

MỤC LỤC

A. MỞ ĐẦU.....	2
I. Lí do chọn đề tài.....	2
II. Mục đích nghiên cứu.....	2
III. Đối tượng nghiên cứu.....	2
IV. Phương pháp nghiên cứu.....	3
B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	3
I. Cơ sở lí luận.....	3
II. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng SKKN.....	4
III. Các thí dụ minh họa.....	5
IV. Hiệu quả bước đầu của SKKN.....	18
C. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	19
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	20

HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA THAM SỐ VÀ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN PHỤ

A. MỞ ĐẦU

I. Lí do chọn đề tài

Bài toán giải và biện luận phương trình, bất phương trình bậc hai chứa tham số là bài toán thường gặp trong chương trình Toán THPT. Để giải một số phương trình, bất phương trình ta thường quy về phương trình bậc hai chứa tham số và thỏa mãn điều kiện phụ. Bài toán này trước đây được giải được bằng sử dụng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, đưa về bài toán so sánh một số với các nghiệm của tam thức bậc hai. Tuy nhiên, chương trình môn Toán THPT từ năm 2006 đến nay không có nội dung định lý đảo về dấu tam thức bậc hai, điều này dẫn đến khó khăn cho học sinh khi giải các bài toán cần sử dụng đến nội dung kiến thức này.

Cũng đã có một số tài liệu tham khảo môn toán đưa ra một số ví dụ về các dạng toán này nhưng không hệ thống thành một chuyên đề, mà chỉ giới thiệu lẻ tẻ. Bởi vậy, học sinh và giáo viên khó khăn khi tiếp cận các dạng toán này, cũng như tìm tài liệu học tập, giảng dạy.

Để giúp học sinh hiểu, giải được các bài toán đưa về bài toán so sánh một số với các nghiệm của một tam thức bậc hai, đồng thời trao đổi kinh nghiệm giảng dạy với các bạn đồng nghiệp, tôi lựa chọn đề tài SKKN: **“Hướng dẫn học sinh giải phương trình, bất phương trình bậc hai chứa tham số và thỏa mãn điều kiện phụ”**

II. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu nghiên cứu của đề tài là giúp các em học sinh lớp 10 tiếp cận và giải được các phương trình, bất phương trình chứa tham số đưa về dạng toán so sánh một số với các nghiệm của phương trình bậc hai không sử dụng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai. Đồng thời, thông qua các bài toán này để phát triển năng lực tư duy phát hiện và giải quyết vấn đề; tư duy sáng tạo cho học sinh.

III. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các phương trình, bất phương trình chứa tham số đưa về phương trình bất phương trình bậc hai chứa các điều kiện phụ, đưa ra lời giải cụ thể cho các bài toán. Qua đó, đề tài tổng kết các dạng toán hay gặp và cách giải cho các dạng toán đó.

IV. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu lí luận: Nghiên cứu các tài liệu về phương trình, bất phương trình ở chương trình toán Trung học phổ thông.

Nghiên cứu thực tiễn: Khảo sát năng lực học sinh trong vấn đề tiếp cận và giải các phương trình, bất phương trình bậc hai chứa tham số và thỏa mãn điều kiện phụ.

Thực nghiệm sư phạm: Tiến hành thực nghiệm trên những đối tượng học sinh cụ thể nhằm đánh giá hiệu quả của đề tài.

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. Cơ sở lí luận

1. Định lí Vi-et cho phương trình bậc hai và ứng dụng

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm (phân biệt hoặc không) x_1, x_2 , ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\text{i)} \quad x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P = \frac{c}{a} < 0$$

$$\text{ii)} \quad 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có $\Delta = b^2 - 4ac$

- i) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$.
- iii) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với $\forall x \in (x_1; x_2)$.

Trong định lí trên, ta thay Δ bằng $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b' = \frac{b}{2}$) thì ta cũng có kết luận tương tự.

3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Xét hàm số bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- i) Nếu $a > 0$ thì $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- ii) Nếu $a < 0$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

II. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng SKKN

Trong thực tế giảng dạy, tôi nhận thấy khi yêu cầu học sinh giải bài toán: *Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho phương trình sau có ít nhất một nghiệm:* $\sqrt{2x^2 - 2(a+4)x + 5a + 10} + 3 - x = 0$, học sinh biến đổi đến bài toán:

Tìm a để hệ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2(a+1)x + 5a + 1 = 0 \end{cases}$ *có nghiệm.* Đến đây học sinh lúng túng

khi giải tiếp, do bài toán: *Tìm a để phương trình $x^2 - 2(a+1)x + 5a + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \geq 3$,* là bài toán mà trước đây thường sử dụng định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai để giải quyết. Chương trình môn Toán THPT lớp 10 hiện nay không có nội dung này. Tất nhiên, bài toán này có thể giải bằng cách

rút a theo hàm số của biến x rồi sử dụng đạo hàm, lập bảng biến thiên và suy ra kết quả. Nhưng, với các em học sinh lớp 10 thì chưa thể giải bằng cách này, vì nội dung ứng dụng đạo hàm xét chiều biến thiên của hàm số đến lớp 12 mới học.

Thực tế trong học tập và giảng dạy môn toán lớp 10, có rất nhiều bài toán tương tự như bài toán nêu trên. Có một số tài liệu toán cũng có đưa ra một số ví dụ về các phương trình, bất phương trình chứa tham số có thể quy về phương trình, bất phương trình bậc hai chứa điều kiện phụ và giải nó không sử dụng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai. Nội dung này đưa ra chưa thành hệ thống, khó cho học sinh học tập, hơn nữa, việc tìm tài liệu học tập liên quan đến vấn đề này tại khu vực trường THPT Tổng Duy Tân là khó khăn.

Thực tế đó đòi hỏi phải có một hệ thống các ví dụ cụ thể cho dạng toán này để học sinh và giáo viên có điều kiện học tập và giảng dạy chủ đề phương trình, bất phương trình chứa tham số ở lớp 10 được tốt hơn.

III. Các thí dụ minh họa

Thí dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x - 2m\sqrt{x-3} - m^2 - 1 = 0$

Phân tích:

Đặt $\sqrt{x-3} = t$, khi đó ta có phương trình: $t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$. Ta thấy, với $t \geq 0$, ta tìm được nghiệm x của phương trình đã cho. Do đó bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$ có nghiệm $t \geq 0$.

Ta có hai lời giải cho bài toán này như sau:

Lời giải 1:

Xét bài toán ngược: Tìm m để phương trình $t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$ (1) không có nghiệm $t \geq 0$.

Trường hợp 1: Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 2(m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Trường hợp 2: Phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 và $t_1 \leq t_2 < 0$. Điều kiện cho trường hợp này là:

$$\begin{cases} \Delta' = 2(m^2 - 1) \geq 0 \\ P = -m^2 + 2 > 0 \\ S = 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m \leq -1$$

Kết hợp hai trường hợp trên, ta có điều kiện để phương trình (1) không có nghiệm $t \geq 0$ là: $-\sqrt{2} < m < 1$.

Do đó, phương trình (1) có nghiệm $t \geq 0$ là $m \leq -\sqrt{2}$ hoặc $m \geq 1$

Hay, điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là: $m \leq -\sqrt{2}$ hoặc $m \geq 1$

Lời giải 2:

Điều kiện để phương trình $t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$ có nghiệm là:
 $\Delta' = 2(m^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Khi đó, (1) có hai nghiệm là: $t_1 = m - \sqrt{2(m^2 - 1)}$; $t_2 = m + \sqrt{2(m^2 - 1)}$;

Rõ ràng $t_1 \leq t_2$, nên để phương trình (1) có nghiệm $t \geq 0$, điều kiện là:

$$t_2 = m + \sqrt{2(m^2 - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(m^2 - 1)} \geq -m$$

$$\Leftrightarrow (I) \begin{cases} -m < 0 \\ 2(m^2 - 1) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } (II) \begin{cases} -m \geq 0 \\ 2(m^2 - 1) \geq (-m)^2 \end{cases}$$

$$\bullet (I) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\bullet (II) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}$$

Như vậy, điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là: $m \leq -\sqrt{2}$ hoặc $m \geq 1$.

Thí dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho phương trình sau có ít nhất một nghiệm: $\sqrt{2x^2 - 2(a+4)x + 5a + 10} + 3 - x = 0$ (2)

Phân tích:

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2(a+4)x + 5a + 10} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x^2 - 2(a+4)x + 5a + 10 = (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2(a+1)x + 5a + 1 = 0 \quad (2.1) \end{cases}$$

Đến đây, bài toán trở thành: Tìm a để phương trình (2.1) có nghiệm $x \geq 3$

Ta có hai lời giải sau:

Lời giải 1:

Ta tìm a để phương trình (2.1) không có nghiệm $x \geq 3$. Có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình (2.1) vô nghiệm, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' = (a+1)^2 - (5a+1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 3$

Trường hợp 2: Phương trình (2.1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 \leq x_2 < 3$. Điều kiện này là:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 \\ (x_1 - 3) + (x_2 - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a \geq 0 \\ (5a+1) - 3 \cdot 2(a+1) + 9 > 0 \\ 2(a+1) - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty) \\ a < 4 \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 0$$

Kết hợp hai trường hợp trên, ta có điều kiện để phương trình (2.1) không có nghiệm $x \geq 3$ là $a < 3$

Do đó, điều kiện để phương trình (2.1) có nghiệm $x \geq 3$ là $a \geq 3$.

Bởi vậy, giá trị cần tìm của a là: $a \geq 3$.

Lời giải 2:

Điều kiện để phương trình (2.1) có nghiệm là:

$$\Delta' = a^2 - 3a \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$$

Khi đó (2.1) có hai nghiệm: $x_1 = a + 1 - \sqrt{a^2 - 3a}$; $x_2 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 3a}$;

Nên phương trình (2.1) có nghiệm $x \geq 3$ khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} x_2 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 3a} \geq 3 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 3a} \geq 2 - a \\ &\Leftrightarrow (I) \begin{cases} a^2 - 3a \geq 0 \\ 2 - a < 0 \end{cases} \text{ hoặc } (II) \begin{cases} 2 - a \geq 0 \\ a^2 - 3a \geq (2 - a)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

- $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty) \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3$
- $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$

Bởi vậy, giá trị cần tìm của a là: $a \geq 3$.

Thí dụ 3: Tìm m để $x^2 - (m + 2)x + m^2 + 1 > 0$ với mọi $x > 1$.

Phân tích:

Đặt $f(x) = x^2 - (m + 2)x + m^2 + 1$, ta chia ra 3 trường hợp $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ và $\Delta > 0$.

Trường hợp $\Delta > 0$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ hoặc $x > x_2$, ta đưa về bài toán tìm m để $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 1$.

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^2 - (m + 2)x + m^2 + 1$.

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 - 4(m^2+1) = -3m^2 + 4m$

Xét 3 trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } \Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Khi đó } f(x) > 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x > 1$. Do đó $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 2: } \Delta = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Khi đó } f(x) > 0,$$

$$\forall x \neq -\frac{b}{2a} = \frac{m+2}{2}.$$

- Nếu $m = 0$, thì $f(x) > 0, \forall x \neq 1$. Vậy $f(x) > 0$ với mọi $x > 1$, suy ra $m = 0$ thỏa mãn.
- Nếu $m = \frac{4}{3}$, thì $f(x) > 0, \forall x \neq \frac{5}{3}$. Do đó $x = \frac{5}{3} > 1$ không là nghiệm của $f(x) > 0$, suy ra $m = \frac{4}{3}$ không thỏa mãn.

Trường hợp 3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$. Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Nên $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Đến đây, ta tìm điều kiện để $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) < 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ x_1 + x_2 - x_1 x_2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 < 2 \\ m + 2 - (m^2 + 1) \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy, giá trị cần tìm của m là: $m \leq 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

Lưu ý: Trong trường hợp $\Delta > 0$, $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{m+2 - \sqrt{-3m^2 + 4m}}{2}$; $x_2 = \frac{m+2 + \sqrt{-3m^2 + 4m}}{2}$. Nên $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ hoặc $x > x_2$

Bởi vậy, để $f(x) > 0$ với mọi $x > 1$, ta cần điều kiện:

$$x_2 = \frac{m+2 + \sqrt{-3m^2 + 4m}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{-3m^2 + 4m} \leq -m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 0 \\ -3m^2 + 4m > 0 \\ -3m^2 + 4m \leq (-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 0 \\ 0 < m < \frac{4}{3} \\ -3m^2 + 4m \leq (-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Thí dụ 4: Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình sau có nghiệm:
 $x^2 + 2|x - m| + m^2 + 3m + 1 < 0 \quad (4)$

Phân tích:

Chia hai trường hợp $x < m$ và $x \geq m$ để khử dấu giá trị tuyệt đối và đưa về các bài toán giải tương tự như **Thí dụ 3**.

Lời giải:

Ta có, bất phương trình (4) tương đương với

$$(I) \begin{cases} x^2 + 2x + m^2 + m + 1 < 0 \\ x \geq m \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} x^2 - 2x + m^2 + 5m + 1 < 0 \\ x < m \end{cases}$$

- Từ định lí dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra (I) có nghiệm nếu $f(x) = x^2 + 2x + m^2 + m + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $m < x_2$. Do đó

$$(I) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi: } \begin{cases} \Delta' = -m^2 - m > 0 \\ m < -1 + \sqrt{-m^2 - m} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}.$$

- Tương tự, (II) có nghiệm nếu $g(x) = x^2 - 2x + m^2 + 5m + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < m$. Do đó (II) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = -m^2 - 5m > 0 \\ -1 - \sqrt{-m^2 - 5m} < m \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < -\frac{1}{2}$

NHẬN XÉT:

- 1) Để tìm điều kiện tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có nghiệm $x > \alpha$ ta có thể làm theo hai cách:

Cách 1. Ta giải bài toán ngược lại là: Tìm điều kiện để tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ không có nghiệm $x > \alpha$, sau đó kết quả của bài toán ban đầu là phần bù của kết quả của bài toán ngược trong $\mathbb{R}$.

Cách 2. Ta đặt điều kiện để tam thức có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < x_2$, khi đó $f(x)$ có nghiệm $x > \alpha$ cần thêm điều kiện $x_2 > \alpha$.

- 2) Tương tự, để tìm điều kiện tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có nghiệm $x < \alpha$ ta có thể làm theo hai cách:

Cách 1. Ta giải bài toán ngược lại là: Tìm điều kiện để tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ không có nghiệm $x < \alpha$, sau đó kết quả của bài toán ban đầu là phần bù của kết quả của bài toán ngược trong $\mathbb{R}$.

Cách 2. Ta đặt điều kiện để tam thức có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < x_2$, khi đó $f(x)$ có nghiệm $x < \alpha$ cần thêm điều kiện $x_1 < \alpha$.

Thí dụ 5: Tìm m để mọi $x \in [-4; 6]$ là nghiệm của bất phương trình:

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m \quad (5)$$

Phân tích:

Đặt $t = \sqrt{(4+x)(6-x)}$, đưa bất phương trình (5) về bài toán biện luận bất phương trình bậc hai. Ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để giải bài toán này.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{(4+x)(6-x)}$; $u = -x^2 + 2x + 24$ với $x \in [-4; 6]$, ta có bảng biến thiên sau:

x	-4	1	25
u	0	25	0
t	0	5	0

Bất phương trình (5) trở thành: $t^2 + t - 24 - m \leq 0$ (5a)

Bất phương trình (5) đúng với mọi $x \in [-4; 6]$ khi và chỉ khi (5a) đúng với mọi $t \in [0; 5]$

Đặt $f(t) = t^2 + t - 24 - m$, ta có: $\Delta = 4m + 97$

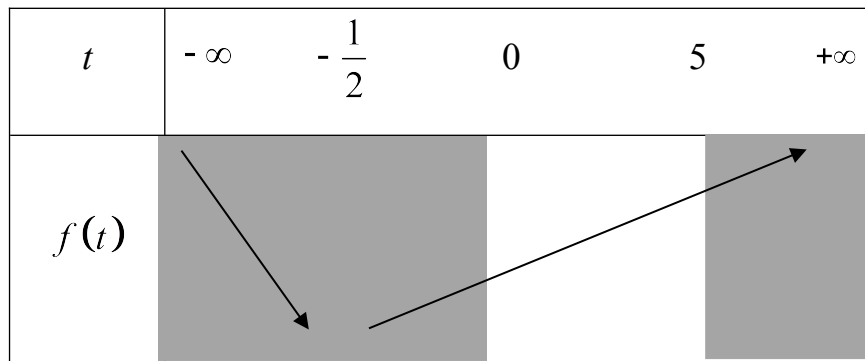
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{97}{4}$ thì $f(t) > 0, \forall t \in R$ nên $m < -\frac{97}{4}$ không thỏa mãn.
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{97}{4}$ thì $f(t) > 0, \forall t \neq -\frac{1}{2}$ nên $m = -\frac{97}{4}$ không thỏa mãn.
- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{97}{4}$ thì $f(t) = 0$ có hai nghiệm $t_1 = \frac{-1 - \sqrt{4m + 97}}{2}$ và $t_2 = \frac{-1 + \sqrt{4m + 97}}{2}$. Nên $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t \leq t_2$.

Bởi vậy, (5a) đúng với mọi $t \in [0; 5]$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-1 - \sqrt{4m+97}}{2} \leq 0 \\ t_2 = \frac{-1 + \sqrt{4m+97}}{2} \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4m+97} \geq 0 \\ \sqrt{4m+97} \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 6$$

Vậy, giá trị cần tìm là $m \geq 6$.

Chú ý: Ta có thể tìm m để (5a) đúng với mọi $t \in [0; 5]$ bằng phương pháp hàm số như sau: Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 24 - m$, ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	5	$+\infty$
$f(t)$					

Từ bảng biến thiên suy ra (5a) đúng với mọi $t \in [0; 5]$ khi và chỉ khi $f(5) \leq 0 \Leftrightarrow 6 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 6$

Thí dụ 6: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 3x^2 + 4mx - 4 = 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$

Lời giải:

Ta tìm điều kiện để hệ sau vô nghiệm: $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 4mx - 4 = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Vì với mọi m thì $f(x)$ luôn có hai nghiệm trái dấu (do $\frac{c}{a} = -\frac{4}{3} < 0$) nên hệ trên vô nghiệm khi và chỉ khi hai nghiệm x_1, x_2 của $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2$

Ta có: $x_1 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 + 12}}{2}$; $x_2 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 + 12}}{2}$, do đó:

$$x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 + 12}}{3} \leq -1 \\ x_2 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 + 12}}{3} \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4m^2 + 12} \geq -2m + 3 \\ \sqrt{4m^2 + 12} \geq 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$$

Từ đó suy ra hệ đã cho có nghiệm khi $m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$.

Thí dụ 7: Tìm tất cả các giá trị của m để $x^2 + \frac{1}{x^2} - (2m+3)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4m + 5 \geq 0$ với $\forall x \neq 0$.

Lời giải:

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow |t| \geq 2$, ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, nên bất phương trình trở thành: $f(t) = t^2 - (2m+3)t + 4m + 3 \geq 0$ có $\Delta = 4m^2 - 4m - 3$

Bài toán trở thành: Tìm m để $f(t) \geq 0$ với mọi $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

- Nếu $\Delta = 4m^2 - 4m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ thì $f(t) \geq 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t) \geq 0$ với mọi $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Nên $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(t) = 0$ có hai nghiệm $t_1 = \frac{2m+3 - \sqrt{4m^2 - 4m - 3}}{2}$ và $t_2 = \frac{2m+3 + \sqrt{4m^2 - 4m - 3}}{2}$. Khi đó: $f(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq t_1$ hoặc $t \geq t_2$.

Do đó: $f(t) \geq 0$ với mọi $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2m+3 - \sqrt{4m^2 - 4m - 3}}{2} \geq -2 \\ t_2 = \frac{2m+3 + \sqrt{4m^2 - 4m - 3}}{2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4m^2 - 4m - 3} \leq 2m+7 \\ \sqrt{4m^2 - 4m - 3} \leq 1-2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0; 2m+7 \geq 0 \\ 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\ 4m^2 - 4m - 3 \leq (2m+7)^2 \\ 4m^2 - 4m - 3 \leq (1-2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{13}{8} \leq m < -\frac{1}{2}$$

Tóm lại: $-\frac{13}{8} \leq m \leq \frac{3}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Thí dụ 8: Tìm a để phương trình sau có nghiệm:

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 3x + 4) = 5ax^2 \quad (8)$$

Phân tích:

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình, nên giả sử $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (8) cho x^2 rồi đưa về phương trình bậc hai với ẩn $t = x + \frac{4}{x}$

Lời giải:

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (1), giả sử $x \neq 0$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x} - 2\right) \left(x + \frac{4}{x} - 3\right) = 5a$$

Đặt $t = x + \frac{4}{x} \Rightarrow |t| \geq 4$, ta có phương trình:

$$(t-2)(t-3) = 5a \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 - 5a = 0 \quad (8a)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (8a) có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 4$.

Đến đây, ta có hai cách giải:

Cách 1: Ta tìm điều kiện để (8a) không có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 4$.

Phương trình (8a) có $\Delta = 20a + 1$

- Nếu $\Delta = 20a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{20}$ thì (8a) vô nghiệm, nên nó cũng không có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 4$.
- Nếu $\Delta = 20a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{20}$ thì (8a) có hai nghiệm $t_1 \leq t_2$ và $t_1 = \frac{5 - \sqrt{20a + 1}}{2}$; $t_2 = \frac{5 + \sqrt{20a + 1}}{2}$

Do đó, (8a) không có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 4$ thì $-4 < t_1 \leq t_2 < 4$. Hay:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5 - \sqrt{20a + 1}}{2} > -4 \\ t_2 = \frac{5 + \sqrt{20a + 1}}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{20a + 1} < 13 \\ \sqrt{20a + 1} < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{20} \\ 20a + 1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{20} < a < \frac{2}{5}$$

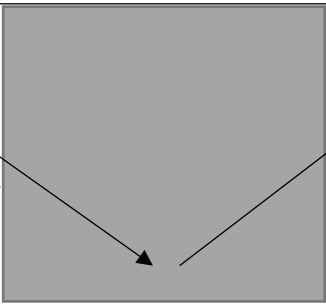
Như vậy, với $a < \frac{2}{5}$ thì (8a) không có nghiệm nào thỏa mãn $|t| \geq 4$. Do đó

suy ra $a \geq \frac{2}{5}$ là các giá trị thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Ta có thể giải bằng phương pháp hàm số.

Ta có: (8a) $\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 5a$ (8b).

Đặt $f(t) = t^2 - 5t + 6$, ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	-4	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$				$+\infty$

Phương trình (8b) có nghiệm $|t| \geq 4$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = 5a$ và đồ thị của $f(t)$ có điểm chung trong miền $|t| \geq 4$.

Từ bảng biến thiên ta có $5a \geq 2 \Leftrightarrow a \geq \frac{2}{5}$

NHẬN XÉT:

1) Điều kiện để tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$x_2 > x_1 > \alpha \text{ là: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} > \alpha; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > \alpha \end{cases}$$

2) Điều kiện để tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$x_1 < x_2 < \alpha \text{ là: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < \alpha; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} < \alpha \end{cases}$$

3) Điều kiện để tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta \text{ là: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} > \alpha \\ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} < \beta \end{cases} \text{ (với giả thiết } x_1 < x_2)$$

Thí dụ 9: Với giá trị nào của x thì biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$A = 5\sqrt{x^2 + 16} - 3x$$

Phân tích:

Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A , ta giải bài toán: Tìm A để phương trình $A = 5\sqrt{x^2 + 16} - 3x$ có nghiệm x , sử dụng phương pháp tìm điều kiện để tam thức bậc hai có nghiệm $x \geq \alpha$.

Lời giải:

Ta có:

$$A = 5\sqrt{x^2 + 16} - 3x \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 + 16} = A + 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + 3x \geq 0 \\ 25(x^2 + 16) = (A + 3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{A}{3} \\ 16x^2 - 6Ax + 400 - A^2 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi $f(x) = 16x^2 - 6Ax + 400 - A^2 = 0$ có nghiệm $x_1 \leq x_2$ và $x_2 \geq -\frac{A}{3}$

$$\begin{cases} \Delta' = 25A^2 - 6400 \geq 0 \\ x_2 = \frac{3A + \sqrt{25A^2 - 6400}}{16} \geq -\frac{A}{3} \end{cases} \Leftrightarrow A \geq 16$$

Ta thấy khi $x = 3$ thì $A = 16$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của A là 16.

IV. Hiệu quả bước đầu của SKKN

SKKN đã được tác giả triển khai dạy cho học sinh lớp 10A năm học 2015 – 2016 của trường THPT Tổng Duy Tân ở các tiết tự chọn. Sau khi học nội dung này, tác giả nhận thấy các em học sinh tiếp nhận tốt nội dung kiến thức được đề cập. Thông qua các ví dụ được trình bày, các em có thể giải các bài toán tương

tự và tìm ra cách giải các bài toán cụ thể cùng chủ đề mà không cần phải sử dụng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai (để giải bài toán so sánh một số với nghiệm của tam thức bậc hai), và cũng chưa cần sử dụng đạo hàm xét chiều biến thiên của hàm số.

SKKN cũng được các thầy cô bộ môn toán trường THPT Tổng Duy Tân giảng dạy các tiết dạy tự chọn toán lớp 10, dạy bồi dưỡng học sinh khá giỏi và nhận được phản hồi tốt. SKKN được các thầy cô sử dụng làm tài liệu giảng dạy hữu ích.

C. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Những phương pháp giải và biện luận phương trình, bất phương trình bậc hai chứa tham số và thỏa mãn điều kiện phụ mà SKKN này đề cập phù hợp với các em học sinh lớp 10, những cách giải được trình bày không sử dụng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai, phù hợp với yêu cầu giảm tải và chương trình môn toán lớp 10 hiện hành. Nội dung SKKN là tài liệu tham khảo tốt cho học sinh ôn thi THPT Quốc Gia, là tài liệu tham khảo phục vụ cho công tác giảng dạy đối với giáo viên.

2. Kiến nghị

Xuất phát từ tâm nguyện của một giáo viên đang từng ngày giảng dạy cho học sinh, tôi mong muốn nếu đề tài của tôi được đánh giá tốt thì cần được phổ biến một cách rộng rãi để tài liệu đến tay những giáo viên và học sinh yêu thích môn toán.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG
ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 10 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác.

ĐỖ ĐƯỜNG HIẾU

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên): Đại số 10 nâng cao, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012 (Tái bản lần thứ sáu)
2. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên): Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2008 (Tái bản lần thứ hai)
3. Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên): Bài tập Đại số 10 nâng cao, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2006
4. Hàn Liên Hải (Chủ biên): Toán bồi dưỡng học sinh PTTH đại số 10, Nhà xuất bản Hà Nội, 2000 (In lần thứ 9)
5. Phan Đức Chính (Chủ biên): Các bài giảng luyện thi môn toán, tập một, Nhà xuất bản giáo dục, 2001 (Tái bản lần thứ tám)
6. Nguyễn Thái Hòa: Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán, Nhà xuất bản giáo dục, 1998 (Tái bản lần thứ 2)
7. Bộ giáo dục và đào tạo: Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ, quyển 1, Nhà xuất bản giáo dục, 2005.