|  |  |
| --- | --- |
| **UBND THÀNH PHỐ BẮC NINH****PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ** **NĂM HỌC 2021-2022****Môn : Toán – Lớp 9**Thời gian làm bài : 150 phút (không kể giao đề) |

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Cho . Tính giá trị biểu thức 
2. Cho Parabol và đường thẳng là tham số). Chứng minh đường thẳng luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt Tìm để diện tích tam giác bằng 8

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình 
2. Cho các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho mỗi số và đều là các lập phương của một số nguyên dương
2. Tìm tất cả các số nguyên tố sao cho tổng tất cả các ước tự nhiên của là một số chính phương.

**Câu 4. (7,0 điểm)**

1. Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn có cố định. Các đường cao của tam giác đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của cắt lần lượt tại 
2. Chứng minh rằng tam giác cân
3. Chứng minh 
4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường phân giác của tại K. Chứng minh rằng luôn đi qua một điểm cố định khi thay đổi
5. Cho hình vuông và có bốn đỉnh lần lượt thuộc các cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng 

**Câu 5. (1,0 điểm)**

Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. **Cho . Tính giá trị biểu thức **

****

Vậy 

1. **Cho Parabol và đường thẳng là tham số). Chứng minh đường thẳng luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt Tìm để diện tích tam giác bằng 8**

Phương trình hoành độ giao điểm của và P là :



Ta có với mọi nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

luôn đi qua điểm cố định nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi thì nên hai giao điểm nằm về hai phía trục tung.

Giả sử thì ta có với lần lượt là hình chiếu vuông góc của hai điểm trên trục Oy. Ta có :



. Theo định lý Vi-et ta có :

. Thay vào ta có : 

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. **Giải hệ phương trình **

Điều kiện : 

Phương trình (1) tương đương 



Xem đây là phương trình bậc hai của  ta có :





Trường hợp 1: 

Do suy ra phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2: , thay vào phương trình (2) của hệ ta có :



Ta có 

Nghĩa là 

Vậy hệ có nghiệm 

1. **Cho các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức **

Ta có : 



Vậy 

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. **Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho mỗi số và đều là các lập phương của một số nguyên dương**

Giả sử với là các số nguyên dương. Lấy vế theo vế ta được :



Chứng minh được với mọi 

1. **Tìm tất cả các số nguyên tố sao cho tổng tất cả các ước tự nhiên của là một số chính phương.**

Gọi p là số nguyên tố nên có 5 ước tự nhiên là 

Giả sử với 

Ta có 

Suy ra 

Bất đẳng thức xảy ra nếu 

Từ 



Vì p nguyên tố nên 

Đảo lại với 

**Câu 4. (7,0 điểm)**

1. **Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn có cố định. Các đường cao của tam giác đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của cắt lần lượt tại **

****

1. **Chứng minh rằng tam giác cân**

Ta có và 

Do lần lượt là phân giác của và và ta có nên ta suy ra được . Lại có tứ giác nội tiếp nên 

Từ đó ta được nên tam giác cân tại A

1. **Chứng minh **

Từ A ta vẽ tiếp tuyến với đường tròn . Khi đó ta có . Mặt khác tứ giác nội tiếp nên ta có . Do đó ta được nên nên ta có 

Hoàn toàn tương tự ta cũng có : . Từ đó suy ra :



Mà ta có nên 

1. **Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường phân giác của tại K. Chứng minh rằng luôn đi qua một điểm cố định khi thay đổi**

Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt tia phân giác tại K nên là đường kính của đường tròn. Từ đó ta có : . Từ đó dẫn đến và suy ra tứ giác là hình bình hành, do đó đi qua trung điểm của 

Do nên theo định lý Talet ta có . Lại có là phân giác của tam giác nên ta có 

Từ đó ta có Hoàn toàn tương tự ta có : 

Mà tứ giác nội tiếp nên ta có do đó 

Từ đây suy ra 

Theo bổ đề hình thang đi qua trung điểm của BC cố định hay HK luôn đi qua một điểm cố định.

1. **Cho hình vuông và có bốn đỉnh lần lượt thuộc các cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng **



Gọi là trung điểm theo tính chất đường trung bình và trung tuyến tam giác vuông ta có :



Từ đó suy ra đpcm

**Câu 5. (1,0 điểm)**

 **Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà 3 đỉnh và trọng tâm cùng màu**

****

Trên mặt phẳng lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào tháng dùng 2 màu để tô màu các điểm nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại 3 điểm cùng màu. Giả sử 3 điểm đó là A, B,C và cùng màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với 3 đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chỉ có hai khả năng xảy ra:

 1) Nếu G là màu đỏ. Khi đó A,B,C,G có cùng màu đỏ và bài toán được chứng minh.

 2) Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA,GB,GC các đoạn 

. Khi đó nếu gọi M,N,P tương ứng là các trung điểm của thì

AA'=3GA = 6GM⇒ AA'=2AM.

Tương tự B'B= 2BN, C'C= 2CP.

Do đó các tam giác ABC,BAC,CAB tương ứng nhận A, B,C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng các có tam giác ABC và ABC có cùng trọng tâm G . Có hai trường hợp xảy ra.

 a) Nếu A,B,C cùng màu xanh. Khi đó tam giác ABC và trọng tâm G có cùng màu xanh.

b) Nếu ít nhất một trong các điểm có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử màu đỏ. Khi đó tam giác ABC và trọng tâm có màu đỏ. Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm màu đỏ. đpcm