



$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

Tương tự

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

Do đó

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; trường Thiệu Viên, huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)**

$$\text{Cho } M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \text{ với } a, b, c > 0$$

a) Chứng minh  $M > 1$ .

b) Chứng tỏ rằng  $M$  không phải là số nguyên.

**Lời giải**

$$\text{a) Với } a, b, c > 0 \text{ ta có } \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{c+a+b}$$

$$\text{Suy ra } M > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{c+a+b} = 1$$

Vậy  $M > 1$ .

$$\text{b) Với } a, b, c > 0 \text{ ta có } 0 < \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự: } 0 < \frac{b}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad 0 < \frac{c}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra } M < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{c+a+b} = 2$$

Ta có  $1 < M < 2$  nên  $M$  không phải là số nguyên.

**Câu 4. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến, 2016 - 2017)**

Chứng minh rằng  $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$  có giá trị không phải là số tự nhiên  $(x, y, z, t \in \mathbb{N}^*)$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left( \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left( \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

Hay  $1 < M < 2$ . Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên

**Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Cho ba số  $a, b, c$  thỏa mãn  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

**Lời giải**

Ta có  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

Tương tự ta có:  $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}; \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \leq 2$$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, 2022 - 2023)**

Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

**Lời giải**

Vì  $a, b, c$  là ba cạnh của tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \left( 1 - \sqrt{\frac{a}{b+c}} \right) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì  $a, b, c$  là các số dương nên  $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

Do đó  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được  $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$ ;  $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Bài toán được chứng minh

**Câu 7. (HSG 7 trường Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)**

Cho  $a, b, c, d > 0$ , Chứng minh:  $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$  có giá trị không nguyên.

**Lời giải**

Với  $a, b, c, d > 0$ , ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}, \frac{b+c}{b+c+d} > \frac{b+c}{a+b+c+d}, \frac{c+d}{c+d+a} > \frac{c+d}{a+b+c+d},$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} > \frac{d+a}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$$

Với  $a, b, c, d > 0$ , ta có:  $\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

Mà  $\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d}$  ( $a, b, c, d > 0$ ) nên suy ra:

$$\frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \quad (3)$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3 (**)$$

$$2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Từ (\*) và (\*\*)

Vậy với  $a, b, c, d > 0$ , M có giá trị không nguyên (đpcm)

**Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022)**

Cho ba phân số tối giản có tổng bằng  $4\frac{9}{40}$ ; các tử của chúng tỉ lệ với  $2; 3; 5$ , còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với  $5; 4; 3$ . Chứng minh rằng trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn  $1$ .

**Lời giải**

Gọi ba phân số cần tìm là  $x, y, z$  (Đk:  $x, y, z \neq 0$ ).

Theo bài ra ba phân số tối giản có tổng bằng  $4\frac{9}{40}$  nên  $x + y + z = 4\frac{9}{40}$ .

Lại có các tử của chúng tỉ lệ với  $2; 3; 5$  còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với  $5; 4; 3$

nên  $x, y, z$  tỉ lệ với  $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{3}$  hay  $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ .

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{40}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{3}{5}; y = \frac{9}{8}; z = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vì } x = \frac{3}{5} < 1; y = \frac{9}{8} > 1; z = \frac{5}{2} > 1$$

Vậy trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn.

**Câu 9. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá, trường Thiệu Trung 2022 – 2023)**

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$$

Cho biểu thức với  $x, y, z, t$  là

các số tự nhiên khác 0. Chứng minh  $M^{10} < 1025$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}, \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left( \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left( \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right) \Rightarrow M < 2$$

Có  $M^{10} < 2^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow M^{10} < 1025$

Vậy:  $M^{10} < 1025$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>