DẠNG 5 GTNN-GTLN của hàm số liên quan đến tích phân

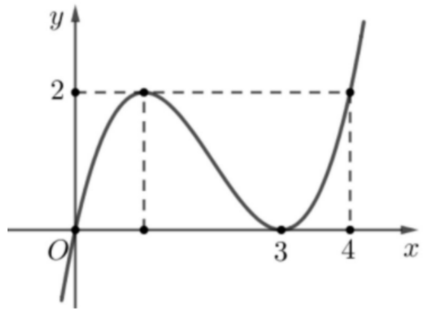
Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{7}{6}$	↘	$-\infty$

Biết $f(-2)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2;0]$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** 2.

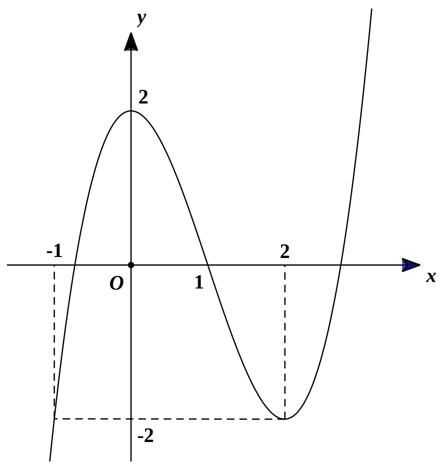
Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ bằng

A. $f(4)-1$. **B.** $f(2)-\frac{1}{4}$. **C.** $f\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{49}{64}$. **D.** $f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$.

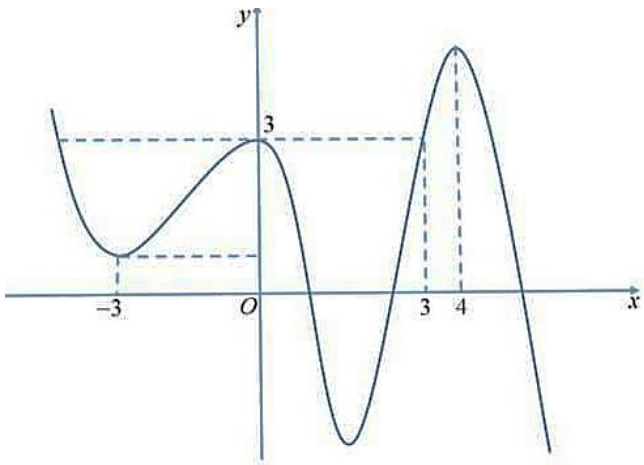
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2+4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ bằng

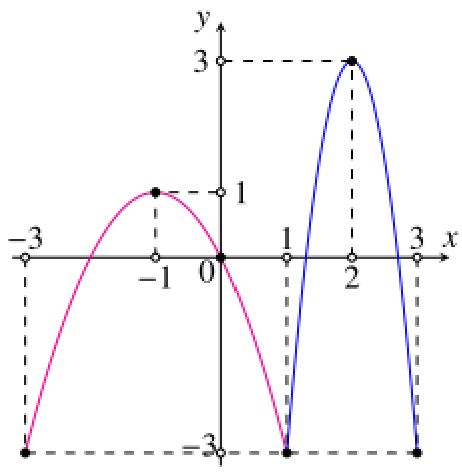
A. $-\frac{63}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{15}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)-9x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{4}{3}\right]$ bằng



A. $f(3)-9$. **B.** $f(-3)+9$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4)-12$.

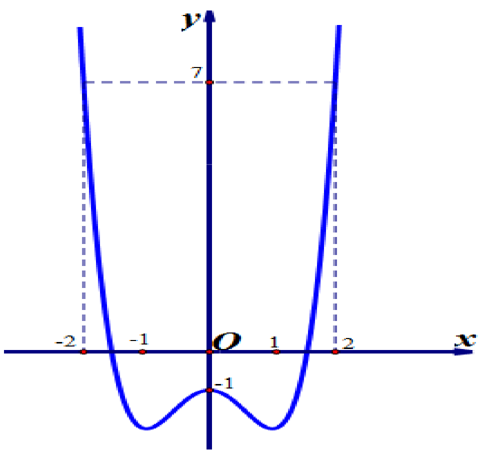
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2-6x-2$ trên đoạn $[-1;1]$ là

B. $f(-2)-12$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)-12$. **D.** $f(4)-30$.

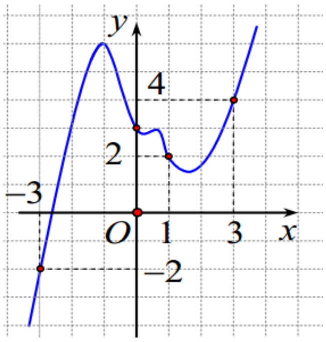
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3+x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

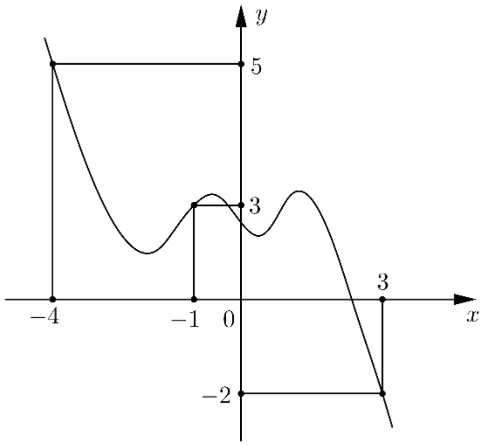
A. $g(2)$ **B.** $g(-2)$. **C.** $g(0)+g(2)$. **D.** $g(2)-g(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. **B.** $f(-3)-4$. **C.** $2f(1)-4$. **D.** $f(3)-16$.

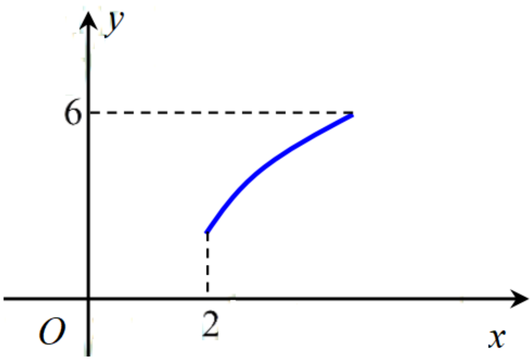
Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=2f(x)+(x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là.Kết luận nào sau đây đúng?

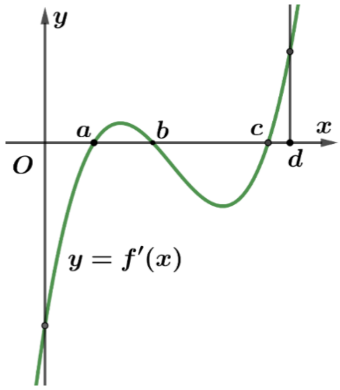
A. $m=g(-1)$. **B.** $m=g(-4)$. **C.** $m=g(3)$. **D.** $m=g(-3)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a,b,d nguyên và $ad>0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng



A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 28: Cho các số thực $a,\ b,\ c,\ d$ thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $a,\ b,\ c$ như hình vẽ. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $M + m = f(b) + f(a)$. **B.** $M + m = f(0) + f(a)$.

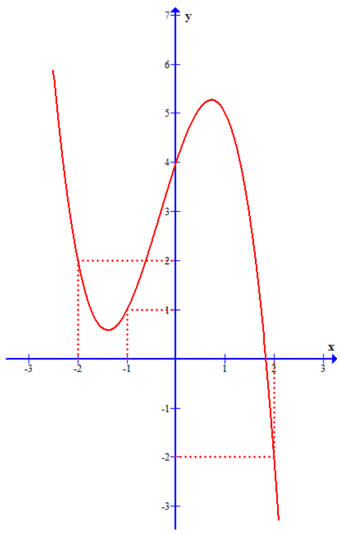
C. $M + m = f(0) + f(c)$. **D.** $M + m = f(d) + f(c)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là

A. $f(0)$ và $f(4) - 8$. **B.** $f(0)$ và $f(-1) - 2$.

C. $f(4) - 8$ và $f(1) - 2$. **D.** $f(16) - 32$ và $f(-1) - 2$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ bằng



A. $f(2) + 12$. **B.** $f(-2)$. **C.** $f(-6) + 12$. **D.** $f(1) + \frac{3}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

Biết $f(-2)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2;0]$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

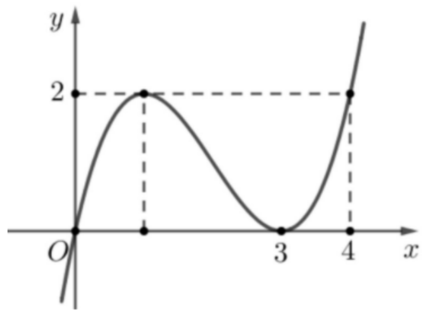
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào BBT ta có hệ sau:

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y'(-1)=0 \\ y(-2)=1 \\ y(-1)=\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=1 \\ -a+b-c+d=\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=-2 \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$. Ta có $f'(0)=\frac{1}{3}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x)>0, \forall x\in[-2;0]$. Ta có $\int_{-2}^{0} f'(x)dx = f(0)-f(-2)$.

Suy ra $\underset{[-2;0]}{Max}\, f(x)=f(0)=\int_{-2}^{0} f'(x)dx+f(-2)=\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}\right)dx-1=2-1=1$.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ bằng

A. $f(4)-1$. **B.** $f(2)-\frac{1}{4}$. **C.** $f\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{49}{64}$. **D.** $f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2$. Vì $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ nên $t\in[0;3]$. Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)=f(t)-\frac{1}{16}t^2$ với $t\in[0;3]$.

Vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm số bậc ba.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ có nghiệm $x=0$ và nghiệm kép $x=3$. Suy ra $f'(x)=ax(x-3)^2$.

Mặt khác, ta có $f'(4)=2\Rightarrow 2=4a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2=\frac{1}{2}\left(x^3-6x^2+9x\right)$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right)+C=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2+C$.

Suy ra $f(t)=\frac{1}{8}t^4-t^3+\frac{9}{4}t^2+C$.

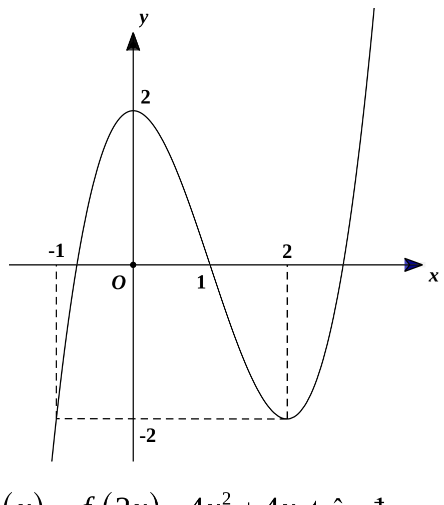
Suy ra $h(t)=\frac{1}{8}t^4-t^3+\frac{35}{16}t^2+C$.

Suy ra $h'(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+\frac{35}{8}t$.

Ta có $h'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{5}{2}\end{array}\right.$ (vì $t\in[0;3]$).

Khi đó dễ thấy giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[0;3]$ là $h\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$ đạt được khi $t=\frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2+4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ bằng

A. $-\frac{63}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{15}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

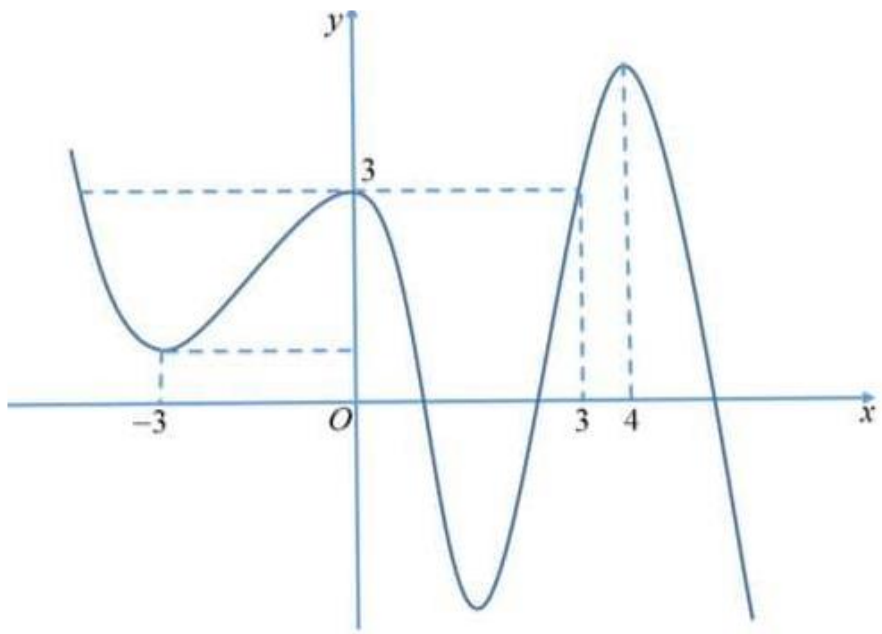
Đặt $t = 2x,\ t \in [-1;3]$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t) = f(t) - t^2 + 2t$ trên đoạn $[-1;3]$.

Dựa vào bốn điểm $(-1;-2)$; $(0;2)$; $(1;0)$; $(2;-2)$ mà đồ thị $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua lập hệ phương trình $\begin{cases} -a+b-c+d=-2 \\ d=2 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$ nên

$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + 2x,\ \ f(0) = 0$.

Khi đó $h(t) = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + 2t - t^2 + 2t \Rightarrow \min\limits_{[-1;3]} h(t) = h(3) = -\dfrac{15}{4}$.

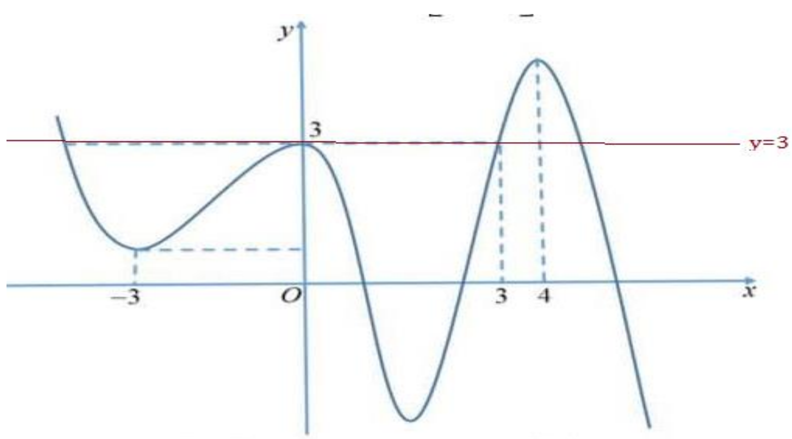
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 9x$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{4}{3}\right]$ bằng



A. $f(3) - 9$. **B.** $f(-3) + 9$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4) - 12$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $t=3x$ vì $x\in\left[-1;\dfrac{4}{3}\right]\Rightarrow t\in[-3;4]$.

$\Rightarrow h(t)=f(t)-3t$ với $t\in[-3;4]$

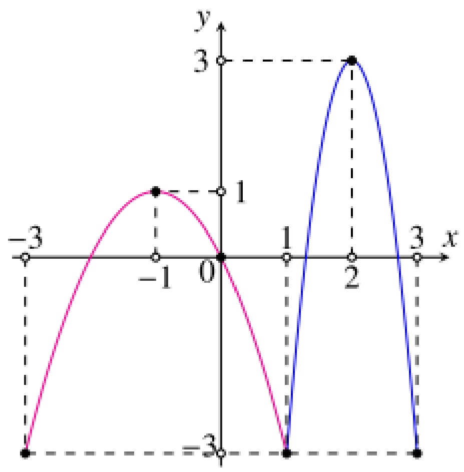
Ta có: $h'(t)=f'(t)-3\Rightarrow h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-3\,(L)\\ t=0\\ t=3\\ t=b>4\,(L)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	-3		0		3		4
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{\left[-1;\frac{4}{3}\right]}h(x)=\min\limits_{[-3;4]}h(t)=h(3)=f(3)-9$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2-6x-2$ trên đoạn $[-1;1]$ là

B. $f(-2)-12$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)-12$. **D.** $f(4)-30$.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=2f'(2x)-8x-6$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x)=4x+3\,(*)$.

Đặt $t=2x$. Với $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-2;2]$;

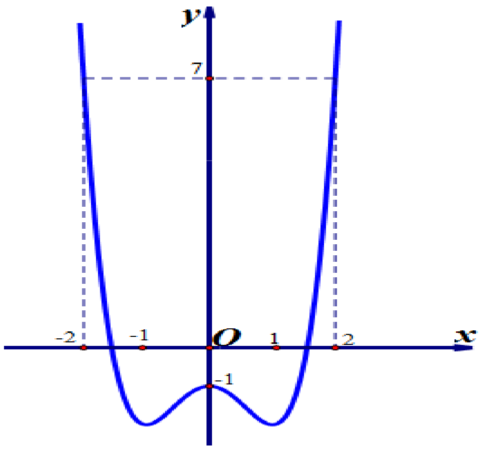
$(*)\Leftrightarrow f'(t)=2t+3\,(**)$

Số nghiệm phương trình $(**)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=2t+3$ dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

t	-2		-1		2
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(2)$

$$\max_{[-2;2]} g(t) = g(-1) \Leftrightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = f(-1)$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

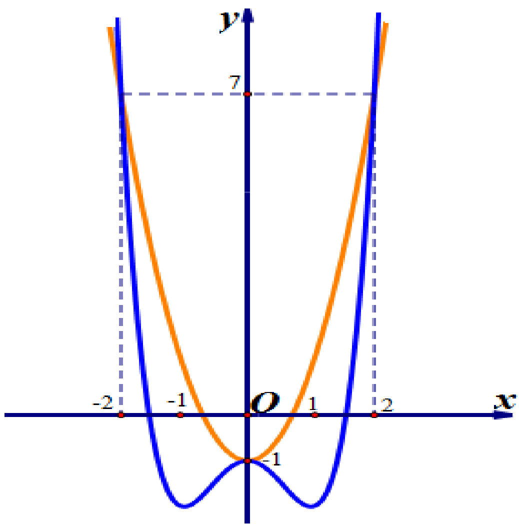
A. $g(2)$ **B.** $g(-2)$. **C.** $g(0) + g(2)$. **D.** $g(2) - g(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x^2 + 1 = f'(x) - (2x^2 - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x^2 - 1$. Ta có đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - 1$ là một parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua hai điểm $A(-2;7)$ và $B(2;7)$. Khi đó đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 2x^2 - 1$ có dạng



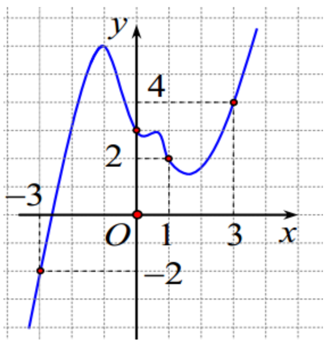
Từ đồ thị ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-2		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-2)$	$\searrow$			
			$g(0)$	$\searrow$	
					$g(2)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3+x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng $g(2)$.

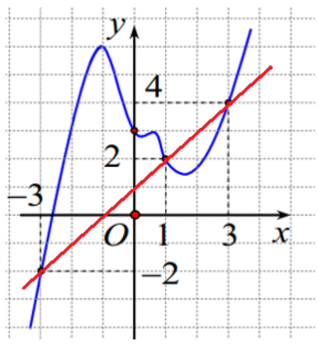
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. **B.** $f(-3)-4$. **C.** $2f(1)-4$. **D.** $f(3)-16$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x-2$.

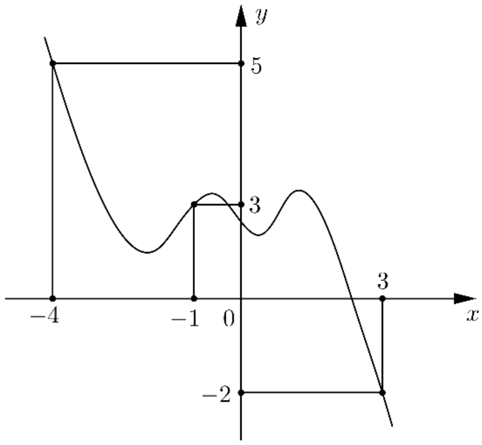
$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-3		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 2f(1) - 4$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là.Kết luận nào sau đây đúng?

A. $m = g(-1)$. **B.** $m = g(-4)$. **C.** $m = g(3)$. **D.** $m = g(-3)$.

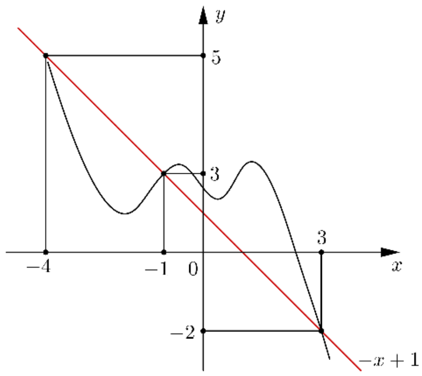
Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1)$

Xét $g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -4; x = -1; x = 3$

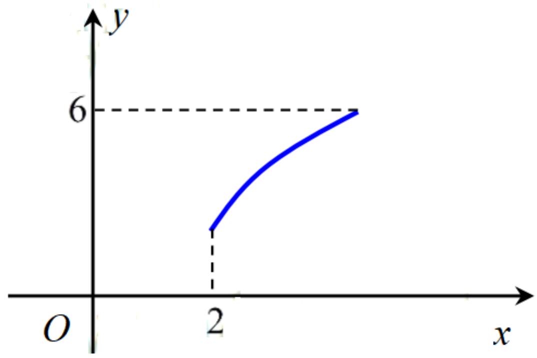


$\Rightarrow$Ta có BBT:

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=2f(x)+(x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là: $g(-1)$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a,b,d nguyên và $ad>0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng



A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{-ad-b}{(x-d)^2}$.

Từ hình vẽ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng của tập xác định $\Rightarrow ad+b<0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{1-\dfrac{d}{x}}=a$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$ $\Rightarrow a>0$

.

Mà $ad>0$ $\Rightarrow d>0$ (1).

Từ hình vẽ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=d<2(2)$.

Từ (1), (2) và do $d\in\mathbb{Z}\Rightarrow d=1$ $\Rightarrow a+b<0$.

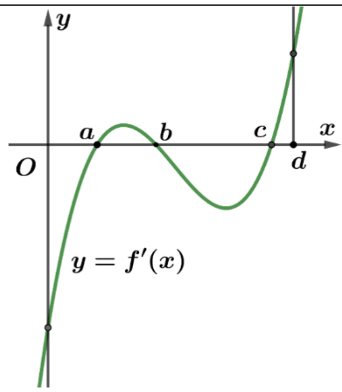
Do $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+b\le -1$.

Khi đó $T=a+b+d\le -1+1\Rightarrow T\le 0$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a+b=-1$ và $d=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng 0.

Câu 28: Cho các số thực $a,\ b,\ c,\ d$ thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $a,\ b,\ c$ như hình vẽ. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

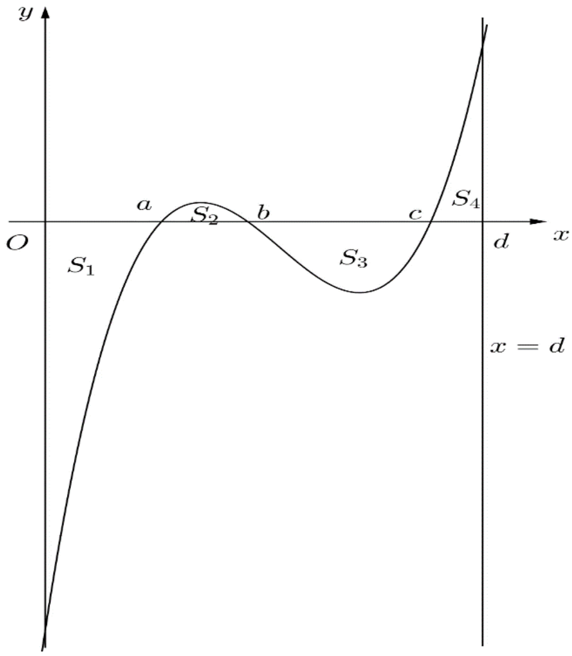


A. $M+m=f(b)+f(a)$. **B.** $M+m=f(0)+f(a)$.

C. $M+m=f(0)+f(c)$. **D.** $M+m=f(d)+f(c)$.

Lời giải

Chọn C



◆ Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$

x	0		a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$

◆ Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\{f(0),\ f(b),\ f(d)\}$, $m=\min\{f(a),\ f(c)\}$

◆ Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=a$.

- Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b.$
- Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=b,\ x=c.$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=c,\ x=d$.

- Dựa vào hình vẽ ta có;

$$S_1>S_2\Leftrightarrow\int_a^0 f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(a\right)>f\left(b\right)-f\left(a\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)>f\left(b\right).$$

$$S_3>S_4\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_c^d f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f\left(b\right)-f\left(c\right)>f\left(d\right)-f\left(c\right)\Leftrightarrow f\left(b\right)>f\left(d\right).$$

- Suy ra $M=f\left(0\right)$.

$$S_3>S_2\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f\left(b\right)-f\left(c\right)>f\left(b\right)-f\left(a\right)\Leftrightarrow f\left(c\right)<f\left(a\right).$$

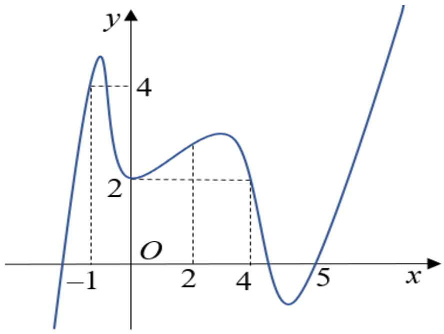
Suy ra $m=f\left(c\right)$.

- Vậy $M+m=f\left(0\right)+f\left(c\right)$.

Câu 32: Cho hàm số $f\left(x\right)$, đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-2x^2$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ lần lượt là

A. $f\left(0\right)$ và $f\left(4\right)-8$. **B.** $f\left(0\right)$ và $f\left(-1\right)-2$.

C. $f\left(4\right)-8$ và $f\left(1\right)-2$. **D.** $f\left(16\right)-32$ và $f\left(-1\right)-2$.



Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-2x^2$ với $x\in\left[-1;2\right]\Rightarrow x^2\in[0;4]$

Ta có: $g'(x)=2x.f'\left(x^2\right)-4x=2x\left[f'\left(x^2\right)-2\right]$.

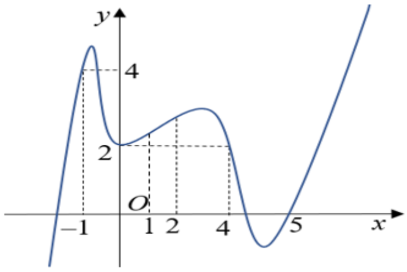
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2\right)=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=0\\ x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\notin[-1;2]\\ x=2\end{array}\right..$$

Với $x^2\in[0;4]$ thì $f'\left(x^2\right)\geq 2\Rightarrow f'\left(x^2\right)-2\geq 0$.

Bảng biến thiên của $g\left(x\right)$

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$f(1)-2$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(4)-8$

So sánh: $f(1)-2$ với $f(4)-8$



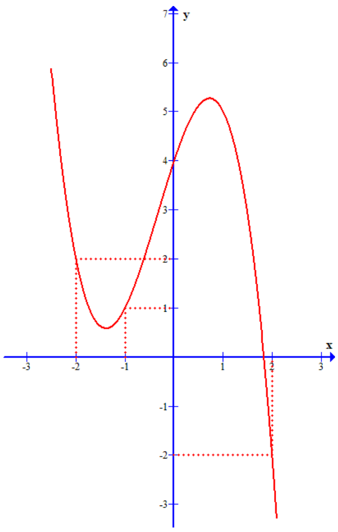
Hình phẳng (H) giới hạn bởi: $y=f'(x)$, $y=2$, $x=1$, $x=4$ có diện tích là S.

$S=\int_1^4|f'(x)-2|.dx=\int_1^4[f'(x)-2].dx=(f(x)-2x)\Big|_1^4=f(4)-8-(f(1)-2)$.

$S>0\Rightarrow f(4)-8-(f(1)-2)>0\Leftrightarrow f(4)-8>f(1)-2$.

Vậy: $\min\limits_{[-1;2]} g(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[-1;2]} g(x)=f(4)-8$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(2x)+2x^2+2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng



A. $f(2)+12$.
B. $f(-2)$.
C. $f(-6)+12$.
D. $f(1)+\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

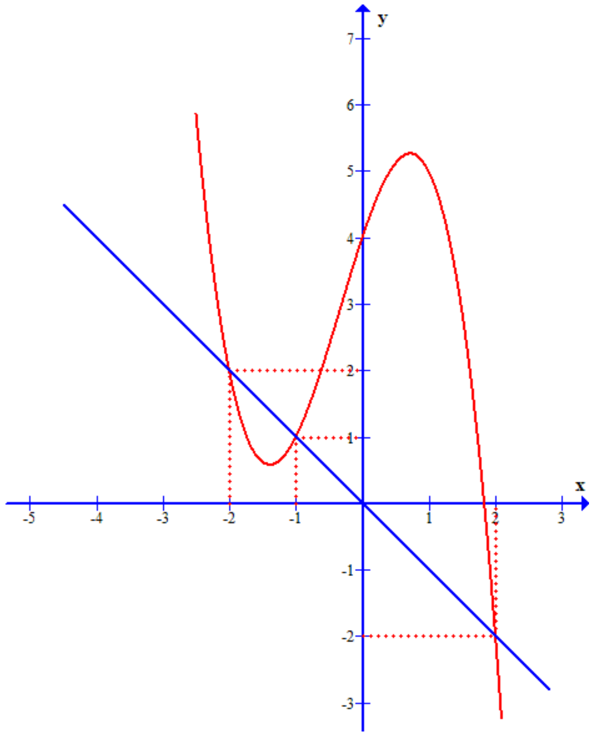
Đặt $t-1=2x$, $x\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow t\in[-5;2]$

Khi đó, hàm số $g(x)=f(2x)+2x^2+2x$ thành

$h(t)=f(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}+(t-1)$

$h'(t) = f'(t-1) + t \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t-1) = -t$

Xét tương giao giữa đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$



Do vậy $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$:

t	-5		-2		-1		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(t)$	$h(-5)$	$\nearrow$	$h(-2)$	$\searrow$	$h(-1)$	$\nearrow$	$h(2)$

Do vậy, $\min\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]} g(x) = \min\limits_{[-5;2]} h(t) = \min\left\{h(-5); h(-1)\right\}$.

Trong đó $h(-5) = f(-6) + 12, h(-1) = f(-2)$.

Từ đồ thị ta cũng thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$ và các đường thẳng $t = -5, t = -2$ lớn hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$ và các đường thẳng $t = -2, t = -1$.

Do đó:

$$\int_{-2}^{-1}\left[-t-f'(t-1)\right]\mathrm{d}t<\int_{-5}^{-2}\left[f'(t-1)+t\right]\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow\left[-\frac{t^2}{2}-f(t-1)\right]\Bigg|_{-2}^{-1}<\left[\frac{t^2}{2}+f(t-1)\right]\Bigg|_{-5}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}-f(-2)+2+f(-3)<2+f(-3)-\frac{25}{2}-f(-6)$$

$$\Leftrightarrow f(-2)>f(-6)+12$$

Vậy, $\min\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]} g(x)=f(-6)+12.$