

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO
NĂM HỌC 2009 – 2010 -Lớp 12 THPT**

Câu I:

Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{\log(x^2 + 1) + 3}}{2^{\log x} + 1}$.

Tính giá trị của tổng $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$.

Cách giải	Kết quả

Câu II:

Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của các phương trình sau

a) $2 \sin x - 7 \cos x + 4 = 0$, với $270^\circ < x < 450^\circ$;

b) $2(\sin y + \cos y) + \sin y \cdot \cos y + 1 = 0$, với $90^\circ < y < 360^\circ$.

Cách giải	Kết quả

Câu III:

Cho dãy số (u_n) xác định bởi :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(3 + u_n) \end{cases}$$

1. Tính 12 số hạng đầu của dãy đã cho.
2. Tính tổng 20 số hạng đầu của dãy số.
3. Viết quy trình bấm phím thực hiện việc tính liên tiếp 20 số hạng đầu và tổng của 20 số hạng đó.

Cách giải	Kết quả

Câu IV:

Tính gần đúng tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(1;2)$, $B(-3;5)$ và đồ thị (C) hàm số $y = \frac{x-1}{3x+7}$.

Cách giải	Kết quả

Câu V:

Chị Hoa vay ngân hàng 20.000.000 đồng để kinh doanh với lãi suất 1,5 % /tháng. Trong 2 năm đầu chị Hoa chỉ trả lãi hàng tháng theo lãi suất của ngân hàng, những năm còn lại chị Hoa trả 500.000 đồng/tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng chị Hoa sẽ trả hết nợ.

Cách giải	Kết quả

Câu VI:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy ABC là tam giác cân tại A có trung tuyến $AD = 5cm$. Cạnh SB tạo với đáy một góc 45^0 và tạo với mặt phẳng (SAD) một góc 15^0 . Tính cạnh SB .

Cách giải	Kết quả

Câu VII:

Biết $P(x)$ đa thức bậc bốn, có hệ số của x^4 bằng 1 và $P(x)$ chia cho các nhị thức $x+1$, $x+2$, $x-1$, $x-2$ lần lượt có dư là -2 , 4 , -11 , 6 .

1. Hãy tìm đa thức $P(x)$
2. Tính $P(500)+P(200)$.

Cách giải	Kết quả

Câu VIII:

1. Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3x + 5 \cos 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$?
2. Tìm tổng của các hệ số của các số hạng chứa x^5, x^{10} trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{30}$.

Cách giải	Kết quả

Câu IX:

Tính gần đúng diện tích phần chung của hai hình tròn có bán kính 6cm và 7cm , biết khoảng cách giữa hai tâm của chúng bằng 8cm .

Cách giải	Kết quả

Câu X:

Tính gần đúng các nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 + xy \\ x^2 + y^2 + x + y = 5 \end{cases}$

Cách giải	Kết quả

ĐÁP ÁN

Câu I:

Quy trình bấm phím: Trên máy (570 ES)

Alpha X + 1 Shift STO X ◀ : Alpha A + 2 √ (log (Alpha X ^ 2 + 1) + 3) ÷ (2 ^ log (X) + 1)
 Shift STO A = ◀ CALC {Máy hỏi X ?} 0 = {Máy hỏi A ?} 0 = {Máy báo Syntax ERROR}
 {Nhấn tiếp} ◀ = = {Ghi kết quả}

Quy trình bấm phím: Trên máy (570 MS)

0 Shift STO X 0 Shift STO A Alpha X Alpha = Alpha X + 1 Alpha : Alpha A
 Alpha = Alpha A + 2 √ (log (Alpha X ^ 2 + 1) + 3) ÷ (2 ^ log (X) + 1)
 = = =

Học sinh nêu sơ lược cách giải, hoặc trình bày quy trình bấm phím đúng: 2 điểm

Kết quả đúng: 3 điểm

$S \approx 123,946919486$

Câu II:

Chọn **Mode** vào chế độ **Deg**.

$$1). 2 \sin x - 7 \cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{2^2 + 7^2}} \cos x - \frac{2}{\sqrt{7^2 + 2^2}} \sin x = \frac{4}{\sqrt{53}}$$

Đặt $\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{53}}$

Ta có $\cos(x + \alpha) = \frac{4}{\sqrt{53}} \Leftrightarrow x + \alpha = \pm \arccos \frac{4}{\sqrt{53}} + k360^\circ$, với $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{53}}$.

Nghiệm phương trình $x = \arccos \frac{7}{\sqrt{53}} \pm \arccos \frac{4}{\sqrt{53}} + k360^\circ$

Nhập vào máy tính:

Shift Cos (7 | √ 53) + Shift Cos (4 | √ 53) = ($\approx 72^\circ 36' 59''$)

Nghiệm này nếu cộng thêm 360° sẽ vượt ra ngoài bài toán yêu cầu.

Nhấn ◀ sửa lại : Shift Cos (7 | √ 53) - Shift Cos (4 | √ 53) = {Kq: ($\approx 40^\circ 43' 33''$) } + $360^\circ = \{ 377^\circ 23' \}$.

Kết quả: $x \approx 319^\circ 16' 27''$

*** Bài này cũng có thể dùng hàm Solve để giải !

2). Đặt $t = \sin y + \cos y = \sqrt{2} \cdot \cos(y - 45^\circ)$, $t^2 - 1 = 2 \sin y \cdot \cos y$

Ta có : $2t + \frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 1 = 0$.

Giải được $t = -2 + \sqrt{3}; t = -2 - \sqrt{3}$ (loại)

$$\text{Suy ra: } \cos(y - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y - 45^\circ = \pm \arccos \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} + k360^\circ$$

$$\Leftrightarrow y = 45^\circ \pm \arccos \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} + k360^\circ.$$

Tính được hai nghiệm thỏa yêu cầu: $y_1 \approx 145^\circ 55' 18''$; $y_2 \approx 304^\circ 4' 42''$.

Câu III:

$$1). u_2 = \frac{5}{2}; u_3 = \frac{11}{4}; u_4 = \frac{23}{6}; u_5 = \frac{47}{16}; u_6 = \frac{95}{32}; u_7 = \frac{191}{64}; u_8 = \frac{383}{126}; u_9 = \frac{767}{256}; u_{10} = \frac{1535}{512};$$

$$u_{11} = 2,9990234; u_{12} \approx 2,999511719; u_{13} \approx 2,999755859$$

$$2). \bullet S_{20} \approx 58,00000191$$

3). • Quy trình bấm phím:

Alpha X + 1 Shift STO X Alpha : Alpha (3 + Alpha A) ÷ 2 Shift STO A
 = Alpha : Alpha A + Alpha B Shift STO B = = < CALC {Máy hỏi X?} 1 =
 {Máy hỏi A?} 2 = {Máy hỏi B?} 2 = {Máy báo Syntax ERROR} < = = ...
 {Bấm cho đến khi X+1→X có giá trị bằng 20}
 Ghi kết quả: $S \approx B + A \rightarrow B$

Câu IV:

$$\text{Đường thẳng } (d): y = ax + b \text{ với } \begin{cases} a + b = 2 \\ -3a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{11}{4} \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình } \frac{x-1}{3x+7} = \frac{-3x+11}{4} \Rightarrow 9x^2 - 8x - 81 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3.4772 \\ x_2 \approx -2.5883 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \approx 0.1421 \\ y_2 \approx 4.6912 \end{cases}$$

Kết luận: Có hai giao điểm $M(3.4772; 0.1421)$, $N(-2.5883; 4.6912)$

Câu V:

Số nợ chị Hoa còn ở ngân hàng cần phải trả:

$$\text{- Sau năm thứ hai (sau 24 tháng): } = 2 \cdot 10^7 (1 + 0,015)^{24} - 2 \cdot 10^7 \cdot (0,015)^{24} = 2 \cdot 10^7$$

- Tính từ năm thứ ba trở đi :

Gọi m là số tiền chị HOA trả thêm hàng tháng, sau n tháng số tiền chị HOA còn nợ ngân hàng là

$$\text{- Sau tháng thứ nhất: } x_1 = 2 \cdot 10^7 \cdot (1 + 0,015) - m = 2 \cdot 10^7 \cdot q - m \text{ (Đặt } q = 1,015)$$

$$\text{- Sau tháng thứ hai: } x_2 = (2 \cdot 10^7 \cdot q - m) \cdot q - m = 2 \cdot 10^7 \cdot q^2 - mq - m$$

$$\text{- Sau tháng thứ ba: } x_3 = (2 \cdot 10^7 \cdot q^2 - mq - m) \cdot q - m = 2 \cdot 10^7 \cdot q^3 - m(q^2 + q + 1)$$

$$\text{- Sau tháng thứ } n: x_n = 2 \cdot 10^7 \cdot q^n - m(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = 2 \cdot 10^7 \cdot q^n - m \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Chi HOA sẽ trả hết nợ nếu } x_n = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot 10^7 \cdot q^n - m \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow [2 \cdot 10^7 (q - 1) - m] \cdot q^n + m = 0 \Leftrightarrow m = (m - 2 \cdot 10^7 (q - 1)) \cdot q^n \\ &\Leftrightarrow q^n = \frac{m}{m - 2 \cdot 10^7 (q - 1)} \Leftrightarrow n = \log_q \left(\frac{m}{m - 2 \cdot 10^7 (q - 1)} \right) \end{aligned}$$

• Nhập máy:

Ta tính được $n = 61,5430573$

Do n nguyên dương suy ra $n \approx 62$ tháng.

Kết quả: 86 tháng

Câu VI:

Hai tam giác vuông SAB, SAC bằng nhau (vì có cạnh SA chung và $AB = AC$), suy ra $SB = SC$.

$$\Rightarrow SD \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAD)$$

$$\Rightarrow (SB, (SAD)) = \angle BSD = 15^\circ$$

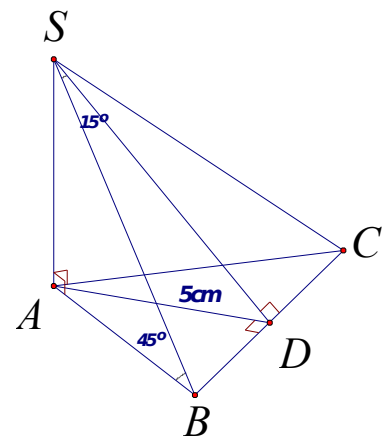
$$(SB, (ABC)) = \angle SBA = 45^\circ$$

$$\text{Ta có } SB^2 = SA^2 + AB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$$

$$\Leftrightarrow SB^2 = (SB \cdot \sin 45^\circ)^2 + 25 + (SB \cdot \sin 15^\circ)^2$$

$$\text{Suy ra } SB^2 = \frac{25}{1 - \sin^2 45^\circ - \sin^2 15^\circ} \approx 57,73503$$

• Kết quả: $SB \approx 7,59836 (cm)$



Câu VII:

1. Từ giả thiết có $P(1) = -11, P(2) = 6, P(-1) = -2, P(-2) = 4$.

Xét đa thức bậc bốn $Q(x)$ thỏa $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$.

Giả sử $P(x) = Q(x) + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, ta có hệ

$$\begin{cases} -11 = a + b + c + d \\ 6 = 8a + 4b + 2c + d \\ -2 = -a + b - c + d \\ 4 = -8a + 4b - 2c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 2d = -13 \\ 8b + 2d = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{23}{6} \\ d = -\frac{31}{3} \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{3}; c = -\frac{37}{6}$$

Kết quả:

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) + \frac{5}{3}x^3 + \frac{23}{6}x^2 - \frac{37}{6}x - \frac{31}{3}$$

2. Tính $P(500) = 62708788574, P(200) = 1613405424$

Và $P(500) - P(200) = 61095383150$

Câu VIII:

1. Đạo hàm $f'(x) = 3 - 10 \sin 2x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{3}{10} \Rightarrow 2x = \arcsin \frac{3}{10} + k2\pi \text{ hoặc } 2x = \pi - \arcsin \frac{3}{10} + k2\pi$$

$$\text{Hay } x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{10} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{10} + k\pi$$

Bấm máy tìm giá trị x thuộc $[0; \pi]$: $x_1 \approx 2,989246$, $x_2 \approx 0,152346$

• Nhập $f(x) = 3x + 5 \cos 2x$.

Tính $f(0) = 5$; $f(\pi) \approx 14,424778$; $f(x_1) \approx 13,73743$; $f(x_2) \approx 5,22673$

• Kết luận: $\max_{[0; \pi]} f(x) = f(\pi) \approx 14,424778$; $\min_{[0; \pi]} f(x) = f(0) = 5$

2. Số hạng tổng quát của khai triển: $C_{30}^k (\sqrt{x})^{30-k} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)^k = 2^k \cdot C_{30}^k \cdot x^{\frac{30-k}{2} - \frac{k}{3}} = 2^k C_{30}^k \cdot x^{\frac{90-5k}{6}}$

$$\text{Với } x^5: \frac{90-5k}{6} = 5 \Leftrightarrow k = 12$$

$$\text{Với } x^{10}: \frac{90-5k}{6} = 10 \Leftrightarrow k = 6$$

Vậy các hệ số cần tìm là: $2^{12} \cdot C_{30}^{12} = 354276249600$; $2^6 \cdot C_{30}^6 = 38001600$.

Tổng của chúng bằng: 354314251200

Câu IX:

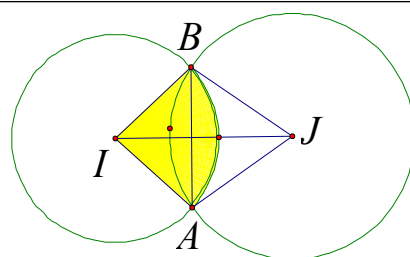
Đặt $\alpha = \angle BIJ$; $\beta = \angle BJI$.

Theo định lý cosin:

$$\cos \alpha = \frac{IB^2 + JI^2 - BJ^2}{2IB \cdot JI} = \frac{17}{32}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 1,010721 \text{ (rad)}$$

$$\Rightarrow 2\alpha \approx 2,021442 \text{ (rad)}$$



Diện tích quạt $\widehat{IAB}$ bằng: $S_{q1} = \frac{2\alpha \cdot IB^2}{2} \approx 36,38596 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích tam giác IAB: $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin 2\alpha \approx 16,202988 \text{ cm}^2$

• Tương tự:

Diện tích quạt $\widehat{JAB}$ bằng: $S_{q2} \approx 39,82502 \text{ cm}^2$

Diện tích tam giác JAB: $S_{JAB} \approx 24,463336 \text{ cm}^2$

• Diện tích cần tìm:

$$S = S_{q1} + S_{q2} - S_{IAB} - S_{JAB} \approx 35,544656 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu X:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 + xy \\ x^2 + y^2 + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = 6 + xy \\ (x+y)^2 - 2xy + x + y = 5 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y; P = xy$ ta có hệ $\begin{cases} S^3 - 3PS = 6 + P \\ S^2 + S - 2P = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow S^3 - 3S \frac{S^2 + S - 5}{2} = 6 + \frac{S^2 + S - 5}{2} \Leftrightarrow S^3 + 4S^2 - 14S + 7 = 0$$

Giải được: $S_1 \approx -6,37022; S_2 \approx 1,73795; S_3 \approx 0,632275$

Ba nghiệm tương ứng của P là: $P_1 \approx 14,60474, P_2 \approx -0,12079; P_3 \approx -1,983977$

• Giải phương trình $t^2 - St + P = 0$ ứng với các cặp $(S_j; P_j)$ trên ta được các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x \approx 1,80487 \\ y \approx -0,06692 \end{cases}; \begin{cases} x \approx -0,06692 \\ y \approx 1,80487 \end{cases}; \begin{cases} x \approx -1,12744 \\ y \approx 1,75972 \end{cases}; \begin{cases} x \approx 1,75972 \\ y \approx -1,12744 \end{cases}$$