**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN**

**QUẬN NAM TỪ LIÊM**

**MÔN TOÁN 9 – NĂM HỌC 2020-2021**

**Bài 1. (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức với 
2. Rút gọn biểu thức 
3. Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 
4. Cho biểu thức . Chứng minh rằng là một số nguyên

**Bài 2. (4,0 điểm)**

1. Cho là các só nguyên cùng chia hết cho 6. Chứng minh rằng cũng chia hết cho (là số tự nhiên)
2. Cho là các số nguyên thỏa mãn 

Chứng minh rằng viết dưới dạng hiệu của hai số chính phương

**Bài 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn 
2. Giải phương trình : 

**Bài 4. (6,0 điểm)**

Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng và có tâm là Điểm là một điểm di chuyển trên . Gọi là giao điểm của tia và đường thẳng là giao điểm của và 

1. Chứng minh rằng :không đổi
2. Chứng minh 
3. Gọi là giao điểm của và Tìm vị trí của điểm để diện tích tam giác đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 5. (1,0 điểm)** Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được to màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1.**

1. **a) Rút gọn biểu thức A**

****

Vậy với 

**b) Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức **

Với ta có : . Áp dụng bất đằng thức Cô si :



Mặt khác 

Hay 

Do đó Dấu xảy ra 

Vậy 

**2) Chứng minh rằng B là một số nguyên**

Ta có:



Vậy là một số nguyên

**Bài 2.**

1. Ta có : dư 1, dư 2

dư 2.

Do đó dư 5 hay 

Ta có: , mà dư 2 nên :



Do đó 

Vậy cũng chia hết cho 6 (q là số tự nhiên)

1. Ta có : 

Do đó, với mọi thì chia 8 dư 1. Nên với lẻ thì chia 8 dư 1

Suy ra : không xảy ra (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số có ít nhất một số chẵn. ta có là số lẻ

Đặt 

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

**Bài 3.**

1. **Tìm số nguyên x, y thỏa mãn**

****

Vì (với mọi và vai trò của như nhau. Ta giả sử Suy ra :



Mà là số chính phương





Vậy 

**2) Giải phương trình **

Vì với mọi 



Giải phương trình bình phương 2 vế ta có :



Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 4.**

****

1. **Chứng minh rằng :không đổi**

Kẻ . Ta có 

Trong vuông tại A có :không đổi

Vậy không đổi

1. **Chứng minh **

****cắt tại E, DM cắt tại F

Ta có : 

Do 

Mặt khác (3)

Từ (1), (2), (3)

là hình bình hành 

Mà 

1. **Gọi là giao điểm của và Tìm vị trí của điểm để diện tích tam giác đạt giá trị lớn nhất.**

****cắt tại .Áp dụng định lý Papuyt thẳng hàng 

Lấy sao cho là hình bình hành 

Mà vuông tại C

. Kẻ 

Gọi là giao điểm của 

Ta có : , mà 

Do đó 

Dấu xảy ra là trung điểm của 

**Bài 5.**

Xét ngũ giác đều ta nhận thấy ba đỉnh bất kỳ của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 2 khả năng :

* Nếu tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.
* Nếu tô 5 đỉnh bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân

Vậy, luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác nhau.