**Bài 1:** Tìm các số nguyên tố  sao cho :

**Hướng dẫn giải**

Vì  là các số nguyên tố nên .suy ra .

Vì  nên  là số lẻ.Suy ra:  là số chẵn.

 là số chẵn nên .

Nếu là số lẻ thì  chia hết cho 3.suy ra  chia hết cho 3 ( mâu thuẫn nguyên tố).Vậy .

Với  ta có .

cho:

**Bài 2:** Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên  sao cho

**Hướng dẫn giải**

Ta có nhận xét

Bình phương một số nguyên và đem chia cho 4 thì số dư là 0 hoặc là 1

Ta có  chia cho 4 dư 0 hoặc 1; chia 4 dư 0 hoặc 1

Suy ra: chia cho 4 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 2 (1)

Ta có: chia cho 4 dư 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại các số nguyên  thỏa phương trình trên

**Bài 3:** Chứng minh rằng phương trình  không có nghiệm nguyên dương

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  là nghiệm nguyên dương và x0 nhỏ nhất của phương trình  chia hết cho 2011.

TH1. Nếu x0 chia hết cho  thì  chia hết cho .

Tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và .

.

chia hết cho 2011 => tồn tại số nguyên dương z1 sao cho .

.

Suy ra  là ngiệm phương trình (vô lý do  nhỏ nhất.

TH2. Nếu  không chia hết cho  thì  không chia hết cho 

Theo định lý Ele ta có  chia cho dư .

Mà  suy ra  chia cho dư .

chia cho dư . (vô lý).

Vậy phương trình  không có nghiệm nguyên dương.

**Bài 4:** Giả sử  là các số tự nhiên sao cho 

Chứng minh rằng  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Với ,ta có  chia cho 8 dư 0 hoặc dư 1;  chia 8 dư 1.

Từ giả thuyết đề bài suy ra trong 5 số có 4 số chia hết cho 8; số còn lại chia 8 dư 1.

Suy ra trong 5 số  có 4 số chia hết cho 2.

Do đó  chia hết cho .

Tương tự ta cũng chứng minh được  chia hết cho .

Vì , là nguyên tố cùng nhau nên ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5:** Tìm các số nguyên dương  sao cho  là một số nguyên tố

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có 

Mặt khác .

Lại có . Đặt 

Suy ra  và . Do  là số nguyên tố nên  hoặc .

Tuy nhiên  nên ta loại trường hợp 

Với  và .

Vậy  với  là một số nguyên tố tùy ý.

**Bài 6:** Cho hàm số . Chứng minh rằng, nếu  và phương trình  có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó là nghiệm nguyên.

**Hướng dẫn giải**

Nghiệm hữu tỷ nên . Do đó  thì .  và  cũng chẵn, lẻ nên .

**Bài 7:** Tìm các cặp số nguyên

**Bài 8:** Cho đa thức, với các hệ số nguyên  và có ba nghiệm nguyên là  Chứng minh rằng:  chia hết cho.

**Hướng dẫn giải**

Đa thức đã cho được viết lại: 

Đặt 

Theo định lí Fermat nhỏ: , mà .

Nếu thì bài toán được chứng minh.

Nếu  không chia hết cho 2017 thì theo trên ta được:





Mà  nên  ⇒ 

Vậy .

**Bài 9:** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

Giả sử x, y, z là các số nguyên dương sao cho: 

Đặt 

Nếu  Đó là điều vô lý.

Nếu  thì 12y ⋮122 ⋮8 ⇒ d ≡ (-1)x (mod 8). 

Với  ta có  và  chẵn



Ta có  và  với 

 đều chẵn.

Giả sử   .

Vì  các số nguyên dương  ) sao cho  Ta có 

*Trường hợp 1*: 

. Đó là điều vô lý.

*Trường hợp 2*Ta có   không chia hết cho 7. Đó là điều vô lý vì 

Vậy phương trình  không có nghiệm nguyên dương.

**Bài 10:** Tìm một hằng số nguyên dương  sao cho phương trình  có đúng ba nghiệm nguyên dương .

**Hướng dẫn giải**

Ta viết lại phương trình 

- Nếu , loại.

- Nếu , do đó  và 

Ta có  nên 

vậy , mà 

nên 

Với  ta có . Do vậy ta thử lấy .

Ta phải có . Khi đó , theo thứ tự. Vậy phương trình có đúng ba nghiệm nguyên dương .

**Bài 11:** Tìm tất cả bộ ba số  nguyên dương thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

Không mất tổng quát, giả sử . Ta thấy

.

Do đó:

Nếu  thì . Suy ra không tồn tại  thỏa mãn.

Nếu  thì . Suy ra  là nghiệm của phương trình với .

Nếu  thì  (\*). Vì  và  nên  hoặc .

Nếu  thì từ (\*) suy ra

.

Điều này là vô lí vì .

Tương tự, Nếu  thì từ (\*) suy ra

.

Điều này là vô lí vì .