DẠNG TOÁN 21: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ: **Tính chất của tích phân xác định** **(phần này là kiến thức của cả BÀI TẬP MẪU và BÀI TẬP PHÁT TRIỂN)**

◆ **Phương trình mũ cơ bản:**

Với a > 0, a ≠ 1: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

◆ **Giải phương trình mũ đưa về cùng cơ số:**

Với a > 0, a ≠ 1: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

◆ **Giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ:**

- ***Dạng 1***: $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó P(t) là đa thức theo t.
- ***Dạng 2***: $\alpha a^{2f(x)} + \beta(ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

◆ **Bất phương trình mũ cơ bản:**

$a^{f(x)} < b$ (với b > 0) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$.

◆ **Giải bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số:**

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Tập nghiệm của bất phương trình: $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$

A. $[-2;4]$ **B.** $[-4;2]$ **C.** $(-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán giải bất phương trình mũ sử dụng Phương pháp đưa về cùng cơ số.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Vì cơ số $a = 5 > 1$.

Khi đó: $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2;4]$.

B2: Kết luận: Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x \in [-2;4]$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Vì cơ số $a = 5 > 1$.

Khi đó: $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2;4]$.

Kết luận: Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x \in [-2;4]$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 21.1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$

A. $(-\infty;5)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;-5)$.

Câu 21.2: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x.2^{x+1} \ge 72$

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x.2^{x+1} \ge 72 \Leftrightarrow 2.6^x \ge 72 \Leftrightarrow 6^x \ge 6^2 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2;+\infty)$.

Câu 21.3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup (0;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$. **C.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên bất phương trình tương đương với $\frac{1}{x} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(0;\frac{1}{3}\right]$.

Câu 21.4: Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$, tập nghiệm của bất phương trình có dạng $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $A=b-a$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2-x+1<2x-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2) \Rightarrow a=1; b=2 \Rightarrow A=b-a=1$.

Câu 21.5: Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[0;10]$ của bất phương trình $7^{\sqrt{x+6}} \geq 7^x$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $7^{\sqrt{x+6}} \geq 7^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+6\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+6\geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\leq x<0 \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -6\leq x\leq 3$

Vậy có 3 giá trị nguyên thuộc đoạn $[0;10]$.

Câu 21.6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$

$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{-8}{(x-1)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)<0 \Leftrightarrow -3<x<1 \Rightarrow x=\{-2;-1;0\}$

Câu 21.7: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a;b]$ ta có $a+b$ bằng

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=10$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2+5x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \vee x\leq -6$

Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \ge \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \ge 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6} \ge -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \le x+2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \\ x^2+5x-6 \le x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -6 \vee x \ge 1 \\ x \ge -2 \\ x \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;10]$

Vậy $a+b=11$

Câu 21.8: Phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lờigiải

Chọn D

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $-\frac{5}{2}$.

Câu 21.9: Tìm số nghiệm thực của phương trình $3^{3x-1}=9^{\sqrt{x}}$.

A. $1.$. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \ge 0$

Ta có: $3^{3x-1}=9^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3x-1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{3} \\ 9x^2-10x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 21.10: Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính x_1x_2.

A. -6. **B.** -5. **C.** 6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2-4=2-6x \Leftrightarrow x^2+6x-6=0$.

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1x_2=-6$.

Câu 21.11: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-2}=7-4\sqrt{3}$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính giá trị của $P=x_1+x_2$.

A. $P=-1$. **B.** $P=3$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-2}=7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$.

$\Leftrightarrow x^2-2x-2=-2 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2 \end{array}\right.$.

Vậy: $P=2$.

Câu 21.12: Phương trình $3.3^{2x}-4.3^x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $x_1+x_2=\frac{4}{3}$. **B.** $x_1+x_2=-1$. **C.** $x_1+x_2=0$. **D.** $x_1.x_2=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $3.3^{2x}-4.3^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $x_1+x_2=-1$.

Câu 21.13: Phương trình $5^{x-1}+5.(0,2)^{x-2}=26$ có tổng các nghiệm là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$5^{x-1}+5.(0,2)^{x-2}=26 \Leftrightarrow 5^{x-1}+5.5^{2-x}=26 \Leftrightarrow 5^{x-1}+25.5^{1-x}=26$

Đặt $t=5^{x-1}(t>0)$, phương trình trên trở thành

$t+\frac{25}{t}=26 \Leftrightarrow t^2-26t+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x-1}=1 \\ 5^{x-1}=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm là 4.

Câu 21.14: Phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-3.\left(2-\sqrt{3}\right)^x+2=0$ có tập nghiệm là.

A. $\{0\}$. **B.** $\{1;0\}$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{-2;2\}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=t>0 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2-3.\frac{1}{t}+2=0 \Rightarrow t^3+2t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3)=0$

$\Rightarrow t=1(t/m) \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=1 \Rightarrow x=0$

Câu 21.15: Tích các nghiệm của phương trình $4^{x^2-x-1}+2^{x^2-x}=3$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Chọn A

ĐK $x\in\mathbb{R}$

$$4^{x^2-x-1}+2^{x^2-x}=3\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(2^{x^2-x}\right)^2+2^{x^2-x}-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-x}=2\\2^{x^2-x}=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2-x=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $\frac{c}{a}=-1$.

Câu 21.16: Tìm tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$.

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$. Vậy đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x$, điều kiện $t>0$. Suy ra $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t}+t-2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow x=1\\t=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1\end{array}\right.$$

Vậy tích của hai nghiệm $x_1x_2=1.(-1)=-1$

Câu 21.17: Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[0;3]$ của bất phương trình $\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 1\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 0\Leftrightarrow 1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3\Leftrightarrow 0<x\le\log_{\frac{3}{2}}3$$

Vậy có 2 giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[0;3\right]$.

Câu 21.18: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{4^x-3.2^{x+1}+8}{2^{x+1}-1}\ge 0$ có dạng là $S=\left(a;b\right]\cup\left(c;+\infty\right)$. Giá trị $\dfrac{a+b+c}{3}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;-1\right)$. **B.** $\left(-1;0\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(1;4\right)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{4^x-3.2^{x+1}+8}{2^{x+1}-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x-3.2^{x+1}+8\ge 0\\2^{x+1}-1>0\end{cases}\\\begin{cases}4^x-3.2^{x+1}+8\le 0\\2^{x+1}-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{2x}-6.2^x+8\ge 0\\2.2^x>1\end{cases}\\\begin{cases}2^{2x}-6.2^x+8\le 0\\2.2^x<1\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^x\le 2\\2^x\ge 4\end{array}\right.\\2^x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}2\le 2^x\le 4\\2^x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<2^x\le 2\\2^x\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le 1\\x\ge 2\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-1;1\right]\cup\left(2;+\infty\right)$

$\Rightarrow a=-1;b=1;c=2\Rightarrow\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{2}{3}\in\left(0;1\right)$.

Câu 21.19: Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ của bất phương trình $\left(2^x+1\right)^2>\left(\sqrt{2^x+2}-1\right)^2.\left(2^{x+1}+5\right)$ là:

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(2^x+1\right)^2>\left(\sqrt{2^x+2}-1\right)^2.\left(2^{x+1}+5\right)$

$\Leftrightarrow\left(2^x+1\right)^2.\left(\sqrt{2^x+2}+1\right)^2>\left(\sqrt{2^x+2}-1\right)^2.\left(2^{x+1}+5\right).\left(\sqrt{2^x+2}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(2^x+1\right)^2.\left(\sqrt{2^x+2}+1\right)^2>\left(2^x+1\right)^2.\left(2^{x+1}+5\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2^x+2}+1\right)^2>2^{x+1}+5$

Đặt $t=\sqrt{2^x+2}\Rightarrow t^2-2=2^x,\ ĐK:t>\sqrt{2}$

Bất phương trình được viết lại như sau:

$\Leftrightarrow\left(t+1\right)^2>2\left(t^2-2\right)+5$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1>2t^2+1 \Leftrightarrow t^2-2t<0 \Leftrightarrow 0<t<2$

Kết hợp với điều kiện trên ta được: $\sqrt{2}<t<2$

$\Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt{2^x+2}<2 \Leftrightarrow 2<2^x+2<4 \Leftrightarrow 0<2^x<2 \Leftrightarrow x<1$

Vậy số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ là 2021.

Câu 21.20: Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$ **B.** $(-4;2)$ **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.7^x+28.2^x\le 351.\sqrt{14^x}$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}}+28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}}\le 351 \Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}+28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}}\le 351$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t>0$ thì bất phương trình trở thành $49t+\frac{28}{t}\le 351$

$\Leftrightarrow \frac{4}{49}\le t\le \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49}\le \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}\le \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4\le x\le 2$, khi đó $S=[-4;2]$.

Giá trị $b-2a=10\in\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.