PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi gồm có 01 trang*)

ĐỀ CHỌN ĐỘI DỰ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: **Toán**

Thời gian thi: ***150 phút*** (*Không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. (*3,0 điểm*)

a. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ là số hữu tỉ.

b. Tính tổng các chữ số của A, biết $\sqrt{A}=99\ldots96$ (có 100 chữ số 9).

Câu 2. (*7,0 điểm*)

a. Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên tố a, b, c thỏa mãn abc¿$ab+bc+ca$.

b. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2}=\frac{2x^2+2x-2}{3x-1}$$

Câu 3. (*2,0 điểm*)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{3}{4}$$

Câu 4. (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy M sao cho $\widehat{AMC}=90^0$, trên đoạn CH lấy N sao cho $\widehat{ANB}=90^0$.

Chứng minh rằng:

a. Tam giác ΔAMN cân

b. $S_{ABN}=\sqrt{S_{ABH}.S_{ABC}}$

c. $\frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\leq\frac{3}{2}$

Câu 5. (*2,0 điểm*)

Trên mặt phẳng cho 2023 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Bất kỳ 3 điểm nào cũng là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không vượt quá 2024. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023 điểm đã cho.

---------------HẾT---------------

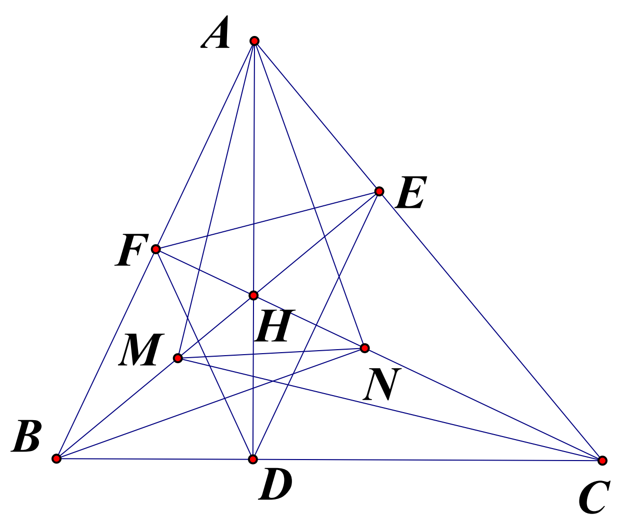
Họ tên thí sinh: ………………………………………… Số báo danh: ……………………

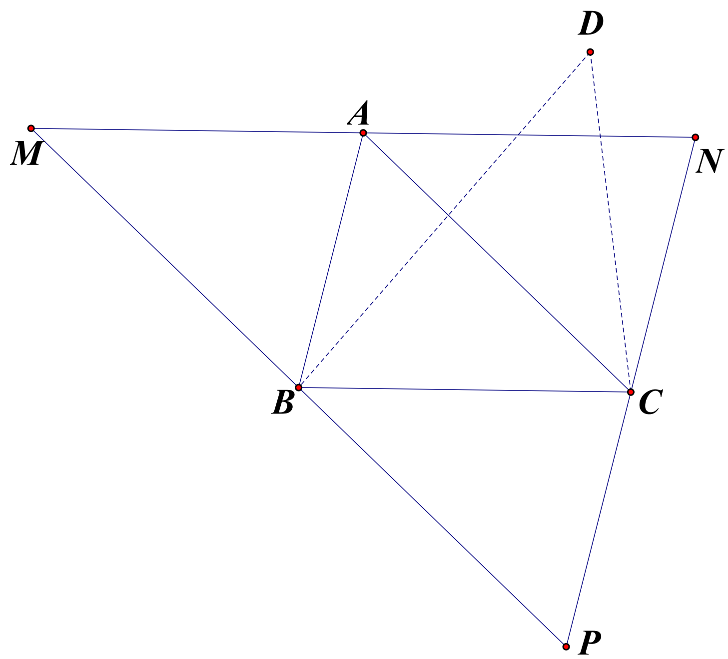
Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
Lớp 9 Năm học: 2023 – 2024

THAM KHẢO

Câu	Ý	Nội dung cần đạt	Điểm
1	a. 2đ	Ta có :($\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a})^2=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{}{(b-}$ ¿ $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2(a-b+b-c+c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+$ $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ ¿ $\left\|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right\| là\, số\, hữu\, tỉ$	0.5 0.5 0.5 0.5
	b. 1đ	Ta có: A = $\sqrt{A}^2-16+16$ ¿ $(\sqrt{A}+4)(\sqrt{A}-4)+16=(100\ldots0).(99\ldots92)+16=99\ldots9200..016$ $(100\, chữ\, số\, 9, 101\, chữ\, số\, 0)$ Tổng các chữ số của A là : 100.9 + 2 + 1 +6 = 909	0.25 0.25 0.25 0.25
2	a. 3đ	$Giả\, sử\, a\le b\le c\Rightarrow ab+bc+ca\le 3bc$ $\Rightarrow abc<3bc$ $\Rightarrow a<3, mà\, a\, là\, số\, nguyên\, tố\, nên\, a=2.$ $\Rightarrow 2bc<2b+2c+bc\Rightarrow bc<2(b+c)\, vì\, b\le c\, nên\, bc<4c\Rightarrow b<4.$ Nếu b= 2$\Rightarrow 2c<4+2c\,(luôn\, đúng)$ Nếu b = 3$\Rightarrow c<6\Rightarrow c=3\, hoặc\, c=5.$ Vậy các bộ số (2;2;c), (2;3;3),(2;3;5) và các hoán vị với c là số nguyên tố tùy ý.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.5 0.5 0.75
	b. 4đ	$\sqrt{3x-2}=\frac{2x^2+2x-2}{3x-1}$ ĐKXĐ: $x\ge\frac{2}{3}$ $2x^2+2x-2-(3x-1)\sqrt{3x-2}=0$ 3x -2 $-(3x-1)\sqrt{3x-2}+2x^2-x=0$ 3x -2 $-(3x-1)\sqrt{3x-2}+x(2x-1)=0$ $(\sqrt{3x-2}-x)(\sqrt{3x-2}-2x+1)=0$ • $\sqrt{3x-2}-x=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $\Rightarrow x=1(TM), x=2(TM)$ • $\sqrt{3x-2}-2x+1=0\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=2x-1\Leftrightarrow 4x^2-7x+3=0\Rightarrow x=1(T$ Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm X=1, x= 2, x= $\frac{3}{4}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.5 1.0 1.0 0.5

3	**2.0đ**	Chứng minh bài toán phụ: Với x,y là các số thực dương ta luôn có $$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$$ Dấu "=" xảy ra khi x= y = 1. $$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$$ $$\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{1}{1+bc}$$ $$\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{1}{1+ca}$$ $$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)$$ $$\ge\frac{1}{2}.\frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca}=\frac{1}{2}.\frac{9}{6}=\frac{3}{4}$$ Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1	1.0 0.25 0.25 0.25 0.25
4		 	
	a. 2đ	Chứng minh: Tam giác $\Delta AMN\, c\hat{a}n$ Tam giác ABN vuông tại N, NF là đường cao nên $AN^2=AF.AB(1)$ Tam giác AMC vuông tại M , có đường cao ME nên $AM^2=AE.AC(2)$ Chứng minh được $$AF.AB=AE.AC(3)$$ $$T\grave{u}(1),(2),(3)\,suy\,ra$$ $$AN^2=AM^2\Rightarrow AM=AN\Rightarrow Tam\,gi\acute{a}c\,AMN\,c\hat{a}n\,t\d{a}i\,A$$	0.5 0.5 0.5 0.5
	b. 2đ	Chứng minh $S_{ABN}=\sqrt{S_{ABH}.S_{ABC}}$ $S_{ABN}=\frac{1}{2}NF.AB$ (1) $$\sqrt{S_{ABH}.S_{ABC}}=\sqrt{\frac{1}{2}HF.AB.\frac{1}{2}CF.AB}$$ ¿ $\frac{1}{2}\sqrt{HF.CF}.AB$ (2) Chứng minh được HF.CF =AF.FB (3) Chứng minh được $NF^2=AF.FB$ (4) Từ (1), (2), (3), (4) ta được $S_{ABN}=\sqrt{S_{ABH}.S_{ABC}}$	0.5 0.5 0.5 0.5

	c. 2đ	$Chứng\ minh\ \frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\le\frac{3}{2}$ *Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC nên* $\frac{EF}{BC}=\sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}}=\sqrt{\frac{AE.AF}{AB.AC}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{AC}+\frac{AF}{AB}\right)$ Tương tự: $\frac{DE}{AB}\le\frac{1}{2}\left(\frac{CD}{BC}+\frac{CE}{AC}\right)$ $\frac{DF}{AC}\le\frac{1}{2}\left(\frac{BD}{BC}+\frac{BF}{AB}\right)$ $\frac{EF}{BC}+\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}\le\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{AC}+\frac{AF}{AB}+\frac{CD}{BC}+\frac{CE}{AC}+\frac{BD}{BC}+\frac{BF}{AB}\right)=\frac{3}{2}$ Dấu “=” khi tam giác ABC đều.	0.5 0.5 0.25 0.25 0.5
5	**2đ**	Do số tam giác là hữu hạn nên tồn tại một tam giác trong số các tam giác tạo thành có diện tích lớn nhất. Gọi tam giác đó là ΔABC, $\Rightarrow S_{ABC}\le 2024$. Qua các đỉnh của tam giác ABC vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chúng cắt nhau tại M, N, P. Vì $S_{ABC}\le 2024\Rightarrow S_{MNP}\le 8096$ Ta chứng minh được tam giác MNP chứa 2023 điểm đã cho. Thật vậy, giả sử có điểm D trong 2023 điểm đã cho nằm ngoài tam giác MNP (h. vẽ)  Khi đó $S_{DBC}>S_{ABC}$ (trái với giả thiết tam giác ABC có diện tích lớn nhất). Vậy tồn tại một tam giác có diện tích 8096 chứa 2023 điểm đã cho.	0.5 0.5 0.5 0.5

---------------- Hết --------------