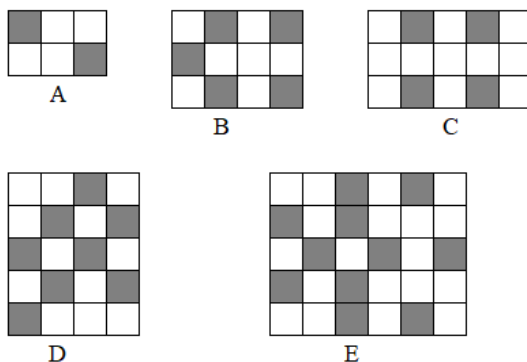


### Bài 20:

Lưới nào sẫm nhất?

a) Đối với mỗi lưới ô vuông ở hình trên, hãy lập một phân số có tử là số ô sẫm, mẫu là tổng số ô sẫm và trắng.

b) Sắp xếp các phân số này theo thứ tự tăng dần và cho biết lưới nào sẫm nhất (có tỉ số ô sẫm so với tổng số ô là lớn nhất).



### Lời giải

a)  $A. \frac{2}{6};$   $B. \frac{5}{12};$   $C. \frac{4}{15};$   $D. \frac{8}{20};$   $E. \frac{11}{30}$

b)

Ta có:  $\frac{2}{6} = \frac{20}{60};$   $\frac{5}{12} = \frac{25}{60};$   $\frac{4}{15} = \frac{16}{60};$

$$\frac{8}{20} = \frac{24}{60}; \quad \frac{11}{30} = \frac{22}{60}$$

Mà  $\frac{16}{60} < \frac{20}{60} < \frac{22}{60} < \frac{24}{60} < \frac{25}{60}$

Nên  $\frac{4}{15} < \frac{2}{6} < \frac{11}{30} < \frac{8}{20} < \frac{5}{12}$ .

Vậy lưới  $B$  sẫm nhất.

### Bài 21:

Nhiệt độ của Matxcơva các tháng trong năm 2020 được thống kê như sau:

### Lời giải

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ(độ)												

C)	- 3,75	- 7,6	- 1,2	0	7,5	8,63	19,2	17,5	11,3	14,5	15	12,5
----	--------	-------	-------	---	-----	------	------	------	------	------	----	------

Hãy sắp xếp nhiệt độ của các tháng theo thứ tự từ lớn đến bé.

**Lời giải:** Nhiệt độ của Matxcova các tháng trong năm 2020 được sắp xếp theo thứ tự từ lớn đến bé là: 19,2; 17,5; 15; 14,5; 12,5; 11,3; 8,63; 7,5; 0; - 1,2; - 3,75; - 7,6.

**Bài 22:**

Hãy viết bốn số hữu tỉ xen giữa  $\frac{-1}{2}$  và  $\frac{-1}{3}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{-1}{2} = \frac{-15}{30}$  và  $\frac{-1}{3} = \frac{-10}{30}$

Bốn số hữu tỉ xen giữa  $\frac{-1}{2}$  và  $\frac{-1}{3}$  là  $\frac{-14}{30}, \frac{-13}{30}, \frac{-12}{30}, \frac{-11}{30}$ .

**Bài 23:**

Viết 3 số hữu tỉ có mẫu khác nhau lớn hơn  $\frac{-1}{3}$  nhưng nhỏ hơn  $\frac{4}{5}$  ?

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{-1}{3} < \frac{4}{5}$  p  $\frac{-5}{15} < \frac{12}{15}$  p  $\frac{-5}{15} < \frac{-3}{15} < \frac{1}{15} < \frac{10}{15} < \frac{12}{15}$

p  $\frac{-5}{15} < \frac{-1}{5} < \frac{1}{15} < \frac{2}{3} < \frac{12}{15}$

p  $\frac{-1}{3} < \frac{-1}{5} < \frac{1}{15} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$

Vậy 3 phân số cần tìm:  $\frac{-1}{5}; \frac{1}{15}; \frac{2}{3}$

**Bài 24:**

Tìm phân số có:

a) Mẫu số bằng 5, lớn hơn  $\frac{-5}{7}$  và nhỏ hơn  $\frac{-2}{7}$ .

b) Tử số bằng 8, lớn hơn  $\frac{5}{9}$  và nhỏ hơn  $\frac{5}{7}$ .

### Lời giải

a) Gọi  $\frac{x}{5}$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) là phân số cần tìm. Theo đề bài ta có:

$$\frac{-5}{7} < \frac{x}{5} < \frac{-2}{7} \Rightarrow \frac{-25}{35} < \frac{7x}{35} < \frac{-10}{35} \Rightarrow -25 < 7x < -10$$

Mặt khác  $7x : 7$  nên  $7x \in \{-21; -14\}$ .

Với  $7x = -21 \Rightarrow x = -3$ ,

Với  $7x = -14 \Rightarrow x = -2$ .

Vậy các phân số cần tìm là  $\frac{-3}{5}; \frac{-2}{5}$ .

b) Gọi  $\frac{8}{x}$  ( $x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$ ) là phân số cần tìm. Theo đề bài ta có:

$$\frac{5}{9} < \frac{8}{x} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{40}{72} < \frac{40}{5x} < \frac{40}{56} \Rightarrow 56 < 5x < 72$$

Mặt khác  $5x : 5$  nên  $5x \in \{60; 65; 70\}$ .

Với  $5x = 60 \Rightarrow x = 12$

Với  $5x = 65 \Rightarrow x = 13$

Với  $5x = 70 \Rightarrow x = 14$ .

Vậy các phân số cần tìm là  $\frac{8}{12}; \frac{8}{13}; \frac{8}{14}$ .

### Bài 25:

Tìm phân số  $\frac{x}{9}$  ( $x \in \mathbb{Q}$ ) sao cho:  $\frac{x}{9} < \frac{4}{7} < \frac{x+1}{9}$

### Lời giải

Ta có:  $\frac{x}{9} < \frac{4}{7} < \frac{x+1}{9} \Rightarrow \frac{7x}{63} < \frac{36}{63} < \frac{7(x+1)}{63}$

$$\Rightarrow 7x < 36 < 7(x+1) \Rightarrow x < \frac{36}{7} < x+1$$

Mà  $5 < \frac{36}{7} < 6$ . Suy ra  $x = 5$ .

Vậy phân số cần tìm là:  $\frac{5}{9}$

### Bài 26:

Cho  $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}^*$ .

a) Nếu  $a < b$ , hãy so sánh hai số  $\frac{a}{b}$  và  $\frac{a+n}{b+n}$

b) Nếu  $a > b$ , hãy so sánh hai số  $\frac{a}{b}$  và  $\frac{a+n}{b+n}$

### Lời giải

a) Ta có:  $a < b \Rightarrow an < bn (n \in \mathbb{Z}^*)$

$$\Rightarrow an + ab < bn + ab \Rightarrow a(n+b) < b(n+a)$$

Vì  $b \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow b > 0; n+b > 0$  nên

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$$

b) Ta có:  $a > b \Rightarrow an > bn (n \in \mathbb{Z}^*)$

$$\Rightarrow an + ab > bn + ab \Rightarrow a(n+b) > b(n+a)$$

Vì  $b \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow b > 0; n+b > 0$  nên

$$\Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}$$

### Bài 27:

Cho  $x, y \in \mathbb{Z}, y > 0$ , hãy so sánh hai số hữu tỉ:  $\frac{x}{y}$  và  $\frac{x+2018}{y+2018}$

### Lời giải

\* Nếu  $\frac{x}{y} > 1 \Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{x+2018}{y+2018}$  (theo kết quả bài 19)

\* Nếu  $\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+2018}{y+2018}$  (theo kết quả bài 19)

### Bài 28:

a) Chứng tỏ rằng nếu  $x, y$  dương và  $\frac{m}{x} > \frac{n}{y}$  thì  $\frac{m}{x} > \frac{m+n}{x+y} > \frac{n}{y}$

b) Áp dụng kết quả câu a. Viết ba số hữu tỉ khác tử số và mẫu số sao cho chúng lớn hơn  $\frac{-1}{5}$  và nhỏ hơn  $\frac{-1}{6}$ .

### Lời giải

a) Ta có  $\frac{m}{x} > \frac{n}{y}$  và  $x > 0, y > 0$   
 $\Rightarrow my > nx \Rightarrow my + mx > nx + mx$

$$\Rightarrow \frac{my + mx}{x(x+y)} > \frac{nx + mx}{x(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{m(x+y)}{x(x+y)} > \frac{x(m+n)}{x(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{x} > \frac{m+n}{x+y}$$

Ta có  $\frac{m}{x} > \frac{n}{y}$  và  $x > 0, y > 0$

$$\Rightarrow nx < my \Rightarrow nx + ny < my + ny$$

$$\Rightarrow \frac{nx + ny}{y(x+y)} < \frac{my + ny}{y(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{n(x+y)}{y(x+y)} < \frac{y(m+n)}{y(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{y} < \frac{m+n}{x+y}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

b) Ta có:  $\frac{-1}{5} < \frac{-1}{6} \Rightarrow \frac{-1}{5} < \frac{-2}{11} < \frac{-1}{6}$

$$\frac{-1}{5} < \frac{-2}{11} \Rightarrow \frac{-1}{5} < \frac{-3}{16} < \frac{-2}{11}$$

$$\frac{-1}{5} < \frac{-3}{16} \Rightarrow \frac{-1}{5} < \frac{-4}{21} < \frac{-3}{16}$$

$$\frac{-1}{5} < \frac{-4}{21} < \frac{-3}{16} < \frac{-2}{11} < \frac{-1}{6}$$

Vậy

### Bài 29:

Cho hai số hữu tỉ  $\frac{x}{z}$  và  $\frac{y}{z}$  với  $x, y, z \in \mathbb{Z}, z > 0$  và  $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$ . Chứng tỏ rằng nếu  $\frac{x}{z} > \frac{x+y}{2z} > \frac{y}{z}$  thì

### Lời giải

Theo kết quả bài 21, ta có:  $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$  (Với  $x, y, z \in \mathbb{Z}, z > 0$ )

Suy ra:  $\frac{x}{z} > \frac{x+y}{z+z} = \frac{x+y}{2z} > \frac{y}{z}$ .

### Bài 30:

Cho hai số hữu tỉ  $\frac{m}{n}$  và  $\frac{p}{q}$  với  $n, q > 0$ . Chứng tỏ rằng: Nếu  $mq < np$  thì  $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ .

### Lời giải

Ta có:  $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}, \frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$ . Mặt khác  $mq < np$  và  $nq > 0$  (do  $n > 0, q > 0$ ) nên  $\frac{mq}{nq} < \frac{np}{nq} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ .

### Bài 31:

Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  để:

a)  $\frac{x+3}{x-7}$  là số hữu tỉ dương.      b)  $\frac{x-5}{x-10}$  là số hữu tỉ âm.

### Lời giải

a)  $\frac{x+3}{x-7}$  là số hữu tỉ dương khi:

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-7 > 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 7 \end{cases} \Rightarrow x > 7 \quad (1)$$

\*

$$* \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < 7 \end{cases} \Rightarrow x < -3 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $x < -3$  hoặc  $x > 7$

Vậy khi  $x < -3$  hoặc  $x > 7$  thì  $\frac{x+3}{x-7}$  là số hữu tỉ dương.

a)  $\frac{x-5}{x-10}$  là số hữu tỉ âm khi:

$$\begin{cases} x-5 > 0 \\ x-10 < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x-5 < 0 \\ x-10 > 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x-5 > 0 \\ x-10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow 5 < x < 10 \quad (1)$$

$$* \begin{cases} x-5 < 0 \\ x-10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > 10 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $5 < x < 10$

Vậy khi  $5 < x < 10$  thì  $\frac{x-5}{x-10}$  là số hữu tỉ âm.

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG TOÁN

### Bài 1:

So sánh các số hữu tỉ sau.

a)  $\frac{-1}{4}$  và  $\frac{1}{100}$

b)  $\frac{1}{-2}$  và  $\frac{-1}{3}$

c)  $\frac{-2}{3}$  và  $\frac{-3}{-5}$

d)  $-2,5$  và  $\frac{5}{-2}$

### Lời giải

a)  $\frac{-1}{4}$  và  $\frac{1}{100}$

Vì  $\frac{-1}{4} < 0$ ;  $\frac{1}{100} > 0$  nên  $\frac{-1}{4} < \frac{1}{100}$

b)  $\frac{1}{-2}$  và  $\frac{-1}{3}$

Vì  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{-2} < \frac{-1}{3}$

c)  $\frac{-2}{3}$  và  $\frac{-3}{-5}$

Ta có:  $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} > \frac{-2}{3}$

Vậy  $\frac{-2}{3} < \frac{-3}{-5}$

d)  $-2,5$  và  $\frac{5}{-2}$

Ta có:  $-2,5 = \frac{-5}{2} = \frac{5}{-2}$

Vậy  $-2,5 = \frac{5}{-2}$

## Bài 2:

So sánh các số hữu tỉ sau:

a)  $\frac{2}{9}$  và  $\frac{7}{9}$

b)  $\frac{-4}{7}$  và  $\frac{-4}{3}$ ;

c)  $\frac{3}{5}$  và  $\frac{12}{20}$ .

## Lời giải

a) Ta có  $2 < 7$  nên  $\frac{2}{9} < \frac{7}{9}$ .

b) Ta có  $\frac{4}{7} < \frac{4}{3}$  nên  $\frac{-4}{7} > \frac{-4}{3}$ .

c) Ta có  $\frac{12}{20} = \frac{3.4}{5.4} = \frac{3}{5}$

Vậy  $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$



### Bài 3:

Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần.

$$\frac{-6}{13}; \frac{-2}{13}; \frac{-12}{13}; \frac{-8}{13}; \frac{-17}{13}; \frac{-25}{13}; \frac{-3}{13}$$

### Lời giải

$$\frac{-25}{13} < \frac{-17}{13} < \frac{-12}{13} < \frac{-8}{13} < \frac{-6}{13} < \frac{-3}{13} < \frac{-2}{13}$$

Ta có :

Các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần là:

$$\frac{-25}{13}; \frac{-17}{13}; \frac{-12}{13}; \frac{-8}{13}; \frac{-6}{13}; \frac{-3}{13}; \frac{-2}{13}$$

### Bài 4:

So sánh các số hữu tỉ sau:

a)  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = \frac{3}{4}$

b)  $x = \frac{2}{-5}$  và  $y = \frac{-3}{7}$

c)  $x = \frac{-3}{5}$  và 0

### Lời giải

a)  $x = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$  và  $y = \frac{3}{4}$ . Ta có:  $\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$  nên  $x < y$

b)  $x = \frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = \frac{-14}{35}$  và  $y = \frac{-3}{7} = \frac{-15}{35}$ . Ta có  $-14 > -15$  và  $35 > 0$  nên  $\frac{-14}{35} > \frac{-15}{35}$  hay  $x > y$

c)  $x < 0$

### Bài 5:

So sánh các số hữu tỉ sau:

a)  $x = \frac{2017}{2018}$  và  $y = \frac{14}{13}$

b)  $x = \frac{-45}{81}$  và  $y = \frac{777}{-999}$

c)  $x = -2\frac{1}{5}$  và  $y = \frac{-110}{50}$

d)  $x = \frac{17}{20}$  và  $y = 0,75$

### Lời giải

a)  $x = \frac{2017}{2018} < 1 < \frac{14}{13} = y$  nên  $x < y$

$$b) \quad x = \frac{-45}{81} = \frac{-5}{9}; \quad y = \frac{777}{-999} = \frac{-777:111}{999:111} = \frac{-7}{9} \quad \text{nên ta có } x > y$$

$$c) \quad x = -2\frac{1}{5} = \frac{-11}{5} = \frac{-110}{50} = y \quad \text{nên } x = y$$

$$d) \quad y = 0,75 = \frac{3}{4} = \frac{15}{20} < \frac{17}{20} \quad \text{nên } x > y$$

### Bài 6:

So sánh các phân số sau:

$$a) \quad \frac{1234}{1235} \quad \text{và} \quad \frac{4319}{4320}$$

$$b) \quad \frac{22}{-67} \quad \text{và} \quad \frac{51}{-152}$$

$$c) \quad \frac{-18}{91} \quad \text{và} \quad \frac{-23}{114}$$

### Lời giải

$$a) \quad \frac{1234}{1235} \quad \text{và} \quad \frac{4319}{4320}$$

$$\frac{1234}{1235} - 1 = \frac{-1}{1235}; \quad \frac{4319}{4320} - 1 = \frac{-1}{4320}$$

$$1235 < 4320 \Rightarrow \frac{-1}{1235} < \frac{-1}{4320} \Rightarrow \frac{1234}{1235} - 1 < \frac{4319}{4320} - 1$$

Có

$$\text{Vậy } \frac{1234}{1235} < \frac{4319}{4320}$$

$$b) \quad \frac{22}{-67} \quad \text{và} \quad \frac{51}{-152}$$

$$\frac{22}{-67} = \frac{-22}{67} > \frac{-22}{66} = \frac{-1}{3} = \frac{-51}{153} > \frac{-51}{152} = \frac{51}{-152} \quad \text{Vậy } \frac{22}{-67} > \frac{51}{-152}$$

$$c) \quad \frac{-18}{91} \quad \text{và} \quad \frac{-23}{114}$$

$$\frac{-18}{91} > \frac{-18}{90} = \frac{-1}{5} = \frac{-23}{115} > \frac{-23}{114} \quad \text{Vậy } \frac{-18}{91} > \frac{-23}{114}$$

### Bài 7:

Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự từ bé đến lớn:  $\frac{14}{8}, -\frac{24}{23}, \frac{-50}{46}, \frac{-4}{30}, \frac{25}{5}, \frac{7}{-235}, -2\frac{45}{46}$ .

### Lời giải

+ Các số hữu tỉ dương:  $\frac{14}{8}, \frac{-4}{-6}, \frac{25}{30}, \frac{7}{5}$ . Vì  $\frac{-4}{-6} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6} = \frac{25}{30} < 1$  và  $\frac{14}{8} = \frac{7}{4} > \frac{7}{5}$ , nên sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn ta được:

$$\frac{-4}{-6} < \frac{25}{30} < 1 < \frac{7}{5} < \frac{14}{8}$$

Các số hữu tỉ âm:  $-\frac{24}{23}, -\frac{50}{46}, -\frac{234}{-235}, -2\frac{45}{46}$ . Vì  $-2\frac{45}{46} < -\frac{50}{46} = -\frac{25}{23} < -\frac{24}{23} < -1$  và  $\frac{234}{-235} > -1$  nên sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn ta được:

$$-2\frac{45}{46} < -\frac{50}{46} < -\frac{24}{23} < -1 < -\frac{234}{-235}$$

$$-2\frac{45}{46} < -\frac{50}{46} < -\frac{24}{23} < -\frac{234}{-235} < -\frac{4}{-6} < \frac{25}{30} < \frac{7}{5} < \frac{14}{8}$$

Vậy:

### Bài 8:

So sánh các số hữu tỉ sau:

a)  $\frac{47}{83}$  và  $\frac{65}{73}$

b)  $\frac{-33}{37}$  và  $\frac{-34}{35}$

c)  $\frac{29}{59}$  và  $\frac{47}{93}$

### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{47}{83} < \frac{47}{73} < \frac{65}{73}$

Vậy  $\frac{47}{83} < \frac{65}{73}$

b) Ta có:  $\frac{33}{37} < \frac{34}{37} < \frac{34}{35} \Rightarrow \frac{-33}{37} > \frac{-34}{37} > \frac{-34}{35}$

Vậy  $\frac{-33}{37} > \frac{-34}{35}$

c) Ta có:  $\frac{29}{59} < \frac{29+1}{59+1} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{47}{93} > \frac{47}{94} = \frac{1}{2}$

$$\frac{29}{59} < \frac{47}{93}$$

Vậy

### Bài 9:

So sánh các số hữu tỉ sau:

a)  $\frac{456}{23}$  và  $\frac{465}{32}$

b)  $-\frac{173}{457}$  và  $\frac{-16}{47}$

### Lời giải

a) Ta có  $\frac{456}{23} > 1$  nên  $\frac{456}{23} > \frac{456+9}{23+9} = \frac{465}{32}$

b) Ta có  $-\frac{173}{457} < 1$  nên  $-\frac{173}{457} < \frac{-173+13}{457+13} = \frac{-160}{470} = \frac{-16}{47}$

### Bài 10:

Trong dịp hè, bạn An muốn mua một số vở để chuẩn bị cho năm học mới. Cửa hàng có <sup>2</sup> loại vở: <sup>6</sup> quyển vở Hồng Hà có giá <sup>65</sup> nghìn đồng và <sup>9</sup> quyển vở Campus có giá <sup>103</sup> nghìn đồng. Hỏi để tiết kiệm tiền bạn An nên mua loại vở nào?

### Lời giải

Giá tiền mỗi quyển vở Hồng Hà là:  $\frac{65}{6}$  (nghìn đồng).

Giá tiền mỗi quyển vở Campus là:  $\frac{103}{9}$  (nghìn đồng).

Quy đồng mẫu số hai phân số ta có:  $\frac{65}{6} = \frac{195}{18}$ ;  $\frac{103}{9} = \frac{206}{18}$

Vì  $\frac{195}{18} < \frac{206}{18}$  nên  $\frac{65}{6} < \frac{103}{9}$ .

Vậy để tiết kiệm tiền bạn An nên mua vở Hồng Hà.

### Bài 11:

Tìm các phân số:

a) Có mẫu số là <sup>30</sup>, lớn hơn  $\frac{-2}{5}$  và nhỏ hơn  $\frac{-1}{6}$ .

b) Có tử số là <sup>-15</sup>, lớn hơn  $\frac{-5}{6}$  và nhỏ hơn  $\frac{-3}{4}$ .

### Lời giải

$$\text{a) } \frac{-2}{5} = \frac{-12}{30}; \quad \frac{-1}{6} = \frac{-5}{30} \quad \frac{-12}{30} < x < \frac{-5}{30} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-11}{30}; \frac{-10}{30}; \frac{-9}{30}; \frac{-8}{30}; \frac{-7}{30}; \frac{-6}{30} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{-5}{6} = \frac{-15}{18}; \quad \frac{-3}{4} = \frac{-15}{20} \quad \frac{-15}{18} < x < \frac{-15}{20} \Rightarrow x = \frac{-15}{19}$$

### Dạng 4. Tìm điều kiện để một số hữu tỉ là số âm (dương) hay số nguyên

#### \*) Phương pháp giải:

- Số hữu tỉ âm là những số hữu tỉ **nhỏ hơn 0**.
- Số hữu tỉ dương là những số hữu tỉ **lớn hơn 0**.
- Số 0 không là số hữu tỉ âm cũng không là số hữu tỉ dương

- Số hữu tỉ  $\frac{a}{b}$  là số hữu tỉ dương khi  $a, b$  cùng dấu.

- Số hữu tỉ  $\frac{a}{b}$  là số hữu tỉ âm khi  $a, b$  khác dấu.

- Số hữu tỉ  $\frac{a}{b}$  bằng 0 khi  $a = 0$  và  $b \neq 0$ .

**Chú ý:** 0 không là số âm cũng không là số dương.

- Số hữu tỉ  $\frac{a}{b}$  là số nguyên khi  $a:b$  hay  $b$  là ước của  $a$ .

### Bài 1:

Tìm số nguyên  $x$  để các số sau là số hữu tỉ:

$$\text{a) } \frac{x}{7}$$

$$\text{b) } \frac{5}{x}$$

$$\text{c) } \frac{-5}{2x}$$

### Lời giải

a) Để  $\frac{x}{7}$  là số hữu tỉ thì  $x \in \mathbb{Z}$

b) Để  $\frac{5}{x}$  là số hữu tỉ thì  $x \in \mathbb{Z}$  và  $x \neq 0$ . Suy ra  $x$  là số nguyên khác 0.

c) Để  $\frac{-5}{2x}$  là số hữu tỉ thì  $2x \in \mathbb{Z}$  và  $2x \neq 0$ . Suy ra  $x$  là số nguyên khác 0.

### Bài 2:

Tìm số nguyên  $x$  để các số sau là số hữu tỉ:

$$a) \frac{1}{x-1}$$

$$b) \frac{-2}{2x-4}$$

### Lời giải

a) Để  $\frac{1}{x-1}$  là số hữu tỉ thì  $x-1 \in \mathbb{Z}$  và  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \neq 1$ .

Vậy khi  $x$  là số nguyên khác 1 thì  $\frac{1}{x-1}$  là số hữu tỉ

b) Để  $\frac{-2}{2x-4}$  là số hữu tỉ thì  $2x-4 \in \mathbb{Z}$  và  $2x-4 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \neq 2$ .

Vậy khi  $x$  là số nguyên khác 2 thì  $\frac{-2}{2x-4}$  là số hữu tỉ.

### Bài 3:

Tìm số nguyên  $x$  để số hữu tỉ  $A = \frac{-101}{x+7}$  là số nguyên.

### Lời giải

Để  $A \in \mathbb{Z}$  thì  $\frac{-101}{x+7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+7 \in U$  (101)

$$\Rightarrow x+7 \in \{-1; 1; -101; 101\}$$

Ta có bảng sau:

$x+7$	-1	1	-101	101
$x$	-8	-6	-108	94

Vậy khi  $x \in \{-8; -6; -108; 94\}$  thì số hữu tỉ  $A = \frac{-101}{x+7}$  là số nguyên.

### Bài 4:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{20m+11}{-2019}$ . Với giá trị nào của  $m$  thì:

a)  $x$  là số dương

b)  $x$  là số âm.

### Lời giải

a) Số hữu tỉ  $x = \frac{20m+11}{-2019}$  là số dương khi:

$$x = \frac{20m+11}{-2019} > 0 \Rightarrow 20m+11 < 0 \Rightarrow m < \frac{-11}{20}$$

b) Số hữu tỉ  $x = \frac{20m+11}{-2019}$  là số âm khi:

$$x = \frac{20m+11}{-2019} < 0 \Rightarrow 20m+11 > 0 \Rightarrow m > \frac{-11}{20}$$

### Bài 5:

Cho số hữu tỉ:  $x = \frac{a-5}{2}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì:

a)  $x$  là số dương

b)  $x$  là số âm

c)  $x$  không là số dương và cũng không là số âm.

### Lời giải

a)  $x$  là số dương khi:  $\frac{a-5}{2} > 0 \Rightarrow a-5 > 0 \Rightarrow a > 5$

b)  $x$  là số âm khi:  $\frac{a-5}{2} < 0 \Rightarrow a-5 < 0 \Rightarrow a < 5$

c)  $x$  không là số dương và cũng không là số âm khi:  $\frac{a-5}{2} = 0 \Rightarrow a-5 = 0 \Rightarrow a = 5$

### Bài 6:

Cho  $x = \frac{12}{b-5} (b \in \mathbb{Q})$ . Với giá trị nào của  $b$  thì:

a)  $x$  là số hữu tỉ

b)  $x = -1$

### Lời giải

a) Để  $x = \frac{12}{b-5} (b \in \mathbb{Q})$  là số hữu tỉ thì  $b-5 \neq 0 \Rightarrow b \neq 5$

b) Ta có:  $x = -1 \Rightarrow \frac{12}{b-5} = -1 \Rightarrow 12 = -(b-5) \Rightarrow b = -7$

### Bài 7:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{a-2}{5} (a \in \mathbb{Q})$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $x$  là số nguyên?

### Lời giải

Số hữu tỉ  $x = \frac{a-2}{5} (a \in \mathbb{Z})$  là số nguyên khi:  $a - 2 \in 5\mathbb{M} \Rightarrow a - 2 = 5k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = 5k + 2$

**Bài 8:**

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{a-5}{a} (a \neq 0)$ . Với giá trị nguyên nào của  $a$  thì  $x$  là số nguyên?

**Lời giải**

Ta có:  $x = \frac{a-5}{a} = 1 - \frac{5}{a} (a \neq 0)$

Suy ra  $x \in \mathbb{Z}$  khi  $\frac{5}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in U(5)$

Vậy  $a \in \{-5; -1; 1; 5\}$

**Bài 9:**

Tìm tất cả các số nguyên  $x$  để số hữu tỉ  $A = \frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

Ta có:  $A = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} (x \neq 2)$

Do  $x \in \mathbb{Z}$ , để  $A$  là số nguyên thì  $\frac{3}{x-2}$  phải là số nguyên

Hay  $(x-2) \in U(3)$

$\Rightarrow x - 2 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau:

$x - 2$	-3	-1	1	3
$x$	-1	1	3	5

Vậy khi  $x \in \{-1; 1; 3; 5\}$  thì số hữu tỉ  $A = \frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$  có giá trị là số nguyên.

**Bài 10:**

Tìm tất cả các số nguyên  $x$  để số hữu tỉ  $B = \frac{2x-1}{x+5} (x \neq -5)$  có giá trị là số nguyên.



### Lời giải

Ta có:  $B = \frac{2x-1}{x+5} = 2 - \frac{11}{x+5}$  (với  $x \neq -5$ )

$$B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{x+5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+5 \in$$

Suy ra:  $U(11)$

$$\Rightarrow x+5 \in \{-11; -1; 1; 11\}$$

Ta có bảng sau:

$x+5$	-11	-1	1	11
$x$	-16	-6	-4	6

Vậy khi  $x \in \{-16; -6; -4; 6\}$  thì số hữu tỉ  $B = \frac{2x-1}{x+5}$  ( $x \neq -5$ ) có giá trị là số nguyên.

### Bài 11:

Tìm số nguyên  $x$  để số hữu tỉ  $D = \frac{x-3}{2x}$  là số nguyên

### Lời giải

Ta có:  $D \in \mathbb{Z}$  thì  $2D \in \mathbb{Z}$ .

$$2D = \frac{2x-6}{2x} = 1 - \frac{3}{x}$$

Để  $D \in \mathbb{Z}$  thì  $2D \in \mathbb{Z}$  và  $2D$  là số chẵn.

Suy ra  $\frac{3}{x} \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{3}{x}$  là số lẻ (1)

$$\Rightarrow x \in U(3) \Rightarrow x \in \{-1; 1; -3; 3\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $x \in \{-1; 1; -3; 3\}$  thỏa mãn điều kiện đề bài

Vậy khi  $x \in \{-1; 1; -3; 3\}$  thì số hữu tỉ  $D = \frac{x-3}{2x}$  là số nguyên.

### Bài 12:

Cho số  $x$  thỏa mãn  $x^2 = 2$ . Hỏi số  $x$  có là số hữu tỉ không?

### Lời giải

Giả sử  $x = \frac{a}{b}$ ;  $(a,b) = 1; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Ta có:

$$a^2 \in \mathbb{M} \Rightarrow a \in \mathbb{M} \Rightarrow a = 2m (m \in \mathbb{Z})$$

Suy ra:

$$\text{Khi đó: } 4m^2 = 2b^2 \Rightarrow 2m^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \in \mathbb{M} \Rightarrow b \in \mathbb{M}$$

Mà  $a \in \mathbb{M}$  và  $b \in \mathbb{M}$  mâu thuẫn với giả sử  $(a,b) = 1$

Vậy  $x$  không thể là số hữu tỉ.

### Bài 13:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{2a-1}{2}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì:

- a)  $x$  là số hữu tỉ dương?
- b)  $x$  là số hữu tỉ âm?
- c)  $x$  không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm?
- d)  $x$  là số nguyên?

### Lời giải

a) Để  $x$  là số dương thì  $\frac{2a-1}{2} > 0$

Mà  $2 > 0$  nên  $2a-1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$

Vậy  $a > \frac{1}{2}$  thì  $x$  là số hữu tỉ dương.

b) Để  $x$  là số âm thì  $\frac{2a-1}{2} < 0$

Mà  $2 > 0$  nên  $2a-1 < 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$

Vậy  $a < \frac{1}{2}$  thì  $x$  là số hữu tỉ âm.

c) Để  $x$  không là số dương cũng không là số âm thì  $\frac{2a-1}{2} = 0$

Mà  $2 \neq 0$  nên  $2a-1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Vậy  $a = \frac{1}{2}$  thì  $x$  không là số hữu tỉ dương, cũng không là số hữu tỉ âm.

d) Để  $x$  là số nguyên thì  $(2a - 1):2$ . Suy ra:

$$2a - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2k + 1 \Leftrightarrow a = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy  $a = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$  thì  $x$  là số nguyên.

#### Bài 14:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{a}{a^2 + 1}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì

a)  $x$  là số hữu tỉ âm?

b)  $x$  không là số hữu tỉ âm,  $x$  cũng không là số hữu tỉ dương?

#### Lời giải

Ta có  $a^2 \geq 0, \forall a$  nên  $a^2 + 1 \geq 1 > 0$  hay  $a^2 + 1 > 0 \forall a$ . Do đó:

a)  $x$  là số hữu tỉ nếu  $\frac{a}{a^2 + 1} < 0$ , suy ra  $a < 0$

b)  $x$  không là số hữu tỉ âm,  $x$  cũng không là số hữu tỉ dương nếu  $\frac{a}{a^2 + 1} = 0$ , suy ra  $a = 0$ .

#### Bài 15:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{7}{a+1}$ . Xác định số nguyên  $a$  để  $x$  là số nguyên dương.

#### Lời giải

Để  $x \in \mathbb{Z}$  thì  $7:(a+1)$  hay  $(a+1) \in \{7\} = \{-7; -1; 1; 7\}$ . Ta có bảng sau:

$a+1$	-7	-1	1	7
$a$	-8	-2	0	6

Mà  $x$  là số nguyên dương nên  $\frac{7}{a+1} > 0$

Mà  $7 > 0$  nên  $a+1 > 0 \Rightarrow a > -1 \Rightarrow a \in \{0; 6\}$

Với  $a = 0$  ta có  $x = \frac{7}{0+1} = 7$

Với  $a = 6$  ta có  $x = \frac{7}{6+1} = 1$

Vậy  $a \in \{0; 6\}$  thì  $x$  là số nguyên dương.

### Bài 16:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{3a+7}{-5}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì

- $x$  là số hữu tỉ dương?
- $x$  là số hữu tỉ âm?
- $x$  không là số hữu tỉ dương và cũng không là số hữu tỉ âm?

### Lời giải

a) Để  $x$  là số hữu tỉ dương thì  $\frac{3a+7}{-5} > 0$ . Mà  $-5 < 0$  nên  $3a+7 < 0$  suy ra  $a < \frac{-7}{3}$

b) Để  $x$  là số hữu tỉ âm thì  $\frac{3a+7}{-5} < 0$ . Mà  $-5 < 0$  nên  $3a+7 > 0$  suy ra  $a > \frac{-7}{3}$ .

c) Để  $x$  không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm thì  $\frac{3a+7}{-5} = 0$ . Mà  $-5 \neq 0$  nên  $3a+7 = 0$  suy ra  $a = \frac{-7}{3}$ .

### Bài 17:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{3n-1}{4}$ . Với giá trị nào của  $a$  thì

- $x$  là số hữu tỉ dương?
- $x$  là số hữu tỉ âm?
- $x$  không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm?

### Lời giải

a) Để  $x$  là số hữu tỉ dương thì  $\frac{3n-1}{4} > 0 \Rightarrow 3n-1 > 0$  (do  $4 > 0$ )  $\Rightarrow 3n > 1 \Rightarrow n > \frac{1}{3}$ .

b) Để  $x$  là số hữu tỉ âm thì  $\frac{3n-1}{4} < 0 \Rightarrow 3n-1 < 0 \Rightarrow 3n < 1 \Rightarrow n < \frac{1}{3}$ .

c) Để  $x$  không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm thì  $\frac{3n-1}{4} = 0 \Rightarrow 3n-1 = 0 \Rightarrow 3n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{3}$

### Bài 18:

Cho số hữu tỉ  $x = \frac{7}{n-1}$ . Tìm số nguyên  $n$  để  $x$  nhận giá trị là số nguyên.

### Lời giải

Để  $x = \frac{7}{n-1} \in \mathbb{Z}$  thì  $n-1 \in \{7\} = \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta lập bảng:

$n - 1$	- 7	- 1	1	7
$n$	- 6	0	2	8

Vậy  $n \in \{-6; 0; 2; 8\}$  thì  $x$  nhận giá trị nguyên.

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG TOÁN

### Bài 1:

Tìm số nguyên  $a, b$  sao cho:

$$\text{a) } \frac{-3}{8} < \frac{a}{10} < \frac{-3}{5}$$

$$\text{b) } \frac{-8}{19} < \frac{12}{b} < \frac{-2}{5}$$

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{-3}{8} > \frac{a}{10} > \frac{-3}{5} \Rightarrow \frac{-15}{40} > \frac{4a}{40} > \frac{-24}{40}$$

$$\Rightarrow -15 > 4a > -24 \Rightarrow -\frac{15}{4} > a > -6$$

Mà  $a \in \mathbb{Z}$ , suy ra:  $a \in \{-4; -5\}$

$$\text{b) Ta có: } \frac{-8}{19} < \frac{12}{b} < \frac{-2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{12}{-b} < \frac{8}{19} \Rightarrow \frac{24}{60} < \frac{24}{-2b} < \frac{24}{57}$$

$$\Rightarrow 57 < -2b < 60 \Rightarrow -30 < b < -\frac{57}{2}$$

Mà  $b \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $b \in \{-29\}$

### Bài 2:

Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  để:

$$\text{a) } \frac{x-5}{x-10} \text{ là số hữu tỉ dương}$$

$$\text{b) } \frac{x-5}{x+7} \text{ là số hữu tỉ âm.}$$

### Lời giải

$$\text{a) } \frac{x-5}{x-10} \text{ là số hữu tỉ dương khi:}$$

$$\begin{cases} x-5 > 0 \\ x-10 > 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x-5 < 0 \\ x-10 < 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > 10 \end{cases} \Rightarrow x > 10(1)$$

$$* \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x - 10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow x < 5(2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $x < 5$  hoặc  $x > 10$

Vậy khi  $x < 5$  hoặc  $x > 10$  thì  $\frac{x-5}{x-10}$  là số hữu tỉ dương.

b)  $\frac{x-5}{x+7}$  là số hữu tỉ âm khi:

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -7 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset(1)$$

$$* \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -7 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < 5(2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được:  $-7 < x < 5$

Vậy khi  $-7 < x < 5$  thì  $\frac{x-5}{x+7}$  là số hữu tỉ âm.