ra: $a_4 = a_5$. (Mâu thuẫn). Vậy trong 2002 số tự nhiên khác nhau đã cho không thể có hơn 4 số khác nhau. Mà 2002=4*500+2. Theo nguyên tắc Dirichlet luôn tìm được ít nhất 500+1 =501 số bằng nhau.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có k số sao cho $198^k – 1$ chia hết cho 10^5.

Lời giải

Cho k lần lượt lấy 10^5+1 giá trị liên tiếp từ 1 trở đi, ta được 10^5+1 giá trị khác nhau của $1983^k - 1$ .Chia 10^5+1 số này cho 10^5 ta chỉ có nhiều nhất là 10^5số dư. Vì vậy theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số cho cùng số dư khi chia cho 10^5. Giả sử số đó là 1983^m-1 và 1983^n-1 (m>n) Thế thì hiệu của hai số này phải chia hết cho 105 (1983^m-1)-(1983^m-1)chia hết cho 10^5.

Mà (1983^m-1)-(1983^n-1)=1983^m-1983^n=1983^n(1983^{m-n}-1).

Nhưng 105và 1983n nguyên tố cùng nhau, do đó phải có 1983^{m-n}-1 chia hết cho 10^5. Như vậy có số k'=m-n sao cho 1983^k–1 chia hết cho 105.

Ví dụ 5: a) CMR trong m số nguyên bất kỳ bao giờ cũng có một số chia hết cho m hoặc tổng của một nhóm các số trong m số đó chia hết cho m.

b) Có hay không một số có dạng 19911991 …. 1991 0000000 chia hết cho 1990

Lời giải

a) Gọi m số nguyên đã cho là a_1, a_2, …. , a_m. Nếu không có số nào chia hết cho m thì ta lập m tổng :

a_1

a_1+a_2

$a_1+a_2+a_3$

…..

$a_1+a_2+a_3+\ldots a_m$

Có tất cả hai trường hợp

-Một trong các tổng trên chia hết cho m

-Không có một tổng nào trong các tổng trên chia hết cho m như vậy số dư khi chia mỗi tổng trên cho m là một số từ 1 đến m-1 (Có tất cả m-1 số dư). Ta có m tổng, do đó theo nguyên tắc Dirichlet, phải có hai tổng có cùng số dư (# 0) khi chia cho m. Hiệu của hai tổng này (là tổng của một số các số đã cho) chia hết cho m .

b) Ta lập dãy số có dạng:

1991

19911991

199119911991

….

19911991….1991

Chia các số trên đây cho 1990, ta có 1989 số dư khác 0. Theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số cho cùng một số dư, hiệu hai số này (là một số có dạng 1991,1991….0000) chia hết cho 1990

III.Vận dụng nguyên lí Dirichlet vào các bài toán hình học

Một số bài toán có dạng nguyên tắc Dirichlet :

-Trên đoạn thẳng có độ dài bằng 1, đặt 1 số đoạn thẳng mà tổng độ dài của chúng lớn hơn 1 thì ít nhất có 2 trong các đoạn thẳng đó có 1 điểm chung .

- Trên đường tròn có bán kính bằng 1; đặt một số cung và tổng độ dài của chúng lớn hơn 2 thì ít nhất hai trong các cung đó có cùng một điểm chung .

-Trong một hình có diện tích bằng 1 ,đặt một số hình sao cho tổng diện tích của chúng lớn hơn 1 thì ít nhất 2 trong các hình đó có một điểm chung.

Ví dụ 1: Cho bảng vuông gồm n.n ô vuông .Mỗi ô vuông ghi một trong các số 1; 0,2. CMR không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột , trên hàng , trên đường chéo là các số khác nhau.

Lời giải

Tổng các số trên cột hoặc trên hàng hoặc trên đường chéo có giá trị nhỏ nhất là 0.n = 0, giá trị lớn nhất là 2.n = 2n

Có 2n + 2 tổng (n cột, n hàng, 2 đường chéo nhận một trong 2n+1 giá trị số nguyên từ 0 đến 2n.Theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau.

Ví dụ 2: Trong một hình tròn diện tích S ta thấy 1995 điểm bất kì . Chứng minh rằng ít nhất có 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn S/997.

Lời giải

Chia hình tròn thành 997 hình quạt bằng nhau .Theo nguyên tắc Dirichlet thì ít nhất có một phần chứa 3 điểm .Ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ S/997

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng cho 1995 điểm và trong ba điểm bất kì bao giờ cũng tìm được 2 điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một. CMR tồn tại 1 hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 998 điểm đó .

Lời giải

Gọi A là một trong các điểm đã cho .Vẽ đường tròn (A;1) .Nếu các điểm còn lại nằm trong hình tròn (A;1) thì bài toán giải xong. Xét điểm B nằm ngoài hình tròn (A;1) tức AB lớn hơn 1. Vẽ hình tròn (B;1) rõ ràng các điểm còn lại nằm trong hai đường tròn này .

Thật vậy, giả sử có C không thuộc 1 trong 2 hình tròn này.

Tam giác ABC có AB>1, AC>1, BC>1 (Mâu thuẫn giả thiết)

Hai hình tròn này chứa 1995 điểm nên theo nguyên tắc Dirichlet có 1 hình tròn chứa không ít hơn 998 điểm có (Đpcm)

Ví dụ 4: Trong hình chữ nhật 3.4 đặt 6 điểm. CMR trong các điểm này tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$

Lời giải

Chia hình chữ nhật thành 5 hình giống nhau .Theo nguyên tắc Dirichlet một trong các hình này chứa ít nhất 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm bất kì của 1 hình không lớn hơn $\sqrt{5}$

Ví dụ 5: Trong 1 hình vuông cạnh 5 cm ,có 126 điểm .CMR trong các điểm ấy ,có 6 điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính 1 cm

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông nhỏ ,cạnh 1 cm và chứng minh rằng trong 1 hình vuông có thể được chứa trong 1 hình tròn bán kính 1 cm

Ta lại có :

$$126 = 5.25 + 1$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong 1 lớp học có 30 học sinh. Chứng tỏ rằng trong số học sinh ta sẽ tìm thấy 2 học sinh có tên bắt đầu bằng một chữ cái giống nhau.

Bài 2:Với một lượng tối thiểu là bao nhiêu hs thì ta có thể tìm được một cặp hs có ngày tháng sinh giốâng nhau ?

Bài 3:Có 25 số tự nhiên có 4 chữ số và đươc lập nên từ các chữ số 1,2,3 và 4. Chứng tỏ rằng ta có thể tìm thấy trong 25 số ấy hai số bằng nhau

Bài 4: CMR trong n+1 số tự nhiên thì bao giờ cũng tìm được hai số khi chia hết cho n thì cho cùng một số dư .

Bài 5: CMR trong các số tự nhiên 2-1, 2^2-1, 2^3-1, …, 2^n-1 trong đó n là số lẻ ,lớn hơn 1, có ít nhất một số chia hết cho n

Bài 6: Từ 5 số tự nhiên bất kì , hiệu có thể tìm được hai số mà hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 7

Bài 7: Cho hai số đa thức cùng 1 biến ,mỗi đa thức là tổng của bốn hạng tử bậc lẻ không vượt quá 15. Liệu có đúng không khi nói rằng trong tích của hai đa thức này ta tìm được hai hạng tử đồng dạng ?

Bài 8: Trong một thùng có đựng 105 quả táo, gồm 4 loại . CMR trong số táo ấy, bao giờ ta cũng có thể tìm được ít ra 27 quả táo cùng một loại táo nào đó.

Bài 9: Trong một thùng có 25 quả cầu trắng ,25 quả cầu đen và 20 quả cầu xanh, 10 quả cầu đỏ (các quả cầu đều như nhau). Các quả cầu được cho ra từ trong bóng tối, không thể phân biệt được màu sắc .Hỏi số quả cầu tối thiểu phải chọn là bao nhiêu để có:

a.Không ít hơn 10 quả cầu có cùng một màu .

b.Không ít hơn mười quả cầu trắng .

Bài 10: CMR trong số 82 khối vuông mà mỗi khối được sơn một màu khác nhau hoặc 10 khối có cùng 1 màu sơn.

Bài 11: CMR trong 7 số tự nhiên bất kì ta cũng tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3.

Bài 12: CMR trong số 100 số tự nhiên tuỳ ý bao giờ ta cũng chọn được 15 số mà hiệu của 2 số bất kì trong 15 số ấy chia hết cho 4.

Bài 13: Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Bài 14: CMR trong số 65 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tìm được 9 số mà tổng của chúng chia hết cho 9.

Bài 15: CMR tồn tại 1 số tự nhiên, tất cả các chữ số bằng 1, chia hết cho 1993

Bài 16: Cho 2005 điểm trên mặt phẳng ,biết rằng trong mỗi nhóm 3 điểm bất kì của các điểm trên bao giờ cũng có thể chọn ra được 2 điểm có khoảng cách bé hơn 1. CMR trong các điểm trên có ít nhất 1003 điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.

Bài 17: Cho 6 điểm trong mặt phẳng sao cho bất kì 3 điểm nào cũng là đỉnh của 1 tam giác có các cạnh chiều dài khác nhau. CMR tồn tại 1 cạnh là cạnh nhỏ nhất của 1 tam giác, vừa là canh lớn nhất của 1 tam giác khác.

Bài 18: Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh bằng 4 có cho trước 33n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$ có tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Bảng chữ cái tiếng việt gồm 29 chữ cái , trong lúc đó số học sinh lớn hơn, những 30 em. Ở đây, các chữ cái đóng vai trò các lồng, còn các bạn học sinh đóng vai trò các chú thỏ mà ta phải nhốt vào lồng ,vì số thỏ lớn hơn số lồng nên ta sẽ tìm được ít nhất một lồng nhốt nhiều hơn 1 chú thỏ, tức là tìm được ít nhất 2 học sinh có tên bắt đầu cùng một chữ cái .

Bài 2:

Năm thường 366, Năm nhuận 367

Bài 3:

Lượng các số khác nhau lập nên là:

$$1.2.3.4 = 24$$

Mà số các số cần lập nên là 25 . Vậy theo nguyên tắc Dirichlet thì phải có hai số trùng nhau.

Bài 4:

Ta chia mỗi số trong n+1số này cho n, ta được n+1 số dư ,và các số dư này nhận một trong các giá trị 0, 1, 2…, n-1 tức là các số dư nhận không quá n giá trị khác nhau .

Mà ta lại có n+1 số . Vậy phải có hai số ta chia cho n cho ta cùng một số dư .

Bài 5:

Giả sử trong các số đã cho có 2 số: $2^k-1, 2^{k+l}-1$, khi chia cho n ,cho ta cùng môt số dư ,tức là hiệu $[2^{k+l}-1] - [2^k-1] = 2^k[2^l-1\}$chia hết cho n. Như vậy thì 2^l-1 phải chia hết cho n

Bài 6:

-Bình phương của một số tự nhiên khi chia cho 7 thì chỉ cho các số dư 0,1,2 và 4 .Gỉa thiết cho 5 số .Trong 5 bình phương của 5 số này sẽ có hai số mà khi chia cho 7 thì cùng một sồ dư ,nghĩa là hiệu của chúng thì chia hết cho 7.

Bài 7:

- Đúng. Tổng số các hạng tử của tích là 4.4=16 hạng tử. Thế mà các số mũ (Bậc của hạng tử) nhận 15 giá trị khác nhau 2; 4; 6; ……….; 30.

Bài 8:

- Qủa táo đóng vai trò của các chú thỏ .
- Loại táo đóng vai trò các lồng ,chia 105 cho 4,ta có:

$$105 = 4.26+1$$

Trường hợp này ta có n=4, k=26.Vì số thỏ lớn hơn n.k nên ta phải tìm được một lồng nhốt nhiều hơn k chú thỏ, tức là tìm được một loại táo có nhiều hơn 26 quả, tức là ít nhất có 27 quả.

Bài 9:

a. 9.4 + 1=37 b. 25 + 20 + 10 + 10 = 65

Bài 10:

+TH 1: Gỉa sử rằng khi sơn các khối vuông ta dùng không ít hơn 10 màu khác nhau. Khi đó ta tìm được 10 khối có màu khác nhau .

+TH 2: Gỉa sử khi sơn ta sử dụng không nhiều hơn 9 màu khác nhau, chia 82 cho 9.

82=9.9 + 1 ở đây n=9; k=9

Theo nguyên tắc Dirichlet mở rộng, ta tìm được 10 khối cùng màu

Bài 11:

Một số tự nhiên khi chia cho 3 thì cho ta các số dư 0, 1 hoặc 2 .Vì 7 = 3.2 + 1 nên tồn tại 3 số mà khi chia cho 3 cho ta cùng một số dư .Tổng 3 số này sẽ chia hết cho 3

Bài 12:

Các số dư trong phép chia cho 7 của các số nhận nhiều nhất là 7 giá trị . Vì 100= 7.14 + 2 nên ta sẽ tìm được 15 số mà khi chia cho 7 thì cho cùng một số dư.

Bài 13:

Số lần gặp nhau mà mỗi đội có, có thể nhận 15 giá trị khác nhau : 0; 1; 2; ………..; 14.Trong trường hợp này không thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet được vì số đội cũng là 15.

Hai trường hợp 0 trận và 14 trận không thể xảy ra đồng thời vì nếu có một đội nào chưa đấu trận nào thì đồng thời không thể có một đội nào đó đã đấu hết 14 trận, ngược lại nếu có một đội đã đá 14 trận thì không thể có 1 đội chưa đá một trận nào . Vì vậy số lần gặp nhau mà mỗi đội đã thực hiện trong thực tế có thể nhận thêm 14 giá trị từ 0 đến 13 hoặc từ 1 đến 14.Khi đó theo nguyên tắc Dirichlet ta luôn có thể tìm được hai đội có cùng một số trận đấu .

Bài 14:

-TH 1: Gỉa sử trong số 65 số đã cho ta tìm được 9 số mà số dư của chúng chia hết cho 9 nhận 9 giá trị khác nhau. Khi đó tổng các số này chia hết cho 9 vì tổng các số dư là :

0 + 1 + 2 + ……………. + 8 = 36

-TH 2: Gỉa sử ta không tìm được 9 số như vậy. Khi đó số dư của các phép chia các số này cho 9 sẽ nhận nhiều hơn 8 giá trị khác nhau, vì: 65 = 8.8 + 1. Ở đây số k theo nguyên tắc Dirichlet là 8.Nên ta sẽ có 9 con thỏ cùng chuồng .

Bài 15:

-Xét dãy số hữu hạn :

1; 11; 111; …………; 11 …. 1

1994 chữ số 1

Dãy này có 1994 số hạng ,mà ta có thể tìm được hai số hạng của dãy hiệu của chúng chia hết cho 1993 .Ta hí hiệu các số này là :

11…1 và 11…….1

k chữ sô◎1 k+l chữ số 1

Lấy số lớn trừ cho số nhỏ ,ta được hiệu :

11…1 00…..0

l chữ số 1 k chữ số 0

Chia hết cho 1993. Rõ ràng là các chữ số 0 trong số này có thể bỏ đi .Vậy, số 11…1 chia hết cho 1993

Bài 16:

Ta có 2005 = 2.1002 + 1

Gọi A là 1 điểm trong 2005 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 1. Nếu tất cả 2004 điểm còn lại đều nằm trong hình tròn tâm A bán kính 1 thì bài toán được giải.

Gỉa sử có điểm B nằm ngoài đường tròn (A;1) tức là AB>1. Vẽ đường tròn tâm B bán kính 1 ,kí hiệu (B;1). Ta chứng ming tất cả 2005 điểm đã cho đều nằm trong (A;1) hoặc (B;1).

Thật vậy, lấy C bất kì, xếp 3 điểm A,B,C theo giả thuyết AB>1 nên AC<1 hoặc AB<1, khi đó C nằm trong đường tròn (A;1) hoặc C nằm trong (B;1)

2005 điểm nằm trong hai đường tròn nên theo nguyên tắc Dirichlet có 1 đường tròn chứa ít nhất 1003 điểm .

Bài 17:

Tô màu đỏ cạnh nhỏ nhất của tam giác và tô màu xanh hai cạnh kia. Ta chứng minh tồn tại 1 tam giác có các cạnh cùng màu đỏ. Từ điểm A trong 6 điểm đã cho, nối với 5 điểm còn lại,ta được 5 cạnh trong 5 cạnh này ít nhất có 3 cạnh cùng màu, giả sử là hai cạnh AB, AC, AD.

Nếu AB,AC,AD cùng màu đỏ:tamgiác BCD có các cạnh cùng màu đỏ , giả sử đó là BC. Khi đó ta có tam giác ABC có các canh cùng màu đỏ.

Nếu AB, AC, AD cùng màu xanh thì tam giác BCD có các cạnh cùng màu đỏ với tam giác có ba cạnh cùng màu đỏ thì canh lớn nhất của tam giác này là cạnh cần tìm.

Bài 18:

-Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông có cạnh là 1

-Do đó 33 điểm được chứa trong 16 hình vuông nên theo nguyên tắc Dirichlet, ít nhất có một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm (33 = 2.16+1)

Khoảng cách giữa 2 điểm bất kì trong hình vuông chứa không vượt quá đường chéo cuả nó, nghĩa là không lớn hơn $\sqrt{2}$.

Gọi O1,O2,O3 là 3 điểm cùng nằm trong 1 hình vuông đơn vị nào đó , có thể rơi vào canh hình vuông. Vẽ 3 đường tròn tâm O1, O2, O3 bán kính $\sqrt{2}$,chắc chắn 3 điểm O1, O2, O3 đều nằm trong cả 3 đường tròn này, nghĩa lànằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm cũng chính là các điểm O1, O2, O3.

CHUYÊN ĐỀ 16:
MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐỒNG DƯ THỨC

Phần I: KIẾN THỨC CẦN NẮM

I.Định nghĩa:

Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho m ($m \neq 0$) mà có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m, kí hiệu là $a \equiv b \pmod{m}$.

- Như vậy: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b$ chia hết cho m.
- Hệ thức có dạng: $a \equiv b \pmod{m}$ gọi là một đồng dư thức, a gọi là vế trái của đồng dư thức, b gọi là vế phải còn m gọi là môđun.

II. Một số tính chất: Kí hiệu a; b; c; d; m là các số nguyên dương, ta luôn có:

a) Tính chất 1:

- $a \equiv a \pmod{m}$;
- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$;
- $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$.

b) Tính chất: Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì:

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
- $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
- $ac \equiv bd \pmod{m}$;
- Nếu p là một ước chung của a; b; m thì: $\frac{a}{p} \equiv \frac{b}{p} \left(\bmod \frac{m}{p}\right)$.

c) Tính chất 3: Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

d) Tính chất 4: Nếu $a \equiv b \pmod m$ thõ $a^k \equiv b^k \pmod m$, $k \in N$.

III. Một số kiến thức liên quan:

1) Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $0 \le b < m$ thì b cũn gọi là số dư của phép chia a cho m.

2) Ngược lại nếu a chia cho m dư b,thõ ta viết: $a \equiv b \pmod m$

3) Trong n số nguyên liên tiếp ($n \ge 1$) có một và chỉ một số chia hết cho n.

4) Tìm m chữ số tận cùng của số A là tìm số dư khi chia A cho 10^m:

- Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên A, ta tìm số dư của phép chia A cho 10
- Muốn tìm hai chữ số tận cùng của số tựu nhiên A, ta tìm số dư của phép chia A cho 100
- Muốn tìm ba chữ số tận cùng của số tựu nhiên A, ta tìm số dư của phép chia A cho 1000 .

5)Một số tính chất:

- **Tính chất 1**: Một số tự nhiên có chữ số tận cùng là 0;1; 5; 6 khi lũy thừa lên nó cũng có chữ số tận cùng tương ứng là 0 ; 1; 5 ; 6.
- **Tính chất 2:** Các số có chữ số tận cùng là 4 ; 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- **Tính chất 3:** Các số có chữ số tận cùng là 3 ; 7 ; 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 1.
- **Tính chất 4:** Các số có chữ số tận cùng là 2 ; 4 ; 6 ; 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 6.
- **Tính chất 5:** Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng vẫn không đổi.
- **Tính chất 6:**

\+ Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) sẽ có chữ số tận cùng là 3.
\+ Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) sẽ có chữ số tận cùng là 2.
\+ Các số có chữ số tận cùng là 0 ;1 ;4 ;5 ;6 ;9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng không thay đổi.

- **Tính chất 7:** Một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể có tận cùng bởi các chữ số 1; 3 ; 7 ; 9.
- **Tính chất 8:** 10^n khi chia cho 6 luôn được số dư là 4 với mọi số nguyên dương n . Tức là : $10^n \equiv 4 \pmod 6$, với mọi $n \in N^*$.
- **Tính chất 9:** Cho a, b là các số nguyên.Khi đó, nếu n lẻ thì $a^n + b^n$ chia hết cho *tổng a + b.*
- **Tính chất 10:** Với mọi số nguyên a, b ($a \ne b$) với $n \in N$, thì $a^n - b^n$ chia hết cho hiệu a – b.

6) Định lí nhỏ Fermat: Với p là số nguyên tố, a là một số nguyên thì:

$$\left(a^p - a\right) \equiv 0 \pmod p.$$

+ Từ định lí ta có: $a^p \equiv a \pmod p$.

+ Hệ quả: Với p là số nguyên tố, a là một số nguyên sao cho (a, p) = 1 thì:

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Phần II: MỘT SỐ DẠNG TOÁN

I.Dạng 1 :Tìm số dư trong một phép chia.

❖ **Phương pháp:** Muốn tím số dư trong phép chia số A cho m, ta cần tìm được số r $(0 \le r < m)$ sao cho $A \equiv r \pmod m$.

1.Tìm số dư của phép chia a^n cho m:

Ví dụ 1: Tìm số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Lời giải

1234^3 chia 2014 dư 778, ta viết: $1234^3 \equiv 778 \pmod{2014}$ (1)

$\Rightarrow 1234^9 \equiv 778^3 \pmod{2014} \equiv 1500 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{27} \equiv 1500^3 \pmod{2014} \equiv 1234 \pmod{2014}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $1234^3.1234^{27} \equiv 778.1234 \pmod{2014}$

Hay $1234^{30} \equiv 1234.778 \pmod{2014} \equiv 1388 \pmod{2014}$

Vì $0 < 1388 < 2014$ nên $r = 1388$ là số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Ví dụ 2: Tìm số dư của phép chia 2014^{200} cho 2016.

Lời giải

$2014^3 \equiv 2008 \pmod{2016}$

$2014^2 \equiv 4 \pmod{2016}$

$\Rightarrow 2014^5 \equiv 2008.4 \pmod{2016} \equiv 1984 \pmod{2016}$

$\Rightarrow 2014^{10} \equiv 1984^2 \pmod{2016} \equiv 1024 \pmod{2016}$ (1)

$\Rightarrow 2014^{30} \equiv 1024^3 \pmod{2016} \equiv 64 \pmod{2016}$

$\Rightarrow 2014^{90} \equiv 64^3 \pmod{2016} \equiv 64 \pmod{2016}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$2014^{100} \equiv 1024.64 \pmod{2016} \equiv 1024 \pmod{2016}$

$\Rightarrow 2014^{200} \equiv 1024^2 \pmod{2016} \equiv 256 \pmod{2016}$

Vậy số dư của phép chia 2014^{200} cho 2016 là $r = 256$.

Ví dụ 3: Tìm số dư của phép chia 1234^{2014} cho 2014.

Lời giải

- $1234^{27} \equiv 1234 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{81} \equiv 1234^3 \pmod{2014} \equiv 778 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{243} \equiv 778^3 \pmod{2014} \equiv 1500 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{729} \equiv 1500^3 \pmod{2014} \equiv 1234 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{1458} \equiv 1234^2 \pmod{2014} \equiv 172 \pmod{2014} \qquad (1)$

- $1234^{243} \equiv 1500 \pmod{2014}$

  $\Rightarrow 1234^{486} \equiv 1500^2 \pmod{2014} \equiv 362 \pmod{2014} \qquad (2)$

- $1234^{27} \equiv 1234 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{54} \equiv 1234^2 \pmod{2014} \equiv 172 \pmod{2014} \qquad (3)$

- $1234^2 \pmod{2014} \equiv 172 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^8 \pmod{2014} \equiv 172^4 \pmod{2014} \equiv 1160 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{16} \equiv 1160^2 \pmod{2014} \equiv 248 \pmod{2014} \qquad (4)$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$1234^{1458}.1234^{486}.1234^{54}.1234^{16} \equiv 172.362.172.248 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{2014} \equiv 894 \pmod{2014}$

Vậy số dư của phép chia 1234^{2014} cho 2014 là r = 894.

2.Tìm số dư của phép chia tổng $a^n + b^k$ cho m:

❖ **Phương pháp : Tìm số dư của A + B cho m:**

+ Tìm số dư r_1 của phép chia A cho m.

+ Tìm số dư r_2 của phép chia B cho m.

+ Tìm số dư r của phép chia $r_1 + r_2$ cho m.

+ r là số dư của phép chia tổng A + B cho m.

❖ **Giải thích :**

+ Khi A chia cho m dư r_1, ta viết: $A = mk_1 + r_1$, $k_1 \in N$.

+ Khi B chia cho m dư r_2, ta viết: $B = mk_2 + r_2$, $k_2 \in N$.

+ Khi đó : $A + B = m(k_1 + k_2) + (r_1 + r_2)$.

Vậy số dư của phép chia A + B cho m chính là số dư của phép chia tổng $r_1 + r_2$ cho m.

Ví dụ 1: Tìm số dư của phép chia $12^{25} + 21^{52}$ cho 2014.

Lời giải

Tìm được: $12^{25} \equiv 658 \pmod{2014}$

$21^{52} \equiv 955 \pmod{2014}$

Suy ra: $12^{25} + 21^{52} \equiv 658 + 955 \pmod{2014} \equiv 1613 \pmod{2014}$

Vậy số dư của phép chia $12^{25} + 21^{52}$ cho 2014 là r = 1613.

Ví dụ 2: Tìm số dư của phép chia $2013^{2013} + 2014^{2014}$ cho 2023.

Lời giải

Tìm được: $2013^{2013} \equiv 1842 \pmod{2023}$

$2014^{2014} \equiv 429 \pmod{2023}$

Suy ra: $2013^{2013} + 2014^{2014} \equiv 1842 + 429 \pmod{2023} \equiv 248 \pmod{2023}$

Vậy số dư của phép chia $2013^{2013} + 2014^{2014}$ cho 2023 là r = 248.

3.Tìm số dư của phép chia hiệu $a^n - b^k$ ($a^n > b^k$) cho m:

❖ **Phương pháp:** Tìm số dư của A - B cho m (A > B):

+ Tìm số dư r_1 của phép chia A cho m.

+ Tìm số dư r_2 của phép chia B cho m.

+ Tìm số dư r của phép chia $r_1 - r_2$ cho m:

- Nếu $r_1 > r_2$ thì số dư cần tìm là $r = r_1 - r_2$.
- Nếu $r_1 < r_2$ thì số dư cần tìm là $r = (r_1 - r_2) + m$.
- Nếu $r_1 = r_2$, thì hiệu A – B chia hết cho m.Tức là r = 0.

❖ **Giải thích:**

+ Khi A chia cho m dư r_1, ta viết: $A = mk_1 + r_1$, $k_1 \in N$.

+ Khi B chia cho m dư r_2, ta viết: $B = mk_2 + r_2$, $k_2 \in N$.

+ Khi đó: $A - B = m(k_1 - k_2) + (r_1 - r_2)$.

Vậy số dư của phép chia A - B cho m cũng chính là số dư của phép chia hiệu $r_1 - r_2$ cho m.

Ví dụ 1: Tìm số dư của phép chia $19^{24} - 15^{12}$ cho 2004.

Lời giải

- $19^{24} > 15^{12}$
- Tìm được: $19^{24} \equiv 1285 \pmod{2004}$

$15^{12} \equiv 297 \pmod{2004}$

Suy ra: $19^{24} - 15^{12} \equiv 1285 - 297 \pmod{2004} \equiv 988 \pmod{2004}$

Vậy số dư của phép chia $19^{24} - 15^{12}$ cho 2004 là r = 988.

Ví dụ 2: Tìm số dư của phép chia $8^{50} - 7^{40}$ cho 9.

Lời giải

- $8^{50} > 7^{40}$
- Tìm được: $8^{50} \equiv 1 \pmod 9$

$7^{40} \equiv 7 \pmod 9$

Suy ra: $8^{50} - 7^{40} \equiv 1 - 7 \pmod 9 \equiv -6 \pmod 9 \equiv -6 + 9 \pmod 9 \equiv 3 \pmod 9$

Vậy r = 3.

Ví dụ 3: Tìm số dư của phép chia $2014^{2014} - 2013^{2013}$ cho 2023.

Lời giải

- $\mathbf{2014^{2014} > 2013^{2013}}$
- Tìm được: $2013^{2013} \equiv 1842 \pmod{2023}$

$$2014^{2014} \equiv 429 \pmod{2023}$$

$$2014^{2014} - 2013^{2013} \equiv 429 - 1842 \pmod{2023} \equiv -1413 \pmod{2023} \equiv 610 \pmod{2023}$$

Vậy $r = 610$.

4.Tìm số dư của phép chia tích $a^n.b^k$ cho m:

❖ **Phương pháp: Tìm số dư của A.B cho m:**

+ Tìm số dư r_1 của phép chia A cho m.
+ Tìm số dư r_2 của phép chia B cho m.
+ Tìm số dư r của phép chia $r_1.r_2$ cho m.
+ r là số dư của phép chia tích A.B cho m.

- **Giải thích :**

+ Khi A chia cho m dư r_1, ta viết: $A = mk_1 + r_1$, $k_1 \in N$.
+ Khi B chia cho m dư r_2, ta viết: $B = mk_2 + r_2$, $k_2 \in N$.
+ Khi đó: $A.B = (mk_1 + r_1).(mk_2 + r_2)$
$= mk + r_1.r_2$, $k \in N$.

Vậy số dư của phép chia A.B cho m cũng chính là số dư của phép chia tích $r_1 . r_2$ cho m.

Ví dụ 1: Tìm số dư của phép chia $15^{20}.23^{18}$ cho 2011.

Lời giải

- Tìm được : $15^{20} \equiv 371 \pmod{2011}$

$23^{18} \equiv 1119 \pmod{2011}$

Suy ra: $15^{20}.23^{18} \equiv 371.1119 \pmod{2011} \equiv 883 \pmod{2011}$

Vậy $r = 883$.

Ví dụ 2: Tìm số dư của phép chia $2013^{2013}.2014^{2014}$ cho 2023.

Lời giải

Tìm được: $2013^{2013} \equiv 1842 \pmod{2023}$

$2014^{2014} \equiv 429 \pmod{2023}$

Suy ra: $2013^{2013}.\,2014^{2014} \equiv 1842.429 \pmod{2023} \equiv 1248 \pmod{2023}$

Vậy $r = 1248$.

5.Dạng khác:

Ví dụ 1:Tìm số dư của phép chia $A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + 10^{10^4} + \ldots + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Lời giải

- Vì 7 là số nguyên tố và (10,7) = 1 nên:

$10^{7-1} \equiv 1 \pmod 7$ hay $10^6 \equiv 1 \pmod 7$ (hệ quả của đl Fermat)

$\Rightarrow 10^{6k} \equiv 1^k \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$.

- $10^n \equiv 4 \pmod 6$, với mọi $n \in N^*$ (tính chất)

nên $10^n = 6k + 4,\ k \in N$

Khi đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = 10^{6k}.10^4 \equiv 1.10^4 \pmod 7 \equiv 10^4 \pmod 7$.

Áp dụng với n = 1, 2, 3, …., 10 ta được:

$10^{10} \equiv 10^4 \pmod 7$

$10^{10^2} \equiv 10^4 \pmod 7$

$10^{10^3} \equiv 10^4 \pmod 7$

…

$10^{10^{10}} \equiv 10^4 \pmod 7$

Suy ra: $A \equiv 10.10^4 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$.

Vậy **r = 5**.

Ví dụ 2: Tìm số dư của phép chia A = $1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \ldots + 2014^{17}$ cho 17.

Lời giải

Vì 17 là số nguyên tố nên $a^{17} \equiv a \pmod{17}$ với mọi số nguyên a (định lí Ferma), do đó:

$1^{17} \equiv 1 \pmod{17}$

$2^{17} \equiv 2 \pmod{17}$

$3^{17} \equiv 3 \pmod{17}$

…

$2014^{17} \equiv 2014 \pmod{17}$

Suy ra: $1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \ldots + 2014^{17} \equiv 1 + 2 + 3 + \ldots + 2014 \pmod{17}$

$\equiv 2029105 \pmod{17}$

$\equiv 2 \pmod{17}$

Vậy số dư của phép chia A = $1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \ldots + 2014^{17}$ cho 17 là r = 2.

II.Dạng 2:Tìm chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm..., của một số tự nhiên dưới dạng lũy thừa:

❖ **Nhận xét:**

+ Chữ số tận cùng của một số tự nhiên n, là số dư của phép chia n cho 10.

+ Số tạo bởi hai chữ số tận cùng của một số tự nhiên n, là số dư của phép chia n cho 100.

+ Số tạo bởi ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên n , là số dư của phép chia n cho 1000.

...

Dựa vào nhận xét trên ta có thể tìm được chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm..., của số tự nhiên n.

Ví dụ 1:Tìm chữ số tận cùng của 4567^{2014}.

Lời giải

Ta cần tìm số dư của phép chia 4567^{2014} cho 10.

- **Cách 1**: (đồng dư)

Tìm được: $4567^{2014} \equiv 9 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của 4567^{2014} là chữ số 9.

- **Cách 2** :

$$4567^{2014} = \left(4567^2\right)^{1007} = \left(20857489\right)^{1007} = \left(20857480 + 9\right)^{1007}$$

$$\to 9^{1007} = \left(9^{10}\right)^{100}.9^7 = \left(3486784401\right)^{100}.4782969$$

$$\to 1^{100}.9 = 9$$

Vậy chữ số tận cùng của 4567^{2014} là chữ số 9.

Ví dụ 2:Tìm chữ số hàng đơn vị của 124^{2014}.

Lời giải

Ta cần tìm số dư của phép chia 124^{2014} cho 10.

- **Cách 1**: (đồng dư)

Tìm được: $124^{2014} \equiv 6 \pmod{10}$

Vậy chữ số hàng đơn vị của 124^{2014} là chữ số 6.

- **Cách 2**:

$$124^{2014} = \left(124^2\right)^{1007} = \left(15376\right)^{1007}$$

Vì 15376 có chữ số tận cùng là chữ số 6 nên 15376^{1007} cũng có tận cùng là chữ số 6.

Vậy chữ số hàng đơn vị của 124^{2014} là chữ số **6**.

Ví dụ 3: Tìm chữ số hàng đơn vị của $125^{234}.67^{900}$.

Lời giải

Ta cần tìm số dư của phép chia $125^{234}.67^{900}$ cho 10.

- **Cách 1**: (đồng dư)
  - Tìm được:

$125^{2014} \equiv 5 \pmod{10}$

$67^{900} \equiv 1 \pmod{10}$

$5.1 = 5 < 10$

Vậy chữ số hàng đơn vị của $125^{234}.67^{900}$ là chữ số 5.

- **Cách 2**:

125 có tận cùng là chữ số 5 nên 125^{234} cũng có tận cùng là chữ số 5.

$67^{900} = \left(67^4\right)^{225} = \left(20151121\right)^{225}$, vì 20151121 có chữ số tận cùng là 1 nên

$(20151121)^{225}$ cũng có chữ số tận cùng là 1.

$5.1 = 5 < 10$

Vậy chữ số hàng đơn vị của $125^{234}.67^{900}$ là chữ số 5.

Ví dụ 4:Tìm chữ số hàng đơn vị của $124^{2014} + 4567^{2014}$.

Lời giải

124^{2014} có chữ số tận cùng là 6 (xem ví dụ 11)

4567^{2014} có chữ số tận cùng là 9 (xem ví dụ 10)

$9 + 6 = 15$

Vậy chữ số hàng đợn vị của $124^{2014} + 4567^{2014}$ là chữ số 5.

Ví dụ 5: Tìm chữ số hàng đơn vị của $332211^{2014} - 78^{100}$.

Lời giải

$332211^{2014} > 78^{100}$ nên $332211^{2014} - 78^{100}$ là một số tự nhiên .

332211^{2014} có chữ số tận cùng là 1.

Tính được $78^{100} \equiv 6 \pmod{10}$, nên 78^{100} có chữ số tận cùng là 6.

$(1 - 6) + 10 = 5$

Vậy chữ số hàng đợn vị của $332211^{2014} - 78^{100}$ là chữ số 5.

Ví dụ 6: Tìm chữ số tận cùng của $B = 2014^4 + 2014^8 + 2014^{12} + \ldots + 2014^{2016}$.

Lời giải

❖ **Nhận xét**:

+ Các số có chữ số tận cùng là 4 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 6.

+ Các số 4 ; 8 ; 12 ; ….; 2016 đều có dạng 4n .

- 2014^{4n} luôn có chữ số tận cùng là 6, với mọi số $n \in N^*$. Tức là:

$2014^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$2014^8 \equiv 6 \pmod{10}$

$2014^{12} \equiv 6 \pmod{10}$

…

$2014^{2016} \equiv 6 \pmod{10}$

Tổng trên có $(2016 - 4):4 + 1 = 504$ số hạng, mỗi số hàng đều có tận cùng là 6.

$504.6 = 3024$

Vậy chữ số tận cùng của B là 4.

Ví dụ 7:Tìm chữ số hàng chục của 1234^{123}.

Lời giải

Ta cần tìm số dư của phép chia 1234^{123} cho 100.

Tìm được: $1234^{123} \equiv 4 \pmod{100}$

Như vậy 1234^{123} chia 100 dư 4, do đó chữ số hàng chục là chữ số 0.

Ví dụ 8:Tìm hai chữ số tận cùng của số $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$.

Ta có: $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 2^{1999}.(1+ 2+ 2^2) = 7.2^{1999}$.

Ta cần tìm số dư của phép chia 7.2^{1999} cho 100.

Cách 1: (Đồng dư)

Tìm được:

$$2^{1999} \equiv 88(\bmod 100)$$

$$7.2^{1999} \equiv 7.88(\bmod 100) \equiv 16(\bmod 100)$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ là 16.

Cách 2:

$$7.2^{1999} = \left(2^{22}\right)^{90}.\left(7.2^{19}\right) = (4194304)^{90}.(3670016)$$

$$\rightarrow 4^{90}.16 = 2^{184} = \left(2^{22}\right)^{8}.2^{8} = (4194304)^{8}.256$$

$$\rightarrow 4^{8}.56 = 3670016$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ là 16.

Ví dụ 9: Tìm chữ số hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị của 314^{540}.

Lời giải

Ta cần tìm số dư của phép chia 314^{540} cho 1000.

Tìm được: $314^{540} \equiv 776(\bmod 1000)$

Số dư của phép chia 314^{540} cho 1000 là 776.

Vậy chữ số hàng trăm là 7; chữ số hàng chục là 7; chữ số hàng đơn vị là 6.

III.Dạng 3: Chứng minh tính chia hết.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $A = 2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Lời giải

- 2015 có tận cùng là chữ số 5 nên 2015^{2015} cũng có tận cùng là chữ số 5, tức là:

$$2015^{2015} \equiv 5(\bmod 10) \qquad (1)$$

- 2011 có tận cùng là chữ số 1 nên 2011^{2011} cũng có tận cùng là chữ số 1, tức là:

$$2011^{2011} \equiv 1(\bmod 10)$$

$$\Rightarrow 3.2011^{2011} \equiv 3(\bmod 10) \qquad (2)$$

- 2018 có tận cùng là chữ số 8 và $2015 = 4n + 3$ $(n \in N)$, nên 2018^{2015} có tận cùng là chữ số 2 (theo tính chất 6), tức là:

$$2018^{2015} \equiv 2(\bmod 10) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015} \equiv 5 + 3 + 2(\bmod 10) \equiv 0(\bmod 10)$$

Vậy $A = 2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Ví dụ 2: Tổng $1234^{123} + 2011^{123}$ có chia hết cho 5 không?

Lời giải

2011 có chữ số tận cùng là 1 nên 2011^{123} cũng có chữ số tận cùng là 1.

Tính được: $1234^{123} \equiv 4(\bmod 10)$, nên 1234^{123} có chữ số tận cùng là 4.

Suy ra: $1234^{123} + 2011^{123}$ có chữ số tận cùng là 5.

Vậy $1234^{123} + 2011^{123}$ chia hết cho 5.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13.

Lời giải

Ta có: $4^2 \equiv 3 \pmod{13}$

$\Rightarrow (4^2)^n \equiv 3^n \pmod{13}$

$\Rightarrow 4.(4^2)^n \equiv 4.3^n \pmod{13}$ hay $4^{2n+1} \equiv 4.3^n \pmod{13}$ $\quad (1)$

$3^2 \equiv -4 \pmod{13}$

$3^n \equiv 3^n \pmod{13}$

$\Rightarrow 3^2.3^n \equiv -4.3^n \pmod{13}$

$\Rightarrow 3^{n+2} \equiv -4.3^n \pmod{13}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $4^{2n+1} + 3^n \equiv 4.3^n - 4.3^n \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$.

Vậy $4^{2n+1} + 3^n$ luôn chia hết cho 13 với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

Ta có: $A = 7.25^n + 12.6^n$

$25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 19.6^n \pmod{19}) \equiv 0 \pmod{19}$

Điều này chứng tỏ A chia hết cho 19.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng các số $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7.

Lời giải

- $6 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

  $\Rightarrow 6^{1000} - 1 \vdots 7$

  Vậy A là bội của 7.

- $6^{1000} \equiv 1 \pmod 7$

  $6 \equiv -1 \pmod 7$

$\Rightarrow 6^{1000}.6 \equiv 1.(-1) \pmod 7$

$\Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod 7$

$\Rightarrow 6^{1001} + 1 \vdots 7$

Vậy B là bội của 7.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng 2^{2002} - 4 chia hết cho 31.

Lời giải

Ta có: $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31}$

$\Rightarrow (2^5)^{400}.2^2 \equiv 1.2^2 \pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2002} \equiv 4 \pmod{31}$

Suy ra 2^{2002} - 4 chia hết cho 31.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Lời giải

- $2222 \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow 2222^5 \equiv 3^5 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$

$\Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod 7 \qquad (1)$

- $5555 \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 5555^2 \equiv 4^2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

$\Rightarrow 5555^{2222} \equiv 5^{1111} \pmod 7 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta được:

$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5^{1111} + 2^{1111} \pmod 7 \qquad (3)$

Ta lại có $a^n + b^n$ chia hết cho a + b nếu n lẻ (tính chất) .

Mà 1111 là số lẻ nên $\left(5^{1111} + 2^{1111}\right) \vdots (5+2)$ hay $5^{1111} + 2^{1111} \vdots 7 \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $2013^5 + 2015^5 + 2032^5$ chia hết cho 30.

Lời giải

Cách 1: (Áp dụng định Ferma $a^p \equiv a \pmod p$ với p là số nguyên tố, a là số nguyên

- $2013^2 \equiv 2013 \pmod 2$ (vì 2 là số nguyên tố)

$\Rightarrow 2013^4 \equiv 2013^2 \pmod 2 \equiv 2013 \pmod 2$

$\Rightarrow 2013^5 \equiv 2013^2 \pmod 2 \equiv 2013 \pmod 2$

$\Rightarrow 2013^5 - 2013 \vdots 2 \qquad (1)$

- $2013^3 \equiv 2013 \pmod 3$ (vì 3 là số nguyên tố)

$\Rightarrow 2013^3.2013^2 \equiv 2013.2013^2 \pmod 3$

$\Rightarrow 2013^5 \equiv 2013^3 \pmod 3 \equiv 2013 \pmod 3$

$\Rightarrow 2013^5 - 2013 \vdots 3 \qquad (2)$

- $2013^5 \equiv 2013 \pmod 5$ (vì 5 là số nguyên tố)

$\Rightarrow 2013^5 - 2013 \vdots 5 \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $2013^5 - 2013 \vdots 2.3.5$

$\Rightarrow 2013^5 - 2013 \,\vdots\, 30$ (2 ; 3 ; 5 đôi một nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow 2013^5 \equiv 2013 \pmod{30} \quad (4)$$

Tương tự : $2015^5 \equiv 2015 \pmod{30} \quad (5)$

$2032^5 \equiv 2032 \pmod{30} \quad (6)$

Từ đó suy ra: $2013^5 + 2015^5 + 2032^5 \equiv 2013 + 2015 + 2032 \pmod{30} \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $2013^5 + 2015^5 + 2032^5$ chia hết cho 30.

Cách 2: Tìm được:

$$2013^5 \equiv 3 \pmod{30}$$

$$2015^5 \equiv 5 \pmod{30}$$

$2032^5 \equiv 22 \pmod{30}$

$\Rightarrow 2013^5 + 2015^5 + 2032^5 \equiv 3 + 5 + 22 \pmod{30} \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $2013^5 + 2015^5 + 2032^5$ chia hết cho 30.

- **Ta có bài toán tổng quát**: Với 3 số tự nhiên a, b, c, nếu a + b + c chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ cũng cia hết cho 30.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng $1^{1331} + 2^{1331} + 3^{1331} + \ldots + 1331^{1331}$ chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $a^{11} \equiv a \pmod{11}$, với mọi số nguyên a (định lí Ferma)

$\Rightarrow (a^{11})^{11} \equiv a^{11} \pmod{11} \equiv a \pmod{11}$

Hay $a^{121} \equiv a \pmod{11}$

$\Rightarrow (a^{121})^{11} \equiv a^{11} \pmod{11} \equiv a \pmod{11}$

Hay $a^{1331} \equiv a \pmod{11}$

Áp dụng kết quả trên ta được:

$1^{1331} + 2^{1331} + \ldots + 1331^{1331} \equiv 1 + 2 + \ldots + 1331 \pmod{11} \equiv 886446 \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11}$

Vậy $1^{1331} + 2^{1331} + 3^{1331} + \ldots + 1331^{1331}$ chia hết cho 11.

CHUYÊN ĐỀ 17:
CÁC DẠNG TOÁN VỀ CHUYỂN ĐỘNG

DẠNG I. CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU.

Trong chuyển động cùng chiều có các bài toán thường có liên quan đến vận tốc của chuyển động

Công thức thường gặp trong chuyển động cùng chiều là:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}$$

trong đó t là thời gian để hai động tử gặp nhau, s là khoảng cách lúc đầu của hai động tử, v_1 và v_2 là các vận tốc của chúng (Trong đó chuyển động 1 là đi sau chuyển động 2).

Ví dụ 1:

Trong một cuộc thi chạy 2000m, các vận động viên chạy với vận tốc không đổi trên suốt quãng đường. Người thứ nhất về đích trước người thứ hai 200m và trước người thứ ba 290m. Khi người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích bao nhiêu mét?

Lời giải

Lúc người thứ nhất đến đích thì người thứ ba chạy được là:

2000 - 290 = 1710 (m)

và người thứ hai chạy được :

2000 - 200 = 1800 (m)

Tỉ số quãng đường (cũng là tỉ số vận tốc) của người thứ ba và người thứ hai là :

$\frac{1710}{1800} = \frac{19}{20}$.

Khi người thứ hai chạy 200 m cuối cùng thì người thứ ba chạy được là :

$200.\frac{19}{20}$ = 190 (m)

Lúc người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích là :

290 - 190 = 100 (m

Ví dụ 2. Một người đi từ A đến B vận tốc 15km/h. Sau đó 1h30ph, người thứ 2 cũng rời A đi về B, vận tốc 20km/h và đến B trước người thứ nhất là 30ph. Tính quãng đường AB.

Lời giải

Thời gian đi từ A đến B của người thứ 2 ít hơn người thứ nhất là:

1h30ph +30ph =2h.

Cách 1 *:* Giả sử người thứ hai đi sau người thứ nhất 2h thì hai người đến B cùng một lúc.

Trong 2 giờ đi trước, người thứ nhất đi được :

15.2 = 30 (km).

Thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất là :

30 :(20-15) = 6 (h)

Quãng đường AB dài là :

20.6 =120 (km)

Cách 2 :Giả sử người thứ hai đi với thời gian như người thứ nhất thì người thứ hai đi quãng đường nhiều hơn người thứ nhất là :

20.2 =40 (km)

Vận tốc người thứ hai hơn vận tốc người thứ nhất :

20 - 15 = 5 (km/h)

Thời gian người thứ nhất đi hết quãng đường AB là :

40 :5 = 8 (h)

Quãng đường AB dài :15.8 = 120 (km)

Cách 3 *:* Cùng đi một quãng đường AB thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian.

Ta có $\frac{v_1}{v_2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}$. Biết tỉ số $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}$ và hiệu $t_1 - t_2 = 2$,ta tìm được $t_1 = 8$, $t_2 = 6$. Do đó quãng đường AB dài : 15.8 = 120 (km).

Cách 4 : Cứ mỗi km, người thứ nhất đi hết $\frac{1}{15}$ giờ, người thứ hai đi hết $\frac{1}{20}$ giờ, người thứ hai đi ít hơn người thứ nhất : $\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60}$ (h)

Quãng đường AB dài : $2 : \frac{1}{60}$ =120 (km)

* Dạng toán chuyển động cùng chiều, để chúng gặp nhau được trong quá trình chuyển động thì chuyển động đi sau phải có vận tốc lớn hơn chuyển động đi trước.

Một dạng chuyển động cùng chiều thường gặp là chuyển động của hai kim đồng hồ. Trong loại toán này, nếu ta chọn mặt đồng hồ là 1 vòng thì vận tốc của kim phút là 1 vòng/h, vận tốc của kim giờ là $\frac{1}{12}$ vòng/h; nếu ta chia mặt đồng hồ thành 60 vạch chia phút thì vận tốc của kim phút là 60 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 5 vạch/h; nếu chia mặt đồng hồ thành 12 vạch chia giờ thì vận tốc của kim phút là 12 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 1 vạch /h.

Ví dụ 3. Đồng hồ đang chỉ 4 giờ 10 phút. Sau ít nhất bao lâu thì hai kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng ?

Lời giải

Ta xét thời điểm 4 giờ, lúc đó kim phút còn cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng.

Muốn kim phút nằm đối diện với kim giờ thì trong cùng một thời gian, kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (vòng)

Mỗi giờ kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay nhanh hơn kim giờ :

$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (vòng)

Thời gian để kim phút và kim gìơ nằm đối diện ở trên một đường thẳng:

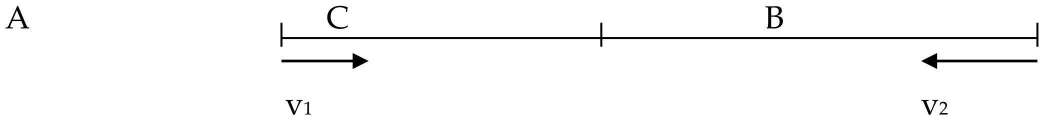
$\frac{5}{6} : \frac{11}{12} = \frac{10}{11} \approx$ 54phút 33 giây.

Lúc đó là 4 giờ 54 phút 33giây, sau lúc 4 giờ 10 phút là 44 phút 33giây

DẠNG 2. CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

Thời gian để hai chuyển động động ngược chiều gặp nhau là:

$t = \dfrac{s}{v_1 + v_2}$ (s là khoảng cách ban đầu giữa hai động tử , v_v và v_2 là các vận tốc của chúng).



Ví dụ 4. Hai xe ô tô đi từ hai địa điểm A và B về phía nhau, xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ, xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB, xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Lời giải

Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước.

Trong 1 giờ xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, xe thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, hai xe gần nhau được :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (quãng đường)

Trong 7h10phút - 7h =10phút đi trước, xe thứ nhất đI được:

$\frac{1}{2} . \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (quãng đường)

Lúc xe thứ hai khởi hành, hai xe cách nhau :

$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (quãng đường)

Hai xe gặp nhau sau :

$\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10}$ (h) = 1h6phút

Lúc hai xe gặp nhau :

7h 10phút + 1h 6phút = 8h 16phút

Ví dụ 5. Trên quãng đường AB, hai xe ô tô đi từ A và từ B ngược chiều nhau. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại một điểm cách A 12km, cách B 18 km. Nếu muốn gặp nhau ở chính giữa đường thì xe thứ nhất (đi từ A) phải khởi hành trước xe kia 10 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Nửa quãng đường AB dài :(12+ 18):2 = 15 (km)

Tỉ số vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai bằng :

$12 : 18 = \frac{2}{3}$

Trong thời gian xe thứ hai đi được nửa quãng đường AB (15km) thì xe thứ nhất đi được :

$15. \frac{2}{3} = 10$ (km)

Như vậy trong 10 phút, xe thứ nhất đi được :

15 - 10 = 5 (km)

Vận tốc xe thứ nhất :$5 : \frac{1}{6} = 30$ (km/h)

Vận tốc xe thứ hai : $30 . \frac{3}{2} = 45$ (km/h)

Ví dụ 6: Phúc và Quang cùng khởi hành một lúc từ nhà mình và đi về phía nhau. Phúc đi nhanh gấp $\frac{4}{3}$ Quang và họ gặp nhau sau 72 phút. Phúc phải khởi hành sau Quang bao lâu để họ gặp nhau ở chính giữa?

Lời giải

Gọi P và Q là các điểm mà Phúc và Quang khởi hành .

Trong 72phút, Phúc đi được $\frac{4}{7}$ quãng đường PQ nên đi cả quãng đường trong:

$$72 : \frac{4}{7} = 126 \text{ (ph)}$$

Phúc đi nửa quãng đường PQ trong thời gian là:

126 :2 =63 (ph)

Trong 72 phút, Quang đi $\frac{3}{7}$ quãng đường QP nên đi cả quãng đường trong :

$$72 : \frac{3}{7} = 168 \text{ (phút)}$$

Quang đi nửa quãng đường QP trong thời gian là :

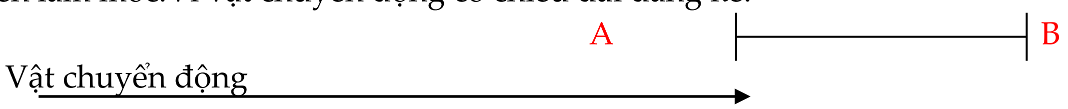
168 :2 = 84 (phút)

Muốn gặp Quang chính giữa đường, Phúc phải khởi hành sau Quang :

84 - 63 = 21 (ph)

DẠNG 3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ CHIỀU DÀI ĐÁNG KỂ

Đây là một dạng toán phức tạp, học sinh phải phân tích được vật chuyển động so với vật đứng yên làm mốc.Vì vật chuyển động có chiều dài đáng kể.



Ví dụ 7. Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Lời giải

Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong thời gian : 20 - 12 = 8 (s), xe lửa đi được quãng đường là:

148 - 12 = 136 (m)

Vận tốc xe lửa là :

136 :8 = 17 (m/s)

Chiều dài của xe lửa là :

17.12 - 12 = 192 (m)

Ví dụ 8. Một xe lửa dài 110m đi qua một cầu dài 160m hết 18 giây và đi vượt qua một người đi xe đạp cùng chiều hết 10 giây. Tính vận tốc của người đi xe đạp.

Lời giải

Trong 18 giây xe lửa đi qua được cây cầu dài 160m nên vận tốc của xe lửa là:

$\frac{110+160}{18} = 15$ (m/s).

Trong 10 giây xe lửa đi được quãng đường là: 15.10 = 150 (m)

Vì xe lửa vượt người đi xe đạp hết 10 giây, nên vận tốc của người đi xe đạp là:

$\frac{150-110}{10} = 4\ (\text{m/s})$

* Dạng bài toán trên ta lấy điểm cuối cùng của xe lửa làm vật chuyển động và đầu cầu làm điểm cố định. Khi đó vật chuyển động cách điểm cố định 110m, khi vật chuyển động đi hết cầu thì quãng đường của vật chuyển động bằng tổng chiều dài của xe lửa và cầu. Người đi xe đạp đi được quãng đường bằng quãng đường vật chuyển động đi trong 10 giây cách điểm xuất phát.

DẠNG 4. CHUYỂN ĐỘNG CÓ DÒNG NƯỚC

Đối với những bài toán này được đưa vào phần ôn tập. Sách giáo khoa không đưa ra hệ thống công thức tính nên tôi chủ động cung cấp cho học sinh một số công thức tính để các em dễ dàng vận dụng khi giải toán.

- Vận tốc thực : Vận tốc của vật chuyển động khi nước lặng.

- Vận tốc xuôi : Vận tốc của vật chuyển động khi đi xuôi dòng.

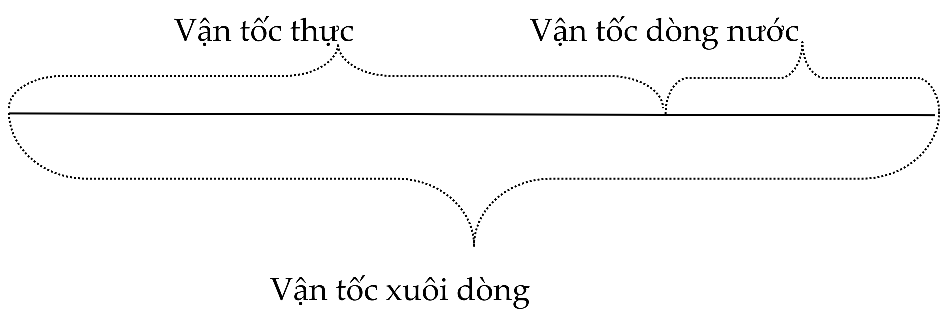
- Vận tốc ngược : Vận tốc của vật chuyển động khi ngược dòng.

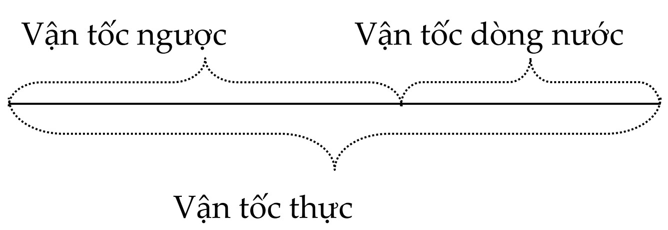
- Vận tốc dòng nước (Vận tốc chảy của dòng sông)

**** Vận tốc xuôi dòng = Vận tốc thực + Vận tốc dòng nước.***

**** Vận tốc ngược dòng = Vận tốc thực - Vận tốc dòng nước.***

Dùng sơ đồ để thiết lập mối quan hệ giữa vận tốc dòng nước, vận tốc thực của vật chuyển động với vận tốc của vật chuyển động xuôi dòng và vận tốc của vật chuyển động khi ngược dòng:





Ví dụ 9: Một con thuyền đi với vận tốc 7,2 km/giờ khi nước lặng, vận tốc của dòng nước là 1,6km/giờ.

Nếu thuyền đi xuôi dòng thì sau 3,5giờ sẽ đi được bao nhiêu ki-lô-mét ?

Với bài toán trên, tôi hướng dẫn học sinh như sau:

**** Đọc kĩ đề bài.***

**** Phân tích bài toán.***

+ Bài toán cho biết gì ? Hỏi gì ?

+ Để tính được quãng sông thuyền đi xuôi dòng cần biết điều gì ?

(Vận tốc xuôi dòng, thời gian đi xuôi dòng)

+ Tính vận tốc xuôi dòng bằng cách nào ?

**** Học sinh trình bày cách giải.***

Vận tốc của thuyền đi xuôi dòng là:

7,2 + 1,6 = 8,8 (km/giờ)

Độ dài quãng sông thuyền đi xuôi dòng trong 3,5 giờ là:

8,8 x 3,5 = 30,8 (km)

Đáp số: 30,8 km.

Ví dụ 10 . Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu ?

Lời giải

Trong 1 giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$BA.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong 1 giờ dòng nước trôi được :

$(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}):2=\frac{1}{36}$ AB.

Thời gian phao trôi từ A đến B :

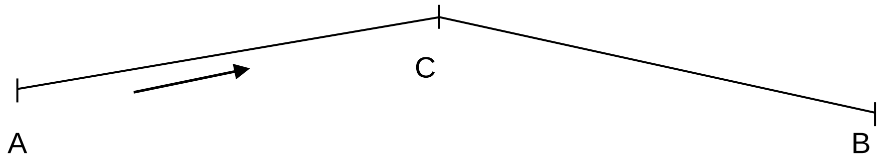
$$1:\frac{1}{36}=36\text{ (h)}$$

* ***<u>Một số lưu ý</u>*** :Khi giải những bài toán liên quan đến vận tốc dòng nước là học sinh phải hiểu rõ " ***Vận tốc thực của chuyển động phải lớn hơn vận tốc của dòng nước "***. Đồng thời giúp các em nắm vững hệ thống công thức mối quan hệ giữa vận tốc thực với vận tốc xuôi dòng nước, ngược dòng nước.

DẠNG 5. CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC THAY ĐỔI TRÊN TỪNG ĐOẠN

Đây là dạng toán khó mà học sinh phải phân tích được từng đoạn đường cụ thể. Nếu vật chuyển động trên đoạn đường bằng phẳng thì vận tốc không đổi theo thời gian, còn nếu vật chuyển động xuống dốc bao giờ chuyển động của vật cũng là chuyển động nhanh dần đều và chuyển động của vật khi lên dốc cũng là chuyển động chậm dần đều. Trong trường hợp này ta chỉ xét chuyển động của vật khi lên dốc cũng như khi xuống dốc là chuyển động có vận tốc không thay đổi nghĩa là chuyển động đều theo từng đoạn.

Ví dụ 11 . Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AC và một đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi từ A đến B là 2 giờ, thời gian về từ B đến A là 1 giờ 45 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng lúc lên dốc thì người đó đi với vận tốc 10km/h, lúc xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 15km/h.



* ***Phân tích hình học***. Khi đi thì quãng đường lên dốc là đoạn AC, xuống dốc là đoạn CB. Còn khi trở lại thì quãng đường lên dốc là BC, xuống dố clà CA. Vận tốc không đổi khi lên dốc là 10km/h, xuống dốc là 15 km/h.

Lời giải

***<u>Cách 1</u>*: Chú ý rằng vận tốc 10km/h bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc 15km/h. Giả sử trong 2 giờ lúc đi, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì đI được quãng đường : AC + $\frac{2}{3}$ CA, dài:

$$10.2 = 20 \text{ (km)}$$

Giả sử trong 1 giờ 45 phút lúc về, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì được quãng đường : BC + $\frac{2}{3}$ CA, dài:

$$10.1\frac{3}{4} = 17{,}5 \text{ (km)}$$

vậy quãng đường 20 + 17,5 =37,5 (km) là :

$$AC+\frac{2}{3}CB+BC+\frac{2}{3}CA=\frac{5}{3}(AC+CB)=\frac{5}{3}AB$$

Quãng đường AB : 37,5 : $\frac{5}{3}$ = 22,5 (km).

***<u>Cách 2</u>*.**

Trên mỗi km của quãng đường AB đều có một lần người đi xe đạp đI với vận tốc 10km/h, một lần đi với vận tốc 15km/h.

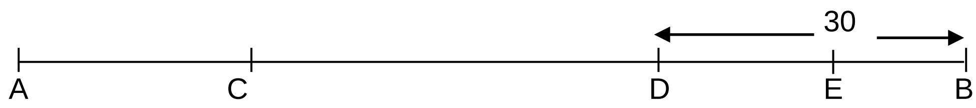
1km đivới vận tốc 10km/h hết $\frac{1}{10}$ giờ, 1km đi ới vận tốc 15km/h hết $\frac{1}{15}$ giờ, do đó 1km cả đi lẫn về hết :

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6} \text{ (giờ)}$$

Thời gian cả đi lẫn về : 2 + $1\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$ (h)

Quãng đường AB : $3\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$ = 22,5 (km)

Ví dụ 12. Một xe tải đi từ A đến B, vận tốc 40km/h. Sau đó một thời gian , một xe du lịch rời A, vận tốc 60km/h và như vậy sẽ đến B cùng lúc với xe tải . Nhưng đến C được 1/5 quãng đường AB, xe tải giảm vận tốc xuống còn 35km/h, do đó xe du lịch gặp xe tải ở D, cách D 30km. Tính quãng đường AB.



Lời giải

Nếu không thay đổi vận tốc thì xe tải gặp xe du lịch ở B, do đổi vận tốc nên nó gặp xe du lịch ở D. Trong bài toán này, xe du lịch được đưa vào để xác định xem do thay đổi vận tốc, xe tải di chậm bao lâu so với bình thường .

Xe du lịch đi DB trong : 30 : 60 = $\frac{1}{12}$ (h).

Trong 1/2 giờ đó, xe tải đi được : 35. $\frac{1}{2}$ = 17,5 (km)

Như vậy lúc xe du lịch đến B (tức là lúc xe tải đáng lẽ đến B) thì xe tải mới đến E, còn cách B :30-17,5 = 12,5 (km).

Từ C xe tải đi với vận tốc bằng $\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$ vận tốc cũ nên quãng đường đi được CE bằng $\frac{7}{8}$ quãng đường CB. Vậy quãng đường 12,5 km là $\frac{1}{8}$ quãng đường CB.

Quãng đường CB :12,5 . 8 = 100 (km).

Quãng đường AB : $\frac{100.5}{4}=125(km)$

DẠNG 6. VẬN TỐC TRUNG BÌNH

Trong dạng toán này có sự thay đổi vận tốc theo một khoảng thời gian nhất định của một chuyên động hoặc cùng một thời gian có nhiều chuyển động với vận tốc khác nhau.

Ví dụ 13. Một người đi xe đạp từ A đến B, đi từ A với vận tốc 10km/h, nhưng đi từ chính giữa đường đến B với vận tốc 15km/h. Tính xem trên cả quãng đường người đó đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu?

Nhận xét . Chú ý rằng vận tốc trung bình không phải luôn luôn bằng trung bình cộng của hai vận tốc. Vận tốc trung bình trên quãng đường AB bằng quãng đường AB chia cho thời gian đi từ A đến B. Cả hai đại lượng này ta đều chưa biết.

Lời giải

Trên quãng đường AB, cứ 2km thì có 1km đi với vận tốc 10km/h (hết $\frac{1}{10}$ giờ), 1km đi với vận tốc 15km/h (hết $\frac{1}{15}$ giờ), nên cứ 2km, người đó đi hết :

$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ (h).

Vậy vận tốc trung bình của người đó là :

2 : $\frac{1}{6}$ = 12 (km/h).

Ví dụ 14. An, Hải, Hoàng, Anh, Minh đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Biết rằng An đi với vận tốc là 12 km/h, Hải đi với vận tốc là: 15km/h, Hoàng đi với vận tốc bằng 4/5 vận tốc của Hải, Anh đi với vận tốc bằng 75% vận tốc của An, Minh đi với vận tốc bằng vận tốc trung bình của An và Hải. Hỏi trung bình cả năm người đi với vận tốc là bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của Hoàng là: $15\cdot\frac{4}{5}=12$ km/h

Vận tốc của Anh là: $12\cdot\frac{75}{100}=9$ km/h

Vận tốc của Minh là: $\frac{12+15}{2}=13,5$ km/h

Vận tốc trung bình của năm người đi là: $\frac{12+15+12+9+13,5}{5}=12,3$ km/h

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Trong một cuộc thi chạy 2000m, các vận động viên chạy với vận tốc không đổi trên suốt quãng đường. Người thứ nhất về đích trước người thứ hai 200m và trước người thứ ba 290m. Khi người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích bao nhiêu mét?

Bài tập 2. Một người đi từ A đến B vận tốc 15km/h. Sau đó 1h30ph, người thứ 2 cũng rời A đi về B, vận tốc 20km/h và đến B trước người thứ nhất là 30ph. Tính quãng đường AB.

Bài tập 3: Lúc 14h20phut một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 48km/h. Sau 10 phút một ô tô xuất phát từ A đuổi theo xe máy với vận tốc 60km/h. Hỏi:

a) Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ? b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Bài tập 4: Lúc 7 giờ 50 phút bác An đi từ A đến B với vận tốc 80m/ phút. Đến 7 giờ 55 phút bác Bình đi từ A đến B vơi vận tốc 90m/ phút đuổi theo bác An. Hỏi:

a) Bác Bình đuổi kịp bác An lúc mấy giờ b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Bài tập 5. Đồng hồ đang chỉ 4 giờ 10 phút. Sau ít nhất bao lâu thì hai kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng ?

Bài tập 6: Hiện nay là 12 giờ đúng. Hỏi sau bao lâu nữa thì kim giờ và kim phút trùng khít nhau một lần nữa.

Bài tập 7: Hai xe ô tô đi từ hai địa điểm A và B về phía nhau, xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ, xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB, xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài tập 8: Trên quãng đường AB, hai xe ô tô đi từ A và từ B ngược chiều nhau. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại một điểm cách A 12km, cách B 18 km. Nếu muốn gặp nhau ở chính giữa đường thì xe thứ nhất (đi từ A) phải khởi hành trước xe kia 10 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài tập 9: Phúc và Quang cùng khởi hành một lúc từ nhà mình và đi về phía nhau. Phúc đi nhanh gấp $\frac{4}{3}$ Quang và họ gặp nhau sau 72 phút. Phúc phải khởi hành sau Quang bao lâu để họ gặp nhau ở chính giữa?

Bài tập 10: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A; B; C (B nằm giữa A và C) có hai người đi xe máy Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A, Dũng xuất phát từ B. Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A, gặp Dũng luc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30 km, vận tốc của Ninh bằng 1/4 vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC.

Bài tập 12: Một con thuyền đi với vận tốc 7,2 km/giờ khi nước lặng, vận tốc của dòng nước là 1,6km/giờ. Nếu thuyền đi xuôi dòng thì sau 3,5giờ sẽ đi được bao nhiêu ki-lô-mét ?

Bài tập 13. Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu ?

Bài tập 14 . Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AC và một đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi từ A đến B là 2 giờ, thời gian về từ B đến A là 1 giờ 45 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng lúc lên dốc thì người đó đi với vận tốc 10km/h, lúc xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 15km/h.

Bài tập 15. Một xe tải đi từ A đến B, vận tốc 40km/h. Sau đó một thời gian , một xe du lịch rời A, vận tốc 60km/h và như vậy sẽ đến B cùng lúc với xe tải . Nhưng đến C được 1/5 quãng đường AB, xe tải giảm vận tốc xuống còn 35km/h, do đó xe du lịch gặp xe tải ở D, cách D 30km. Tính quãng đường AB.

Bài tập 16: Lúc 8 giờ một người đi từ A dến B với vận tốc 25 km/h. Khi còn cách B 20km người ấy tăng vận tốc lên 30 km/h. Sau khi làm việc ở B trong 30 phút, rồi quay trở về A với vận tốc không đổi 30 km/h và đến Alúc 12 giờ 2 phút. Tính chiều dài quãng đường AB.

Bài tập 16. Một người đi xe đạp từ A đến B, đi từ A với vận tốc 10km/h, nhưng đi từ chính giữa đường đến B với vận tốc 15km/h. Tính xem trên cả quãng đường người đó đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu?

Bài tập 17. An, Hải, Hoàng, Anh, Minh đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Biết rằng An đi với vận tốc là 12 km/h, Hải đi với vận tốc là: 15km/h, Hoàng đi với vận tốc bằng 4/5 vận tốc của Hải, Anh đi với vận tốc bằng 75% vận tốc của An, Minh đi với vận tốc bằng vận tốc trung bình của An và Hải. Hỏi trung bình cả năm người đi với vận tốc là bao nhiêu?

CHỦ ĐỀ 18:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ HỌC "TOÁN LỜI VĂN"

I/ PHƯƠNG PHÁP DÙNG SƠ ĐỒ ĐOẠN THẲNG

- Mỗi đại lượng trong bài được sơ đồ hóa bằng đoạn thẳng

- Với sơ đồ đoạn thẳng ta đã thể hiện trực quan các đại lượng trong bài toán và các quan hệ giữa chúng và dễ dàng tìm ra đáp án của bài toán

* LOẠI TOÁN TÍNH SỐ TUỔI.

Bài tập 1: Tuổi anh hiện nay gấp 3 lần tuổi em trước kia. Khi anh bằng tuổi em hiện nay thì tổng số tuổi của hai người là 28. Tính số tuổi của mỗi người hiện nay

Bài tập 2: Hiện nay, tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con. Bốn năm trước đây, tuổi mẹ gấp 6 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ, tuổi con hiện nay.

Bài tập 3: Tuổi bà gấp đôi tuổi mẹ, tuổi con bằng $\frac{1}{5}$ tuổi mẹ. Tính tuổi của mỗi người, biết tổng số tuổi của mẹ và con là 36.

Bài tập 4: Tuổi bố gấp 3 lần tuổi anh, tuổi anh gấp 2 lần tuổi em. Tuổi bố cộng với tuổi em bằng 42 tuổi. Tính tuổi của mỗi người.

Bài tập 5: Năm 2000, bố 40 tuổi, Mai 11 tuổi, em Nam 5 tuổi. Đến năm nào, tuổi bố bằng tổng số tuổi của hai chị em?

Bài tập 6: Năm nay tuổi cha hơn 7 lần tuổi con là 3 tuổi. Đến khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì tuổi hai cha con cộng lại bằng 109. Tìm tuổi của mỗi người hiện nay.

Bài tập 7: Năm năm trước cha hơn con 36 tuổi. Hỏi năm cha bao nhiêu tuổi thì 3 lần tuổi cha bằng 7 lần tuổi con?

Bài tập 8: Năm nay mẹ 73 tuổi. Khi tuổi mẹ bằng tuổi con hiện nay thì tuổi mẹ hơn 7 lần tuổi con lúc đó là 4 tuổi. Tính tuổi con hiện nay?

Bài tập 9: Bố nói với con: "10 năm trước đây tuổi bố gấp 10 lần tuổi con", 22 năm sau nữa thì tuổi bố sẽ gấp đôi tuổi con. Hãy tính tuổi bố và tuổi con hiện nay.

Bài tập 10: Mẹ hơn con 24 tuổi. Cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Bài tập 11: Ba năm trước em 6 tuổi và kém chị 6 tuổi. Hỏi mấy năm sau nữa thì 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em?

Bài tập 12: Năm 2000, mẹ 36 tuổi, hai con 7 tuổi và 12 tuổi. Bắt đầu từ năm nào, tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con?

Bài tập 13: Anh hơn em 3 tuổi. Tuổi anh hiện nay gấp rưỡi tuổi em, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi hiện nay của mỗi người.

Bài tập 14: Tuổi mẹ hiện nay gấp $2,3$ lần tuổi con. 16 năm trước, tuổi mẹ gấp $7,5$ lần tuổi con. Hỏi mấy năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con?

*** LOẠI TOÁN BIẾT MỐI LIÊN HỆ SỐ PHẦN, PHÂN SỐ.**

Bài tập 15: Lớp 5A có số học sinh nữ bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh nam. Sang đầu học kỳ II có 4 bạn nữ từ lớp khác chuyển đến nên số học sinh nữ bằng $\frac{3}{5}$ số học sinh nam. Hỏi đầu năm học lớp 5A có bao nhiêu học sinh nữ, bao nhiêu học sinh nam?

Bài tập 16: Ba bình nước đựng nước chưa đầy. Sau khi đổ $\frac{1}{3}$ số nước ở bình 1 sang bình 2, rồi đổ $\frac{1}{4}$ số nước hiện có ở bình 2 sang bình 3, cuối cùng đổ $\frac{1}{10}$ số nước hiện có ở bình 3 sang bình 1 thì mỗi bình đều có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình có bao nhiêu lít nước?

Bài tập 17: Cho phân số $\frac{23}{28}$. Hãy tìm số tự nhiên m sao cho khi cùng bớt cả tử số và mẫu số của phân số đã cho đi m thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{2}{3}$.

Bài tập 18: Cho phân số $\frac{107}{187}$. Hãy tìm số tự nhiên, biết rằng nếu cùng bớt cả tử số và mẫu số đi số tự nhiên đó thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{5}{9}$.

Bài tập 19: Một quầy bán vải, lần thứ nhất bán $2m$ vải, lần thứ hai bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$. Lần thứ ba bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$, lần thứ tư bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$ thì vừa hết. Hỏi quầy vải đó bán được tất cả bao nhiêu mét vải?

Bài tập 20: Bình đọc một quyển truyện trong 3 ngày. Ngày đầu Bình đọc được $\frac{1}{5}$ số trang và 16 trang. Ngày thứ hai Bình đọc được $\frac{3}{10}$ số trang còn lại và 20 trang. Ngày thứ ba Bình đọc được $\frac{3}{4}$ số trang còn lại và 37 trang cuối cùng. Hỏi quyển truyện đó có bao nhiêu trang?

*** LOẠI TOÁN TÌM SỐ TỰ NHIÊN**

Bài tập 21: Tìm bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp có tổng bằng 5420

Bài tập 22: Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp biết rằng tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 114.

Bài tập 23: Hiệu của hai số bằng 1217. Nếu tăng số trừ gấp bốn lần thì được số lớn hơn số bị trừ là 376. Tìm số bị trừ và số trừ.

Bài tập 24: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 7 biết rằng sau khi xoá số 7 ấy đi thì số tự nhiên đó giảm đi 484 đơn vị

Bài tập 25: Hiệu của hai số là 2345. Tìm hai số đó, biết rằng nếu viết thế chữ số 5 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn.

Bài tập 26: Hiệu của hai số bằng $0,8$. Thương của hai số cùng bằng $0,8$. Tìm hai số đó.

Bài tập 27: Hiệu của hai số bằng 20. Thương của hai số bằng $2,25$. Tìm hai số đó.

Bài tập 28: Tìm hai số có hiệu 252, biết số bé bằng $\frac{1}{4}$ tổng của hai số.

Một số bài tập bổ sung:

Bài tập 29: Trên hai ngăn của giá sách có tổng cộng 118 cuốn. Nếu lấy đi 8 cuốn ở ngăn thứ nhất sau đó thêm vào ngăn thứ hai 10 cuốn sách thì số sách ở ngăn thứ gấp đoi số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách trong mỗi ngăn lúc ban đầu.

Bài tập 30: Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ và tuổi con hiện nay?

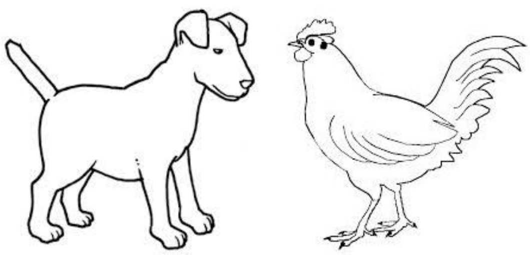
Bài tập 31: Số dân trước kia của hai huyện A và B tỉ lệ với 2 và 3. Hiện nay dân số huyện A tăng thêm 8000 người, dân số huyện B tăng thêm 4000 nên dân số huyện A gấp $\frac{3}{4}$ dân số huyện B. Tính số dân hiện nay của mỗi huyện

II/ PHƯƠNG PHÁP GIẢ THIẾT TẠM

Giả thiết tạm: là những điều ta tưởng tượng ra để giúp cho việc giải bài toán được dễ dàng

Bài tập 32: Xét bài toán cổ:

“Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn”



Hỏi mỗi loài có bao nhiêu con?

Bài tập 33: (Tìm số gà, số chó biết tổng số con và hiệu số chân) Vừa gà vừa chó có 36 con. Biết số chân chó nhiều hơn số chân gà là 12 chân. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Bài tập 34: (Tính số gà, số chó biết hiệu số con và tổng số chân) Cả gà và chó có 100 chân. Biết số gà nhiều hơn số chó 8 con. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Bài tập 35: (Tính số gà, số chó biết hiệu số con và hiệu số chân) Số chân chó nhiều hơn số chân gà là 12, số gà lớn hơn số chó là 8 con. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Bài tập 36: Một đội bóng thi đấu tất cả 25 trận chỉ thắng hoặc hoà. Biết mỗi trận thắng đội được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm. Tổng số điểm đội đạt được là 59 điểm. Tính số trận thắng và trận hoà của đội bóng đó.

Bài tập 37: Ba ô tô chở tổng cộng 50 chuyến, gồm 118 tấn hàng. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở $2,5$ tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyến biết rằng số chuyến xe thứ nhất gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai?

Bài tập 38. Trên quãng đường AC dài $200\,\text{km}$ có một điểm B cách A là $10\,\text{km}$. Lúc 7 giờ, một ô tô đi từ A, một ô tô khác đi từ B, cả hai cùng đi tới C với vận tốc thứ tự bằng

$50 km/h$ và $40 km/h$. Hỏi lúc mấy giờ thì khoảng cách đến C của xe thứ hai gấp đôi khoảng cách đến C của xe thứ nhất?

Bài tập 39. Người ta bơm nước vào một bể: dùng máy I trong 30 phút, dùng máy II trong 20 phút. Tính xem trong mỗi phút mỗi máy bơm được bao nhiêu lít nước, biết rằng mỗi phút máy II bơm được nhiều hơn máy I là 50 lít và tổng cộng hai máy bơm được 21000 lít nước?

Bài tập 40. Khối 6 của một trường có 366 học sinh, gồm 8 lớp. Mỗi lớp gồm một số tổ, mỗi tổ có 9 người hoặc 10 người. Biết rằng số tổ của các lớp đều bằng nhau, tính số tổ có 9 người, số tổ có 10 người cả khối?

Bài tập 41. Một câu lạc bộ có 22 chiếc ghế gồm ba loại: ghế ba chân, ghế bốn chân, ghế sáu chân. Tính số ghế mỗi loại, biết rằng tổng số chân ghế bằng 100 và số ghế sáu chân gấp đôi số ghế ba chân?

Bài tập 42: Một số học sinh xếp hàng 12 thì thừa 5 học sinh, còn xếp hàng 15 cũng thừa 5 học sinh và ít hơn trước là 4 hàng. Tính số học sinh?

Bài tập 43: An vào cửa hàng mua 12 vở và 4 bút chì hết 36000 đồng. Bích mua 8 vở và 5 bút chì cùng loại hết 27500 đồng. Tính giá trị một quyển vở, giá trị một bút chì.

Bài tập 44: Một tổ may phải may 1800 chiếc cả quần và áo trong 13 giờ. Trong 8 giờ đầu tổ may áo và trong thời gian còn lại tổ may quần. Biết rằng trong 1 giờ, tổ may được số áo nhiều hơn số quần là 30 chiếc. Tính số áo và số quần tổ đã may.

Bài tập 45: Một lớp học có 6 tổ, số người của mỗi tổ bằng nhau. Trong một bài kiểm tra, tất cả học sinh đều được điểm 7 hoặc 8. Tổng số điểm của cả lớp là 350. Hãy tính số học sinh của lớp, số học sinh đạt từng loại điểm?

Bài tập 46: Một đội bóng thi đấu 25 trận, chỉ có thắng và hoà, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm, kết quả đội đó được 59 điểm. Tính số trận thắng, số trận hoà của đội bóng.

Bài tập 47: Có 25 gói đường gồm ba loại: gói 5 lạng, gói 2 lạng, gói 1 lạng, có tổng khối lượng tổng cộng là 56 lạng. Biết số gói 1 lạng gấp đôi số gói 5 lạng. Tính số gói mỗi loại.

Bài tập 48: Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo. Người ta xếp 28 gói cả bánh và kẹo thì vừa đầy hộp đó. Biết rằng giá tiền bánh và kẹo đều bằng nhau và bằng 36000 đồng. Tính giá một gói bánh, một gói kẹo.

Bài tập 49: Ba máy cày cùng cày một cánh đồng. Lúc đầu chỉ có hai máy thứ nhất và thứ hai cày trong 3 giờ, sau đó máy thứ hai nghỉ, máy thứ ba vào làm thay với năng suất gấp đôi máy thứ hai và trong 5 giờ thì hai máy này cày xong cánh đồng. Hỏi mỗi máy cày một mình xong cánh đồng đó trong bao lâu, biết rằng nếu máy thứ nhất và máy thứ hai cùng làm thì sau 12 giờ xong công việc?

III/ PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN

Một số bài toán về số tự nhiên có thể giải bằng cách căn cứ vào các dữ kiện của bài toán để tìm ra một số giái trị thoả mãn điều kiện sau đó thử xem trường hợp nào thoả mãn đầu bài của bài toán và lựa chọn các kết quả đúng

Bài tập 50: Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với 1: 2 : 3

Một số bài tập bổ sung:

Bài tập 52: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết nếu chia số đó cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số đó viết theo thứ tự ngược lại là 18.

Bài tập 53: Có ba tờ bìa ghi các số 23, 79 và $\overline{ab}$. Xếp ba tờ bìa đó lại thành thì được một số có 6 chữ số. Cộng tất cả các số có 6 chữ số đó lại (đổi chỗ các tờ bìa ta lại được sô có 6 chữ số khác) thì được kết quả là 2 989 896. Tìm số $\overline{ab}$

Bài tập 54: Trên một tấm bia có các vòng tròn tính điểm là 18, 23, 28, 33, 38. Muốn trúng thưởng thì phải bắn một số phát để đạt đúng 100 điểm. Hỏi phải bắn bao nhiêu phát và vào những vòng nào để trúng thưởng.

IV/ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI

Ở Phương pháp này, ta gọi đại lượng cần tìm là một ẩn $\boldsymbol{x}$*, từ đó thiết lập mối quan hệ giữa* $\boldsymbol{x}$ *với các đại lượng đã biết trong bài.*

Bài tập 55: Một nông dân ra chợ bán hết số cam của mình cho năm người: Người thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số cam rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số quả còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ tư mua $1\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua $\frac{1}{2}$ quả, người thứ năm mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả thì vừa hết.

Tính số cam người nông dân đem đi bán và số cam những người khác đã mua.

Bài tập 56: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng tổng sáu số tự nhiên có hai chữ số lập bởi hai trong ba chữ số ấy gấp đối số phải tìm.

Bài tập 57: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu chia số ấy cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 18.

Bài tập 58: Tìm số tự nhiên x, biết rằng tổng các chữ số của x bằng y, tổng các chữ số của y bằng z và $x+y+z=60$.

Bài tập 59: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy bằng 1554.

V/ BÀI TOÁN CHUNG RIÊNG.

Để giải bài toán ta thường xuất phát từ phần công việc ứng với 1 đơn vị thời gian rồi từ đó suy ra phần công việc trong các thời gian tiếp theo.

Bài tập 60 : Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Bài tập 61: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn , nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu?

Bài tập 62: Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước trong 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ, vòi thứ 2 chảy trong 6 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải mất bao nhiêu lâu mới đầy bể.