

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

**CHUYÊN ĐỀ:**

# **CƠ HỌC CHẤT ĐIỂM**

**GIÁO VIÊN: BÙI ĐỨC SƠN  
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI**

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

**CHUYÊN ĐỀ:**

## **CƠ HỌC CHẤT ĐIỂM**

### **PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ**

#### **1. Cơ sở khoa học của đề tài:**

Cơ học là phần đầu tiên của chương trình vật lý chuyên. Những vấn đề mà cơ học nghiên cứu là những vấn đề đơn giản nhất của hệ thống tri thức vật lý, nhưng chúng lại là những vấn đề cơ bản nhất, đặt những nền móng ban đầu cho việc nghiên cứu những phần sau của chương trình vật lý. Những tri thức cơ học dễ được vận dụng để nghiên cứu các hiện tượng nhiệt học, điện học, quang học, các quá trình diễn ra trong nguyên tử và hạt nhân, và nhiều tri thức cơ học sẽ được mở rộng thêm, nâng cao hơn, khi được vận dụng vào các lĩnh vực khác của vật lý học.

Ngay trong phần của chương trình vật lý chuyên – phần cơ học chất điểm, học sinh lớp 10 chuyên Lí sẽ gặp những bài tập vừa mới lạ so với cấp học THCS, vừa cần các công cụ toán mạnh như đạo hàm, tích phân. Do đó, phần cơ học chất không chỉ là sự thách thức với học sinh mà còn là thử thách với giáo viên chuyên môn vật lý tự biên soạn và truyền đạt kiến thức toán cho các em.

Trước thực tế và yêu cầu đó, tôi chọn viết Chuyên đề: Cơ học chất điểm, nhằm xây dựng hệ thống lí thuyết và bài tập từ cơ bản đến nâng cao.

#### **2. Mục đích của đề tài:**

Nhằm đề xuất phần kiến thức Cơ học chất điểm từ cơ bản đến nâng cao cần truyền đạt cho học sinh chuyên vật lý trong giai đoạn mở đầu vào lớp 10 chuyên giúp các em học sinh nắm kiến thức phục vụ cho việc giải bài tập vật lý.

#### **3. Đối tượng, phạm vi nghiên cứu:**

Tài liệu sách giáo khoa vật lý, giáo trình vật lý ở bậc Đại học, và sách bài tập vật lý nâng cao lớp 10 là nền tảng của chuyên đề này. Đề tài thực hiện ở lớp 10 chuyên lý.

***Chuyên đề: Cơ học chất điểm.***

Trong Chuyên đề này tôi chỉ trình bày lý thuyết và bài tập Cơ học chất điểm thuộc các phần kiến thức sau:

- + Lượng giác, đạo hàm, vi phân, tích phân.
- + Chuyển động thẳng, chuyển động thẳng đều, chuyển động thẳng biến đổi đều.
- + Chuyển động cong.
- + Chuyển động tròn, chuyển động tròn đều.
- + Định luật II Newton.
- + Động lượng, định lý biến thiên động lượng.
- + Chuyển động ném.
- + Công thức cộng vận tốc, gia tốc.

## PHẦN II: NỘI DUNG

### I. Lí thuyết toán (áp dụng cho Chuyên đề).

#### I.1. Lũy thừa, mũ, logarit.

##### I.1.1. Lũy thừa

Số mũ $\alpha$	Cơ số $a$	Lũy Thừa $a^\alpha$
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a.....a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ( $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ )
$\alpha = \lim r_n (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

##### I.1.2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi  $a > 0, b > 0$  ta có :

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} ; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} ; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta} ; (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha ; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$a > 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta ; \quad 0 < a < 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

- Với  $0 < a < b$  ta có :

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0 ; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

#### Chú ý:

+ Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương

##### I.1.3. Định nghĩa và tính chất của căn bậc n

- Căn bậc n ( $n \in \mathbb{N}^*,$  ) của a là số b sao cho  $b^n = a$ .

- Nếu n là số nguyên dương lẻ thì  $\sqrt[n]{a}$  xác định  $\forall a$  , nếu n là số nguyên dương chẵn thì  $\sqrt[n]{a}$  xác định  $\forall a \geq 0$

n là số nguyên dương lẻ  $\sqrt[n]{a^n} = a \forall a$  , n là số nguyên dương chẵn

### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & \forall a \geq 0 \\ -a & \forall a < 0 \end{cases}$$

- Với  $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$  ta có :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0); \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

+ Nếu  $n$  là số nguyên dương lẻ và  $a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

+ Nếu  $n$  là số nguyên dương chẵn và  $0 < a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

#### 1.1.4. Lôgarit

##### a. Định nghĩa

- Với  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  ta có :  $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

**Chú ý :**  $\log_a b$  có nghĩa khi  $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

+ Lôgarit thập phân :

$$\lg b = \log b = \log_{10} b$$

+ Lôgarit tự nhiên (lôga nepe):

$$\ln b = \log_e b \quad (\text{với } e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281)$$

##### b. Tính chất

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b (b > 0)$$

Cho  $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$ . Khi đó :

+ Nếu  $a > 1$  thì  $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$

+ Nếu  $0 < a < 1$  thì  $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

##### c. Các qui tắc tính lôgarit

Với  $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$ , ta có :

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c; \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c; \quad \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

##### d. Đổi cơ số

Với  $a, b, c > 0$  và  $a, b \neq 1$ , ta có :

## **Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c \quad (\alpha \neq 0)$$

## **I.2. Hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit.**

### **I.2.1. Hàm số lũy thừa**

a. Định nghĩa:

Hàm số có dạng  $y = x^\alpha$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$

b. Tập xác định:

$D = \mathbb{R}$  với  $\alpha$  nguyên dương

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  với  $\alpha$  nguyên âm hoặc bằng 0

$D = (0; +\infty)$  với  $\alpha$  không nguyên

### **I.2.2. Hàm số mũ**

a. Định nghĩa:

Hàm số có dạng  $y = a^x$  với  $0 < a \neq 1$ .

b. Tập xác định:

$D = \mathbb{R}$ , tập giá trị  $(0; +\infty)$

### **I.2.3. Hàm số lôgarit**

a. Định nghĩa:

Hàm số có dạng  $y = \log_a x$  ( $0 < a \neq 1$ )

b. Tập xác định:

$D = (0; +\infty)$ , tập giá trị  $\mathbb{R}$

## **I.3. Phương trình mũ, bất phương trình mũ**

### **I.3.1. Một số tính chất đối với hàm số mũ.**

a. Lũy thừa:

$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

b. Tính chất của lũy thừa:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

**c. Quy tắc so sánh:**

$$+ \text{ Với } a > 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$$

$$+ \text{ Với } 0 < a < 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$$

**d. Căn bậc n**

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}; \quad a^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{a}$$

**I.3.2. Phương trình mũ cơ bản:**

Là phương trình dạng:  $a^x = b$  (\*) với  $a, b$  cho trước và  $0 < a \neq 1$

Nếu  $b \leq 0$ : (\*) vô nghiệm

Nếu  $b > 0$ :  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$  ( $0 < a \neq 1$  và  $b > 0$ )

**I.3.3. Bất phương trình mũ**

Xét bất phương trình  $a^x > b$

- Nếu  $b \leq 0$ , tập nghiệm của bất PT là  $\mathbb{R}$  vì  $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$

- Nếu  $b > 0$  thì BPT tương đương với  $a^x > a^{\log_a b}$

Nếu  $a > 1$  thì nghiệm của bất phương trình là  $x > \log_a b$

Nếu  $0 < a < 1$  thì nghiệm của bất phương trình là  $x < \log_a b$

**I.3.4. Phương trình lôgarit, bất phương trình lôgarit**

**a. Phương trình lôgarit cơ bản:**

$\log_a x = b$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) luôn có nghiệm duy nhất  $x = a^b$  với mọi  $b$

### **Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

- Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản :

+ Đưa về cùng cơ số:

$$1. \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad 2. \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

+ Đặt ẩn phụ

Với các phương trình, bất phương trình mà có thể biểu diễn theo biểu thức  $\log_a f(x)$  thì ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ  $t = \log_a f(x)$ .

+ Mũ hóa

Đôi khi ta không thể giải một phương trình, bất phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng một cơ số hay dùng ẩn phụ được, khi đó ta thể đặt  $x = a^t \Rightarrow$  phương trình, bất phương trình cơ bản (phương pháp này gọi là mũ hóa)

### **b. Bất phương trình lôgarit**

- Bất phương trình lôgarit cơ bản

Xét bất phương trình  $\log_a x > b$

+ Nếu  $a > 1$  thì  $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$

+ Nếu  $0 < a < 1$  thì  $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

## **I.4. Cấp số cộng, cấp số nhân.**

### **I.4.1. Cấp số cộng**

a. Định nghĩa:

$$\text{Dãy số } (u_n) \text{ được xác định bởi } \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

gọi là cấp số cộng với  $d$  gọi là công sai.

b. Các tính chất:

- Số hạng thứ  $n$  được cho bởi công thức:  $u_n = u_1 + (n-1)d$ .

+ Ba số hạng  $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ

khi  $u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + u_{k+2})$ .

+ Tổng  $n$  số hạng đầu tiên  $S_n$  được xác định bởi công thức



## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d].$$

### I.4.2. Cấp số nhân

a. Định nghĩa:

$$\text{Dãy số } (u_n) \text{ được xác định bởi } \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \cdot q, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

gọi là cấp số nhân với  $q$  gọi là công bội.

b. Các tính chất:

- Số hạng thứ  $n$  được c:  $u_n = u_1 q^{n-1}$ .

+ Ba số hạng  $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân khi và chỉ

khi  $u_{k+1}^2 = u_k \cdot u_{k+2}$ .

+ Tổng  $n$  số hạng đầu tiên  $S_n$  được xác định bởi công thức :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

## I.5. Nhị thức Newton

### I.5.1. Định lí:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

**Kết quả:**

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + \dots + C_n^n \cdot x^n$$

### I.5.2. Một số công thức khai triển hay sử dụng:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n x^0$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n x^0$$

**I.6. Lượng giác.**

**I.6.1. Công thức lượng giác cơ bản:**

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
<b>sin</b>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
<b>cos</b>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
<b>tan</b>	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$-\infty$	0
<b>cot</b>	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\infty$	0	$\infty$

**I.6.2. Các hệ thức lượng giác cơ bản**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

**I.6.3. Giá trị lượng giác của cung góc có liên quan đặc biệt**

<p><b>Cung đối nhau: <math>\alpha</math> và <math>-\alpha</math></b></p> <p><math>\cos(-\alpha) = \cos \alpha</math></p> <p><math>\sin(-\alpha) = -\sin \alpha</math></p> <p><math>\tan(-\alpha) = -\tan \alpha</math></p> <p><math>\cot(-\alpha) = -\cot \alpha</math></p>	<p><b>Cung bù nhau: <math>\alpha</math> và <math>\pi - \alpha</math></b></p> <p><math>\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha</math></p> <p><math>\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha</math></p> <p><math>\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha</math></p> <p><math>\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha</math></p>
---	---

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

<p><b>Cung hơn kém <math>\pi</math>: <math>\alpha</math> và <math>\alpha + \pi</math></b></p> <p><math>\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha</math></p> <p><math>\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha</math></p> <p><math>\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha</math></p> <p><math>\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha</math></p>	<p><b>Cung phụ nhau: <math>\alpha</math> và <math>\frac{\pi}{2} - \alpha</math></b></p> <p><math>\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha</math></p> <p><math>\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha</math></p> <p><math>\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha</math></p> <p><math>\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha</math></p>
---	---

**1.6.4. Công thức lượng giác**

<p><b>Công thức cộng</b></p> <p><math>\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a</math></p> <p><math>\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a</math></p> <p><math>\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b</math></p> <p><math>\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b</math></p> <p><math>\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}</math></p> <p><math>\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}</math></p>	<p><b>Công thức nhân đôi, nhân ba</b></p> <p><math>\sin 2a = 2 \sin a \cos a</math></p> <p><math>\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1</math> <math>= 1 - 2 \sin^2 a</math></p> <p><math>\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}</math></p> <p><math>\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a</math></p> <p><math>\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a</math></p>
<p><b>Công thức biến đổi tổng thành tích</b></p> <p><math>\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}</math></p> <p><math>\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}</math></p> <p><math>\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}</math></p> <p><math>\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}</math></p>	<p><b>Công thức biến đổi tích thành tổng</b></p> <p><math>\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]</math></p> <p><math>\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]</math></p> <p><math>\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]</math></p>

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

<p><b>Công thức hạ bậc</b></p> $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$	
---	--

**I.6.5. Các phương trình lượng giác thường gặp:**

a. Phương trình :

- Dạng

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c$$

Đặt  $t = \sin x + \cos x (= \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}))$ ,  $|t| \leq \sqrt{2}$

Ta có :  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ .

Thay vào phương trình ta được phương trình theo biến t.

- Dạng  $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x = c$

Đặt  $t = \sin x - \cos x (= \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}))$ ,  $|t| \leq \sqrt{2}$

Ta có :  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$ .

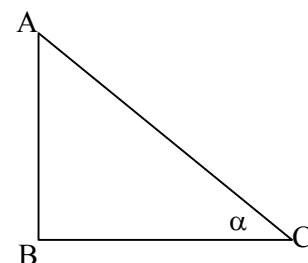
Thay vào phương trình ta được phương trình theo biến t.

**I.7. Hình học.**

**I.7.1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông**

$$\sin \alpha = \frac{AB}{CA} \qquad \cos \alpha = \frac{CB}{CA}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{CB} \qquad \cot \alpha = \frac{CB}{AB}$$

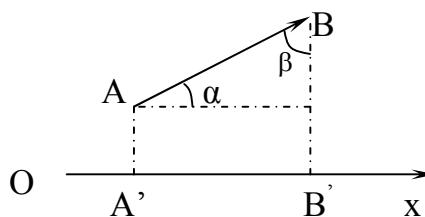


## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

### I.7.2. Công thức hình chiếu

Hình chiếu của véc tơ  $\overrightarrow{AB}$  trên trục Ox là  $\overline{A'B'}$  được xác định theo công thức:

$$\overline{A'B'} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha = |\overrightarrow{AB}| \cdot \sin \beta$$



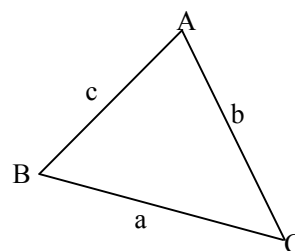
### I.7.3. Định lý hàm số cosin

Trong tam giác ABC cạnh a, b, c ta luôn có:

$$+ a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$$

$$+ b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$$

$$+ c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$$



### I.7.4. Định lý hàm số sin:

Trong tam giác ABC bên ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

## I.8. Hình học vectơ.

### I.8.1. Các định nghĩa:

a. Vectơ:

Vectơ là một đoạn thẳng định hướng.

- Mỗi vectơ có một điểm đầu và một điểm cuối.

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là:  $\overrightarrow{AB}$



**Quy ước:**

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau là vectơ không. Kí hiệu:  $\vec{0}$

b. Độ dài vectơ:

- Độ dài của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

- Độ dài của  $\overrightarrow{AB}$  kí hiệu:  $|\overrightarrow{AB}|$

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

### c. Hai vectơ cùng phương, bằng nhau, đối nhau:

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

- Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng:

### I.8.2. Các phép toán Vectơ:

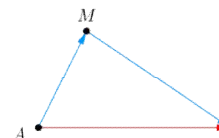
#### a. Phép cộng vectơ

- Các quy tắc:

\* Quy tắc ba điểm:

Với ba điểm A, B, M bất kì, ta luôn có

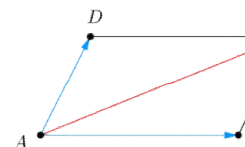
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$$



\* Quy tắc hình bình hành:

Nếu ABCD là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



#### b. Tính chất của phép cộng vectơ:

\* Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

\* Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

\* Tính chất của  $\vec{0}$ :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

#### c. Phép trừ vectơ

\*  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

\* Quy tắc ba điểm đối với phép trừ vectơ:

Cho vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và một điểm O bất kì, ta luôn có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

#### d. Phép nhân vectơ với một số thực:

- Định nghĩa:

Tích của số thực k với một vectơ  $\vec{a}$  là một vectơ, kí hiệu:  $k\vec{a}$

$$|k\vec{a}| = |k| |\vec{a}|$$

. Tính chất:

### **Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

\* Phân phối đối với phép cộng vectơ:  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

\* Phân phối đối với phép cộng:  $(k+h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$

\* Kết hợp:  $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$

e. Tích vô hướng của hai vec tơ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

f. Tích có hướng của hai vec tơ

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$$

$$\vec{c} \text{ có phương vuông góc với mặt phẳng chứa } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases}$$

$\vec{c}$  có hướng được xác định theo quy tắc bàn tay phải (quy tắc vận đình ốc)

$$\vec{c} \text{ có độ lớn } |\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

## **I.9. Đạo hàm, vi phân.**

### **I.9.1. Định nghĩa.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$  và  $x_0 \in (a; b)$  thì giới hạn nếu có của tỷ số giữa số gia hàm số  $\Delta y$  và số gia của đối số  $\Delta x$  tại  $x_0$ , khi số gia của đối số dần tới  $x_0$  được gọi là đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ .

kí hiệu:  $y'(x_0)$  hoặc  $f'(x_0)$

$$\text{với } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ hay } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

### **I.9.2. Vi phân.**

- Khi  $x$  dần tới giá trị  $x_0$  tức là  $\Delta x$  dần tới giới hạn 0 thì ta gọi nó là vi phân của  $x$ , kí hiệu là  $dx$  :  $dx = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta x$ , còn  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = dy$  được gọi là vi phân của  $y$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**I.9.3. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a ; b)$  và  $x_0 \in (a ; b)$ . Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số

$y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  và kí hiệu là  $f'(x_0)$  hoặc  $y'(x_0)$ , tức là

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{Vi phân của hàm } y = f(x) : dy = f'(x)dx$$

**I.9.4. Đạo hàm bậc cao**

- Đạo hàm  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$  được gọi là đạo hàm bậc nhất của hàm  $y = f(x)$

- Lấy đạo hàm của  $y'(x)$  ta được đạo hàm bậc hai của hàm số  $y = f(x)$ , kí

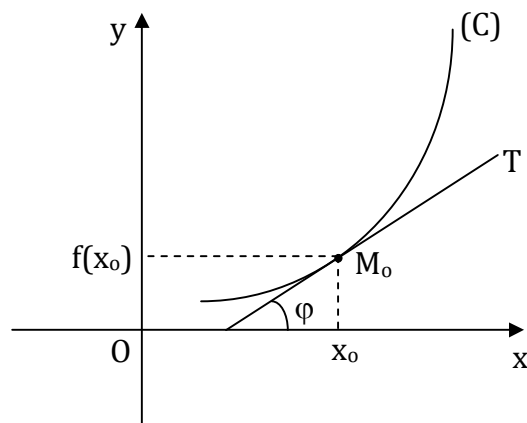
hiệu là :  $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$

- Tiếp tục lấy đạo hàm của  $y''(x)$  ta được đạo hàm bậc ba của hàm  $y$ , kí hiệu là  $y^{(3)}$ , lấy đạo hàm của  $y^{(3)}$  sẽ được đạo hàm bậc bốn  $y^{(4)}$  của  $y$ ...

**I.9.5. Ý nghĩa của đạo hàm**

**a. Ý nghĩa hình học**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a ; b)$  và có đạo hàm tại điểm  $x_0 \in (a ; b)$ . Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.



- Đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  là hệ số góc

của tiếp tuyến  $M_0T$  của (C) tại điểm  $M_0(x_0 ; f(x_0))$ .

$$\tan \varphi = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$



### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M_0(x_0; f(x_0))$  là :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ trong đó } y_0 = f(x_0)$$

#### 1.9.6. Quy tắc tính đạo hàm

Giả sử  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  là các hàm số có đạo hàm tại điểm  $x$  thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(C)' = 0 \text{ với } C \text{ là hằng số}$$

$$(ku)' = k.u' \text{ với } k \text{ là một hằng số}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ với } v = v(x) \neq 0$$

#### 1.9.7. Đạo hàm của hàm hợp

Xét hàm số  $y = f(u)$  với  $u = g(x)$ . Nếu hàm  $u = g(x)$  có đạo hàm tại  $x$  là  $u'_x$  và hàm số  $y = f(u)$  có đạo hàm tại  $u$  là  $y'_u$  thì đạo hàm của hàm  $y = f(g(x))$  tại  $x$  là  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

$$\Rightarrow \text{Vi phân của hàm } y = f(u) : dy = f'(u)u'(x)dx$$

#### 1.9.8. Một số đạo hàm của các hàm số thường gặp

Đạo hàm của các hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp $u = u(x)$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u . u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u . u'$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
	$(\ln x)' = \frac{u'}{u}$

**1.9.9. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số**

**a. Xét tính đơn điệu của hàm số**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$  ( $K$  là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của  $\mathbb{R}$ ).

- Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $K$
- Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $K$

**b. Tìm cực trị của hàm số**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ . Nếu hàm số có cực đại hoặc cực tiểu tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

Giả sử hàm  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  $(x_0 - h; x_0 + h)$ , với  $h > 0$ . Khi đó:

Nếu  $f(x_0) = 0$  ;  $f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu

Nếu  $f(x_0) = 0$  ;  $f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại

**c. Tính chất của hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  trên khoảng  $(0; +\infty)$**

Đồ thị luôn đi qua điểm  $(1; 1)$

Khi  $\alpha > 0$  hàm số luôn đồng biến, khi  $\alpha < 0$  hàm số luôn nghịch biến.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi  $\alpha > 0$ , khi  $\alpha < 0$  đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục  $Ox$ , tiệm cận đứng là trục  $Oy$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**I.10. Nguyên hàm, tích phân.**

**I.10.1. Nguyên hàm**

*a. Định nghĩa*

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$  ( $K$  là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của  $\mathbb{R}$ ). Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với  $\forall x \in K$ .

*b. Định lý*

Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì  $F(x) + C$  với  $C \in \mathbb{R}$  là họ tất cả các nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$ , kí hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

*c. Tính chất của nguyên hàm*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

*d. Nguyên hàm của một số hàm cơ bản*

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

**I.10.2. Tích phân**

*a. Định nghĩa*

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a;b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a;b]$ . Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân từ  $a$  đến  $b$  (hay là tích phân xác định trên đoạn  $[a;b]$  của hàm số  $f(x)$ ), kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Vậy : } \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi  $\int_a^b$  là dấu tích phân,  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên,  $f(x)dx$  là biểu thức

dưới dấu tích phân,  $f(x)$  là hàm dưới dấu tích phân.

*b. Các tính chất của tích phân*

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ với } k \text{ là hằng số}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*c. Phương pháp tính tích phân*

- Phương pháp đổi biến số

+ Phương pháp đổi biến số dạng 1

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$ . Để tính tích phân  $\int_a^b f(x)dx$  ta thực

hiện các bước sau:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bước 1 :** Đặt  $x = u(t)$  và tính  $dx = u'(t)dt$

**Bước 2 :**

Đổi cận :  $x = a \Rightarrow t = \alpha$   $x = b \Rightarrow t = \beta$

**Bước 3:** Tính  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$

- Phương pháp đổi biến số dạng 2 :

Để tính tích phân  $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$  ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Đặt  $t = u(x)$  và tính  $dt = u'(x)dx$

**Bước 2:** Đổi cận:  $x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha$

$x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta$

**Bước 3:** Tính  $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

**d. Phương pháp tích phân từng phần**

Nếu  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\text{Hay : } \int_a^b u v' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

**e. Một số trường hợp tích phân thường gặp**

Nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa căn dạng:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ đặt } x = |a|\sin t; \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Hoặc: } x = |a|\cos t; \text{ với } t \in [0; \pi]$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ đặt } x = \frac{|a|}{\sin t}; \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$$

$$\text{Hoặc: } x = \frac{|a|}{\cos t}; \text{ với } t \in [0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \text{ đặt } x = |a|\tan t; \text{ với } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Hoặc  $x = |a| \cot t$ ; với  $t \in (0; \pi)$

$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$  hoặc  $\frac{1}{a^2 + x^2}$  đặt  $x = a \tan t$ ; với  $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

- Nếu tích phân các hàm số có dạng:  $P(x)\sin ax$ ;  $P(x)\cos ax$ ;  $P(x)e^{ax}$ , trong đó  $P(x)$  là một đa thức thì sử dụng tích phân từng phần

Đặt :  $u = P(x)$ ,

$dv = \sin ax dx$ ;  $\cos ax dx$ ;  $e^{ax} dx$

- Nếu tích phân hàm số có dạng  $P(x)\ln x$

Đặt :  $u = \ln x$

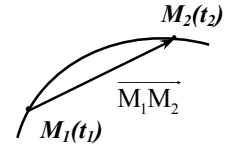
$dv = P(x) dx$

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

### II. Lí thuyết vật lí (áp dụng cho Chuyên đề).

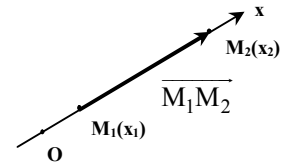
#### II.1. Độ dời

Trong khoảng thời gian  $\Delta t = t_2 - t_1$  chất điểm đã dời vị trí từ  $M_1$  đến  $M_2$ . Véc tơ  $\overrightarrow{M_1M_2}$  gọi là véc tơ độ dời của chất điểm trong khoảng thời gian nói trên.



#### II.2. Độ dời trong chuyển động thẳng

- Nếu chọn trục Ox trùng với đường thẳng quỹ đạo thì véc tơ độ dời có phương trùng với trục ấy. Giá trị đại số của véc tơ độ dời  $\overrightarrow{M_1M_2}$  bằng  $\Delta x = x_2 - x_1$ .  $x_1, x_2$  là tọa độ của điểm  $M_1, M_2$  trên trục Ox.



#### II.3. Vận tốc trung bình

$$\overrightarrow{v_{tb}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

→  $\overrightarrow{v_{tb}}$  có phương chiều trùng với véc tơ độ dời  $\overrightarrow{M_1M_2}$

- Vận tốc trung bình

$$v_{tb} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Đơn vị của vận tốc trung bình là m/s hoặc km/h.

Véc tơ vận tốc tức thời tại thời điểm  $t$  là thương số của véc tơ độ dời  $\overrightarrow{MM'}$  và khoảng thời gian  $\Delta t$  rất nhỏ để thực hiện độ dời đó  $\vec{v} = \overrightarrow{MM'} / \Delta t$ .

- Công thức  $v = \Delta x / \Delta t$ . Vận tốc tức thời  $v$  tại thời điểm  $t$  đặc trưng cho chiều và độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm đó.

- Độ lớn của vận tốc tức thời bằng tốc độ tức thời  $|v| = |\Delta x| / \Delta t = \Delta S / \Delta t$

#### II.4. Chuyển động thẳng đều

- Công thức

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t} = \text{Const} \rightarrow x = x_0 + vt$$

### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

- Công thức  $x = x_0 + vt$

gọi là phương trình chuyển động của chuyển động thẳng đều.

### II.5. Tính tương đối của chuyển động. Công thức cộng vận tốc

- Ta thấy  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$

Chia hai vế cho  $\Delta t$  ta được

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_{13}} = \overrightarrow{v_{12}} + \overrightarrow{v_{23}}$$

### II.6. Gia tốc trong chuyển động thẳng

Xét một vật chuyển động thẳng, tại các thời điểm  $t_1, t_2$  vật có vận tốc  $v_1, v_2$ .

Trong khoảng thời gian  $\Delta t = t_2 - t_1$  véc tơ vận tốc đã biến đổi một lượng  $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$

. Thương số  $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$  gọi là gia tốc trung bình trong khoảng thời gian  $\Delta t$ , ký

hiệu là  $\overrightarrow{a_{tb}}$ .

$$\overrightarrow{a_{tb}} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Giá trị đại số của gia tốc cho ta biết độ lớn và chiều của véc tơ gia tốc trung bình.

Đơn vị của  $a_{tb}$  là  $m/s^2$

- Nếu  $\Delta t$  rất nhỏ thì thương số  $\overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$  được gọi là véc tơ gia tốc tức thời

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} \quad (\text{khi } \Delta t \text{ rất nhỏ})$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{khi } \Delta t \text{ rất nhỏ})$$

Đơn vị của  $a$  cũng là  $m/s^2$ .



*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

## II.7. Phương trình chuyển động thẳng biến đổi đều

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- Trong chuyển động thẳng nhanh dần đều:

$\vec{\Delta v}$  cùng hướng với  $\vec{v}$  &  $\vec{v}_0 \rightarrow \vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{v}$  &  $\vec{v}_0$  vậy gia tốc  $a$  cùng dấu với vận tốc  $v$  và  $v_0$  và  $a$  không đổi

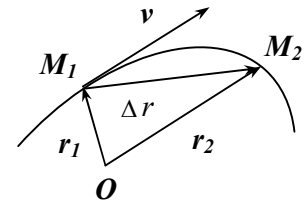
- Trong chuyển động thẳng chậm dần đều:

Gia tốc  $a$  trái dấu với vận tốc  $v$  và  $v_0$  và  $a$  không đổi.

## II.8. Vận tốc, gia tốc trong chuyển động cong

### II.8.1. Vận tốc

- Giả sử ở thời điểm  $t_1$  vật ở vị trí  $M_1$  xác định bởi bán kính vec tơ  $\vec{r}_1$ , ở thời điểm  $t_2 > t_1$  nó ở vị trí  $M_2$  xác định bởi bán kính vec tơ  $\vec{r}_2$ .  $\overline{M_1 M_2} = \vec{\Delta r}$  là vec tơ độ dời trong khoảng thời gian  $\Delta t = t_2 - t_1$ .  $\vec{v}_{tb} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$  là vec tơ vận tốc



trung bình trong khoảng thời gian  $\Delta t$  đang xét.

- Vận tốc tức thời  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$

Khi  $\Delta t \rightarrow 0$   $M_2$  tiến đến trùng với  $M_1$  dây cung  $M_1 M_2$  trở thành tiếp tuyến với đường cong tại điểm  $M_1$ . Vậy vận tốc tức thời có phương tiếp tuyến với đường cong tại  $M_1$ . Chiều của vec tơ  $\vec{v}$  trùng với chiều chuyển động. Độ lớn  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

vì khi  $\Delta t \rightarrow 0$   $|\vec{\Delta r}|$  trùng với quãng đường đi  $\Delta s$ .

### II.8.2. Gia tốc trong chuyển động cong

- Giả sử ở thời điểm  $t_1$  vật có vị trí  $M_1$  và vận tốc  $v_1$ . ở thời điểm  $t_2$  sau đó nó có vị trí  $M_2$  và vận tốc  $v_2$ . Trong khoảng thời gian  $\Delta t = t_2 - t_1$  độ biến thiên vận tốc của vật là  $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

### **Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

- Gia tốc trung bình trong khoảng thời gian  $\Delta t$  là  $\vec{a}_{tb} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

- Gia tốc tức thời tại điểm đang xét trên quỹ đạo là  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- Có thể phân tích gia tốc tức thời  $\vec{a}$  ra hai thành phần  $\vec{a}_t$  theo phương tiếp tuyến gọi là gia tốc tiếp tuyến,  $\vec{a}_n$  vuông góc với tiếp tuyến gọi là gia tốc pháp tuyến.  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_t$  đặc trưng cho sự thay đổi về độ lớn của véc tơ vận tốc.

$$\text{Độ lớn } a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = s''(t).$$

Lưu ý  $\Delta v \neq |\Delta \vec{v}|$  vì  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  còn  $\Delta v = v_2 - v_1$

$\vec{a}_n$  đặc trưng cho sự thay đổi về phương của véc tơ vận tốc.

Độ lớn  $a_n = \frac{v^2}{r}$ ,  $r$  gọi là bán kính chính khúc của đường cong tại điểm

đang xét.

$$\text{Độ lớn của gia tốc toàn phần } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

## **II.9. Hệ tọa độ Descartes**

### **II.9.1. Sơ lược về hệ tọa độ hai chiều Descartes**

Hai trục vuông góc  $x'Ox$  và  $y'Oy$  mà trên đó đã chọn 2 vectơ đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}$  sao cho độ dài của 2 vector này bằng nhau

Gốc tọa độ là  $(0,0)$

Hệ tọa độ Descartes với bốn góc phần tư. Các mũi tên ở hai đầu của mỗi trục nhằm minh họa rằng các trục này trải dài vô tận theo hướng của mũi tên.

### **II.9.2. Ứng dụng**

Hệ tọa độ trong mặt phẳng (2 chiều) ứng dụng trong toán học, vật lý,... khảo sát các tính chất chuyển động của các vật, thể hiện sự thay đổi giá trị của một đại lượng nào đó hay đặc trưng cho một đại lượng bất kỳ ... Ví dụ: Vẽ đồ thị thể hiện

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian  $t$  trong chuyển động dựa vào phương trình mối quan hệ, từ đó khi nhìn vào đồ thị thể hiện mối quan hệ giữa vận tốc và thời gian thì ta sẽ có thể nhận biết đây là loại chuyển động gì, ... Hay khi ta có phương trình quỹ đạo của một vật là  $x^2 + y^2 = a$  ( $a =$  hằng số) thì ta có thể kết luận quỹ đạo chuyển động của nó là đều; hoặc cũng có thể dùng đồ thị Oxy để xác định diện tích giới hạn bởi một đường cho trước, ví dụ như tìm diện tích được giới hạn bởi:  $y = -x + 2$  và  $(x-1)^2 + y^2 = 1$

## II. 10. Hệ tọa độ trong không gian.

### II.10.1. Hệ tọa độ ba chiều Descartes

#### a. Sơ lược về hệ tọa độ ba chiều Descartes

Trong hệ tọa độ Descartes, ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau.

- Vector  $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$  có thể biểu diễn:

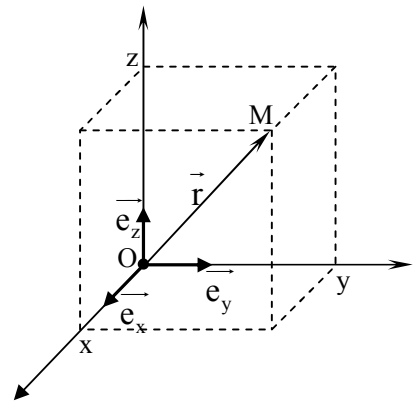
$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Hay } \vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Với  $x, y, z$  là các thành phần của vector  $\vec{r}$  trên ba trục tương ứng;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vector đơn vị. Hay còn gọi là  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

Vậy có thể biểu diễn vector  $\vec{r}$  dạng  $\vec{r}(x, y, z)$



#### b. Ứng dụng

Các hệ tọa độ hầu hết đều được áp dụng để giải các bài tập về diện tích, tích phân trong toán học cũng như giải toán vật lý. Ngoài ra hệ tọa độ trong không gian (3 chiều) ứng dụng rất nhiều trong cuộc sống, như trong kiến trúc, thể hiện tọa độ một vật trong không gian, .... Nên trong phần ứng dụng của hệ tọa độ, chúng tôi sẽ tập trung đề cập các nội dung liên quan đến chuyển động của một vật theo các đại lượng quan tâm, chẳng hạn như vận tốc.

Độ dịch chuyển vi phân của chất điểm:

### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

$$d\vec{s} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$\text{Từ đó } \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

Gọi  $v_x, v_y, v_z$  là thành phần của  $\vec{v}$  trên các trục tọa độ:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\text{Vậy, } \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = x' \\ v_y = \frac{dy}{dt} = y' \\ v_z = \frac{dz}{dt} = z' \end{cases}$$

Chất điểm chuyển động bất kì trong không gian có thể xem đồng thời tham gia ba chuyển động thẳng trên ba trục tọa độ Đêcac với các vận tốc tương ứng  $v_x, v_y, v_z$ .

$$\text{Độ lớn vector vận tốc: } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

### II.10.2. Tọa độ cầu

#### a. Sơ lược về tọa độ cầu

Cho một hệ tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$ .

Tọa độ cầu của điểm  $M$  trong không gian là bộ ba số  $(r, \theta, \varphi)$  xác định như sau:

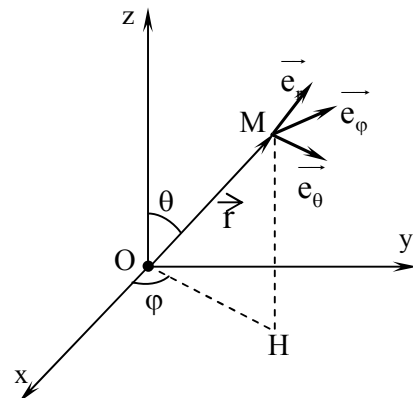
$r \geq 0$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến gốc tọa độ  $O$

$0 \leq \theta \leq \pi$  là góc  $(Oz, \overrightarrow{OM})$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$  là góc  $(Ox, \overrightarrow{OM'})$  với  $M'$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  xuống mặt phẳng  $Oxy$

Gọi  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  là các vector đơn vị trong hệ tọa độ cầu, với:

$\vec{e}_r$  là vector đơn vị dọc theo trục  $\vec{r}$



### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

$\vec{e}_\theta$  là vector đơn vị nằm trong mặt phẳng kinh tuyến đi qua A và vuông góc với  $\vec{e}_r$ , có chiều theo chiều tăng của  $\theta$ .

$\vec{e}_\varphi$  là vector đơn vị được định nghĩa như trong hệ tọa độ trụ.

Vậy vector bán kính của điểm M có dạng:  $\vec{r} = r\vec{e}_r$

- Mối liên hệ giữa ba tọa độ cầu với ba tọa độ Descartes:

$$\vec{OM} = M_r \vec{e}_r + M_\theta \vec{e}_\theta + M_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

*Chú ý:*

Các tọa độ địa lí (vĩ độ và kinh độ) đều được suy ra từ các tọa độ cầu:

(Oz): trục cực Nam – cực Bắc;

(Ox): trục cắt xích đạo và kinh tuyến

Greenwich;

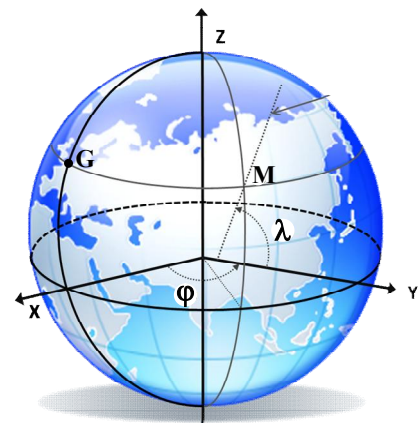
Kinh độ: tọa độ  $\varphi$  được xác định trong khoảng giữa  $-180^0$  đến  $+180^0$ ;

Vĩ độ  $\lambda$ :  $\lambda = (90^0 - \theta)$ ;

$\vec{e}_r$ : đường thẳng đứng tại một chỗ (hướng lên cao);

$\vec{e}_\theta$ : hướng về phía Nam;

$\vec{e}_\varphi$ : hướng về phía Đông.



b. Ứng dụng :

Độ dịch chuyển vi phân của chất điểm:  $d\vec{s} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

Từ đó  $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$

Gọi  $v_r, v_\theta, v_\varphi$  là thành phần của  $\vec{v}$  trong hệ tọa độ cầu:  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\text{Vậy, } \begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = r \sin \theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

Từ tính trực giao của hệ tọa độ cầu, suy ra độ lớn vector vận tốc:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\varphi})^2}$$

**II.10.3. Tọa độ trụ**

a. Sơ lược về tọa độ trụ :

Xét hệ tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$

Tọa độ trụ của điểm  $M$  là bộ ba số  $(r, \varphi, z)$  xác định như sau:

$r \geq 0$  là khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến hình chiếu vuông góc  $M'$  của  $M$  xuống mặt phẳng  $Oxy$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$  là góc  $(Ox, \overrightarrow{OM'})$

$z$  là cao độ của điểm  $M$

Gọi  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  là các vector đơn vị trong hệ tọa độ trụ, vector bán kính  $\overrightarrow{OM}$  của chất điểm có thể được viết dưới dạng:

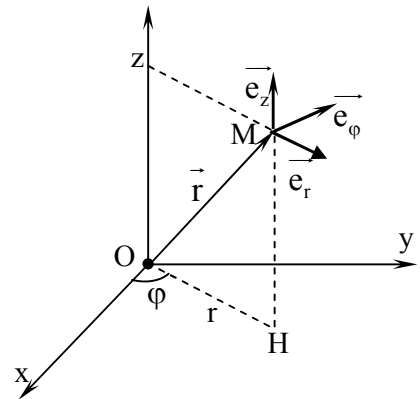
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Mối liên hệ giữa ba tọa độ trụ với ba tọa độ Descartes vuông góc:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \\ y = r \cos \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

b. Ứng dụng :

Độ dịch chuyển vi phân của chất điểm:  $d\vec{s} = dr\vec{e}_r + r d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\text{Từ đó } \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

Gọi  $v_r, v_\varphi, v_z$  là thành phần của  $\vec{v}$  trong hệ tọa độ trụ:  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$

$$\text{Vậy, } \begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

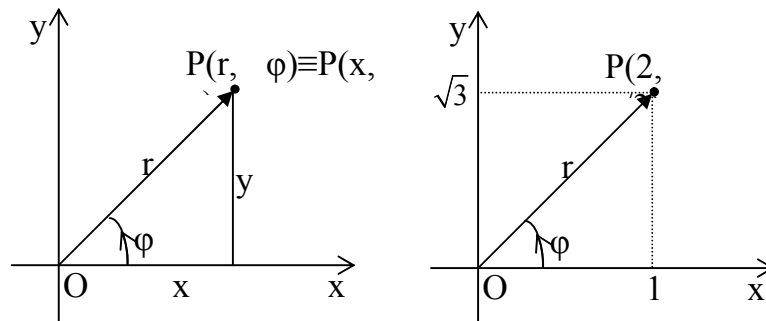
Từ tính trực giao của hệ tọa độ trụ, suy ra độ lớn vector vận tốc:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2}$$

**II.10.4. Hệ tọa độ cực**

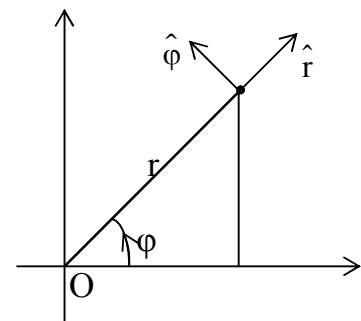
**a. Sơ lược về hệ tọa độ cực**

Với hệ tọa độ cực vị trí của một điểm trong mặt phẳng được xác định thông qua hai thông số  $(r, \varphi)$  trong đó  $r$  là khoảng cách từ gốc  $O$  tới vị trí của vật,  $\varphi$  là góc hợp bởi véc tơ  $r$  và trục gốc (hình 1), giá trị của  $\varphi$  trong đoạn  $[0; 2\pi]$ .



Hình 1. Hệ tọa độ cực

Trong hệ tọa độ Descartes véc tơ đơn vị theo trục  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt là  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  khi đó vận tốc của vật được viết  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$  và gia tốc  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ . Để xác định vận tốc và gia tốc của vật trong hệ tọa độ cực theo hai tọa độ  $r$  và  $\varphi$  ta cũng phải xác định hai véc tơ đơn vị  $\hat{r}$  và  $\hat{\varphi}$  (hình 2).



Hình 2: Các véc tơ đơn vị trong hệ tọa độ cực

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

Mối qua hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$
$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Trong hệ Descartes:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , chuyển qua tọa độ cực ta có:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j} \Rightarrow h_r \hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

Với  $h_r$  là hệ số Lamé được xác định bởi:

$$h_r^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \rightarrow h_r = 1$$

Suy ra véc tơ đơn vị:  $\hat{r} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$

Tương tự đối với véc tơ đơn vị  $\hat{\varphi}$  ta có:  $h_\varphi \hat{\varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{i} + r \cos \varphi \vec{j}$

Trong đó  $h_\varphi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r^2 \rightarrow h_\varphi = r$

Do đó, véc tơ đơn vị:  $\hat{\varphi} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$

### b. Ứng dụng

- Vận tốc

$$\text{Với } \vec{r} = r\hat{r} \rightarrow \text{vận tốc } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Mặt khác  $\hat{r} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i} + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{j} = \dot{\varphi} \hat{\varphi} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$

- Gia tốc

$$\text{Gia tốc } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi})}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

$$\text{Với } \hat{\varphi} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \rightarrow \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j} = -\dot{\varphi} \hat{r}$$

Thay biểu thức của  $\frac{d\hat{r}}{dt}$  và  $\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$  vào biểu thức của  $\vec{a}$  ta có:



### Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} - r\dot{\phi}^2\hat{r} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$$

Vậy trong hệ tọa độ cực hai thành phần của véc tơ gia tốc là:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ a_\phi = \dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \end{cases}$$

c. Phương trình động lực học

$$F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$$

$$F_\phi = ma_\phi = m(\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})$$

Nếu quỹ đạo của hành tinh là quỹ đạo tròn thì  $\dot{r} = 0$ ;  $\ddot{r} = 0$  và  $F_\phi = 0 \Leftrightarrow r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0$

## II.11. Nhận xét

1. Tùy theo tính chất của chuyển động, ta có thể chọn hệ tọa độ thích hợp để mô tả chuyển động. Thông thường, nếu chất điểm chuyển động theo một đường thẳng ta chọn hệ tọa độ Descartes, nếu chất điểm chuyển động quanh một trục ta chọn hệ tọa độ trụ, còn nếu chất điểm chuyển động quanh 1 tâm ta chọn hệ tọa độ cầu.

2. Trường hợp chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng ta thường xét trong mặt phẳng  $z = 0$ . Khi đó hệ tọa độ Descartes có hai tọa độ  $x$  và  $y$ , còn các hệ tọa độ trụ và cầu suy biến thành hệ tọa độ cực, tức hệ có hai tọa độ là  $r$  và  $\phi$ .

3. Các hệ tọa độ Descartes, trụ và cầu đều là các hệ tọa độ trực giao. Các vector đơn vị dọc theo các trục đều vuông góc với nhau từng đôi một.

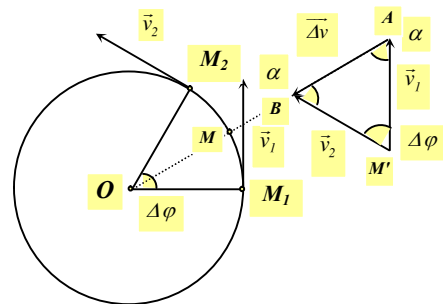
## II.12. Chuyển động tròn đều chuyển động tròn đều

### II.12.1. Vận tốc dài

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = r\omega$$

### II.12.2. Chu kì và tần số của chuyển động tròn đều

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

### II.12.3. Gia tốc trong chuyển động tròn đều.

- Gia tốc  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$  vậy  $\vec{a}$  cùng hướng với  $\Delta \vec{v}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \varphi}{2} \rightarrow \alpha \approx \frac{\pi}{2} \rightarrow \Delta \vec{v}$  tiến đến vuông góc với  $\vec{v}_M$  tức là  $\Delta \vec{v}$  hướng vào tâm đường tròn.

- Kết luận:

Trong chuyển động tròn đều  $\vec{a}$  luôn hướng về tâm đường tròn nên gọi là véctơ gia tốc hướng tâm.

- Công thức  $a_{ht} = \left| \vec{a}_{ht} \right| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$  khi  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 O} = \frac{AB}{BO} \leftrightarrow \frac{M_1 M_2}{r} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}$$
$$\frac{v \Delta t}{r} = \frac{a_{ht} \Delta t}{v} \rightarrow a_{ht} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

### II.13. Chuyển động tròn không đều

- Tốc độ dài (tức thời)  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  khi  $\Delta t \rightarrow 0$

- Tốc độ góc (tức thời)  $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$  khi  $\Delta t \rightarrow 0$

- Công thức liên hệ  $\Delta s = R \cdot \Delta \varphi \rightarrow v = \omega R$ .

- Do chuyển động tròn không đều nên  $\vec{v}$  thay đổi cả về hướng và độ lớn. Để đặc trưng cho sự thay đổi này  $\vec{a}$  sẽ bao gồm hai thành phần:

$\vec{a}_n$  là gia tốc pháp tuyến đặc trưng cho sự biến đổi về hướng của  $\vec{v}$ ,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

$\vec{a}_t$  là gia tốc tiếp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi về độ lớn của  $\vec{v}$ ,

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ khi } \Delta t \rightarrow 0$$

### **Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

- Tốc độ góc  $\omega$  cũng thay đổi, đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của  $\omega$  là gia tốc góc

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ khi } \Delta t \rightarrow 0.$$

$$\text{Mặt khác } \omega = \frac{v}{R} \rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta v}{R} \rightarrow \gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{R \cdot \Delta t} = \frac{a_t}{R} \text{ hay } a_t = \gamma \cdot R$$

- Chuyển động tròn biến đổi đều có gia tốc góc  $\gamma$  không đổi khi đó

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow \omega = \omega_0 + \gamma \cdot t$$

(Công thức này tương tự với công thức  $v = v_0 + a \cdot t$ )

## **II.14. Định luật II Niu-ton**

### **II.14.1. Công thức**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ hoặc } \vec{F} = m\vec{a}$$

### **II.14.2. Giới thiệu về nguyên lý độc lập của tác dụng.**

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \dots, \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m} &\rightarrow \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n \\ \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}{m} = \frac{\vec{F}_{\text{h1}}}{m} \end{aligned}$$

### **II.14.3. Giới thiệu về phương trình hình chiếu (đại số)**

Theo trục Ox

$$ma_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}, ma_y \dots$$

Tương tự theo các trục Oy, Oz.

### **II.14.4. Điều kiện cân bằng của một chất điểm**

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

### II.15. Lực ma sát nghỉ

- Lực ma sát nghỉ xuất hiện khi có ngoại lực tác dụng lên vật. Ngoại lực này có xu hướng làm cho vật chuyển động nhưng chưa đủ thắng lực ma sát.

- Giá của  $\vec{F}_{msn}$  nằm trong mặt tiếp xúc.

$\vec{F}_{msn}$  ngược chiều với ngoại lực.

$\vec{F}_{msn}$  cân bằng với  $\vec{F} \rightarrow F_{msn} = F$ .

Nếu ngoại lực  $F$  không song song với mặt tiếp xúc thì  $F_{msn} = F_{//}$ .

- Ghi nhận:

$F_M$  là giá trị max của lực  $F_{msn}$

Vậy  $F_{msn} \leq F_M = \mu_n N$  với  $\mu_n$  là hệ số ma sát nghỉ có trị số phụ thuộc vào cặp vật liệu tiếp xúc.

### II.16. Lực ma sát trượt

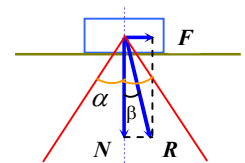
- Lực ma sát tác dụng lên một vật luôn cùng phương và ngược chiều với vận tốc tương đối của vật ấy.

$$F_{mst} = \mu_t N$$

với  $\mu_t$  là hệ số ma sát trượt có giá trị không phụ thuộc diện tích mặt tiếp xúc mà phụ thuộc vào tính chất của mặt tiếp xúc.

### Nón ma sát:

Giả sử  $R$  là hợp lực của các lực tác dụng lên vật (không kể lực ma sát). Ta phân tích  $R$  ra hai thành phần  $N$  và  $F$ . Điều kiện để vật đứng yên là



$F < F_{ms} = k.N \rightarrow \frac{F}{N} = \text{tg}\beta < \mu = \text{tg}\alpha$ . Nếu vẽ hình nón có trục là pháp tuyến và nửa

góc ở đỉnh là  $\alpha$  xác định bởi  $\text{tg}\alpha = \mu$  gọi là nón ma sát ta có qui tắc sau : Vật sẽ đứng yên nếu hợp lực  $R$  tác dụng lên vật (không kể lực ma sát) nằm trong nón ma sát. Nếu  $R$  nằm trên hoặc ngoài nón ma sát vật sẽ chuyển động.

## Chuyên đề: Cơ học chất điểm.

### II.17. Lực cản của môi trường

- Chất lỏng và chất khí không có lực ma sát nghỉ.

- Khi vật rắn chuyển động trong chất lưu sẽ xuất hiện lực cản của môi trường :

\* Tỷ lệ với tiết diện cản  $S$  - là tiết diện lớn nhất của vật vuông góc với phương chuyển động.

\* Tỷ lệ với vận tốc tương đối  $v$  nếu  $v$  nhỏ, tỷ lệ với  $v^2$  nếu  $v$  lớn.

$F = k_1 v S$  hoặc  $F = k_2 v^2 S$  ; hệ số  $k$  phụ thuộc bản chất môi trường, tính chất bề mặt của vật và hình dạng của vật.

### II.18. Chuyển động của vật bị ném xiên

- Một vật được ném đi từ mặt đất với vận tốc ban đầu  $v_0$  hợp với phương ngang một góc bằng  $\alpha$ . Tìm phương trình quỹ đạo của vật, tính độ cao cực đại, tính thời gian chuyển động, tính tầm xa, tính vận tốc của vật lúc chạm đất.

a. Chọn hệ trục  $Oxy$ , phân tích chuyển động của vật ra hai thành phần theo  $Ox$  và  $Oy$  ta có :

+ Toạ độ ban đầu  $x_0 = 0$  ;  $y_0 = 0$

+ Vận tốc ban đầu  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  ;  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$

+ Tác dụng lên vật trong quá trình chuyển động chỉ có trọng lực  $P$  nên gia

tốc của chuyển động là  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{g}$ .

Gia tốc của hai chuyển động thành phần  $a_x = 0$  ;  $a_y = -g$ .

- Phương trình của hai chuyển động thành phần là

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (1) ; \quad v_x = v_0 \cos \alpha$$

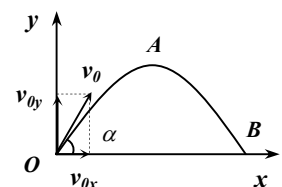
$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2) ; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

- Rút  $t$  từ phương trình 1 thay vào 2 ta được phương trình quỹ đạo của vật

$$y = v_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2$$

đó là phương trình của một parabol quay bề lõm xuống dưới và đi qua gốc toạ độ.

b. Độ cao cực đại của vật là tung độ đỉnh parabol



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$h_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

Hoặc có thể tính theo phương trình  $v_{ty}^2 - v_{0y}^2 = 2a_y h \leftrightarrow [-(v_0 \sin \alpha)^2] = 2(-g)h_{\max}$

c. Khi vật rơi đến đất nó có tọa độ  $y_B = 0 \rightarrow t_1 = 0$  ứng với lúc ném,

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ là thời gian chuyển động.}$$

d. Tương tự cho  $y_B = 0$  ta tính được  $x_1 = 0$  là tọa độ của điểm ném vật,

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ là tầm xa của vật.}$$

e. Thay  $t_2$  thay vào phương trình  $v_y$  ta được

$$v_y = -v_0 \sin \alpha = -v_{0y} \rightarrow v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0$$

## II.19. Lực hướng tâm

Khi một vật chuyển động tròn đều thì hợp lực của các lực tác dụng lên vật là lực hướng tâm.

- Độ lớn của lực hướng tâm là

$$F_{ht} = m a_{ht} = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

## II.20. Hệ quy chiếu không quán tính.

Khi xét một vật chuyển động trong một hệ quy chiếu đang chuyển động với gia tốc  $\vec{a}$  thì vật chịu thêm tác dụng của một lực quán tính

$$\vec{F}_q = -m \vec{a}$$

Với  $\vec{a}$  là gia tốc của hệ quy chiếu.

### **Lực quán tính li tâm**

- Trong hệ quy chiếu mặt đất vật chuyển động tròn đều với gia tốc  $\vec{a} = \vec{a}_{ht}$ .

- Trong hệ quy chiếu gắn với chuyển động tròn đều đó thì vật chịu tác dụng của lực quán tính li tâm.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$F_{lt} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

## **II.21. Động lượng của vật chuyển động**

### **II.21.1. Khái niệm động lượng**

- Xét bài toán hai bi va chạm trên thanh nhẵn nằm ngang, gia tốc mà hai vật thu được trong va chạm là :

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_1}{\Delta t}; \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_2}{\Delta t} \text{ trong đó } \Delta t \text{ là thời gian va chạm.}$$

- Theo định luật 3 Niu ton cặp lực tương tác giữa chúng là cặp lực trực đối. Ta có

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} &\leftrightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \leftrightarrow m_1 \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_2}{\Delta t} \\ &\leftrightarrow m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1 = -(m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2) \end{aligned}$$

Động lượng  $\vec{P}$  của một vật là đại lượng đo bằng tích số giữa khối lượng  $m$  với vận tốc  $\vec{v}$  của vật ấy  $\vec{P} = m\vec{v}$ .

Đơn vị của động lượng là kg.m/s.

### **II.21.2. Dạng khác của định luật 2 Niu ton. Xung lượng của lực**

- Dạng quen thuộc của định luật 2 Niu ton  $\vec{F} = m\vec{a}$  (1).

- Theo định nghĩa gia tốc  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Mặt khác do  $\vec{P} = m\vec{v}$  nên biến thiên của động lượng  $\Delta \vec{P} = m\Delta \vec{v}$ .

$$\text{Vậy } \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \rightarrow \Delta \vec{P} = \vec{F}\Delta t \text{ (2) .}$$

Đại lượng  $\vec{F}\Delta t$  gọi là xung lượng của lực, ta có cách phát biểu như sau : Độ biến thiên động lượng của vật trong thời gian  $\Delta t$  bằng xung lượng của lực tác dụng lên vật trong thời gian ấy.

+ Phương trình (2) tổng quát hơn phương trình (1). Trong cơ học cổ điển vận tốc của vật rất nhỏ so với vận tốc ánh sáng, khối lượng của vật là hằng số. Nếu vận tốc của vật rất lớn thì phương trình (1) không còn đúng nhưng phương trình (2) thì vẫn đúng.

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

### **II.21.3. Định luật bảo toàn động lượng**

#### *a. Hệ vật*

- Hệ vật là tập hợp hai hay nhiều vật có liên hệ với nhau.
- Lực tương tác giữa các vật trong hệ gọi là nội lực, lực do vật ngoài hệ tác dụng lên vật trong hệ gọi là ngoại lực.
- Hệ kín là hệ không có các ngoại lực tác dụng.

#### *b. Định luật*

- Xét một hệ : hai lực  $F_{21}$  &  $F_{12}$  là các nội lực,  $F_1$  &  $F_2$  là các ngoại lực. Ta có

$$+ \begin{cases} \Delta \vec{P}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21}) \Delta t \\ \Delta \vec{P}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12}) \Delta t \end{cases} \rightarrow \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Delta t \text{ do } \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0.$$

Nhận xét :

Tổng độ biến thiên động lượng của các vật trong thời gian  $\Delta t$  bằng xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

- Nếu hệ vật là hệ kín thì  $F_1 = F_2 = 0 \rightarrow \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = 0$ .

Ta có định luật :

Tổng động lượng của một hệ kín được bảo toàn.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots = \vec{C}^{\text{te}} \text{ hay } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

#### *c. Một số trường hợp đặc biệt*

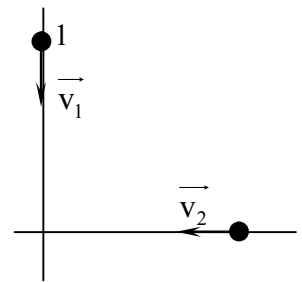
- Nếu ngoại lực tác dụng là rất nhỏ so với nội lực thì ta có thể bỏ qua vai trò của ngoại lực và coi đó là hệ kín.
- Nếu hệ không phải là hệ kín, nhưng ngoại lực tác dụng chỉ có theo một phương Oz chẳng hạn thì động lượng theo hai phương Ox, Oy vẫn được bảo toàn.



**PHẦN III: BÀI TẬP**

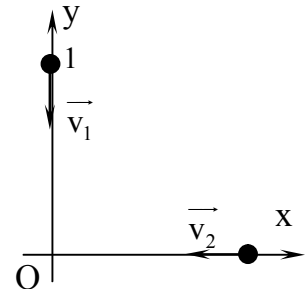
**DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM.**

**Bài 1:** Hai vật 1 và 2 chuyển động với vận tốc không đổi trên hai đường thẳng vuông góc với nhau cho với tốc độ tương ứng  $v_1 = 30\text{m/s}$ ,  $v_2 = 20\text{m/s}$  (Hình vẽ). Tại thời điểm ban đầu, hai vật xuất phát cùng lúc. Tại thời điểm khoảng cách giữa hai vật nhỏ nhất thì vật 1 cách giao điểm (của quỹ đạo chuyển động của hai vật) một đoạn  $S_1 = 500\text{m}$ , hỏi lúc này vật 2 cách giao điểm đó một đoạn  $S_2$  là bao nhiêu?



BG:

Gọi tọa độ lúc đầu của vật 1 và 2 tới vị trí giao nhau của hai quỹ đạo là  $x$  và  $y$ . Sau thời gian  $t$  chuyển động khoảng cách giữa chúng là:



$$d = \sqrt{(y - v_1 t)^2 + (x - v_2 t)^2}$$

$$= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(v_1 y + v_2 x)t + y^2 + x^2}$$

$$d = d_{\min} \Rightarrow t = \frac{v_1 y + v_2 x}{v_1^2 + v_2^2}$$

Khi đạt được khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật thì:

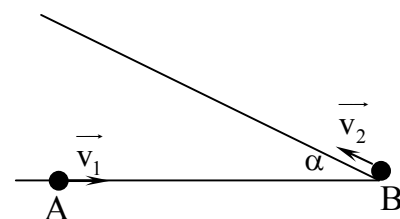
$$S_1 = \left| y - v_1 \cdot \frac{v_1 y + v_2 x}{v_1^2 + v_2^2} \right| = \left| \frac{v_2 (v_2 y - v_1 x)}{v_1^2 + v_2^2} \right|$$

Lúc này:  $\Rightarrow S_2 = |x - v_2 t|$

$$x - v_2 \cdot \frac{v_1 y + v_2 x}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1 (v_1 x - v_2 y)}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$S_2 = 750\text{m}.$$

**Bài 2:** Có hai vật 1 và 2 chuyển động thẳng đều với tốc độ tương ứng là  $v_1$  và  $v_2$ . Tại thời điểm ban đầu, hai vật xuất phát cùng lúc, vật 2 xuất phát từ vị trí B, vật 1 xuất phát từ vị trí A (Hình



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

vẽ). Biết  $AB = \ell$ . Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa chúng trong quá trình chuyển động và thời gian đạt được khoảng cách đó (theo  $\ell, v_1, v_2, \alpha$ )?

BG:

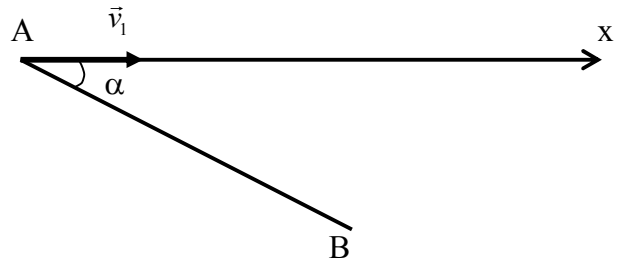
Giả sử sau thời gian  $t$  khoảng cách giữa hai vật là

$$\begin{aligned} \Rightarrow d &= \sqrt{(\ell - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - 2(\ell - v_1 t)v_2 t \cos \alpha} \\ &= \sqrt{(v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2)t^2 - 2\ell(v_1 + v_2 \cos \alpha)t + \ell^2} \end{aligned}$$

$d$  sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi tam thức trong căn đạt giá trị nhỏ nhất

$$\begin{aligned} d = d_{\min} &\Leftrightarrow t = \frac{\ell(v_1 + v_2 \cos \alpha)}{v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2} \\ \Rightarrow d_{\min} &= \frac{\ell v_2 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}} \end{aligned}$$

**Bài 3:** Một xe ô tô xuất phát từ điểm A chuyển động trên đường thẳng Ax với vận tốc không đổi  $v_1 = 54\text{km/h}$ . Cùng lúc đó xe máy xuất phát tại điểm B cách A một đoạn 300m với vận tốc không đổi



$v_2$  để đến gặp xe ô tô. Biết Ax hợp với AB góc  $\alpha = 30^\circ$  (hình vẽ 1).

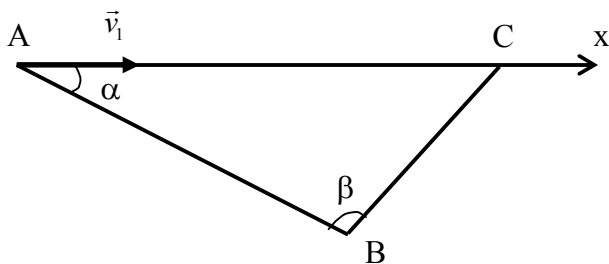
1. Hỏi xe máy phải chuyển động theo hướng nào để khi đến đường Ax thì đúng lúc ô tô đi đến? Tính thời gian từ lúc hai xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp nhau. Biết xe máy có vận tốc  $v_2 = 36\text{km/h}$ .

2. Hỏi xe máy chuyển động theo hướng nào với vận tốc nhỏ nhất là bao nhiêu để gặp được ô tô?

BG:

1.

Giả sử hai xe gặp nhau tại C và góc  $(ABC) = \beta$ .



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{AC}{BC} \cdot \sin \alpha = \frac{v_1}{v_2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{4}$$

Giải ra được  $\beta = 48,59^\circ$  hoặc  $\beta = 131,4^\circ$

- Khi  $\beta = 48,59^\circ$

$$\text{Ta có: } \frac{AC}{\sin(48,59^\circ)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 30^\circ - 48,59^\circ)}$$

$$\Rightarrow AC \approx 229,535(\text{m}); t = \frac{AC}{v_1} \approx 15,3(\text{s})$$

- Khi  $\beta = 131,4^\circ$

$$\text{Ta có: } \frac{AC}{\sin(131,4^\circ)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 30^\circ - 131,4^\circ)}$$

$$\Rightarrow AC \approx 705,5236(\text{m}); t = \frac{AC}{v_1} \approx 47(\text{s})$$

**2.**

Điều kiện để xe máy gặp được ô tô là:  $t_2 \leq t_1$ ;

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{v_2} \leq \frac{AC}{v_1}; \Rightarrow v_2 \geq \frac{BC}{AC} v_1; \text{ mà } \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}; \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$\Rightarrow v_2 \geq \frac{v_1}{2 \cdot \sin \beta} \geq \frac{v_1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi:  $\sin \beta = 1$ ;  $\Rightarrow \beta = 90^\circ$ .

Vậy, xe máy chuyển động theo hướng hợp với AB góc  $90^\circ$  và vận tốc nhỏ nhất:

$$v_{2(\min)} = \frac{v_1}{2} = 7,5(\text{m/s}).$$

**Bài 4:** Một người đứng ở sân ga nhìn ngang đầu toa thứ nhất của một đoàn tàu bắt đầu chuyển động nhanh dần đều (vận tốc ban đầu bằng 0). Toa thứ nhất vượt qua người ấy sau thời gian  $t_1$ . Hỏi toa thứ n đi qua người ấy trong thời gian bao lâu?

Biết các toa có cùng chiều dài là S, bỏ qua khoảng nối giữa các toa.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

BG:

Toa thứ nhất vượt qua người ấy sau thời gian  $t_1$ :

$$s = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$n$  toa đầu tiên vượt qua người ấy mất thời gian  $t_n$ :

$$ns = \frac{a.t_n^2}{2} \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2nS}{a}};$$

$n-1$  toa đầu tiên vượt qua người ấy mất thời gian  $t_{n-1}$ :

$$(n-1)s = \frac{at_{n-1}^2}{2} \Rightarrow t_{n-1} = \sqrt{\frac{2(n-1)S}{a}}$$

Toa thứ  $n$  vượt qua người ấy trong thời gian  $\Delta t$ :

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} = \sqrt{\frac{2S}{a}}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

$$\Delta t = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})t_1$$

**Bài 5:** Một chất điểm chuyển động từ A đến B cách A một đoạn  $s$ . Cứ chuyển động được 3 giây thì chất điểm lại nghỉ 1 giây. Trong 3 giây đầu chất điểm chuyển động với vận tốc  $v_0 = 5 \frac{m}{s}$ . Trong các khoảng 3 giây tiếp theo chất điểm chuyển động với vận tốc  $2v_0, 3v_0, \dots, nv_0$ . Tìm tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường AB trong các trường hợp

a.  $s = 315 \text{ m}$  ;

b.  $s = 325 \text{ m}$  .

BG:

Đặt:  $t_1 = 3(s)$

Gọi quãng đường mà chất điểm đi được sau  $nt_1$  giây là  $s$ :

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

Trong đó  $s_1$  là quãng đường đi được của chất điểm trong 3 giây đầu tiên.  $s_2, s_3, \dots, s_n$  là các quãng đường mà chất điểm đi được trong các khoảng 3 giây kế tiếp.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Suy ra:

$$S = v_0 t_1 + 2v_0 t_1 + \dots + nv_0 t_1 = v_0 t_1 (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} v_0 t_1 = 7,5n(n+1) \text{ (m)}$$

a. Khi  $s = 315 \text{ m} \Rightarrow 7,5n(n+1) = 315 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -7 \end{cases}$  (loại giá trị  $n = -7$ )

Thời gian chuyển động:

$$t = nt_1 + n - 1 = 23(\text{s})$$

Tốc độ trung bình:  $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{315}{23}$

$$\bar{v} = 13,7(\text{m/s}).$$

b. Khi  $s = 325 \text{ m}$ :

Thời gian đi 315 mét đầu là 23 giây

Thời gian đi 10 mét cuối là :

$$\Delta t = \frac{10}{v_{n+1}} = \frac{10}{7.5} = 0.29(\text{s})$$

Tốc độ trung bình:

$$\bar{v} = \frac{325}{23 + 0,29 + 1}$$

$$\bar{v} = 13,38(\text{m/s})$$

**Bài 6:** Một chất điểm chuyển động chậm dần trên một đường thẳng với một gia tốc có độ lớn  $w$  phụ thuộc vào vận tốc  $v$  theo công thức  $w = a\sqrt{v}$ , trong đó  $a$  là một hằng số dương. Tại thời điểm ban đầu vận tốc của chất điểm bằng  $v_0$ .

Hỏi quãng đường mà chất điểm đi được từ thời điểm ban đầu cho đến khi dừng lại và thời gian đi hết quãng đường ấy ?

BG:

Về độ lớn:  $w = a\sqrt{v}$

Về dấu ta có:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$w = -a\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -a\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -adt \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{v} = -at + C$$

Lúc  $t = 0$ ,  $v = v_0 \Rightarrow C = 2\sqrt{v_0} \Rightarrow 2\sqrt{v} = -at + 2\sqrt{v_0}$

$$\Rightarrow v = v_0 - a\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{a^2}{4} \cdot t^2$$

Khi chất điểm dừng lại thì  $v = 0$ :

$$\Rightarrow t = \frac{2}{a}\sqrt{v_0} \quad (*)$$

Quãng đường vật đi được cho đến khi dừng lại:

$$S = \int_0^{\frac{2}{a}\sqrt{v_0}} v dt = \int_0^{\frac{2}{a}\sqrt{v_0}} (v_0 - a\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{a^2}{4} \cdot t^2) dt \\ \Rightarrow S = S = \frac{2}{3a} \cdot v_0^{\frac{3}{2}}$$

b. Từ (\*) ta có thời gian đi hết quãng đường ấy:  $t = \frac{2}{a}\sqrt{v_0}$ .

**Bài 7:** Một hạt chuyển động theo chiều dương của trục Ox với vận tốc  $v$  phụ thuộc vào tọa độ  $x$  của hạt theo công thức  $v = a\sqrt{x}$  ( $a$  là hằng số dương). Biết tại thời điểm ban đầu  $t = 0$  hạt ở vị trí có tọa độ  $x = 0$ . Hãy xác định :

a. Vận tốc và gia tốc của hạt theo thời gian.

b. Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ vị trí có tọa độ  $x = 0$  đến vị trí có tọa độ  $x$ .

BG:

a. Theo đề bài :  $v = a\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = a\sqrt{x}$

$$\text{hay } \frac{dx}{\sqrt{x}} = a dt$$

$$\text{Nguyên hàm hai vế : } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int a dt \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = at + C$$

Tại  $t = 0$  thì  $x = 0$  nên  $C = 0$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Do vậy  $2\sqrt{x} = at \Rightarrow x = \frac{a^2}{4}t^2$

Vận tốc của vật  $v = \frac{dx}{dt} = x'$

$$v = \frac{a^2}{2}t$$

Gia tốc của vật :

$$w = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

$$w = \frac{a^2}{2}$$

b. Vận tốc trung bình  $\bar{v} = \frac{x}{t} = \frac{a^2}{4}t$

$$\bar{v} = \frac{a\sqrt{x}}{2}$$

**Bài 8:** Một chất điểm chuyển động chậm dần trên quỹ đạo là một cung tròn bán kính  $R$ , sao cho tại mỗi điểm trên quỹ đạo thì gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến luôn có độ lớn bằng nhau. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , vận tốc của chất điểm là  $v_0$ . Hãy xác định:

- Vận tốc của chất điểm theo thời gian và theo quãng đường đi được  $s$ .
- Gia tốc toàn phần theo vận tốc và quãng đường đi được.

BG:

a. Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} a_t = a_n &\Rightarrow -\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} \\ \Leftrightarrow -\frac{dv}{v^2} &= \frac{dt}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

Lấy tích phân 2 vế

$$\int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{dt}{R} \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{R}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{R}t}$$

từ (1)  $\Rightarrow -\frac{dv}{v} = \frac{ds}{R}$  (2) (ds = vdt)

Lấy tích phân 2 vế phương trình (2):

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^s \frac{ds}{R} \Leftrightarrow -\ln \frac{v}{v_0} = \frac{s}{R}$$

$$\Rightarrow v = v_0 \cdot e^{\frac{-s}{R}}$$

b. Gia tốc toàn phần:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_t \sqrt{2} = a_n \sqrt{2}$$

Gia tốc toàn phần theo vận tốc:

$$a = \frac{v^2}{R} \sqrt{2}$$

Gia tốc toàn phần theo quãng đường đi được:

$$a = \frac{v_0^2 \cdot e^{\frac{-2s}{R}}}{R} \sqrt{2}$$

**Bài 9:** Một con chó chạy với tốc độ không đổi  $v_1$  đuổi theo con thỏ, con thỏ chạy dọc theo một đường thẳng với tốc độ  $v_2$ . Con chó luôn hướng đến vị trí của con thỏ. Tại thời điểm ban đầu cả hai con vật cùng ở trên một đường thẳng vuông góc với hướng chạy của thỏ và cách nhau một khoảng  $a$ .

a. Vận tốc của thỏ và chó phải thỏa mãn điều kiện nào thì chó đuổi kịp thỏ.

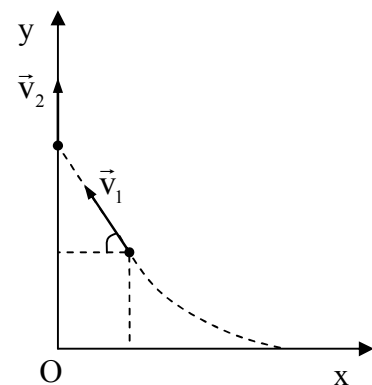
b. Trong điều kiện chó đuổi kịp thỏ, tìm quãng đường mà mỗi con đi được cho đến khi gặp nhau

BG:

- Xét chuyển động của con chó:

$$\tan \alpha = -y'(x) = \frac{v_2 t - y}{x} \Rightarrow xy'(x) = y - v_2 t \quad (1)$$

$$ds = v_1 dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (2)$$





**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

- Đạo hàm theo x hai vế (1) ta có:

$$y'(x) + x.y''(x) = y'(x) - v_2 \frac{dt}{dx} \Rightarrow v_2 \frac{dt}{dx} = -x.y''(x) \quad (3)$$

- Từ (2) và (3) ta có:

$$\frac{v_1}{v_2} x.y''(x) = \sqrt{1+y'(x)^2} \Rightarrow \frac{dy'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \frac{v_2}{v_1} \frac{dx}{x}$$

- Tại  $t = 0$  thì  $y'(x) = 0$  và  $x = a$ , lấy tích phân hai vế phương trình trên ta có:

$$\int_0^{y'(x)} \frac{dy'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \frac{v_2}{v_1} \int_a^x \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left(y'(x) + \sqrt{1+y'(x)^2}\right) = \frac{v_2}{v_1} (\ln x - \ln a) = \ln\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}$$

$$\Rightarrow y'(x) + \sqrt{1+y'(x)^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}$$

$$\Rightarrow 1+y'(x)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2v_2}{v_1}} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}} y'(x) + y'(x)^2$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2v_2}{v_1}} - 1}{2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}} = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{1}{2} \int_a^x \left( \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{v_2}{v_1}}} \frac{v_1}{v_1 + v_2} \left[ x^{\frac{v_2+1}{v_1}} - a^{\frac{v_2+1}{v_1}} \right] - \frac{1}{2} a^{\frac{v_2}{v_1}} \frac{v_1}{v_1 - v_2} \left[ x^{1-\frac{v_2}{v_1}} - a^{1-\frac{v_2}{v_1}} \right] \end{aligned}$$

Chó sẽ đuổi kịp thỏ nếu khi cho  $x \rightarrow 0$  thì  $y$  phải có giá trị hữu hạn. Điều này chỉ

xảy ra nếu  $\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) > 0 \Rightarrow v_1 > v_2$ .

Quãng đường thỏ chạy:

$$s_2 = y_{x=0} = \frac{av_1 v_2}{v_1^2 - v_2^2}$$

Quãng đường chó chạy:

$$s_1 = v_1 \frac{s_2}{v_2} = \frac{av_1^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

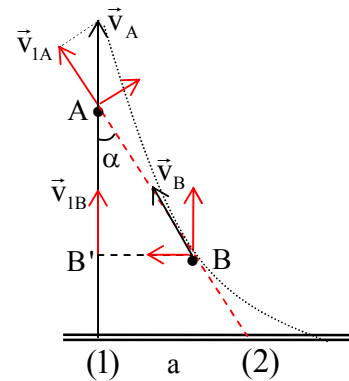
**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 10:** Hai tàu A, B cách nhau một khoảng a, đồng thời chuyển động đều với cùng độ lớn vận tốc là v, từ hai điểm sát với bờ hồ thẳng. Tàu A chuyển động theo hướng vuông góc với bờ, trong khi tàu B luôn hướng về tàu A. Sau một thời gian đủ lâu, tàu A và tàu B chuyển động trên cùng một đường thẳng nhưng cách nhau một khoảng không đổi là d. Tìm d.

BG:

- Rõ ràng là tàu B không phải chuyển động thẳng. Hình vẽ biểu diễn vị trí hai tàu tại một thời điểm nào đó. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên phương chuyển động của tàu A. Tại thời điểm đó ta có:

$$\begin{cases} v_A = v_B = v \\ v_{IB} = v \cdot \cos \alpha; v_{IA} = v \cdot \cos \alpha \end{cases}$$



- Xét trên phương AB, sau thời gian rất nhỏ  $\Delta t$ , khoảng cách AB giảm một lượng là:  $(v_B - v_{IA})\Delta t = v(1 - \cos \alpha)\Delta t$ .

- Xét trên phương chuyển động của tàu A: sau thời gian rất nhỏ  $\Delta t$ , khoảng cách AB' tăng một lượng là:  $(v_A - v_{IB})\Delta t = v(1 - \cos \alpha)\Delta t$ .

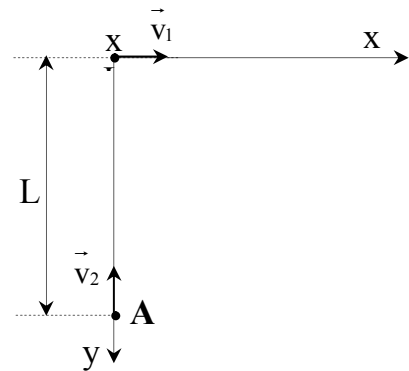
- Như vậy ta nhận ra một điều là: Khoảng cách AB giảm đi bao nhiêu thì khoảng cách AB' tăng lên bấy nhiêu, tức là:  $AB + AB' = \text{const}$

- Ban đầu ta có:  $v_{IB} = 0, v_{2B} = v; v_{IA} = v, v_{2A} = 0$

$$\Rightarrow AB + AB' = a + 0 = a.$$

Khi hai tàu ở trên đường thẳng thì:  $AB = AB' = d \rightarrow AB + AB' = 2d = a \rightarrow d = a/2$

**Bài 11:** Một người chạy từ O dọc theo trục Ox với vận tốc không đổi là  $v_1$ . Con chó của người này lúc  $t = 0$ , tại điểm A cách O một khoảng L ( $OA \perp Ox$ ), bắt đầu chạy với vận tốc không đổi là  $v_2$  luôn hướng về phía chủ (Hình vẽ 1).



1. Tìm gia tốc của chó.

2. Cho  $v_2 > v_1$ . Sau bao lâu chó đuổi kịp chủ?

3. Cho  $v_2 = v_1 = v$ . Tìm khoảng cách giữa chó và chủ trong thời gian dài.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

BG:

1. Tìm gia tốc của chó:

Vì  $v_2 = \text{const} \Rightarrow a_{2t} = 0 \Rightarrow a_2 = a_{2n} = \frac{v_2^2}{R}$  (1) (R: Bán kính chính khúc)

\* Xét trong  $\Delta t$  rất nhỏ:

- Chó chạy được cung:  $AB = S_2 = v_2 \cdot \Delta t = R\alpha$

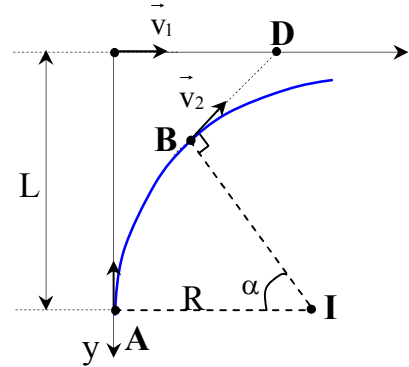
- Người đi được:  $OD = S_1 = v_1 \cdot \Delta t$

\* Ta có:  $\tan \alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{L} = \frac{S_1}{L} \approx \alpha \Rightarrow S_1 = L\alpha$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{L}{R} \Rightarrow R = L \cdot \frac{v_2}{v_1} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1):  $a_2 = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_2^2}{L \cdot \frac{v_2}{v_1}} = \frac{v_1 \cdot v_2}{L}$

$$a_{\text{chó}} = a_2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{L}$$



2. Khi  $v_2 > v_1$ : Sau bao lâu chó đuổi kịp người?

\* Tại thời điểm t:

- Chó ở C:  $(x,y)$ :  $\vec{r}_2 = \vec{OC}$

- Người ở N:  $x_1 = ON = v_1 t$ ;  $\vec{ON} = \vec{r}_1$

\* Ta có:  $\vec{r}_2 + \vec{CN} = \vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{CN} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Tính đạo hàm hai vế theo thời gian:

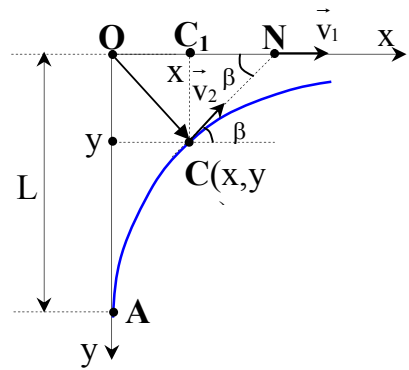
$$\frac{d(\vec{CN})}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (3)$$

\* Chiếu (3) lên Ox, CN:

- Lên Ox:  $\frac{d(CN)}{dt} = v_1 - v_2 \cdot \cos \beta$

- Lên CN:  $\frac{d(CN)}{dt} = v_1 \cdot \cos \beta - v_2$

\* Khử  $\beta$ :  $v_1 \frac{d(C_1N)}{dt} + v_2 \frac{d(CN)}{dt} = v_1^2 - v_2^2$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Leftrightarrow v_1 d(C_1 N) + v_2 d(CN) = (v_1^2 - v_2^2) dt$$

\* Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$v_1 \cdot C_1 N + v_2 \cdot CN = (v_1^2 - v_2^2)t + C_0 \quad (C_0 = \text{hằng số})$$

\* Tìm  $C_0$ : Dựa vào điều kiện ban đầu  $t = 0$

$$\text{Lúc } t = 0: C \equiv A; C_1 \equiv N \equiv O$$

$$\Leftrightarrow v_1 \cdot O + v_2 \cdot L = C_0 \Rightarrow C_0 = v_2 \cdot L$$

$$\text{Vậy: } v_1 \cdot C_1 N + v_2 \cdot CN = (v_1^2 - v_2^2)t + v_2 L \quad (4)$$

\* Khi chó đuổi kịp chủ:  $C \equiv C_1 \equiv N$

$$v_1 \cdot O + v_2 \cdot O = (v_1^2 - v_2^2) \cdot \tau + v_2 \cdot L \Rightarrow \tau = \frac{v_2 L}{v_2^2 - v_1^2}$$

**3.** Khi  $v_1 = v_2 = v$ . Tìm khoảng cách chó và chủ.

$$\text{Thay } v_1 = v_2 = v \text{ vào (4): } C_1 N + CN = L$$

Sau  $t$  lớn:  $C_1 \equiv C$ , chó chạy trên  $Ox$ , khi đó khoảng cách chó và chủ là

$$d = CN$$

$$CN + CN = L = 2d \Rightarrow d = \frac{L}{2}$$

**Bài 12:** Một ca nô chuyển động từ bến A của bờ sông bên này sang bờ sông bên kia. Sông thẳng và có chiều rộng là  $b$ . Người ta dựng hệ tọa độ Oxy mà gốc O tại A, trục Ox vuông góc với bờ sông, cắt bờ đối diện ở B, trục Oy hướng dọc bờ sông theo chiều nước chảy. Do cấu tạo của dòng sông, vận tốc chảy  $u$  của nước tại điểm có tọa độ  $x$  phụ thuộc vào  $x$  theo quy luật:

$$u = \left[ \left( 1 + \frac{x}{5b} \right) - \left( \frac{2x}{5b} - \frac{1}{5} \right) h \left( x - \frac{b}{2} \right) \right] u_0$$

Trong đó  $u_0$  là một hằng số dương, còn  $h \left( x - \frac{b}{2} \right)$  là hàm Heaviside của biến

$\left( x - \frac{b}{2} \right)$ . Hàm Heaviside của biến  $X$  được định nghĩa như sau:

$$h(X) = 0 \text{ khi } X < 0$$

$$h(X) = 1 \text{ khi } X \geq 0$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

1. Giả sử vận tốc của ca nô đối với nước có độ lớn  $v_0$  không đổi và luôn hướng theo phương vuông góc với bờ sông.

a. Xác định phương trình quỹ đạo và phác họa quỹ đạo của ca nô

b. Khi cập bờ bên kia, ca nô cách B một đoạn bao nhiêu?

c. Chứng minh rằng gia tốc của ca nô so với bờ sông phụ thuộc bậc nhất vào  $v_0$ .

Tại sao gia tốc này lại đổi hướng đột ngột tại  $x = b/2$

2. Giả sử vận tốc của ca nô đối với nước luôn hướng theo hướng vuông góc với bờ sông nhưng có độ lớn thay đổi sao cho ca nô cập bờ bên kia ở điểm cách B một đoạn  $c$  về phía hạ lưu theo một quỹ đạo thẳng. Lập vận tốc của ca nô theo  $x$

BG:

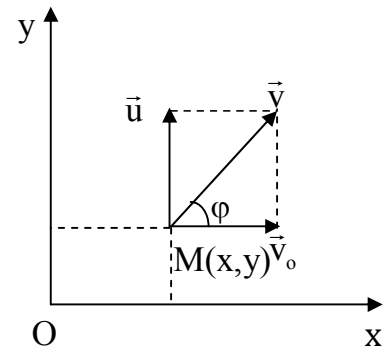
1.

a. Ta có:

$$\tan \varphi = \frac{u}{v_0} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \frac{u}{v_0} dx$$

\* Khi  $0 \leq x < \frac{b}{2}$  thì  $u = \left(1 + \frac{x}{5b}\right) u_0$

$$\Rightarrow dy = \left(1 + \frac{x}{5b}\right) \frac{u_0}{v_0} dx \Rightarrow y = \frac{u_0}{v_0} x + \frac{u_0}{10v_0 b} x^2 + C_1$$



Điều kiện ban đầu:  $y(0) = 0$  nên  $C_1 = 0$

\* Khi  $\frac{b}{2} \leq x \leq b$  thì  $u = \left(\frac{6}{5} - \frac{x}{5b}\right) u_0$

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{6}{5} - \frac{x}{5b}\right) \frac{u_0}{v_0} dx \Rightarrow y = \frac{6u_0}{5v_0} x - \frac{u_0}{10v_0 b} x^2 + C_2$$

Do điều kiện liên tục tại  $x = b/2$  nên:

$$\frac{u_0}{v_0} \cdot \frac{b}{2} + \frac{u_0}{10v_0 b} \frac{b^2}{4} = \frac{6u_0}{5v_0} \cdot \frac{b}{2} - \frac{u_0}{10v_0 b} \frac{b^2}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{u_0 b}{20v_0}$$

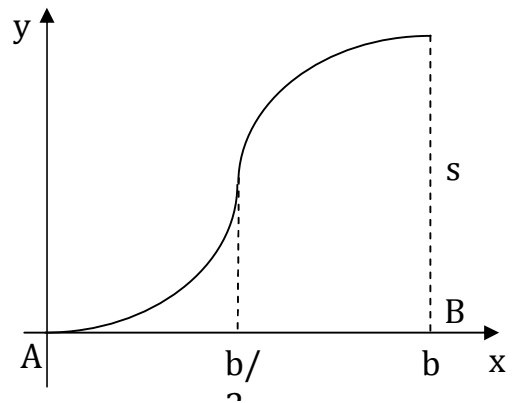
$$\Rightarrow y = \frac{6u_0}{5v_0} x - \frac{u_0}{10v_0 b} x^2 - \frac{u_0 b}{20v_0}$$

Sử dụng hàm Heaviside, hàm  $y = f(x)$  trong cả đoạn  $0 \leq x \leq b$  là:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$y = \frac{u_0}{v_0}x + \frac{u_0}{10v_0b}x^2 - \left[ \frac{u_0x^2}{5bv_0} - \frac{u_0x}{5v_0} + \frac{u_0b}{20v_0} \right] h\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

Quỹ đạo của ca nô là 2 nửa parabol



b. Khi cập bờ bên kia, ca nô cách bến B một đoạn :

$$s = y(b) = \frac{21u_0b}{20v_0}$$

c. Gia tốc của ca nô

$$a = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}$$

Với  $x' = v_0$  nên  $x'' = 0$

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x).x' \Rightarrow y'' = f''(x).(x')^2 = f''(x)v_0^2 = a$$

\* Khi  $0 \leq x < \frac{b}{2}$  thì :

$$y = \frac{u_0x}{v_0} + \frac{u_0x^2}{10v_0b} \Rightarrow y' = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_0x}{5v_0b} \Rightarrow y'' = \frac{u_0}{5v_0b} \Rightarrow a = \frac{u_0}{5v_0b} > 0$$

\* Khi  $\frac{b}{2} \leq x \leq b$  thì :

$$y = \frac{6u_0}{5v_0}x - \frac{u_0}{10v_0b}x^2 - \frac{u_0b}{20v_0}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6u_0}{5v_0} - \frac{u_0}{5v_0b}x \Rightarrow y'' = -\frac{u_0}{5v_0b} \Rightarrow a = -\frac{u_0}{5v_0b} < 0$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Như vậy gia tốc  $a$  của canô luôn phụ thuộc bậc nhất vào  $v_0$ . Nửa dòng sông đầu gia tốc có giá trị dương, còn nửa dòng sông sau gia tốc có giá trị âm.

Gia tốc của canô so với bờ chính là gia tốc mà canô bị dòng nước kéo theo khi chuyển động ngang dòng nước. Vì vận tốc của dòng nước so với bờ thay đổi bậc nhất theo tọa độ  $x$ , ở nửa dòng sông đầu theo chiều  $x$  tăng thì vận tốc  $u$  tăng nên gia tốc có giá trị dương. Ở nửa dòng sông sau, theo chiều tăng của  $x$ , vận tốc  $u$  giảm, do đó gia tốc có giá trị âm. Do hàm số  $u = u(x)$  không liên tục tại điểm  $x = b/2$ , do vậy giá trị của  $a$  không thay đổi liên tục tại  $x = b/2$  mà thay đổi đột ngột tại đó.

2. Ta có:

$$\tan \varphi = \frac{u}{v} = \frac{c}{b} \Rightarrow v = \frac{bu}{c} \Rightarrow v = \frac{u_0 b}{c} \left[ \left( 1 + \frac{x}{5b} \right) - \left( \frac{2x}{5b} - \frac{1}{5} \right) h \left( x - \frac{b}{2} \right) \right]$$

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

**DẠNG 2: MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM.**

**Bài 1:** Một vật có khối lượng 3kg chuyển động dưới tác dụng của hợp lực  $\vec{F}$  phụ thuộc thời gian trong hệ trục tọa độ Oxyz:

$$\vec{F} = [15t\vec{i} + (3t - 12)\vec{j} + 6t^2\vec{k}]$$

với  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz.

Giả sử điều kiện ban đầu:  $\vec{r}_0 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ , (m) và  $\vec{v}_0 = 2\vec{i} + \vec{k}$  (m/s)

Tìm sự phụ thuộc của vị trí và vận tốc của vật theo thời gian ?

BG:

Gia tốc của vật là:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F_x}{m} = 5t && (\text{m/s}^2) \\ a_y &= \frac{F_y}{m} = t - 4 && (\text{m/s}^2) \\ a_z &= \frac{F_z}{m} = 2t^2 && (\text{m/s}^2) \end{aligned}$$

Vận tốc của vật:

$$\begin{aligned} v_x &= \int_0^t a_x dt = \int_0^t 5t dt = \frac{5}{2}t^2 + c_1 \\ v_y &= \int_0^t a_y dt = \int_0^t (t - 4) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + c_2 \\ v_z &= \int_0^t a_z dt = \int_0^t 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + c_3 \end{aligned}$$

Thời điểm ban đầu ta có:

$$\begin{cases} v_{0x} = 2 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Vận tốc của vật theo thời gian:



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(2 + \frac{5}{2}t^2\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right)^2}$$

Hay:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ \vec{v} &= \left(2 + \frac{5}{2}t^2\right) \vec{i} + \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right) \vec{j} + \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right) \vec{k} \end{aligned}$$

Vị trí của vật:

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_0^t v_x dt = 5 + \int_0^t \left(2 + \frac{5}{2}t^2\right) dt = 5 + 2t + \frac{5}{6}t^3 \\ y = y_0 + \int_0^t v_y dt = 2 + \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right) dt = 2 + \frac{t^3}{6} - 2t^2 \\ z = z_0 + \int_0^t v_z dt = -3 + \int_0^t \left(1 + \frac{2}{3}t^3\right) dt = -3 + t + \frac{t^4}{6} \end{cases}$$

Vậy vị trí của vật phụ thuộc vào thời gian như sau:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(5 + 2t + \frac{5}{6}t^3\right) \vec{i} + \left(2 + \frac{t^3}{6} - 2t^2\right) \vec{j} + \left(-3 + t + \frac{t^4}{6}\right) \vec{k}.$$

**Bài 2:** Ở mép đĩa nằm ngang bán kính R có đặt một vật đang đứng yên. Đĩa quay với vận tốc góc  $\omega = \beta t$  ( $\beta$  là gia tốc góc không đổi). Tại thời điểm nào thì đồng tiền sẽ văng ra khỏi đĩa. Nếu hệ số ma sát trượt giữa đồng tiền và đĩa là  $\mu$ .

BG:

Tại thời điểm t gia tốc pháp tuyến của vật:

$$a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R.$$

Gia tốc tiếp tuyến:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{R\beta dt}{dt} = \beta R$$

Gia tốc toàn phần:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\beta^4 R^2 t^4 + \beta^2 R^2}$$

Lực làm đồng tiền chuyển động tròn chính là lực ma sát nghỉ.

Ta có:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$F_{\text{msn}} = ma = m\sqrt{\beta^4 R^2 t^4 + \beta^2 R^2} = m\beta R \sqrt{\beta^2 t^4 + 1}$$

Vật có thể nằm trên đĩa nếu lực ma sát nghỉ cực đại bằng lực ma sát trượt:

$$F_{\text{msn}} \leq F_{\text{mst}}$$

$$\text{hay } m\beta R \sqrt{\beta^2 t^4 + 1} \leq \mu mg$$

$$\Rightarrow t^4 \leq \frac{1}{\beta^2} \cdot \left( \frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 \right) \quad (1)$$

Lúc vật bắt đầu văng ra thì:  $F_{\text{msn}} = F_{\text{mst}}$

$$(1) \Rightarrow t^4 = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left( \frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1}}$$

$$\text{Vì } t > 0 \text{ nên } \frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{\beta R}{g}$$

Vậy sau  $\sqrt{\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1}}$  ( với  $\mu > \frac{\beta R}{g}$  ) vật sẽ văng ra khỏi đĩa.

**Bài 3:** Một vật có khối lượng  $m = 1 \text{ kg}$  chuyển động dọc theo một đường thẳng trên mặt phẳng nằm ngang với vận tốc ban đầu  $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  và chịu tác dụng của lực

cản  $F$  phụ thuộc vào vận tốc  $v$  của vật theo công thức  $\vec{F} = -k\vec{v}$  (với  $k = 1 \text{ kg/s}$ ).

a. Chứng minh rằng vận tốc của vật giảm dần theo hàm số bậc nhất của đường đi.

b. Tính quãng đường mà vật đi được cho tới khi dừng lại.

BG:

a.. Vật chịu tác dụng của lực cản  $F = -kv$ .

Theo định luật II Newton ta có:

$$-kv = ma$$

$$\Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{hay } \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Nguyên hàm hai vế:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt + c \Leftrightarrow \ln v = -\frac{k}{m} t + C$$

Lúc  $t = 0$  thì  $v = v_0 \Rightarrow C = \ln v_0$

Từ đó suy ra:

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ lúc  $t = 0$  đến thời điểm  $t$ :

$$S = \int ds = \int_0^t v dt$$

$$S = v_0 \cdot \int_0^t e^{-\frac{k}{m} t} dt = \frac{mv_0}{k} - \frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$S = \frac{mv_0}{k} - \frac{mv}{k}$$

$$\Rightarrow v = v_0 - \frac{k}{m} S \quad (*)$$

b. Quãng đường vật đi được cho tới khi dừng lại

$$S = \int ds$$

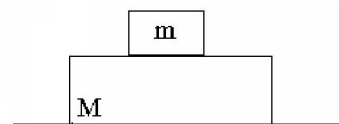
Từ (\*) vi phân hai vế ta có:

$$dS = -\frac{m}{k} dv$$

$$\text{nên } S = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 dv$$

$$\Rightarrow s = \frac{mv_0}{k}$$

**Bài 4:** Cho cơ hệ như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa  $M$  và  $m$  là  $\mu_1$ , giữa  $M$  và sàn là  $\mu_2$ . Ban đầu các vật đứng yên. Gia tốc trọng trường là  $g$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}$  có phương nằm ngang

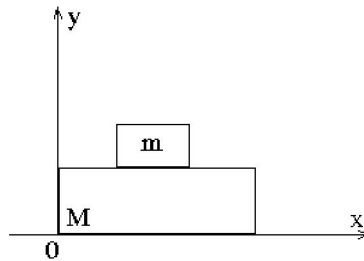


a. Tác dụng vào  $m$  để  $m$  trượt trên  $M$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

b. Tác dụng vào M để M trượt khỏi m.

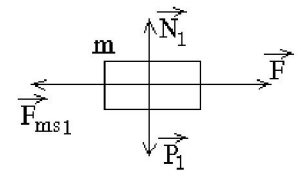
BG:



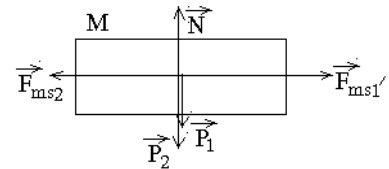
a. Khi tác dụng lực  $\vec{F}$  vào m.

Áp dụng Định luật II Newton cho vật m:

$$\begin{cases} F - F_{ms1} = ma_1 \\ N_1 = N_1 + N_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{F - F_{ms1}}{m}$$



Áp dụng Định luật II Newton cho vật M:



$$\begin{cases} F'_{ms1} - F_{ms2} = Ma_2 \\ N = N_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m + M)g \end{cases} \Rightarrow a_2 = \frac{F'_{ms1} - F_{ms2}}{M}$$

Để m trượt trên M thì:

$$a_1 > a_2; F'_{ms1} = F_{ms1} = \mu_1 mg; F_{ms2} = \mu_2 (m + M)g.$$

hay:

$$\frac{F - \mu_1 mg}{m} > \frac{\mu_1 mg - \mu_2 (m + M)g}{M}$$

$$\Rightarrow F > (\mu_1 - \mu_2)(m + M) \frac{m}{M} g$$

Với điều kiện:  $a_1 > 0 \Leftrightarrow F > \mu_1 mg.$

Vậy

$$\begin{cases} F > (\mu_1 - \mu_2)(m + M) \frac{m}{M} g \\ F > \mu_1 mg \end{cases}$$

b. Khi tác dụng lực  $\vec{F}$  vào M :

Áp dụng Định luật II Newton cho vật m:

$$\begin{cases} F_{ms1} = ma_1 \\ N_1 = P_1 = mg \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{F_{ms1}}{m} = \frac{\mu_1 N_1}{m} = \mu_1 g$$

Áp dụng Định luật II Newton cho vật M:

$$\begin{cases} F - F_{ms1} - F_{ms2} = Ma_2 \\ N = N_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m + M)g \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{F - F_{ms1} - F_{ms2}}{M}$$

Để M trượt khỏi m thì:  $a_2 > a_1$

$$\begin{cases} F_{ms1} = F_{ms1'} = \mu_1 mg \\ F_{ms2} = \mu_2 (M + m)g \end{cases}$$

hay 
$$\frac{F - F'_{ms1} - F_{ms2}}{M} > \mu_1 g$$

$$\Leftrightarrow \frac{F - \mu_1 mg - \mu_2 (m + M)g}{M} > \mu_1 g$$

$$\Leftrightarrow F > (\mu_1 + \mu_2)(m + M)g \quad (1)$$

Điều kiện  $a_2 > 0$

$$\text{hay } F > \mu_1 mg + \mu_2 (m + M)g \quad (2)$$

Điều kiện (2) bao hàm trong điều kiện (1).

Do vậy kết quả bài toán :

$$F > (\mu_1 + \mu_2)(m + M)g .$$

**Bài 5:** Một vật nhỏ đang nằm yên trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Tại thời điểm  $t = 0$  vật đó chịu tác dụng của một lực có độ lớn  $F$  phụ thuộc thời gian  $F = \beta t$  ( $\beta$  là hằng số). Lực  $\vec{F}$  hợp với mặt ngang góc  $\alpha$  không đổi. Gia tốc trọng trường là  $g$ .

a. Tính vận tốc của vật ngay lúc nó rời mặt phẳng ngang.

b. Quãng đường vật đi được từ thời điểm  $t = 0$  đến lúc vật bắt đầu rời mặt phẳng ngang.

BG:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Áp dụng Định luật II Newton cho vật:

$$\vec{F} + \vec{p} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Chiều lên Ox:

$$F \cos \alpha = ma \quad (1)$$

Chiều lên Oy:

$$N + F \sin \alpha - p = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow N = p - F \sin \alpha = mg - \beta t \cdot \sin \alpha$$

Vật rời khỏi mặt ngang khi :  $N = 0$

Hay

$$mg - \beta t \cdot \sin \alpha = 0$$

Thời điểm vật rời khỏi mặt phẳng ngang:  $t_0 = \frac{mg}{\beta \sin \alpha}$

Từ (1):  $F \cos \alpha = ma$

Hay:

$$\Rightarrow dv = \frac{\beta \cdot \cos \alpha}{m} \cdot t \cdot dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^{t_0} \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t \cdot dt \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot t_0^2 \cdot \cos \alpha}{m}$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg^2 \cdot \cos \alpha}{\beta \cdot \sin^2 \alpha}$$

a. Phương trình vận tốc :

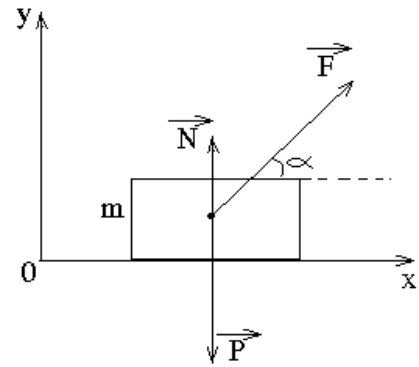
$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t^2$$

Quãng đường vật đi được từ  $0 \rightarrow t_0$ :

$$S = \int ds = \int_0^{t_0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t^2 dt = \frac{1}{6} \frac{\beta t_0^3 \cdot \cos \alpha}{m}$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta \left( \frac{mA}{\beta \sin \alpha} \right)^3 \cdot \cos \alpha}{m}$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{m^2 g^3}{\beta^2 \cdot \sin^3 \alpha} \cdot \cos \alpha.$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 6:** Một ca nô chuyển động trên mặt hồ với vận tốc không đổi  $v_0$ . Sau đó thì tắt động cơ, ca nô tiếp tục chuyển động trên mặt hồ. Lực cản  $F$  của nước tỷ lệ với vận tốc  $v$  của ca nô theo công thức  $F = -kv$ ,  $k$  là hằng số. Xác định:

- Thời gian chuyển động của ca nô kể từ lúc tắt động cơ đến khi dừng lại.
- Vận tốc theo quãng đường đi được của ca nô kể từ lúc tắt động cơ và quãng đường tổng cộng cho đến lúc dừng lại.
- Tính vận tốc trung bình của ca nô trong khoảng thời gian từ lúc tắt động cơ đến khi vận tốc bằng  $\frac{v_0}{n}$  (với  $n > 1$ ).

BG:

Áp dụng Định luật II Newton cho ca nô:

$$\vec{F}_c + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow -kv = ma \Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Hay: } \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow \ln v = -\frac{k}{m} t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \text{ là lúc tắt máy, } v = v_0 \Rightarrow C = \ln v_0$$

$$\text{Vậy: } \ln v = -\frac{k}{m} t + \ln v_0 \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

- Để vận tốc thuyền bằng 0 thì :  $t \rightarrow \infty$ .
- Quãng đường ca nô đi được từ lúc tắt máy ( $t = 0$ ) đến thời điểm  $t$

$$S = \int dS = \int_0^t v \cdot dt$$

$$S = \int_0^t v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t} dt = \frac{mv_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$S = \frac{mv_0}{v} - \frac{m}{k} v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t} = \frac{mv_0}{k} - \frac{m}{k} \cdot v$$

$$v = v_0 - \frac{k}{m} S$$

Quãng đường tổng cộng cho tới lúc dừng lại:

$$S_0 = \int dS$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$S_0 = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 dv = \frac{mv_0}{k}$$

c. Thời gian từ ban đầu đến lúc vận tốc giảm n lần:

$$v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{v_0}{n} \Rightarrow -\frac{k}{m}t = -\ln n \Rightarrow t = \frac{m \cdot \ln n}{k}$$

Quãng đường đi được từ ban đầu đến lúc vận tốc giảm n lần:

$$S = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^{\frac{v_0}{n}} dv = \frac{mv_0}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{mv_0(n-1)}{k \cdot n}$$

Vận tốc trung bình:

$$\bar{v} = \frac{S}{t} = \frac{v_0(n-1)}{n \cdot \ln n}$$

**Bài 7:** Một vật khối lượng  $m$  được kéo đều trên mặt phẳng nghiêng góc  $\alpha$  bởi lực  $\vec{F}$  hợp với mặt phẳng nghiêng một góc  $\beta$ . Biết vật luôn tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng trong quá trình chuyển động. Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là  $\mu$ . Độ lớn của lực  $\vec{F}$  có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu để thực hiện được việc này. Lúc đó giá trị của  $\beta$  bằng bao nhiêu? Biết gia tốc trọng trường là  $g$ .

BG:

Chọn hệ trục như hình vẽ.

Áp dụng Định luật II Newton cho vật:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ms} + \vec{p} + \vec{N} = \vec{0}$$

Chiếu lên Ox:

$$F \cos \beta - F_{ms} - mg \sin \alpha = 0$$

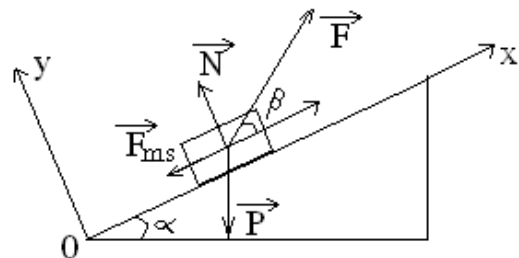
Chiếu lên Oy:

$$F \sin \beta - mg \cos \alpha + N = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F \sin \beta$$

$$\Rightarrow F_{ms} = \mu \cdot N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta)$$

$$\Rightarrow F \cos \beta - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) - mg \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\mu \sin \beta + \cos \beta}$$





**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Để F nhỏ nhất thì  $\mu \sin \beta + \cos \beta$  lớn nhất.

Đặt:

$$\mu \sin \beta + \cos \beta = m$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxi

$$\mu^2 + 1 \geq m^2 \Rightarrow m \leq \sqrt{\mu^2 + 1}$$

Vậy:

$$F_{\min} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Để tìm  $\beta$  ta giải phương trình:

$$\mu \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{\mu^2 + 1}$$

$$\sin(\beta + \phi) = 1 \Rightarrow \beta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \text{với} \quad \cos \phi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} ; \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

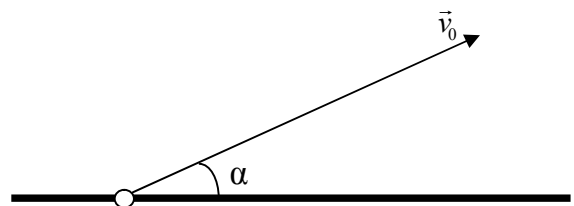
Ta cú:

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cot \phi = \mu$$

Vậy:

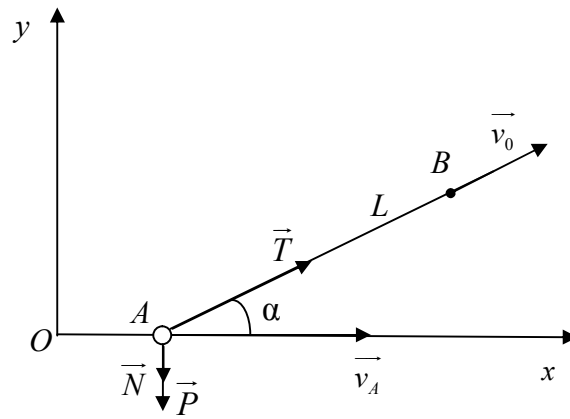
$$\beta = \arctan \mu.$$

**Bài 8:** Trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn, người ta cố định một thanh mảnh. Một viên bi khối lượng  $m$  xuyên qua thanh có thể trượt không ma sát dọc theo thanh. Người ta buộc một sợi chỉ không dẫn dài  $L$  vào viên bi và kéo sao cho đầu tự do của sợi chỉ có độ lớn vận tốc  $v_0$ , phương vận tốc trùng với phương sợi chỉ, sợi chỉ luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Hỏi phải tác dụng một lực như thế nào vào sợi chỉ ở thời điểm nó tạo một góc  $\alpha$  so với phương nằm ngang?



BG:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**



Ta có:  $y_B = L \sin \alpha \rightarrow y'_B = L \cos \alpha \alpha'$

mà:  $y'_B = v_0 \sin \alpha$

nên:  $\alpha' = \frac{v_0}{L} \tan \alpha$

Định luật III Niu ton cho viên bi:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m \vec{a}_A$$

chiều lên Ox

$$T \cos \alpha = m a_A = m x''_A$$

Lại có:

$$v_A \cos \alpha = v_0 \rightarrow x'_A = v'_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \alpha'$$

Thay  $\alpha'$  ở trên:

$$x''_A = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{L \cos^3 \alpha}$$

Từ đó:

$$T = \frac{m v_0^2 \sin^2 \alpha}{L \cos^4 \alpha}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 9:** Một vật nhỏ được ném từ điểm A trên mặt phẳng nghiêng với vận tốc  $\vec{v}_0$  hợp với mặt phẳng ngang một góc  $\beta = 60^\circ$ , biết mặt phẳng nghiêng hợp với mặt phẳng ngang góc  $\alpha = 30^\circ$ . Bỏ qua sức cản của không khí. Gia tốc trọng trường là g.

a. Tính khoảng cách từ điểm ném A đến điểm mà vật rơi trên mặt phẳng nghiêng (điểm B).

b. Tìm góc  $\phi$  hợp bởi giữa phương của vec tơ vận tốc của vật và phương nằm ngang ngay khi vật chạm mặt phẳng nghiêng và bán kính quỹ đạo của vật tại điểm đó.

BG:

a.

Chọn hệ trục Oxy gắn O trùng với A và trục Ox song song với phương ngang. Trong quá trình chuyển động lực tác dụng duy nhất là trọng lực  $\vec{P}$ .

Theo định luật II Newton:

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

Chiếu lên:

$$\text{Ox: } 0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0$$

$$\text{Oy: } -P = ma_y \quad a_y = -g$$

- Phương trình chuyển động của vật theo hai trục ox và oy:

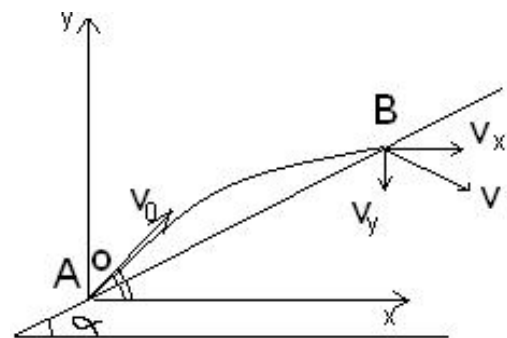
$$\begin{cases} x = v_0 \cos \beta \cdot t & (1) \\ y = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

- Khi vật rơi xuống mặt phẳng nghiêng:

$$\begin{cases} x = AB \cos \alpha & (3) \\ y = AB \sin \alpha & (4) \end{cases}$$

Thế (3) vào (1) ta rút ra t thế vào (2) và đồng thời thế (4) vào (2) ta rút ra :

$$AB = \frac{-2v_0^2 \cos \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha)}{g \cdot \cos^2 \alpha}$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$AB = \frac{-2v_0^2 \cos\beta \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2v_0^2}{3g}$$

b. Tại B vận tốc của vật theo phương Ox là:

$$v_x = v_0 \cos\beta = \frac{v_0}{2}$$

Khi vật chạm mặt phẳng nghiêng :

$$x = l \cos\alpha = \frac{2v_0^2}{3g} \cos\alpha$$

$$\text{hay } v_0 \cos\beta \cdot t = \frac{2v_0^2}{3g} \cos\alpha ;$$

Suy ra thời gian chuyển động của vật:

$$t = \frac{2v_0 \cos\alpha}{3g \cos\beta} = \frac{2v_0}{g\sqrt{3}}$$

- Vận tốc theo phương Oy tại B:

$$v_y = v_0 \sin\beta - gt$$

$$v_y = v_0 \sin\beta - \frac{2v_0}{\sqrt{3}} = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{\left|-\frac{v_0}{2\sqrt{3}}\right|}{\left|\frac{v_0}{2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = 30^\circ$$

do  $v_y = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}} < 0$  nên lúc chạm mặt phẳng nghiêng  $\vec{v}$  hướng xuống.

Lực hướng tâm tại B:

$$F_{ht} = mg \cos\phi = m \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{g \cos\phi}$$

$$\text{Với: } v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{12} = \frac{v_0^2}{3}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{3\sqrt{3}.g}$$

**Bài 10:** Một vật được bắn từ dưới một căn hầm có độ sâu  $h$  lên phía trên miệng hố. Hỏi vị trí ném vật cách vách thẳng đứng của hầm một khoảng  $l$  bằng bao nhiêu so với phương ngang để tầm xa  $S$  của đạn tròn mặt đất (phía trên miệng hầm) là lớn nhất? Tính tầm xa này biết vận tốc đầu của vật là  $v_0$ . Bỏ qua mọi ma sát, lực cản, gia tốc trọng trường là  $g$ .

BG:

Phương trình vận tốc của vật theo phương

Ox :

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

Phương trình vận tốc của vật theo phương

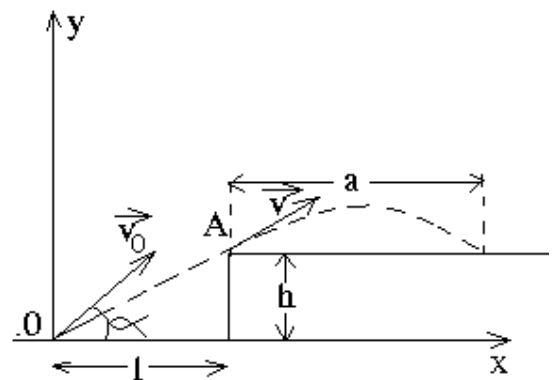
Oy:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Phương trình chuyển động:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad ;$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$



Để tầm xa là lớn nhất thì tại A vận tốc của vật phải hợp với mặt ngang một góc  $45^0$  có nghĩa là tại A:

$$v_x = v_y \Rightarrow t = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{g} \cdot v_0 \quad (1)$$

Hơn nữa ta phải có sau thời gian này:

$$\begin{cases} x = l \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 \cos \alpha \cdot t = l \\ v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad (3)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha} \quad (3)$$

$$\text{kết hợp với (1)} \Rightarrow l = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (4)$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Thay t từ (1) vào (3) ta được:

$$\sin^2 \alpha = \frac{gh}{v_0^2} + \frac{1}{2} ; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}$$

Thế vào (4):

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} (\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha)$$
$$\Leftrightarrow \ell = \frac{v_0^2}{g} \left( \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2 h^2}{v_0^4}} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} \right)$$

Từ (1) :

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}}{g} \cdot v_0 \Rightarrow v_y = v_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} - \left( \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}} \right)}$$

$$v_y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right)} = \sqrt{\left( \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{v_A^2}{g} = \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}{g}$$

Vậy phải đặt vị trí bắn cách vách hầm một khoảng:

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \left( \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2 h^2}{v_0^4}} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} \right)$$

thì tầm xa của vật trên mặt đất là lớn nhất và

$$\text{tầm xa này bằng } \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}{g}.$$

**Bài 11:** Một hạt được xâu vào một vành cứng hình tròn, bán kính R. Mặt phẳng của vành nằm ngang. Tại thời điểm nào đó người ta truyền cho hạt vận tốc  $v_0$  theo phương tiếp tuyến. Cho hệ số ma sát giữa hạt và vành là  $\mu$ . Tính quãng đường hạt đi được cho đến khi dừng lại.

BG:

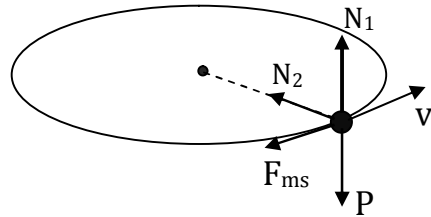
**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Các lực tác dụng lên hạt:

+ trọng lực P

+ phản lực của vành lên hạt gồm:  $N_1$ ,  $N_2$  và

$F_{ms}$



- Áp dụng Định luật II Newton cho hạt

Theo phương vuông góc với mặt phẳng của vành ta có:

$$N_1 = P = mg$$

Theo phương bán kính:  $N_2 = ma_{ht} = \frac{mv^2}{R}$

Lực ma sát tác dụng lên hạt:  $F_{ms} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \mu \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}$

Chọn chiều dương là chiều chuyển động. Gia tốc tiếp tuyến của hạt là:

$$a_t = \frac{-F_{ms}}{m} = -\mu \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}} = \frac{dv}{dt}$$

-Ta có:

$$ds = v dt = v \cdot \frac{dv}{a_t} = \frac{-v dv}{\mu \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}} = -\frac{R}{2\mu} \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}}$$

Lấy tích phân 2 vế:

$$s = -\frac{R}{2\mu} \int_{v_0}^0 \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} \quad (1)$$

Xét nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Đặt  $x = a \tan t$ ; với  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}; dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{adt}{\frac{a}{\cos t} \cdot \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \left( \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin t} + \int \frac{d(\sin t)}{1 + \sin t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + C_0 \end{aligned}$$

$$\text{mà } \sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2} - x} + C_0 = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

Áp dụng vào (1) ta được:

$$s = -\frac{R}{2\mu} \int_{v_0}^0 \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = \frac{-R}{2\mu} \ln(v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}) \Big|_{v_0}^0 = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4}}{gR}$$

**Bài 12:** Giả sử xuồng máy chuyển động dưới tác dụng của lực kéo  $F$  không đổi và lực ma sát trượt trên nước với hệ số ma sát trượt  $f = a - bv$  với  $b$  là vận tốc của xuồng;  $a, b$  là các hằng số. Xác định khoảng thời gian cần thiết để xuồng máy tăng được tốc độ từ 0 đến giá trị  $v_1$  và quãng đường xuồng đi được trong khoảng thời gian đó.

BG:

Chọn chiều dương cùng hướng với lực kéo.

Phương trình chuyển động của xuồng:

$$F - fP = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow F - (a - bv)mg = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dv}{\frac{F}{m} - ag + bgv} = \frac{dv}{bg\left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b} + v\right)}$$

Thời gian  $T$  cần thiết để xuồng đạt được vận tốc  $v_1$  là:

$$T = \int_0^{v_1} \frac{dv}{bg\left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b} + v\right)} = \frac{1}{bg} \ln\left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b} + v\right) \Big|_0^{v_1} = \frac{1}{bg} \ln\left(1 + \frac{mbgv_1}{F - mga}\right)$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Vận tốc của xuồng:

$$\int_0^v \frac{dv}{bg\left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b} + v\right)} = \int_0^t dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{bg} \ln\left(1 + \frac{v}{\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b}}\right) = t \Rightarrow v = \left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b}\right)(e^{bgt} - 1)$$

Quãng đường xuồng đi được:

$$s = \int_0^T v dt = \int_0^T \left(\frac{F}{mbg} - \frac{a}{b}\right)(e^{bgt} - 1) dt = \frac{v_1}{bg} - \frac{F - mga}{mb^2g^2} \ln\left(1 + \frac{mbgv_1}{F - mga}\right)$$

**Bài 13:** Một vật khối lượng  $m$  rơi trong chất lỏng với vận tốc ban đầu bằng 0. Biết lực cản tỉ lệ với bình phương vận tốc rơi của vật với hệ số tỉ lệ là  $k$ . Xác định vận tốc và quãng đường vật rơi được sau khoảng thời gian  $t$ .

BG:

Chọn chiều dương cùng chiều chuyển động

Phương trình chuyển động của vật:

$$mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m} dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v} + \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right) dv = \frac{k}{m} dt$$

Lấy tích phân 2 vế:  $\int_0^v \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v} + \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right) dv = 2 \frac{k}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t dt = 2 \sqrt{\frac{gk}{m}} \int_0^t dt$

$$\Rightarrow \ln \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \Big|_0^v = 2 \sqrt{\frac{gk}{m}} t$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Biến đổi ta được:  $v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1}$  với  $\alpha = \sqrt{\frac{gk}{m}}$

Quãng đường vật rơi được:

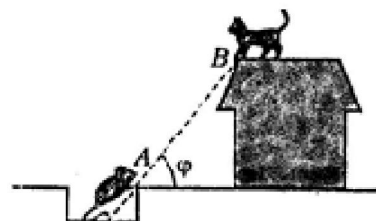
$$s = \int_0^t v dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1} dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t \left(1 - \frac{2}{e^{2\alpha t} + 1}\right) dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(t - \int_0^t \frac{2}{e^{2\alpha t} + 1} dt\right)$$

$$\text{Đặt } u = e^{2\alpha t} \Rightarrow du = 2\alpha \cdot e^{2\alpha t} dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2\alpha u}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{2 dt}{e^{2\alpha t} + 1} = \frac{1}{\alpha} \int_1^{e^{2\alpha t}} \frac{du}{u(u+1)} = \frac{1}{\alpha} \int_1^{e^{2\alpha t}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| \Big|_1^{e^{2\alpha t}} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2e^{2\alpha t}}{e^{2\alpha t} + 1}$$

$$\text{Do đó: } s = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(t - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2e^{2\alpha t}}{e^{2\alpha t} + 1}\right)$$

**Bài 14:** Chú mèo Tom ở đầu một nóc nhà (điểm B trên hình) nhảy xuống vồ chuột Jerry. Nhưng Jerry ở dưới đất (điểm A) phát hiện và dùng súng cao su bắn vào Mèo. Viên sỏi bắn ra từ súng cao su của Jerry cùng lúc Tom nhảy xuống và đập vào Tom ở chính giữa đoạn AB. Tính độ cao H của nóc nhà.



Biết góc hợp bởi AB với phương ngang là  $\varphi = 30^\circ$ , vận tốc của sỏi bắn ra từ súng của Jerry là 7m/s còn Tom nhảy theo phương ngang. Bỏ qua sức cản của không khí. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

BG:

**\* Phương pháp tọa độ**

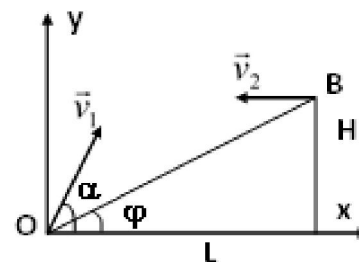
Chọn hệ trục xOy như hình vẽ.

Gọi  $\alpha$  là góc bắn của viên sỏi.

Các phương trình chuyển động của sỏi là:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 \cos \alpha \cdot t \\ y_1 = v_1 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Các phương trình chuyển động của Tom là:



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\begin{cases} x_2 = L - v_2 t = \frac{H}{\operatorname{tg} \varphi} - v_2 t \\ y_2 = H - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Khi viên sỏi đập vào Tom ở trung điểm đoạn AB thì:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 \cos \alpha t = x_2 = \frac{H}{2 \operatorname{tg} \varphi} \\ y_1 = v_1 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = y_2 = H - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cos \alpha t = x_2 = \frac{H}{2 \operatorname{tg} \varphi} \quad (1) \\ v_1 \sin \alpha t = H = gt^2 \quad (2) \end{cases}$$

Bình phương hai vế của (1) và (2) rồi cộng với nhau, ta được:

$$v_1^2 t^2 = \frac{H^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi} + H^2 \quad (3)$$

Rút t từ phương trình (2) rồi thế vào (3) ta được:

$$H = \frac{v_1^2 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{g(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi)} = 2,8 \text{ m}$$

**\* Phương pháp véctor:**

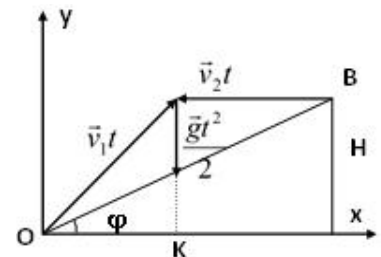
Véctor vị trí của viên sỏi và Tom khi gặp nhau:

$$\vec{r}_1 = \vec{v}_1 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} = \vec{AB} + \vec{v}_2 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} = \frac{\vec{AB}}{2}$$

Từ hình vẽ ta thấy:  $H = gt^2$  (4)

$$(\vec{v}_1 t)^2 = H^2 + (OK)^2 = H^2 + \left(\frac{AB}{2} \cos \varphi\right)^2 = H^2 + \frac{H^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (5)$$

Rút t từ (4) và thay vào (5) suy ra:  $H = \frac{v_1^2 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{g(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi)} = 2,8 \text{ m}$ .



**Bài 15:** Một tên lửa không chịu tác dụng của các lực hấp dẫn trong vũ trụ, đang chuyển động nhanh dần theo một quỹ đạo thẳng. Khối lượng vỏ tên lửa cùng với các thiết bị gắn vào nó là  $M$ . Ở thời điểm  $t$ , khối lượng của nhiên liệu chứa trong tên lửa là  $m = m_0 e^{-kt}$  ( $k$  là hằng số dương), vận tốc tương đối (so với tên lửa) của lượng khí nhiên liệu phụt ra là  $u = u_0 e^{-kt}$ . Giả sử  $m_0 \ll M$ , hãy chứng minh rằng vận tốc cuối của tên lửa lớn hơn vận tốc đầu một lượng xấp xỉ bằng  $\frac{m_0 u_0}{2M}$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Cho  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

BG:

Phương trình chuyển động của tên lửa:

$$(M+m) \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u} \text{ (do không có ngoại lực tác dụng lên tên lửa)}$$

Chiều lên chiều dương cùng chiều chuyển động của tên lửa:

$$(M+m) \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} u$$
$$\Rightarrow (M+m_0 \cdot e^{-kt}) \frac{dv}{dt} = km_0 u_0 e^{-2kt}$$

Đặt  $x = e^{-kt} \Rightarrow dx = -ke^{-kt} dt = -kxdt$

Thời điểm ban đầu:  $t = 0 \Rightarrow x = 1$

Thời điểm hết nhiên liệu:  $t = +\infty \Rightarrow x = 0$

Ta có:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -kx \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{kx} \frac{km_0 u_0 x^2}{M+m_0 x} = \frac{-m_0 u_0 x}{M+m_0 x} = -u_0 \left(1 - \frac{M}{M+m_0 x}\right)$$

Lấy tích phân 2 vế:

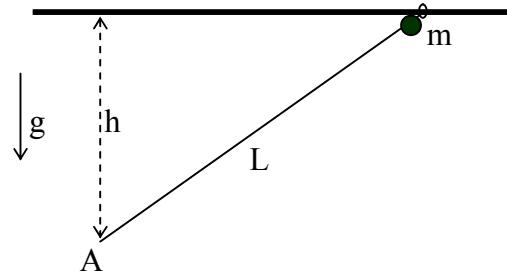
$$\int_{v_0}^v dv = -u_0 \int_1^0 \left(1 - \frac{M}{M+m_0 x}\right) dx$$
$$v - v_0 = -u_0 \left(-1 - \frac{M}{m_0} \ln \frac{M}{M+m_0}\right) = u_0 - \frac{Mu_0}{m_0} \ln\left(1 + \frac{m_0}{M}\right)$$
$$= u_0 - \frac{Mu_0}{m_0} \left(\frac{m_0}{M} - \frac{\left(\frac{m_0}{M}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{m_0}{M}\right)^3}{3} + \dots\right)$$

Vì  $m_0 \ll M$  nên bỏ qua các số hạng từ bậc ba trở lên.

$$\text{Do đó } v - v_0 \approx u_0 - \frac{Mu_0}{m_0} \left(\frac{m_0}{M} - \frac{\left(\frac{m_0}{M}\right)^2}{2}\right) = \frac{m_0 u_0}{2M}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 16:** Một hạt cườm khối lượng  $m$  được xỏ qua một sợi dây nhẹ, không giãn chiều dài  $L$ . Một đầu dây buộc cố định tại điểm  $A$ , đầu kia buộc vào một cái vòng rất nhẹ, vòng lại có thể trượt không ma sát trên một thanh ngang



Tại thời điểm ban đầu, dây được giữ ở cạnh vòng và dây thẳng, không căng. Thả cho hạt cườm chuyển động. Tìm vận tốc của nó ở thời điểm dây bị đứt biết rằng dây chịu sức căng lớn nhất là  $T_0$ . Khoảng cách từ  $A$  đến thanh là  $h$ . Bỏ qua mọi ma sát.

BG:

Trước tiên ta cần xác định quỹ đạo chuyển động. Vì vật chỉ chuyển động trong mặt phẳng nên chỉ cần hai tọa độ  $(x, y)$  là đủ để xác định vị trí của vật.

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ. Theo định lý Pitago:

$$\begin{aligned} AN^2 &= QN^2 + QA^2 \\ \Rightarrow (L - y)^2 &= x^2 + (h - y)^2 \\ \Rightarrow y &= \frac{L + h}{2} - \frac{x^2}{2(L - h)} \end{aligned}$$

Như vậy quỹ đạo là parabol.

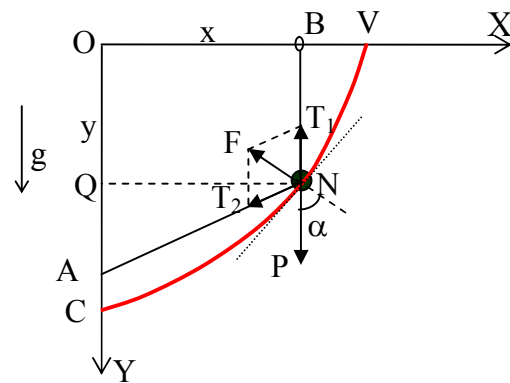
Phương trình định luật II Newton viết theo phương pháp tuyến:

$$m \frac{v^2}{R} = 2T \cdot \cos\alpha - mg \cdot \cos\alpha \quad (1)$$

$$\text{với } v = \sqrt{2g \cdot y} \quad (2)$$

còn  $R$  là bán kính chính khúc tại  $N$ .

Để tìm  $R$  ta so sánh quỹ đạo hạt cườm với quỹ đạo một vật ném xiên góc. Chọn các thông số của quỹ đạo để nó đối xứng với quỹ đạo hạt cườm. Như vậy:



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$u_x = \frac{OV}{t} = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} \text{ với } H = \frac{H+L}{2}$$

$$\rightarrow u_x = \sqrt{g(L-h)}$$

$$\text{còn: } v_y = \sqrt{2g(H-y)}$$

Gia tốc pháp tuyến tại N là:

$$a_n = g \cdot \cos \alpha = \frac{u^2}{R} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{R} = \frac{2g(L-y)}{R}$$

$$\text{Vậy: } R = \frac{2(L-y)}{\cos \alpha}$$

$$\text{Giải các phương trình (1) – (3) được: } T = \frac{mgL}{2(L-y)}$$

$$\text{Lúc } T = T_0 \text{ thì } y = L \left( 1 - \frac{mg}{2T_0} \right)$$

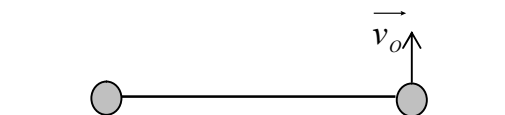
$$\text{Chú ý là: } 0 \leq y \leq (L+h)/2 \Leftrightarrow 1 - \frac{h}{L} \leq \frac{mg}{T_0} \leq 2$$

$$\text{Khi đó } v = \sqrt{2gL \left( 1 - \frac{mg}{2T_0} \right)}$$

*Biện luận:*

- Khi  $\frac{mg}{T_0} > 2$  thì dây đứt ngay ở thời điểm vừa thả ra.
- Khi  $\frac{mg}{T_0} < 1 - \frac{h}{L}$  : dây không bị đứt trong suốt quá trình chuyển động.

**Bài 17:** Hai viên bi giống nhau, được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không giãn, dài  $2l$ , đặt trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Người ta truyền cho một trong hai viên bi đó một vận tốc  $v_0$  hướng theo phương thẳng đứng lên trên.



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

a. Giả sử trong quá trình chuyển động, sợi dây luôn căng và viên bi dưới không bị nhấc lên, hãy lập phương trình quỹ đạo của viên bi trên?

b. Tìm điều kiện của  $v_0$  để thỏa mãn điều giả sử trên (tức là trong suốt quá trình chuyển động, sợi dây luôn căng và viên bi dưới không rời mặt phẳng ngang).

Bỏ qua lực cản của không khí, có thể thừa nhận rằng viên bi dưới sẽ dễ bị nhấc lên khỏi mặt phẳng ngang nhất khi dây ở vị trí thẳng đứng.

BG:

a. Lập phương trình quỹ đạo của viên bi trên:

Vì bỏ qua ma sát nên khối tâm của hệ (trung điểm của sợi dây) chỉ chuyển động theo phương thẳng đứng.

+ Phương trình chuyển động của viên bi 2 (viên bi trên)

$$x = l \sin \alpha$$

$$y = 2l \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình quỹ đạo } \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{4l^2} = 1 \quad (1)$$

$\Rightarrow$  Quỹ đạo của viên bi trên là (nửa) elip.

b. Điều kiện của  $v_0$  để thỏa mãn điều giả sử trên (tức là trong suốt quá trình chuyển động, sợi dây luôn căng và viên bi dưới không rời mặt phẳng ngang).

Khi viên bi 2 chuyển động lên trên thì vận tốc  $v$  giảm dần, thành phần của trọng lực làm giảm lực căng tăng dần  $\Rightarrow$  lực căng dây giảm dần

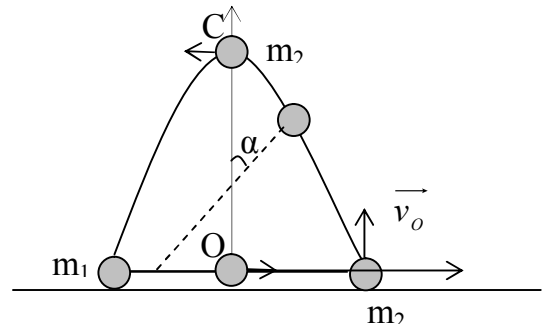
+ Tại vị trí cao nhất của  $m_2$ :

$$T_c = \frac{mv_c^2}{R_c} - mg \quad (2)$$

+ Tìm vận tốc của  $m_2$  tại vị trí cao nhất:

Tại vị trí cao nhất, về độ lớn:  $v_1 = v_2 = v_c$

$$\text{Từ định luật bảo toàn cơ năng: } \frac{mv_0^2}{2} = 2 \cdot \frac{mv_c^2}{2} + mg2l$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Rightarrow v_c^2 = \frac{v_o^2}{2} - 2gl \quad (3)$$

+ Tìm bán kính chính khúc  $R_C$  của  $m_2$  tại vị trí cao nhất

Đạo hàm 2 vế biểu thức (1)

$$\frac{2v_x \cdot x}{l^2} + \frac{2v_y \cdot y}{4l^2} = 0 \Leftrightarrow 4v_x \cdot x + v_y \cdot y = 0 \quad (1')$$

Đạo hàm hai vế biểu thức (1')

$$4a_x \cdot x + 4v_x^2 + a_y \cdot y + v_y^2 = 0$$

Tại vị trí C:  $x = 0$ ;  $y = 2l$ ;  $v_x = v_C$ ;  $v_y = 0$ ;  $a_x = 0$ ;  $a_y = -v_c^2/R_C$

$$\Rightarrow 4v_C^2 - 2l \cdot \frac{v_C^2}{R_C} = 0 \Rightarrow R_C = l/2 \quad (4)$$

+ Thay (3) và (4) vào (2) ta được:

$$T_C = \frac{m\left(\frac{v_o^2}{2} - 2gl\right)}{\frac{l}{2}} - mg = \frac{mv_o^2}{l} - 5mg$$

+ Điều kiện để dây luôn căng:  $T_C \geq 0 \Rightarrow v_o \geq \sqrt{5gl}$

+ Điều kiện để  $m_1$  luôn chuyển động trên mặt phẳng ngang:

$$T_C \leq mg \Rightarrow v_o \leq \sqrt{6gl}$$

**Kết luận:**  $\sqrt{5gl} \leq v_o \leq \sqrt{6gl}$



*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

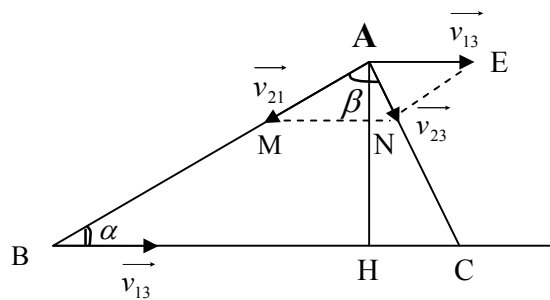
**DẠNG 3: BÀI TẬP CÔNG THỨC CỘNG VẬN TỐC. HỆ QUY CHIỀU KHÔNG QUÁN TÍNH.**

**Bài 1:** Một ô tô chuyển động thẳng đều trên đường với vận tốc  $v_1 = 54\text{km/h}$ . Một hành khách cách ô tô một đoạn  $a = 400\text{m}$  và cách đường một đoạn  $d = 80\text{m}$ , muốn đón ô tô. Hỏi người ấy phải chạy theo hướng nào, với vận tốc nhỏ nhất là bao nhiêu để đón được ô tô?

BG:

- Gọi ô tô là vật 1, hành khách là 2, mặt đất là vật 3

Muốn cho hành khách đuổi kịp ô tô thì trước hết véc tơ vận tốc  $\vec{v}_{21}$  của người ấy đối với ô tô phải luôn hướng về phía ô tô và tại thời điểm ban đầu véc tơ  $\vec{v}_{21}$  hướng từ A đến B



- Theo công thức cộng vận tốc:

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} \Leftrightarrow \vec{v}_{23} = \vec{v}_{13} - \vec{v}_{12} = \vec{v}_{13} + \vec{v}_{21}$$

- Xét hai tam giác  $\Delta AMN$  và  $\Delta ABC$ , có chung góc A và  $MN \parallel AE \parallel BC$

$\Rightarrow$  góc AMN bằng góc ABC.

Vậy  $\Delta AMN$  đồng dạng với  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AN}{AC} \text{ hay } \frac{v_{13}}{BC} = \frac{v_{23}}{AC}$$

$$\Rightarrow v_{23} = \frac{AC}{BC} \cdot v_{13} = \frac{AC}{BC} \cdot v_1 \quad (\vec{v}_{13} = \vec{v}_1)$$

- Trong tam giác ABC

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\text{Vậy } v_{23} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot v_1$$

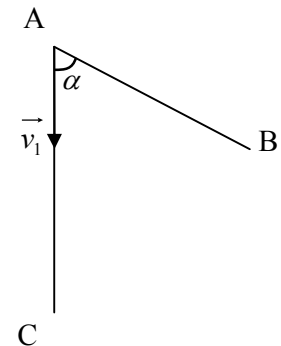
$\Rightarrow v_{23}$  nhỏ nhất khi  $\sin \beta = 1$ , tức là  $\beta = 90^\circ$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Rightarrow (v_{23})_{\min} = \sin \alpha \cdot v_1 = \frac{d}{a} v_1 = \frac{80}{400} 54 = 10,8 (\text{km/h})$$

- Vậy, người đó phải chạy với vận tốc 10,8km/h theo hướng vuông góc với AB về phía đường.

**Bài 2:** Hai tàu A và B ban đầu cách nhau một khoảng  $l$ . Chúng chuyển động cùng một lúc với các vận tốc có độ lớn lần lượt là  $v_1, v_2$ . Tàu A chuyển động theo hướng AC tạo với AB góc  $\alpha$ .



a. Hỏi tàu B phải đi theo hướng nào để có thể gặp tàu A. Sau bao lâu kể từ lúc chúng ở các vị trí A và B thì hai tàu gặp nhau?

b. Muốn hai tàu gặp nhau ở H (BH vuông góc với  $\vec{v}_1$ ) thì các độ lớn vận tốc  $v_1, v_2$  phải thỏa mãn điều kiện gì?

BG:

a. Tàu B chuyển động với vận tốc  $\vec{v}_2$  hợp với  $\vec{BA}$  góc  $\beta$ .

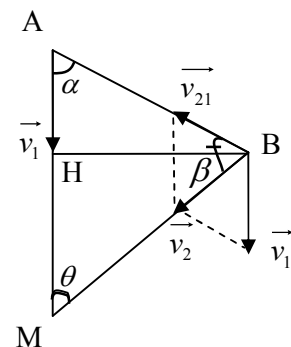
- Hai tàu gặp nhau tại M.

$$\text{Ta có } AM = v_1 t, BM = v_2 t$$

- Trong tam giác ABM:

$$\frac{AM}{\sin \beta} = \frac{BM}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{v_1 t}{\sin \beta} = \frac{v_2 t}{\sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha \quad (1)$$



- Tàu B phải chạy theo hướng hợp với  $\vec{BA}$  một góc  $\beta$  thỏa mãn (1)

$$\cos \theta = \cos [180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

- Gọi vận tốc của tàu B đối với tàu A là  $\vec{v}_{21}$ .

Tại thời điểm ban đầu  $\vec{v}_{21}$  cùng phương chiều với  $\vec{BA}$ . Theo công thức cộng vận tốc:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{23} - \vec{v}_{13} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow v_{21}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_2 v_1 \cos \theta$$

$$\Rightarrow v_{21}^2 = v_2^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + v_1^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2v_1 v_2 (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta)$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \beta \cdot v_2^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cdot v_1 v_2 + \sin^2 \alpha \cdot v_1^2) + (\cos^2 \beta \cdot v_2^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot v_1 v_2 + \cos^2 \alpha \cdot v_1^2) \\ &= (\sin \beta \cdot v_2 - \sin \alpha \cdot v_1)^2 + (\cos \beta \cdot v_2 + \cos \alpha \cdot v_1)^2 = 0 + (\cos \beta \cdot v_2 + \cos \alpha \cdot v_1)^2 \\ &\quad (\text{theo (1)}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{21} = |v_1 \cdot \cos \alpha + v_2 \cos \beta|$$

Vậy thời gian để tàu B chuyển động đến gặp tàu A là:

$$t = \frac{AB}{v_{21}} = \frac{l}{|v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta|}$$

b. Để 2 tàu gặp nhau ở H thì

$$\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Theo (1) ta có:

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

**Bài 3:** Tại điểm O phóng một vật nhỏ với vận tốc ban đầu  $\vec{v}_{01}$  (Hướng đến điểm M) nghiêng một góc  $\alpha = 45^\circ$  so với phương nằm ngang. Đồng thời tại điểm M cách O một khoảng  $l = 20\text{m}$  theo đường nằm ngang một vật nhỏ khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng OM theo chiều từ O đến M với vận tốc  $v_2 = 7,1\text{m/s}$ . Sau một lúc hai vật va chạm vào nhau tại một điểm trên đường thẳng OM. Cho gia tốc rơi tự do  $g = 10\text{m/s}^2$ . Xác định  $v_{01}$ .

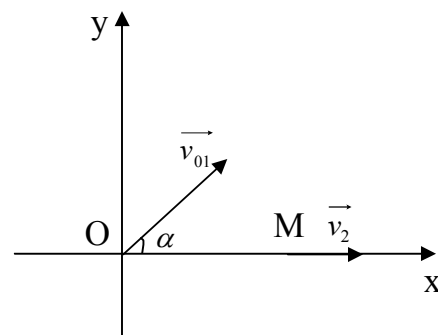
BG:

- Chọn trục tọa độ như hình vẽ:

Mốc thời gian là lúc các vật bắt đầu chuyển động.

- Vận tốc của vật 1 trên trục Ox là:

$$v_{1x} = v_{01} \cos \alpha$$



- Vận tốc của vật 1 đối với vật 2 trên trục Ox là:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow v_{12x} = v_{1x} - v_2 = v_{01} \cos \alpha - v_2$$

Điều kiện để vật 1 va chạm với vật 2 là

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$v_{12x} > 0 \Leftrightarrow v_{01} \cos \alpha - v_2 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - v_2 > 0 \quad (1)$$

- Khoảng thời gian từ lúc hai vật chuyển động đến lúc va chạm là:

$$t = \frac{OM}{v_{12x}} = \frac{l}{v_{01} \cos \alpha - v_2} \quad (2)$$

- Phương trình tọa độ của vật 1 trên trục Oy là:

$$y = (v_{01} \sin \alpha)t - gt^2/2.$$

- Thời gian vật 1 ném xiên từ O đến khi chạm với vật 2 ( trên trục Ox ) thỏa mãn phương trình  $y = 0$

$$\Leftrightarrow (v_{01} \sin \alpha)t - gt^2/2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_{01} \sin \alpha}{g} \quad (3) \quad (t = 0 \text{ loại})$$

- Từ (2) và (3) suy ra:

$$\frac{l}{v_{01} \cos \alpha - v_2} = \frac{2v_{01} \sin \alpha}{g}.$$

Thay số vào ta có:

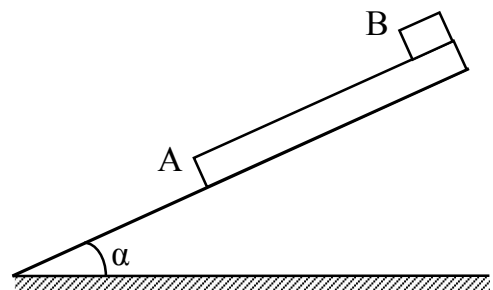
$$\frac{20}{v_{01} \frac{\sqrt{2}}{2} - 7,1} = \frac{2v_{01} \frac{\sqrt{2}}{2}}{10} \Leftrightarrow v_{01}^2 - 7,1\sqrt{2}v_{01} - 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{01} = \frac{7,1\sqrt{2} - \sqrt{900,82}}{2} < 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{hoặc } v_{01} = \frac{7,1\sqrt{2} + \sqrt{900,82}}{2} \approx 20(\text{m/s}) \text{ (thỏa mãn (1)).}$$

Vậy  $v_{01} = 20(\text{m/s})$ .

**Bài 4:** Một tấm ván A dài  $l = 80\text{cm}$ , khối lượng  $m_1 = 1\text{kg}$  được đặt trên mặt dốc nghiêng góc  $\alpha$  so với mặt phẳng ngang. Một vật B khối lượng  $m_2 = 100\text{g}$  được đặt trên tấm ván tại điểm cao nhất của tấm ván. Thả cho hai vật A, B cùng chuyển động. Cho biết hệ số ma sát giữa A và mặt dốc là  $\mu_1 = 0,2$ , giữa B và A là  $\mu_2 = 0,1$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

1. Giả sử dốc đủ dài, cho  $\alpha = 30^\circ$ .

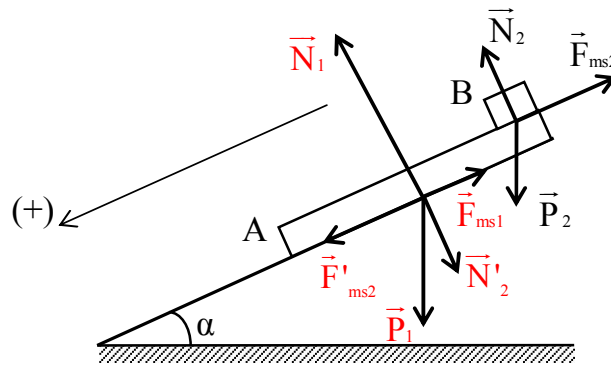
a. Tìm thời gian để vật B rời vật A.

b. Khi vật B vừa rời khỏi vật A thì vật A đã đi được đoạn đường dài bao nhiêu trên mặt dốc?

2. Cho chiều dài dốc là  $L=2,4\text{m}$ . Xác định giá trị của  $\alpha$  sao cho khi vật B vừa rời khỏi vật A thì đầu dưới của vật A tới chân dốc.

BG:

1. Vẽ hình, phân tích lực



a.

- Gọi  $a_1$  là gia tốc của vật A đối với mặt dốc,  $a_2$  là gia tốc của B đối với A.

- Xét chuyển động của vật B trong hệ quy chiếu gắn với vật A.

Theo định luật II Newton:

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{ms2} + \vec{F}_{qt} = m_2 \vec{a}_2 \quad (1)$$

Chiếu (1) lên chiều chuyển động ta có:

$$m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - m_2 a_1 = m_2 a_2 \quad (2)$$

- Xét chuyển động của vật A trong hệ quy chiếu gắn với mặt dốc.

- Theo định luật II Newton:

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}'_{ms2} + \vec{F}_{ms1} + \vec{N}_2' = m_1 \vec{a}_1 \quad (3)$$

- Chiếu (3) lên chiều chuyển động:

$$m_1 g \sin \alpha + \mu_2 m_2 g \cos \alpha - \mu_1 (m_1 + m_2) g \cos \alpha = m_1 a_1 \quad (4)$$

Thay số tìm được  $a_1 \approx 3,18 \text{m/s}^2$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Thay vào (2) tìm được  $a_2 \approx 0,95 \text{ m/s}^2$

- Thời gian vật B rời A:  $t = \sqrt{\frac{2l}{a_2}} = 1,3 \text{ s}$

b) Quãng đường vật A đi được trên mặt dốc:

$$s_A = \frac{1}{2} a_1 t^2 = 2,69 \text{ m}$$

2. - Thời gian vật B rời A:  $t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a_2}}$

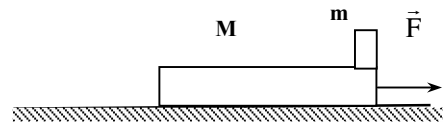
- Thời gian vật A tới chân dốc:  $t_1 = \sqrt{\frac{2(L-l)}{a_1}}$

Từ đề bài ta phải có:  $\sqrt{\frac{2l}{a_2}} = \sqrt{\frac{2(L-l)}{a_1}} \quad (5)$

Rút  $a_1, a_2$  từ (2) và (4) thế vào (5) biến đổi ta được:

$$\tan \alpha = 0,43 \rightarrow \alpha = 23,27^\circ$$

**Bài 5:** Một tấm gỗ có khối lượng  $M = 8 \text{ kg}$ , chiều dài  $l = 5 \text{ m}$  đặt trên mặt sàn nằm ngang. Một vật nhỏ có khối lượng  $m = 2 \text{ kg}$  đặt trên tấm gỗ ở sát một đầu. Lực  $F = 20 \text{ N}$  tác dụng lên tấm gỗ theo phương nằm ngang. Ban đầu hệ đứng yên. Tính thời gian vật  $m$  trượt trên tấm gỗ trong các trường hợp sau:



1. Bỏ qua ma sát ở các mặt tiếp xúc.

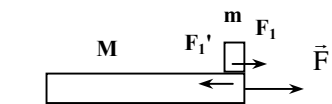
2. Hệ số ma sát trượt giữa vật  $m$  và tấm gỗ là  $\mu_1 = 0,1$ , ma sát giữa tấm gỗ và sàn nhà bỏ qua.

3. Hệ số ma sát trượt giữa vật  $m$  và tấm gỗ là  $\mu_1 = 0,1$ , giữa tấm gỗ và sàn nhà là  $\mu_2 = 0,08$ .

BG:

1. Bỏ qua ma sát ở các mặt tiếp xúc  $\rightarrow$   $m$  tiếp tục đứng yên so với đất, chỉ có  $M$  chuyển động. gia tốc của  $M$ :

$$a = \frac{F}{M} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ m/s}^2.$$



Vậy,  $m$  trượt trên tấm gỗ trong thời gian

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 2s$$

2. Bỏ qua ma sát giữa tấm gỗ và sàn nhà. Chỉ xét các lực tác dụng lên hệ theo phương ngang.

\*Xét trường hợp m trượt trên M:

$$F_1 = F_1' = \mu_1 mg.$$

Gia tốc của hai vật:

$$a_1 \frac{F_1}{m} = \mu_1 g = 1 \text{ m/s}^2; a_2 = \frac{F - F_1'}{M} = \frac{20 - 2}{8} = 2,25 \text{ m/s}^2.$$

Vì  $a_2 > a_1$  nên tấm gỗ trượt về phía trước với gia tốc

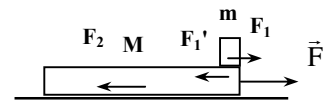
$$a_{2/1} = a_2 - a_1 = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

Vì vậy:  $t = \sqrt{\frac{2l}{a_{2/1}}} = 2\sqrt{2} \text{ s}$

3. Có ma sát giữa tấm gỗ và sàn nhà, khi đó  $F_2 = \mu_2(m + M)g$ . Vật m vẫn trượt trên tấm gỗ.

Gia tốc của m:

$$a_1 \frac{F_1}{m} = \mu_1 g = 1 \text{ m/s}^2.$$



Gia tốc của M:

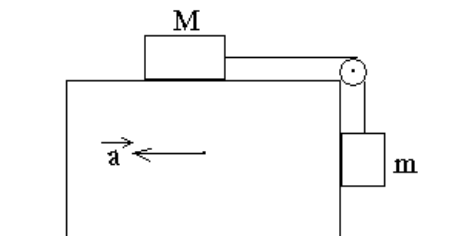
$$a_2 = \frac{F - F_1' - F_2}{M} = \frac{20 - 2 - 8}{8} = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

$a_2 > a_1$  nên tấm gỗ trượt về phía trước với gia tốc

$$a_{2/1} = a_2 - a_1 = 0,25 \text{ m/s}^2.$$

Ta có  $t = \sqrt{\frac{2l}{a_{2/1}}} = \sqrt{40} \approx 6,32 \text{ s}$

**Bài 6:** Cho cơ hệ như hình vẽ gồm vật M, m nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ không giãn vắt qua một ròng rọc cố định với bàn, bàn đặt trên mặt sàn nằm ngang (Hình vẽ), bỏ qua khối lượng của ròng rọc. Lúc đầu các vật trong hệ đứng yên. Bàn nhận được gia tốc  $\vec{a}$  theo phương ngang như hình vẽ. Tính gia tốc

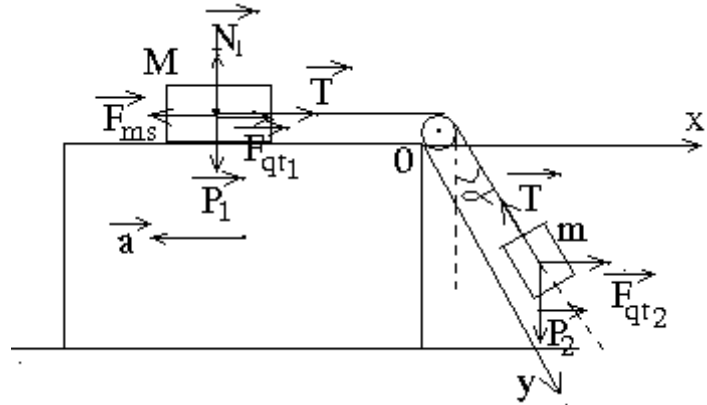


**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

của M đối với mặt đất, biết hệ số ma sát trượt giữa M và mặt bàn là  $\mu$ , gia tốc trọng trường là  $g$ .

BG:

Chọn hệ quy chiếu Oxy gắn vào bàn như hình vẽ. Trong hệ quy chiếu xy:



- Áp dụng Định luật II Newton cho vật M

$$T + F_{qt} - F_{ms} = Ma_0$$

Hay:

$$T + Ma - \mu N_1 = Ma_0 \quad (1),$$

trong đó:

$a_0$  là gia tốc của M đối với bàn

$a$  là gia tốc của bàn đối với đất.

- Áp dụng Định luật II Newton cho vật m:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{qt2}}{P_2} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} & (2) \\ F_{qt2} \sin \alpha + mg \cos \alpha - T = ma_0 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra:

$$ma \sin \alpha + mg \cos \alpha - T = ma_0 \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra:

$$a_0 = \frac{Ma - \mu N_1 + ma \sin \alpha + mg \cos \alpha}{m + M} \quad (5)$$

Từ (2) suy ra:



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{\frac{a}{g}}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (7)$$

$$\text{Và } N_1 = Mg \quad (8)$$

Thế (6), (7), (8) vào (5) ta rút ra:

$$a_0 = \frac{Ma - \mu Mg + m\sqrt{a^2 + g^2}}{m + M}$$

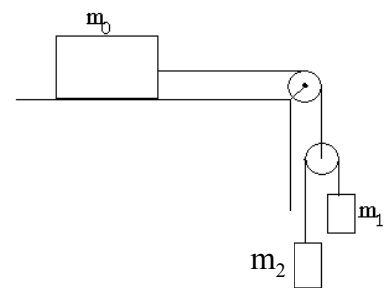
Gia tốc của M đối với đất:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_0 + \vec{a}$$

$$\Rightarrow a_M = a_0 - a = \frac{Ma - \mu Mg + m\sqrt{a^2 + g^2}}{m + M} - a$$

$$a_M = \frac{m\sqrt{a^2 + g^2} - \mu Mg - mg}{m + M}$$

**Bài 7:** Cho cơ hệ như hình vẽ. Ban đầu các vật trong hệ được giữ đứng yên. Vật có khối lượng  $m_0$  đặt tiếp xúc với mặt bàn, các vật nối với nhau bằng các dây nhẹ không giãn vắt qua các ròng rọc. Thả nhẹ để các vật chuyển động, trong quá trình chuyển động, vật có khối lượng  $m_1, m_2$



không va vào bàn, không chạm đất. Bỏ qua mọi ma sát và khối lượng các ròng rọc. Gia tốc trọng trường là  $g$ . Tìm gia tốc của  $m_1$  và biện luận kết quả tìm được.

BG:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Chọn chiều dương như hình vẽ.

Áp dụng Định luật II Newton cho vật:

$$m_0 : \vec{T} + \vec{P}_0 + \vec{N} = m_0 \vec{a}_0$$

$$m_1 : \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

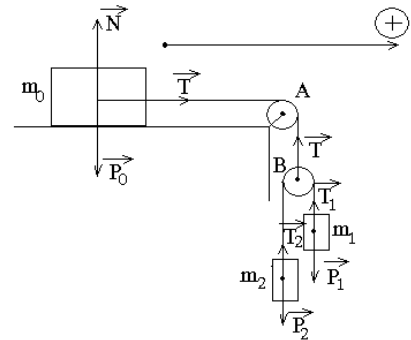
$$m_2 : \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

Chiếu các phương trình đó lên chiều dương ta được:

$$T = m_0 a_0 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{T}{m_0} \quad (1)$$

$$P_1 - T_1 = m_1 a_1 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{P_1 - T_1}{m_1} \quad (2)$$

$$P_2 - T_2 = m_2 a_2 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{P_2 - T_2}{m_2} \quad (3)$$



Giả sử ròng rọc quay ngược chiều kim đồng hồ.

Gọi  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  là độ dời của  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  so với ròng rọc A.

$S'$  là độ dời của  $m_1$ ,  $m_2$  so với ròng rọc B.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S_1 = S_0 - S' \\ S_2 = S_0 + S' \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 = 2S_0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2a_0 \quad (*)$$

Thế (1), (2) và (3) vào (\*) và chỳ ý  $T = 2T_1 = 2T_2$

Rút ra:

$$T = \frac{2}{\frac{2}{m_0} + \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}} \cdot g$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{m_1 g - T_1}{m_1} = \frac{m_1 g - \frac{T}{2}}{m_1} = g - \frac{T}{2m_1}$$

Hay :

$$a_1 = g - \frac{2g}{m_1 \left( \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$a_1 = \left[ 1 - \frac{2}{m_1 \left( \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \right] \cdot g$$

**\* Biên luận:**

- Nếu  $m_0 = 0$  thì  $a_1 = g, a_2 = g$ :  $m_1$  và  $m_2$  đều rơi tự do.
- Nếu  $m_1 = 0$  thì  $a_1 = -g$ , vật  $m_2$  rơi tự do,  $m_1$  đi lên  $|a_1| = g$ .
- Nếu  $m_2 = 0$  thì  $a_1 = g$ , vật  $m_1$  rơi tự do.

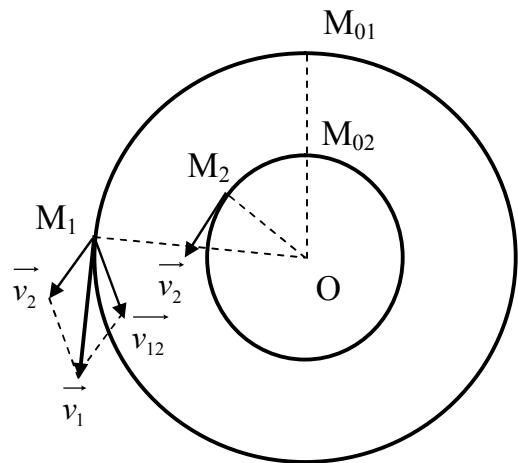
**Bài 8:** Hai chất điểm chuyển động tròn đều trên hai đường tròn đồng tâm O, đồng phẳng, cùng chiều. Với bán kính và tốc độ góc lần lượt là  $R_1, R_2$  và  $\omega_1, \omega_2$ . Cho  $R_1 > R_2, \omega_1 > \omega_2$ . Chọn mốc thời gian là lúc các chất điểm và tâm O thẳng hàng. Viết biểu thức vận tốc của chất điểm thứ nhất đối với chất điểm thứ hai theo thời gian t. Từ đó xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của vận tốc này.

BG:

Sau khoảng thời gian t, bán kính nối chất điểm thứ nhất và tâm quay một góc  $\alpha_1 = \omega_1 t$ .

Bán kính nối chất điểm thứ hai và tâm quay một góc

$$\alpha_2 = \omega_2 t.$$



$$\text{Vì } \omega_1 > \omega_2 \Rightarrow \widehat{M_1 O M_2} = \widehat{M_1 O M_{01}} - \widehat{M_2 O M_{02}} = \alpha_1 - \alpha_2 = (\omega_1 - \omega_2)t$$

Do  $\vec{v}_1$  vuông góc với  $OM_1$

Và  $\vec{v}_2$  vuông góc với  $OM_2$

$$\text{Vậy } (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (OM_1, OM_2) = M_1 O M_2 = (\omega_1 - \omega_2)t$$

Vận tốc của chất điểm thứ nhất đối với chất điểm thứ hai là:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{hay} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$v_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Leftrightarrow v_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Leftrightarrow v_{12}^2 = (\omega_1 R_1)^2 + (\omega_2 R_2)^2 - 2\omega_1 \omega_2 R_1 R_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

$$\Rightarrow v_{12} = \sqrt{(\omega_1 R_1)^2 + (\omega_2 R_2)^2 - 2\omega_1 \omega_2 R_1 R_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

Vậy  $v_{12}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $\cos(\omega_1 - \omega_2)t = 1$

$$\Rightarrow (v_{12})_{\min} = \sqrt{(\omega_1 R_1)^2 + (\omega_2 R_2)^2 - 2\omega_1 R_1 \omega_2 R_2} = \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2$$

$v_{12}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\cos(\omega_1 - \omega_2)t = -1$

$$\Rightarrow (v_{12})_{\max} = \sqrt{(\omega_1 R_1)^2 + (\omega_2 R_2)^2 + 2\omega_1 R_1 \omega_2 R_2} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$$

**Bài 9:** Chất điểm chuyển động theo đường tròn bán kính  $R$  với vận tốc góc  $\omega$  trên mặt bàn phẳng (P). Mặt bàn chuyển động tịnh tiến thẳng đều với vận tốc  $\vec{v}_0$  đối với mặt đất. Chọn mốc thời gian là lúc vec tơ vận tốc của chất điểm trong hệ quy chiếu gắn với (P) vuông góc với  $\vec{v}_0$ . Xác định vận tốc của chất điểm đối với mặt

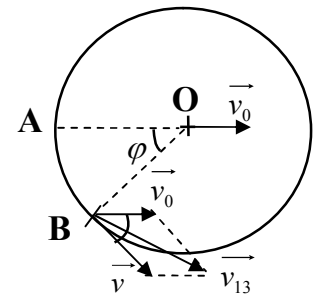
đất tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{4\omega}$ .

BG:

- Do vec tơ vận tốc trong chuyển động tròn đều có phương tiếp tuyến

với đường tròn quỹ đạo. Vậy tại thời điểm ban đầu chất điểm ở A

Sau thời điểm  $t$  chất điểm ở B, bán kính quỹ đạo quét được góc



$$\phi = \omega t = \omega \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{v}_0) = \frac{\pi}{2} - \phi = \frac{\pi}{4}$$

- Vận tốc chất điểm đối với mặt đất:

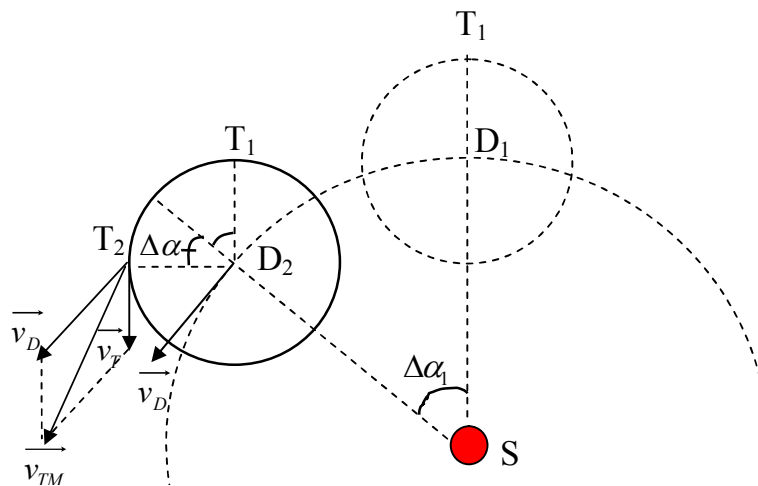
$$\begin{aligned} \vec{v}_{13} &= \vec{v} + \vec{v}_0 \Rightarrow v_{13} = \sqrt{v^2 + v_0^2 + 2vv_0 \cos(\vec{v}, \vec{v}_0)} \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2 + 2\omega R v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2 + \sqrt{2}\omega R v_0} \end{aligned}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 10:** Coi quỹ đạo chuyển động của Mặt Trăng quay quanh Trái Đất và Trái Đất quay quanh Mặt Trời cùng thuộc một mặt phẳng và cùng là chuyển động tròn đều. Các chuyển động quay này là cùng chiều và có chu kỳ quay lần lượt là  $T_M = 27,3$  ngày và  $T_D = 365$  ngày. Khoảng cách giữa Mặt Trăng và Trái Đất là  $R_M = 3,83 \cdot 10^5 \text{ km}$  và giữa Trái Đất và Mặt Trời là  $R_D = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Chọn mốc thời gian là lúc Mặt Trời, Trái Đất, Mặt Trăng thẳng hàng và Trái Đất nằm giữa (lúc Trăng tròn).

1. Tính khoảng thời gian giữa hai lần trăng tròn liền tiếp.
2. Coi Trái Đất, Mặt Trăng là các chất điểm. Viết biểu thức tính vận tốc của Mặt Trăng đối với Mặt Trời. Từ đó suy ra vận tốc nhỏ nhất, lớn nhất vận tốc này

BG:



1. Xét trong khoảng thời gian ngắn  $\Delta t$ , Trái Đất quay quanh mặt trời góc  $\Delta\alpha_1$ , Mặt Trăng quay quanh Trái Đất góc  $T_1D_2T_2 = \Delta\alpha_2$ . Do  $T_M < T_D \Rightarrow \Delta\alpha_2 > \Delta\alpha_1$

\* Xét chuyển động quay của Mặt Trăng trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất và Mặt Trời (đoạn DS xem là đứng yên). Trong khoảng thời gian  $\Delta t$  trong hệ quy chiếu này Mặt Trăng quay được góc là  $\Delta\alpha$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Từ hình vẽ  $\Rightarrow \Delta\alpha = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2$

- Tốc độ quay là:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \omega_M - \omega_D \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_D} \Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_D}$$

Vậy chu kỳ quay của Mặt Trăng trong hệ quy chiếu DS là:

$$T = \frac{T_M T_D}{T_D - T_M} = \frac{27,3 \cdot 365}{365 - 27,3} = 29,5 \text{ (ngày)}.$$

$\Rightarrow$  Khoảng thời gian giữa hai lần Trăng tròn liền tiếp là 29,5 ngày

2.

Gọi vận tốc của Mặt Trăng quay quanh Trái Đất và vận tốc của Trái Đất quay quanh Mặt Trời là  $\vec{v}_T$  và  $\vec{v}_D$ . Sau khoảng thời gian  $\Delta t$  thì

$$(\vec{v}_T, \vec{v}_D) = \Delta\alpha = \omega\Delta t \text{ (Do } \vec{v}_T \text{ vuông góc với } D_2T_2, \vec{v}_D \text{ vuông góc với } SD_2)$$

- Vận tốc của Mặt Trăng quay quanh Mặt Trời ở thời điểm  $t$  là:

$$\vec{v}_{TM} = \vec{v}_T + \vec{v}_D$$

$$\Rightarrow v_{TM}^2 = v_T^2 + v_D^2 + 2v_T v_D \cos\Delta\alpha = v_T^2 + v_D^2 + 2v_T v_D \cos\omega t$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T_M} R_M\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_D} R_D\right)^2 + 2\frac{2\pi}{T_M} R_M \frac{2\pi}{T_D} R_D \cos\frac{2\pi}{T} t$$

$$\Rightarrow v_{TM} = 2\pi \sqrt{\frac{R_M^2}{T_M^2} + \frac{R_D^2}{T_D^2} + 2\frac{R_M R_D}{T_M T_D} \cos\frac{2\pi}{T} t}.$$

Vận tốc  $v_{TM}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $\cos\frac{2\pi}{T} t = -1$ .

$$\Rightarrow (v_{TM})_{\min} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{R_M}{T_M}\right)^2 + \left(\frac{R_D}{T_D}\right)^2 - 2\frac{R_M R_D}{T_M T_D}} = 2\pi \left| \frac{R_M}{T_M} - \frac{R_D}{T_D} \right|$$

Thay số:

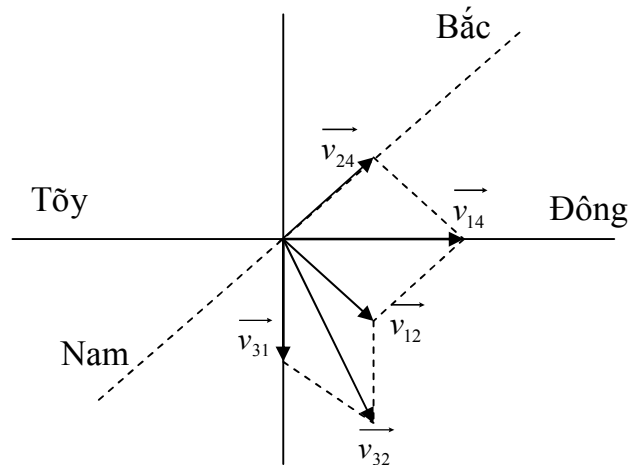
$$T_M = 27,3 \text{ ngày} = 655,2 \text{ giờ}, T_D = 365 \text{ ngày} = 8760 \text{ giờ}$$

$$(v_{TM})_{\min} = 2\pi \left| \frac{3,84 \cdot 10^5}{655,2} - \frac{149,6 \cdot 10^6}{8760} \right| = 10,354 \cdot 10^4 \text{ (km/h)}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 11:** Tàu sân bay chuyển động trên đại dương về hướng Đông với vận tốc  $v_1$ . Gió thổi về hướng Bắc với vận tốc  $v_2$ . Khi hạ cánh, máy bay tiến gần đến con tàu với vận tốc  $v_3$  theo hướng thẳng đứng. Hóy xác định giá trị vận tốc của máy bay đối với không khí chuyển động?

BG:



Gọi tàu sân bay là (1), gió là (2), máy bay là (3), đại dương là (4)

- Áp dụng cụng thức:

$$\vec{V}_{nm} = \vec{V}_{np} + \vec{V}_{pm}$$

- Vận tốc của tàu bay đối với gió

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_{14} + \vec{V}_{42} = \vec{V}_{14} - \vec{V}_{24}$$

Do  $\vec{V}_{14}$  vuông góc với  $\vec{V}_{24}$

$$\Rightarrow V_{12} = \sqrt{V_{14}^2 + V_{24}^2} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

-Vận tốc của máy bay đối với không khí:

$$\vec{V}_{32} = \vec{V}_{31} + \vec{V}_{12}$$

Do  $\vec{V}_{12}$  nằm trong mặt phẳng (P) = mp( $\vec{V}_{14}$ ,  $\vec{V}_{24}$ ),

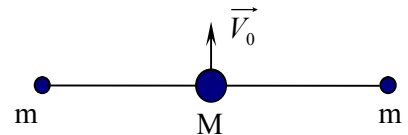
và  $\vec{V}_{31}$  vuông góc với (P) (Do vận tốc của máy bay đối với tàu có phương thẳng đứng)

$\Rightarrow \vec{V}_{31}$  vuông góc với  $\vec{V}_{12}$

$$\text{Vậy } V_{32} = \sqrt{V_{31}^2 + V_{12}^2} = \sqrt{V_3^2 + V_1^2 + V_2^2}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 12:** Một sợi dây mảnh, nhẹ chiều dài  $2l$ . Mỗi đầu dây nối với một quả cầu nhỏ khối lượng  $M = 2m$ . Ba quả cầu cùng đứng yên trên mặt bàn nhẵn nằm ngang, sợi dây kéo căng và ba quả cầu



cứng nằm trên một đường thẳng. Bây giờ cấp cho quả cầu M một xung lực làm cho nó đạt vận tốc  $v_0$ , hướng của  $v_0$  thẳng góc với dây. Tính vận tốc của các quả cầu và lực căng sợi dây tại thời điểm hai sợi dây nối các quả cầu m hợp với nhau góc  $120^\circ$  BG:

- Do sàn nhẵn tròn hệ ba quả cầu là hệ kín. Khối tâm của hệ chuyển động với vận tốc:

$$\vec{V}_G = \frac{M\vec{V}_0}{M+2m} = \frac{2m\vec{V}_0}{2m+2m} = \frac{\vec{V}_0}{2}$$

khối tâm của hệ chuyển động cùng hướng với  $\vec{V}_0$ .

- Vận tốc của các quả cầu đối với khối tâm G ở thời điểm ban đầu:

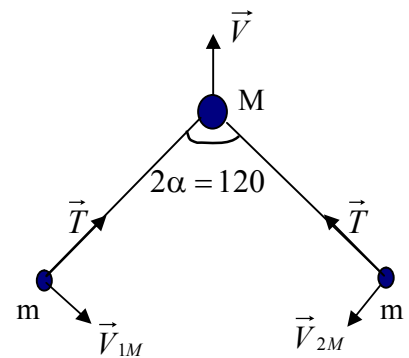
+ Quả cầu M:

$$\vec{V}_{OMG} = \vec{V}_0 - \vec{V}_G = \vec{V}_0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = \frac{\vec{V}_0}{2}$$

+ Các quả cầu m:

$$\vec{V}_{O1G} = \vec{V}_{01} - \vec{V}_G = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$$

$$\vec{V}_{O2G} = \vec{V}_{02} - \vec{V}_G = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$$



- Động lượng của hệ trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm:

$$M\vec{V}_{OMG} + m\vec{V}_{O1G} + m\vec{V}_{O2G} = 2m\frac{\vec{V}_0}{2} - m\frac{\vec{V}_0}{2} - m\frac{\vec{V}_0}{2} = 0$$

Vậy động lượng của hệ trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm luôn bằng 0.

- Tại thời điểm các sợi dây hợp nhau góc  $120^\circ$  vận tốc các quả cầu trong hệ quy chiếu khối tâm là  $\vec{V}_{1G}, \vec{V}_{2G}, \vec{V}_{MG}$ .

Đặt  $V_{MG} = u$ .



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Vận tốc của các quả cầu m đối với quả cầu M là:

$$\vec{V}_{1M}, \vec{V}_{2M} \quad (\vec{V}_{1M}, \vec{V}_{2M}) = 120^0 \text{ (Do } \vec{V}_{1M}, \vec{V}_{2M} \text{ vuông góc với các sợi dây).}$$

$$\vec{V}_{1G} = \vec{V}_{1M} + \vec{V}_{MG}; \quad \vec{V}_{2G} = \vec{V}_{2M} + \vec{V}_{MG}$$

- Lại có:

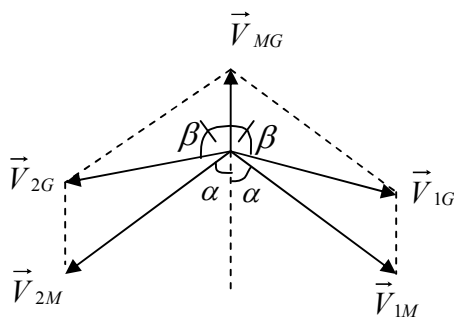
$$M\vec{V}_{MG} + m\vec{V}_{1G} + m\vec{V}_{2G} = 0$$

$$\text{hay } M\vec{V}_{MG} + m(\vec{V}_{1M} + \vec{V}_{MG}) + m(\vec{V}_{2M} + \vec{V}_{MG}) = 0$$

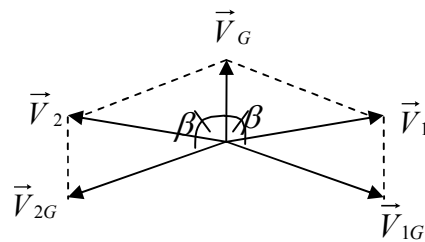
$$\Rightarrow (M+2m)\vec{V}_{MG} + m(\vec{V}_{1M} + \vec{V}_{2M}) = 0$$

$$\text{thay } M = 2m \Rightarrow 4\vec{V}_{MG} + \vec{V}_{1M} + \vec{V}_{2M} = 0 \quad (1)$$

-Trong quá trình chuyển động khối tâm G dịch chuyển đối với vật M luôn có hướng ngược với hướng chuyển động của M. Tức là  $\vec{V}_{MG}$  cùng hướng với chuyển động của M (cùng hướng với  $\vec{V}_0$ ).



Hình 1



Hình 2

Chiếu (1) lên phương của  $\vec{V}_0$  ta có:

$$4V_{MG} - V_{1M} \cos \alpha - V_{2M} \cos \alpha = 0$$

$$(V_{1M} = V_{2M}) \Rightarrow V_{1M} = \frac{2V_{MG}}{\cos \alpha} = \frac{2u}{1/2} = 4u$$

$$\vec{V}_{1G} = \vec{V}_{1M} + \vec{V}_{MG}$$

$$\Rightarrow V_{1G}^2 = V_{MG}^2 + V_{1M}^2 + 2V_{1M}V_{MG}\cos(180^0 - \alpha)$$

Từ hình (1)  $\Rightarrow (\vec{V}_{1M}, \vec{V}_{MG}) = 180^0 - \alpha$

$$u^2 + (4u)^2 + 2.4u.u.\cos 120^0 = 13u^2$$

$$\Rightarrow V_{1G} = V_{2G} = \sqrt{13} u$$

- Từ hình 1 ta có:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\cos\beta = \frac{V_{MG}^2 + V_{IG}^2 - V_{IM}^2}{2V_{MG}V_{IG}} = \frac{u^2 + (\sqrt{13}u)^2 - (4u)^2}{2u \cdot \sqrt{13}u} = \frac{-\sqrt{13}}{13}$$

- Tại thời điểm  $(\vec{V}_{1M}; \vec{V}_{2M}) = 120^\circ$ .

Vận tốc của các quả cầu m là  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ .

Vận tốc quả cầu M là  $\vec{V}$ .

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1G} + \vec{V}_G ; \vec{V}_2 = \vec{V}_{2G} + \vec{V}_G .$$

Do  $\vec{V}_{MG}$  cùng hướng với  $\vec{V}_0$  (cùng hướng với  $\vec{V}_G$ )

$$\Rightarrow (\vec{V}_G, \vec{V}_{1G}) = (\vec{V}_G, \vec{V}_{2G}) = \beta .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_1^2 &= V_G^2 + V_{1G}^2 + 2V_G V_{1G} \cos\beta = V_0^2/4 + 13u^2 + 2(V_0/2)\sqrt{13}u \cdot \frac{-\sqrt{13}}{13} \\ &= 1/4V_0^2 + 13u^2 - V_0u \end{aligned}$$

- Do  $\vec{V} = \vec{V}_{MG} + \vec{V}_G$  và  $\vec{V}_{MG}$  cùng chiều với  $\vec{V}_G$

$$\Rightarrow V = V_{MG} + V_G \Leftrightarrow V = u + V_0/2 .$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng được:

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 .$$

Thay  $M = 2m$  và  $V_1 = V_2 \Rightarrow V_0^2 = V^2 + V_1^2$

$$\Leftrightarrow V_0^2 = (u + \frac{V_0}{2})^2 + \frac{1}{4}V_0^2 + 13u^2 - uV_0 \Leftrightarrow V_0^2 = 14u^2 + \frac{V_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{7}}{14}V_0 . \text{ Vậy } V = \frac{\sqrt{7}(1+\sqrt{7})}{14}V_0 ;$$

$$V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{1}{4}V_0^2 + \frac{13V_0^2}{28} - V_0 \frac{\sqrt{7}V_0}{14}} = V_0 \sqrt{\frac{10-\sqrt{7}}{14}}$$

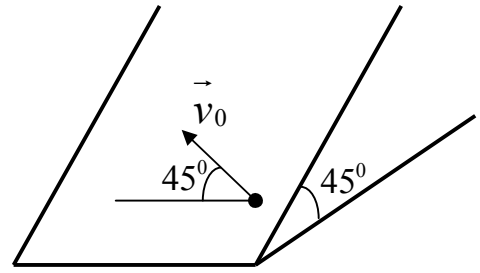
\* Các quả cầu m chuyển động tròn quanh quả cầu M do tác dụng lực căng sợi dây

T

$$\Rightarrow T = m \frac{V_{1M}^2}{l} = \frac{m16u^2}{l} = \frac{16mV_0^2}{28l} = \frac{4mV_0^2}{7l}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**Bài 13:** Một vật nhỏ khối lượng  $m$  được phóng trên mặt nghiêng nhẵn của nêm có cùng khối lượng (trong quá trình chuyển động vật luôn tiếp xúc với mặt nghiêng của nêm). Nêm đặt trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát. Vận tốc ban đầu của vật bằng  $\vec{v}_0$  và lập một góc  $45^\circ$  với cạnh của nêm. Biết góc nhị diện của nêm cũng bằng  $45^\circ$  (hình vẽ), gia tốc rơi tự do là  $g$ .



- Tìm phản lực do nêm tác dụng lên vật.
- Sau bao lâu vật quay trở lại độ cao ban đầu.
- Vận tốc của vật tại điểm cao nhất của quỹ đạo.
- Tính bán kính cong của quỹ đạo tại điểm cao nhất.

Giả thiết chuyển động tịnh tiến của nêm chỉ được phép theo hướng vuông góc với cạnh của nó.

BG:

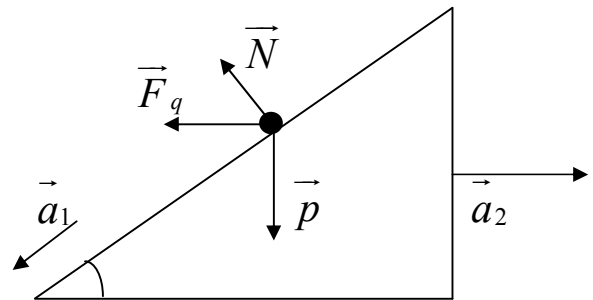
**a.**

Kí hiệu  $N, N'$  là lực tương tác giữa vật và nêm,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  lần lượt là gia tốc của vật so với nêm và gia tốc của nêm.

Áp dụng Định luật II Newton

- Với nêm:

$$N \sin \alpha = ma_2 \quad (1)$$



- Với vật:

theo phương vuông góc với cạnh của nêm và vuông góc với mặt nêm ta có:

$$mg \sin \alpha + ma_2 \cos \alpha = ma_1 \quad (2)$$

$$N = mg \cos \alpha - ma_2 \sin \alpha \quad (3)$$

Giải hệ các phương trình trên ta được:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$a_2 = g \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{g}{3}$$

$$a_1 = g \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}g}{3}$$

$$N = mg \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}mg}{3}$$

**b.** Phản lực N không phụ thuộc vào vị trí và vận tốc của vật. Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, vật chuyển động như vật bị ném xiên trong trọng trường hiệu dụng  $g' = a_1$ . Do vậy, thời gian vật trở lại độ cao ban đầu:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{a_1} = \frac{3v_0}{2g}.$$

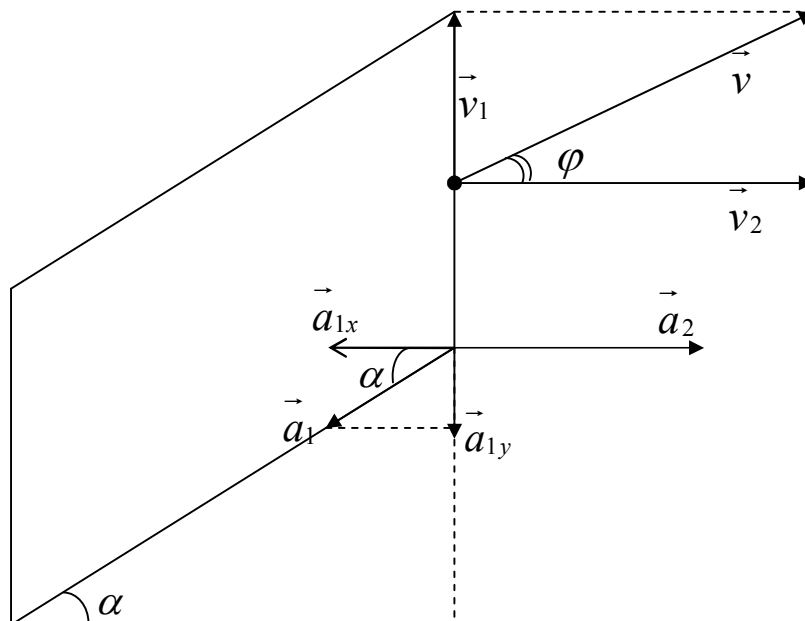
**c.** Tại điểm cao nhất vận tốc của vật so với nêm có phương ngang và song song với cạnh của nêm

$$v_1 = v_0 \cos \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Còn so với mặt đất, vận tốc của vật tại điểm cao nhất:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (a_2 t')^2} = \frac{3v_0}{4}, \text{ với } \left( t' = \frac{t}{2} = \frac{3v_0}{4g} \right).$$

**d.**



Phân tích  $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Vậy gia tốc của vật

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (\vec{a}_{1x} + \vec{a}_2) + \vec{a}_{1y}.$$

Nhận thấy rằng  $\vec{a}_{1y}$  đã vuông góc với  $\vec{v}$ , thành phần còn lại vuông góc với  $\vec{v}$  là  $(a_2 - a_{1x}) \sin \phi$ . Hai thành phần này lại vuông góc với nhau nên gia tốc hướng tâm của vật là:

$$a_n = \sqrt{a_{1y}^2 + [(a_2 - a_{1x}) \sin \phi]^2},$$

$$a_{1x} = a_1 \cos \alpha = \frac{2g}{3}$$

$$\text{với } a_{1y} = a_1 \sin \alpha = \frac{2g}{3}$$

$$\sin \phi = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Thay vào ta có

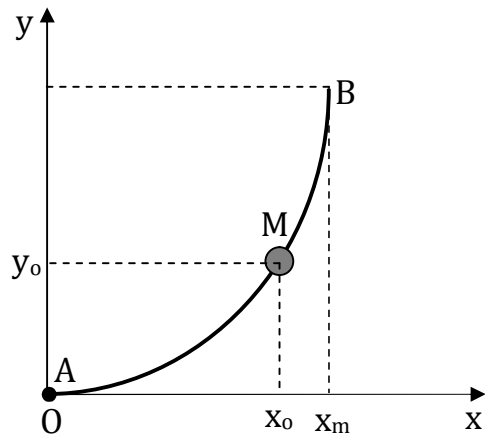
$$a_n = \frac{2\sqrt{11}}{9} g$$

Vậy, bán kính quỹ đạo của vật tại điểm cao nhất là:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{81}{32\sqrt{11}} \frac{v_0^2}{g}.$$

**Bài 14 ( Trích đề thi HSG QG 2013 ) :**

Một thanh kim loại AB cứng, mảnh được uốn sao cho trùng với đồ thị hàm số  $y = ax^n$  với  $n$  nguyên dương ;  $a$  là hằng số dương,  $0 \leq x \leq x_m$  với  $x_m$  là hoành độ của đầu B của thanh. Một hạt nhỏ khối lượng  $M$  được lồng vào thanh, hạt có thể chuyển động tới mọi điểm trên thanh. Đầu A của



thanh được chặn để hạt không rơi ra khỏi thanh. Thanh được quay đều với tốc độ góc  $\omega$  không đổi quanh trục Oy thẳng đứng. Cho gia tốc trọng trường  $g = 10\text{m/s}^2$ . Tìm tọa độ  $x_0$  của hạt để hạt cân bằng tại đó trong hai trường hợp:

a. Bỏ qua ma sát giữa hạt và thanh kim loại. Biện luận các kết quả thu được theo  $n$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

b. Xét trường hợp riêng :  $n = 2$  ;  $a = 5 \text{ m}^{-1}$ ,  $x_m = 0,6\text{m}$  ;  $\omega = 8\text{rad/s}$  ; giữa thanh và hạt có ma sát với hệ số ma sát  $\mu = 0,05$

BG:

Chọn hệ quy chiếu gắn với thanh kim loại

**a.**

Các lực tác dụng lên vật M ở vị trí cân bằng  $(x_0, y_0)$  như hình vẽ .

$$\text{Ta có : } \tan \alpha = \frac{F_{qt}}{P} = \frac{\omega^2 x_0}{g} \quad (1)$$

Mặt khác :

$\tan \alpha$  cũng là hệ số góc của tiếp tuyến với thanh tại điểm  $(x_0, y_0)$  nên :

$$\tan \alpha = y'_{(x_0)} = nax_0^{n-1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{\omega^2 x_0}{g} - nax_0^{n-1} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Với } n \neq 2 \text{ thì } x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = \left( \frac{\omega^2}{nag} \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

Với  $n = 2$ , thay vào phương trình (3) ta tìm được vị trí cân bằng của hạt :

- Nếu  $\omega^2 \neq 2ag$  có duy nhất một vị trí cân bằng :  $x_0 = 0$
- Nếu  $\omega^2 = 2ag$  thì hạt cân bằng ở mọi vị trí  $0 \leq x_0 \leq x_m$

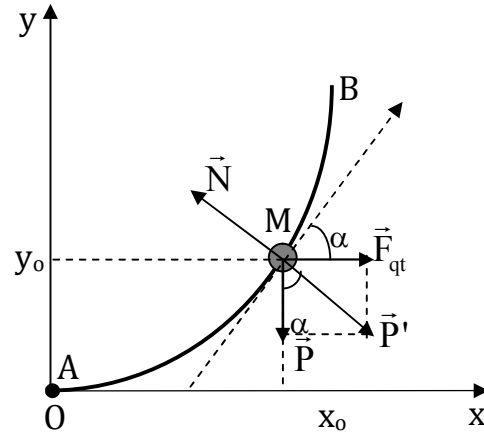
**b.**

Có ma sát giữa thanh và vật.

$$\text{Tại vị trí cân bằng của vật: } \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{qt} + \vec{F}_{ms} = 0 \quad (4)$$

Để xác định chiều của lực ma sát nghỉ ta cần so sánh thành phần của lực  $\vec{F}_{qt}$  và  $\vec{P}$  theo phương tiếp tuyến tại vị trí cân bằng.

- Nếu :  $F_{qt} \cos \alpha > Mg \sin \alpha \Leftrightarrow \omega^2 x_0 \cos \alpha > Mg \sin \alpha \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{g \tan \alpha}{x_0} = 2ag$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

thì lực ma sát hướng xuống

$$\text{- Nếu : } F_{qt} \cos \alpha < Mg \sin \alpha \Leftrightarrow \omega^2 x_0 \cos \alpha < Mg \sin \alpha \Leftrightarrow \omega^2 < \frac{g \tan \alpha}{x_0} = 2ag$$

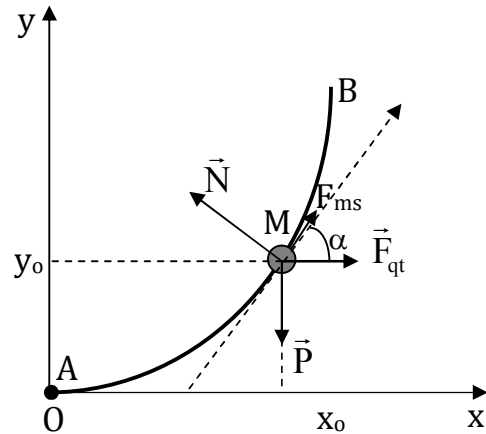
thì lực ma sát hướng lên

Với  $a = 5 \text{ m}^{-1}$  ;  $\omega = 8 \text{ rad/s}$  ta thấy  $\omega^2 < 2ag$  nên lực ma sát hướng lên.

Chiều phương trình (4) lên phương tiếp

tuyến ta có:

$$\begin{aligned} F_{ms} &= Mg \sin \alpha - F_{qt} \cos \alpha \\ &= M(g \sin \alpha - \omega^2 x_0 \cos \alpha) \end{aligned}$$



Chiều (4) lên phương vuông góc với tiếp tuyến ta có:

$$N = Mg \cos \alpha + F_{qt} \sin \alpha = M(\omega^2 x_0 \sin \alpha + g \cos \alpha)$$

Điều kiện cân bằng:  $0 \leq F_{ms} \leq \mu N$

$$\Rightarrow g \sin \alpha - \omega^2 x_0 \cos \alpha \leq \mu(g \cos \alpha + \omega^2 x_0 \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow g \tan \alpha - \omega^2 x_0 \leq \mu g + \mu \omega^2 x_0 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow 2agx_0 - \omega^2 x_0 \leq \mu g + 2\mu a \omega^2 x_0^2$$

$$\Rightarrow 2\mu a \omega^2 x_0^2 - (2ag - \omega^2)x_0 + \mu g \geq 0$$

Thay số:

$$32x_0^2 - 36x_0 + 0,5 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x_0 \leq 0,014 \text{m}$$

**Bài 15:** Một cầu thủ đá vào quả bóng có khối lượng  $m$ , truyền cho nó một vận tốc đầu  $v_1$  và có hướng hợp với mặt phẳng ngang một góc  $\alpha$  ngược chiều gió thổi dọc theo mặt sân. Sau khi vẽ lên không trung một quỹ đạo nào đó quả bóng lại quay trở về vị trí xuất phát với vận tốc  $v_2$ . Xem lực cản của không khí tỉ lệ thuận với vận tốc

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

của bóng đối với không khí  $\vec{F}_c = -k\vec{v}_{td}$ , k là hệ số tỉ lệ. Hãy xác định: a. Vận tốc u của gió

b. Góc  $\beta$  mà vectơ vận tốc  $\vec{v}_2$  hợp với mặt phẳng ngang

BG:

Chọn hệ tọa độ xOy có gốc O là vị trí ban đầu của quả bóng

Áp dụng Định luật II Newton

$$m\vec{a} = \vec{P} - k(\vec{v} - \vec{u})$$

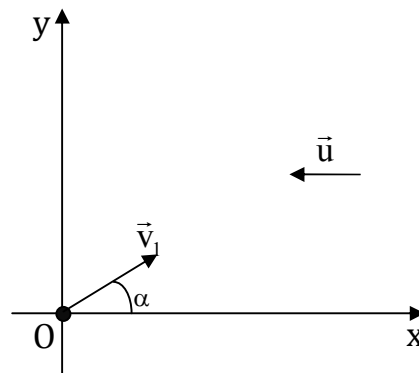
- Xét chuyển động theo trục Ox

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k(v_x + u)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{v_x + u} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_1 \cos \alpha}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x + u} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln \frac{u + v_x}{u + v_1 \cos \alpha} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow v_x = (u + v_1 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m} t} - u \quad (1)$$



Tọa độ của vật theo trục Ox:

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (u + v_1 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m} t} dt - u \int_0^t dt$$

$$= \frac{-m}{k} (u + v_1 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m} t} \Big|_0^t - ut = \frac{-m}{k} (u + v_1 \cos \alpha) (e^{-\frac{k}{m} t} - 1) - ut$$

Sau thời gian bay  $t_0$  bóng lại quay về vị trí xuất phát nên  $x = 0$

$$\Rightarrow \frac{-m}{k} (u + v_1 \cos \alpha) (e^{-\frac{k}{m} t_0} - 1) = ut_0 \quad (2)$$

- Xét chuyển động theo trục Oy

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\Rightarrow \int_{v_1 \sin \alpha}^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{k}{m} v_y} = - \int_0^t dt \Rightarrow \frac{m}{k} \ln(g + \frac{k}{m} v_y) \Big|_{v_1 \sin \alpha}^{v_y} = -t$$

$$\Rightarrow (g + \frac{k}{m} v_y) = (g + \frac{k}{m} v_1 \sin \alpha) e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow v_y = (v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k} \quad (3)$$

Tọa độ:

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} dt - \frac{mg}{k} \int_0^t dt$$

$$= -\frac{m}{k} (v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) (e^{-\frac{k}{m} t} - 1) - \frac{mg}{k} t$$

Khi vật trở lại vị trí xuất phát:  $y = 0$

$$\Rightarrow -\frac{m}{k} (v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) (e^{-\frac{k}{m} t_0} - 1) = \frac{mg}{k} t_0 \quad (4)$$

a. Vận tốc  $u$  của gió

Từ (2) và (4) suy ra: 
$$\frac{u + v_1 \cos \alpha}{\frac{mg}{k} + v_1 \sin \alpha} = \frac{u}{\frac{mg}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{k} u + \frac{mg}{k} v_1 \cos \alpha = \frac{mg}{k} u + u v_1 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow u = \frac{mg \cos \alpha}{k \sin \alpha} = \frac{mg}{k \tan \alpha}$$

b. Tính góc  $\beta$

Từ (1) (2) ta có vận tốc của bóng tại thời điểm  $t_0$

$$v_{2x} = v_2 \cos \beta = (u + v_1 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m} t_0} - u \quad (5)$$

$$v_{2y} = v_2 \sin \beta = (v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t_0} - \frac{mg}{k} \quad (6)$$

Từ (5) và (6)

$$\tan \beta = \frac{(v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t_0} - \frac{mg}{k}}{(u + v_1 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m} t_0} - u} \quad (7)$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Thay  $u = \frac{mg}{k \tan \alpha}$  vào (7) ta được :

$$\tan \beta = \frac{(v_1 \sin \alpha + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t_0} - \frac{mg}{k}}{(\frac{mg}{k \tan \alpha} + v_1 \cos \alpha)e^{-\frac{k}{m}t_0} - \frac{mg}{k \tan \alpha}} = \tan \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

**Bài 16 ( Đề thi chọn ĐT Olympic 2015):** Một giọt mưa được hình thành và rơi xuyên qua đám mây chứa các hạt nước nhỏ li ti, phân bố đều và nằm lơ lửng trong không trung. Trong khi rơi, giọt mưa tích dần nước bằng việc nhập tất cả những hạt nước nhỏ trên đường mà nó quét qua đám mây. Ta giả thiết một cách lí tưởng hóa bài toán này: Không khí không làm ảnh hưởng đến chuyển động của giọt mưa, kích thước ban đầu của giọt mưa nhỏ không đáng kể và giọt mưa luôn có dạng hình cầu. Khối lượng riêng của giọt mưa và của đám mây hơi nước tương ứng là  $\rho$ ,  $\rho_0$  và được coi là các hằng số.

a. Bán kính giọt mưa  $r$  phụ thuộc vào thời gian  $t$  theo một hàm số  $r(t)$  nào đó. Lập phương trình vi phân của hàm này.

b. Giả thiết  $r(t)$  có dạng:  $r(t) = A \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\alpha g^\beta t^\gamma$ , trong đó  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  là các hệ số

không thứ nguyên và  $A$  là một số không phụ thuộc vào tham số nào;  $g$  là gia tốc trọng trường. Xác định các giá trị của các hệ số  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

c. Tìm gia tốc của giọt mưa khi nó chuyển động trong đám mây.

Biết phương trình Định luật II Niu – ton cho hệ có khối lượng thay đổi:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ngoai} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

BG:

a. Phương trình chuyển động của giọt mưa:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + (\vec{v}_1 - \vec{v}) \frac{dm}{dt} \quad \text{với } v_1 = 0$$

Chiều lên chiều dương hướng xuống:

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$m \frac{dv}{dt} = mg - v \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - v \frac{dm}{mdt} \quad (1)$$

Lại có: khối lượng giọt mưa tăng thêm trong thời gian  $dt$  chính bằng khối lượng hơi nước đã nhập vào giọt mưa trong thời gian nó quét qua đám mây

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr = \rho_0 \pi r^2 v dt \Rightarrow v = \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} &= g - \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \frac{dr}{dt} \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\rho\pi r^3 dt} = g - \frac{12\rho}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{3}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho} g &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

b. Từ biểu thức:

$$\begin{aligned} r(t) &= A \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^\gamma \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= A\gamma \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = A\gamma(\gamma-1) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-2} \end{aligned}$$

Thế vào phương trình (3):

$$\begin{aligned} A\gamma(\gamma-1) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-2} + 3\gamma^2 A \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-2} - \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho} g &= 0 \\ \Rightarrow (4\gamma^2 - 1) A \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-2} - \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho} g &= 0 \end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma - 2 = 0 \\ \alpha = \beta = 1 \\ (4\gamma^2 - \gamma)A = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \alpha = \beta = 1 \\ A = \frac{1}{56} \end{cases}$$

c. Theo 2 ý trên ta có:

$$v = \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4\rho}{\rho_0} \cdot \gamma A \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha g^\beta t^{\gamma-1} = \frac{1}{7} gt$$

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

Do đó gia tốc của giọt mưa khi nó chuyển động trong đám mây là:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{7}$

## **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1. Một vật khối lượng 0,2kg trượt trên mặt phẳng ngang dưới tác dụng của lực  $F$  có phương nằm ngang, có độ lớn là 1N.

a. Tính gia tốc chuyển động không vận tốc đầu. Xem lực ma sát là không đáng kể.

b. Thật ra, sau khi đi được 2m kể từ lúc đứng yên, vật đạt được vận tốc 4m/s. Tính gia tốc chuyển động, lực ma sát và hệ số ma sát. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

$$\text{ĐS: a. } a = 5 \text{ m/s}^2, \text{ b. } a = 4 \text{ m/s}^2; \mu = 0,1.$$

2. Một buồng thang máy có khối lượng 1 tấn

a. Từ vị trí đứng yên ở dưới đất, thang máy được kéo lên theo phương thẳng đứng bằng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 12000N. Hỏi sau bao lâu thang máy đi lên được 25m? Lúc đó nó có vận tốc là bao nhiêu?

b. Ngay sau khi đi được 25m trên, ta phải thay đổi lực kéo thang máy thế nào để thang máy đi lên được 20m nữa thì dừng lại? Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

$$\text{ĐS: a. } t = 5 \text{ s, } v = 10 \text{ m/s; b. } F = 7500 \text{ N.}$$

3. Một đoàn tàu có khối lượng  $10^3$  tấn đang chạy với vận tốc 36km/h thì bắt đầu tăng tốc. Sau khi đi được 300m, vận tốc của nó lên tới 54km/h. Biết lực kéo của đầu tàu trong cả giai đoạn tăng tốc là  $25 \cdot 10^4\text{N}$ . Tìm lực cản chuyển động của đoàn tàu.

$$\text{ĐS: } F_c = 5 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

4. Một chiếc ô tô có khối lượng 5 tấn đang chạy thì bị hãm phanh chuyển động thẳng chậm dần đều. Sau 2,5s thì dừng lại và đã đi được 12m kể từ lúc vừa hãm phanh.

a. Lập công thức vận tốc và ve đồ thị vận tốc kể từ lúc vừa hãm phanh.

b. Tìm lực hãm phanh.

$$\text{ĐS: a. } v_t = 9,6 - 3,84t; \text{ b. } F_h = 19,2 \cdot 10^3 \text{ N.}$$

5. Một vật khối lượng 1kg được kéo trên sàn ngang bởi một lực  $\vec{F}$  hướng lên, có phương hợp với phương ngang một góc  $45^\circ$  và có độ lớn là  $2\sqrt{2}\text{N}$ . Hệ số ma sát giữa sàn và vật là 0,2.

a. Tính quãng đường đi được của vật sau 10s nếu vật có vận tốc đều là 2m/s.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

b. Với lực kéo trên thì hệ số ma sát giữa vật và sàn là bao nhiêu thì vật chuyển động thẳng đều.

Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS: a.  $s = 40\text{ m}$ ; b.  $\mu = 0,25$ .

**6.** Một người khối lượng  $m = 60\text{kg}$  đứng trên thang chuyển động lên trên gồm ba giai đoạn.

hãy tính lực nén lên thang trong mỗi giai đoạn:

a. Nhanh dần đều với gia tốc  $0,2\text{m/s}^2$ .

b. Đều

c. Chậm dần đều với gia tốc  $0,2\text{m/s}^2$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$

ĐS: a.  $N = 612\text{ N}$ ; b.  $N = 600\text{ N}$ ; c.  $N = 588\text{ N}$ .

**7.** Một vật có khối lượng  $60\text{kg}$  đặt trên sàn buồng thang máy. Tính áp lực của vật lên sàn trong các trường hợp:

a. Thang chuyển động xuống nhanh dần đều với gia tốc  $0,2\text{m/s}$ .

b. Thang chuyển động xuống chậm dần đều với gia tốc  $0,2\text{m/s}^2$

c. Thang chuyển động xuống đều.

d. thang rơi tự do. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$

ĐS: a.  $N = 588\text{ N}$ ; b.  $N = 612\text{ N}$ ; c.  $N = 600\text{ N}$ ; d.  $N = 0$ .

**8.** Một lực kế, có treo vật khi đứng yên chỉ  $20\text{n}$ . Tìm số chỉ của lực kế khi:

a. Kéo lực kế lên nhanh dần với gia tốc  $1\text{m/s}^2$

b. Hạ lực kế xuống chậm dần đều với gia tốc  $0,5\text{m/s}^2$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$

ĐS: a.  $F_k = 22\text{ N}$ ; b.  $F_k = 21\text{ N}$ .

**9.** Một sợi dây thép có thể giữ yên được một trọng vật có khối lượng lớn đến  $450\text{kg}$ . Dùng dây để kéo một trọng vật khác có khối lượng  $400\text{kg}$  lên cao. Hỏi gia tốc lớn nhất mà vật có thể có để dây không bị đứt. Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

ĐS:  $a \leq 1,25\text{ m/s}^2$ .

**10.** Một vật trượt không vận tốc đầu đỉnh dốc nghiêng dài  $8\text{m}$ , cao  $4\text{m}$ . Bỏ qua ma sát. Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ . Hỏi

a. Sau bao lâu vật đến chân dốc?

b. Vận tốc của vật ở chân dốc.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

ĐS: a.  $t = 1,79$  s; b.  $v = 8,95$  m/s.

**11.** Giải lại bài toán trên khi hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là  $k = 0,2$ .

ĐS: a.  $t = 2,2$  s; b.  $v = 7,2$  m/s.

**12.** Một vật trượt không vận tốc đầu từ đỉnh mặt phẳng nghiêng dài 5m, nghiêng góc  $30^\circ$  so với phương ngang. Coi ma sát trên mặt nghiêng là không đáng kể. Đến chân mặt phẳng nghiêng, vật sẽ tiếp tục chuyển động trên mặt phẳng ngang trong thời gian là bao nhiêu ? Biết hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng ngang là  $k = 0,2$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS:  $t = 3,54$  s.

**13.** Xe đang chuyển động với vận tốc 25m/s thì bắt đầu trượt lên dốc dài 50m, cao 14m. Hệ số ma sát giữa xe và mặt dốc là 0,25.

a. Tìm gia tốc của xe khi lên dốc.

b. Xe có lên dốc không ? Nếu xe lên được, tìm vận tốc xe ở đỉnh dốc và thời gian lên dốc.

ĐS: a.  $a = - 3\text{m/s}^2$ ; b.  $v = 18,02$  m/s,  $t = 2,33$  s.

**14.** Một vật có khối lượng  $m = 1\text{kg}$  trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc  $\alpha = 45^\circ$  so với mặt phẳng nằm ngang.

Cần phải ép lên một vật lực  $\vec{F}$  theo phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng có độ lớn là bao nhiêu để vật trượt xuống nhanh dần đều với gia tốc  $4\text{m/s}^2$ . Biết hệ ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là  $\mu = 0,2$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS:  $F = 8,28$  N.

**15.** Giải lại bài toán khi vật trượt xuống đều.

ĐS:  $F = 28,28$  N.

**16.** Một đầu máy tàu hoả có khối lượng 60 tấn đang xuống một dốc 5% ( $\sin \alpha = 0,050$ ) và đạt được vận tốc 72km/h thì tài xe đạp thắng. Đầu máy tàu hoả chạy chậm dần đều và dừng lại sau khi đi được 200m. Tính:

a. Lực thắng.

b. Thời gian đầu máy đi được quãng đường 200m trên. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS: a.  $F = 9.10^4$  N; b.  $t = 20$  s.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

17. Tại một điểm A trên mặt phẳng nghiêng một góc  $30^\circ$  so với phương ngang, người ta truyền cho một vật vận tốc  $6\text{ m/s}$  để vật đi lên trên mặt phẳng nghiêng theo một đường dốc chính. Bỏ qua ma sát.

Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

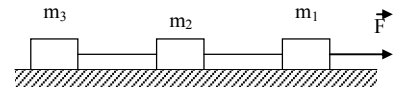
a. Tính gia tốc của vật.

b. Tính quãng đường dài nhất vật chuyển động trên mặt phẳng nghiêng.

c. Sau bao lâu vật sẽ trở lại A? Lúc đó vật có vận tốc bao nhiêu?

ĐS: a.  $a = -5 \text{ m/s}^2$ ; b.  $s = 3,6 \text{ m}$ ; c.  $t = 2,4 \text{ s}$ .

18. Tác dụng lực  $\vec{F}$  có độ lớn  $15\text{ N}$  vào hệ ba vật như hình vẽ. Biết  $m_1 = 3\text{ kg}$ ;  $m_2 = 2\text{ kg}$ ;  $m_3 = 1\text{ kg}$  và hệ số ma sát giữa ba vật và mặt phẳng ngang



như nhau là  $k = 0,2$ . Tính gia tốc của hệ và lực căng của các dây nối.

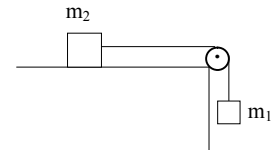
Xem dây nối có khối lượng và độ dãn không đáng kể. lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

ĐS:  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$   $T_1 = 7,5 \text{ N}$ ;  $T_3 = 2,5 \text{ N}$

19. Giải lại bài toán trên nếu ma sát không đáng kể

ĐS:  $a = 2,5 \text{ m/s}^2$   $T_1 = 7,5 \text{ N}$ ;  $T_3 = 2,5 \text{ N}$

20. Cho hệ cơ học như hình vẽ,  $m_1 = 1\text{ kg}$ ,  $m_2 = 2\text{ kg}$ . hệ số ma sát giữa  $m_2$  và mặt bàn là  $0,2$ . Tìm gia tốc hệ và lực căng dây. Biết ròng rọc có khối lượng và ma sát với dây nối không đáng kể. Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ . Cho dây nối có khối lượng và độ giãn không đáng kể.



ĐS:  $a = 2 \text{ m/s}^2$   $T = 8 \text{ N}$

21. Giải lại bài toán trên nếu hệ số ma sát giữa vật  $m_2$  với mặt bàn là  $0,6$  và lúc đầu cơ hệ đứng yên.

ĐS:  $a = 0 \text{ m/s}^2$   $T = 10 \text{ N}$

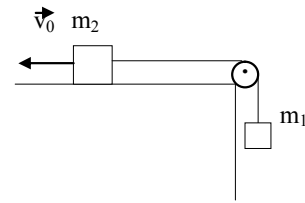
22. Trong bài 20 biết lúc đầu cơ hệ đứng yên và  $m_1$  cách đất  $2\text{ m}$ . Sau khi hệ chuyển động được  $0,5$  thì dây đứt. Tính thời gian vật  $m_1$  tiếp tục rơi và vận tốc của nó khi vừa chạm đất. Biết trước khi dây đứt thì  $m_2$  chưa chạm vào ròng rọc. Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ .



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

ĐS:  $t = 0,5 \text{ s}$ ;  $v = 6 \text{ m/s}$ .

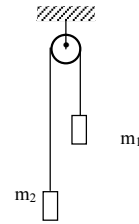
23. Trong bài 20 nếu cung cấp cho  $m_2$  một vận tốc  $\vec{v}_0$  có độ lớn  $0,8 \text{ m/s}$  như hình vẽ. Mô tả chuyển động kế tiếp của cơ hệ (không xét đến trường hợp  $m_1$  hoặc  $m_2$  có thể chạm vào ròng rọc).



24. Người ta vắt qua một chiếc ròng rọc một đoạn dây, ở hai đầu có treo hai quả cân 1 và 2 có khối lượng lần lượt là  $m_1 = 260 \text{ g}$  và  $m_2 = 240 \text{ g}$ . Sau khi buông tay, hãy tính:

- Vận tốc của mỗi vật ở đầu giây thứ 3.
- Quãng đường mà mỗi vật đi được trong giây thứ 3.

Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Bỏ qua khối lượng và độ giãn không đáng kể.



ĐS: a.  $v = 0,8 \text{ m/s}$ ; b.  $\Delta s = 1 \text{ m}$ .

25. Cho hệ vật như hình vẽ:  $m_1 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ .

Hệ số ma sát giữa hai vật và mặt phẳng ngang đều

bằng nhau là  $k = 0,1$ . Tác dụng vào  $m_2$  lực  $\vec{F}$  có

độ lớn  $F = 6 \text{ N}$  và  $\alpha = 30^\circ$  như hình vẽ. Tính gia tốc mỗi vật và lực căng của dây.

Biết dây có khối lượng và độ giãn không đáng kể. lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



ĐS: a.  $0,83 \text{ m/s}^2$ ; T = 1,83 N.

26. Cho hệ vật như hình vẽ:  $m_1 = 3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

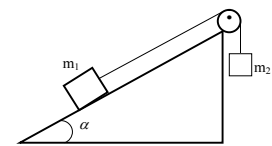
Bỏ qua ma sát, khối lượng của dây và khối lượng ròng

rọc. Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

a. Tính gia tốc chuyển động của mỗi vật

b. Tính lực nén lên trục ròng rọc.

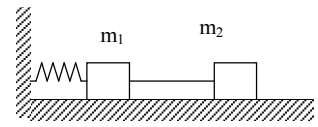
c. Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên thì hai vật ở ngang. Biết lúc đầu  $m_1$  ở vị trí thấp hơn  $m_2$   $0,75 \text{ m}$ .



ĐS: a.  $a = 1 \text{ m/s}^2$ ; b. T = 31,2 N; c.  $t = 1 \text{ s}$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

27. Trên mặt phẳng nằm ngang có hai vật có khối lượng  $m_1 = 1\text{kg}$  và  $m_2 = 2\text{kg}$  nối với nhau bằng một dây khối lượng và độ giãn không đáng kể. Tại một thời điểm nào



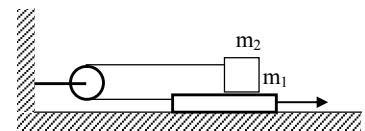
đó vật  $m_1$  bị kéo theo phương ngang bởi một lò xo (có khối lượng không đáng kể) và đang bị giãn ra một đoạn  $\Delta l = 2\text{cm}$ . Độ cứng của lò xo là  $k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Bỏ qua ma sát. Xác định:

- Gia tốc của vật tại thời điểm đang xét
- Lực căng dây tại thời điểm đang xét.

ĐS: a.  $a = 2 \text{ m/s}^2$ ; b.  $T = 4 \text{ N}$ .

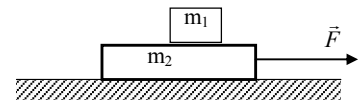
28. Đặt một vật khối lượng  $m_1 = 2\text{kg}$  trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang. Trên nó có một vật khác khối lượng  $m_2 = 1 \text{ kg}$ . Hai vật nối với nhau bởi một sợi dây vắt qua một ròng rọc cố định. Cho độ giãn của sợi dây, khối lượng của dây và ròng rọc không đáng kể.

Hỏi cần phải tác dụng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn bao nhiêu vào vật  $m_1$  (như hình vẽ) để nó chuyển động với gia tốc  $a = 5\text{m/s}^2$ . Biết hệ số ma sát giữa hai vật  $m_1$  và  $m_2$  là  $k = 0,5$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ . Bỏ qua ma sát với mặt bàn.



ĐS:  $F = 25 \text{ N}$ .

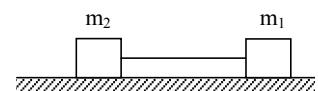
29. Có thể đặt một lực  $F$  theo phương ngang lớn nhất là bao nhiêu lên  $m_2$  để  $m_1$  đứng yên trên mặt  $m_2$  khi  $m_2$  chuyển động nhanh dần đều trên mặt phẳng nằm



ngang. Biết hệ số ma sát giữa  $m_1$  và  $m_2$  là  $k = 0,1$ ; giữa  $m_2$  và mặt ngang là  $k' = 0,2$ ;  $m_1 = 1\text{kg}$ ;  $m_2 = 2\text{kg}$ . Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS:  $F = 9 \text{ N}$ .

30. Có hệ vật như hình vẽ,  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 0,3 \text{ kg}$  được nối với nhau bằng một dây nhẹ và không giãn. Bỏ qua ma sát giữa hai vật và mặt bàn. Một lực  $\vec{F}$  có phương song song với mặt bàn có thể tác dụng vào khi  $m_1$  hoặc  $m_2$ .



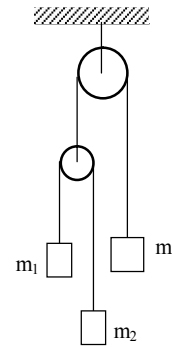
**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

a. Khi  $\vec{F}$  tác dụng vào  $m_1$  và có độ lớn 1N thì gia tốc của các vật và lực căng dây nổi là bao nhiêu?

b. Biết dây chịu được lực căng lớn nhất là 10N. Hỏi độ lớn cực đại của  $\vec{F}$  tác dụng vào  $m_1$  hoặc  $m_2$ .

ĐS: a.  $a = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 0,6 \text{ N}$ ; b.  $F_{\max} = 25 \text{ N}$ .

31. Có hệ vật như hình vẽ,  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$ ,  $m = 5\text{kg}$ . Bỏ qua ma sát và độ giãn dây treo. Khối lượng của các ròng rọc và của dây treo. Khối lượng của các ròng rọc và của dây treo không đáng kể. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ . Tính gia tốc chuyển động của  $m$  và lực căng dây nổi  $m$  với ròng rọc động



ĐS:  $a = 0,2 \text{ m/s}^2$ ;  $T = 49 \text{ N}$ .

32. Muốn kéo một vật có trọng lượng  $P = 1000\text{N}$  chuyển động đều lên một mặt phẳng nghiêng góc  $60^\circ$  so với đường thẳng đứng, người ta phải dùng một lực  $\vec{F}$  có phương song song với mặt phẳng nghiêng và có độ lớn 600N. Hỏi vật sẽ chuyển động xuống mặt phẳng nghiêng với gia tốc bao nhiêu khi không có lực  $\vec{F}$ . Biết giữa vật và mặt phẳng nghiêng có ma sát. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

ĐS:  $a = 4 \text{ m/s}^2$ .

33. Một vật khối lượng 2kg được kéo bởi một lực  $\vec{F}$  hướng lên hợp với phương ngang một góc  $\alpha = 30^\circ$ . Lực  $\vec{F}$  có độ lớn 8N. Biết sau khi bắt đầu chuyển động 2s từ trạng thái đứng yên vật đi được quãng đường 4m.

Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

a. Tính hệ số ma sát giữa vật và mặt ngang.

b. Để cho vật có thể chuyển động thẳng đều thì  $\vec{F}$  có độ lớn là bao nhiêu?

ĐS: a.  $\mu = 0,18$ ; b.  $F = 2,63 \text{ N}$ .

34. Một vật khối lượng  $m_2 = 4\text{kg}$  được đặt trên bàn nhẵn. Ban đầu vật  $m_2$  đứng yên cách sàn nhà 1m. Tìm vận tốc vật  $m_1$  khi vừa chạm sàn nhà. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ . Bỏ qua ma sát, khối lượng ròng rọc, khối lượng và độ giãn của dây nổi. “Biết cơ hệ như bài 20”.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

ĐS:  $a = 2 \text{ m/s}^2$ ;  $v = 2 \text{ m/s}$ .

**35.** Một vật được ném thẳng đứng từ mặt đất lên với vận tốc ban đầu  $20 \text{ m/s}$ . Bỏ qua sức cản không khí.

Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

a. Tìm độ cao và vận tốc của vật sau khi ném  $1,5 \text{ s}$ .

b. Xác định độ cao tối đa mà vật có thể đạt được và thời gian vận chuyển động trong không khí.

c. Sau bao lâu sau khi ném, vật ở cách mặt đất  $15 \text{ m}$ ? Lúc đó vật đang đi lên hay đi xuống?

ĐS: a.  $h = 18,85 \text{ m}$ ,  $v = 5 \text{ m/s}$ ; b.  $h = 20 \text{ m}$ ,  $t = 4 \text{ s}$ ; c.  $t = 3 \text{ s}$ , vật đang đi xuống.

**36.** Từ đỉnh tháp cao  $25 \text{ m}$ , một hòn đá được ném lên với vận tốc ban đầu  $5 \text{ m/s}$  theo phương hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc  $\alpha = 30^\circ$ .

a. Viết phương trình chuyển động, phương trình đạo của hòn đá.

b. Sau bao lâu kể từ lúc ném, hòn đá sẽ chạm đất?

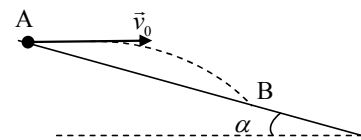
Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$

ĐS: a.  $x = 2,5\sqrt{3}t$ ,  $y = 25 + 2,5t - 5t^2$ ; b.  $t = 2,5 \text{ s}$ .

**37.** Trong bài 36 tính:

a. Khoảng cách từ chân tháp đến điểm rơi của vật.

b. Vận tốc của vật khi vừa chạm đất.



ĐS: a.  $x = 10,8 \text{ m}$ ; b.  $v = 23 \text{ m/s}$ .

**38.** Từ một điểm A trên sườn một quả đồi, một vật được ném theo phương nằm ngang với vận tốc  $10 \text{ m/s}$ . Theo tiết diện thẳng đứng chứa phương ném thì sườn đồi là một đường thẳng nghiêng góc

$\alpha = 30^\circ$  so với phương nằm ngang điểm rơi B của vật trên sườn đồi cách A bao nhiêu? Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

ĐS:  $AB = 13,33 \text{ m}$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**39.** Từ đỉnh tháp cao 30m, ném một vật nhỏ theo phương ngang với vận tốc ban đầu  $v_0 = 20\text{m/s}$ .

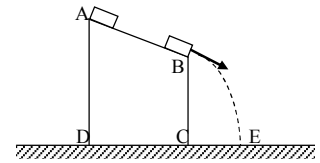
a. Tính khoảng thời gian từ lúc ném đến khi vật chạm đất và khoảng cách từ điểm chạm đất đến chân tháp.

b. Gọi M là một điểm trên quỹ đạo tại đó vectơ vận tốc hợp với phương thẳng đứng một góc

$\alpha = 60^\circ$ . Tính khoảng cách từ M tới mặt đất.

ĐS: a.  $x = 49\text{ m}$ ,  $t = 2,45\text{ s}$ ; b.  $h_M = 23,33\text{ m}$

**40.** Từ đỉnh A của một mặt bàn phẳng nghiêng người ta thả một vật có khối lượng  $m = 0,2\text{kg}$  trượt không ma sát không vận tốc đầu. Cho  $AB = 50\text{cm}$ ;  $BC = 100\text{cm}$ ;  $AD = 130\text{cm}$ ;  $g = 10\text{m/s}^2$ .



a. Tính vận tốc của vật tại điểm B

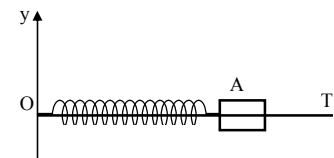
b. Chứng minh rằng quỹ đạo của vật sau khi rời khỏi bàn là 1 parabol. Vật rơi cách chân bàn một đoạn CE bằng bao nhiêu? (Lấy gốc toạ độ tại C)

ĐS: a.  $v_B = 2,45\text{ m/s}$ ; b.  $y = h - \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} x^2$ ,  $CE = 0,635\text{ m}$ .

**41.** Một lò xo R có chiều dài tự nhiên  $l_0 = 24,3\text{m}$  và độ

cứng  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ; có đầu O gắn với một thanh cứng,

nằm ngang T như hình vẽ. Đầu kia có gắn với một vật nhỏ A, khối lượng  $m = 100\text{g}$ . Thanh T xuyên qua tâm



vật A và A có thể trượt không ma sát theo T. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

Cho thanh T quay đều quanh trục thẳng đứng Oy, với vận tốc góc  $\omega = 10\text{rad/s}$ .

Tính độ dài của R. Xác định phương, chiều và cường độ của lực do R tác dụng vào điểm O'. Bỏ qua khối lượng của lò xo R.

ĐS:  $l = 27\text{ cm}$ ,  $F = 2,7\text{ N}$ .

**42.** Một đĩa phẳng tròn có bán kính  $R = 10\text{cm}$ , nằm ngang quay đều quanh trục thẳng đứng đi qua tâm của đĩa.

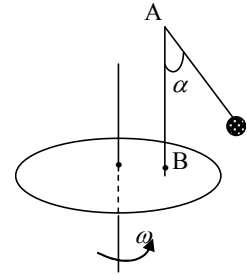
**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

a. Nếu mỗi giây đĩa quay được 1,5 vòng thì vận tốc dài của một điểm ở mép đĩa là bao nhiêu?

b. Trên mặt đĩa có đặt một vật có kích thước nhỏ, hệ số ma sát giữa vật và đĩa là  $\mu = 0,1$ . Hỏi với những giá trị nào của vận tốc góc  $\omega$  của đĩa thì vật đặt trên đĩa dù ở vị trí nào cũng không bị trượt ra phía ngoài đĩa. Cho  $g = 10\text{m/s}^2$

$$\text{ĐS: } \omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = 3,16 \text{ rad/s.}$$

43. Có đĩa phẳng như bài 41 treo một con lắc đơn (gồm vật nặng M treo vào đầu một sợi dây nhẹ) vào đầu thanh AB cắm thẳng đứng trên mặt đĩa, đầu B cắm vào đĩa tại điểm cách tâm quay  $\frac{R}{2}$ . Cho  $AB = 2R$ .

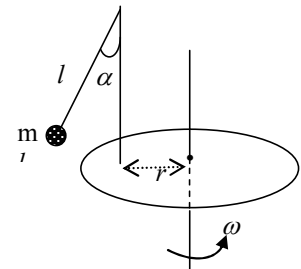


a. Chứng minh rằng khi đĩa quay đều thì phương dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$  nằm trong mặt phẳng chứa AB và trục quay.

b. Biết chiều dài con lắc là  $l = R$ , tìm vận tốc góc  $\omega$  của đĩa quay để  $\alpha = 30^\circ$ .

$$\text{ĐS: a. Do các lực đồng phẳng; b. } \omega \approx 7,6 \text{ rad/s.}$$

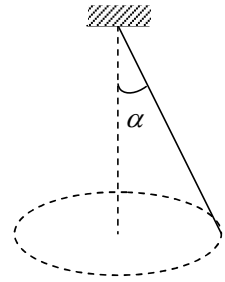
44. Một quả khối lượng m được gắn vào một sợi dây mà đầu kia của được buộc vào đầu một thanh thẳng đứng đặt cố định trên một mặt bàn quay nằm ngang như hình vẽ. Bàn sẽ quay với vận tốc góc  $\omega$  bằng bao nhiêu, nếu dây tạo với phương vuông góc của bàn một góc  $\alpha = 45^\circ$ ? Biết dây dài  $l = 6\text{cm}$  và khoảng cách của h thẳng đứng quay là  $r = 10\text{cm}$ .



$$\text{ĐS: } \omega \approx 8,3 \text{ rad/s.}$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

45. Một quả cầu khối lượng  $m$ , treo trên một sợi dây dài  $l$ . Quả cầu quay đều trong một vòng tròn nằm ngang như hình vẽ. Dây tạo một góc  $\alpha$  với phương thẳng đứng. Hãy tính thời gian để quả cầu quay được một vòng. Biết gia tốc trọng lực tại nơi quả cầu chuyển động là  $g$ .



$$\text{ĐS: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

46. Treo một con lắc trong một toa xe lửa. Biết xe chuyển động ngang với gia tốc  $\vec{a}$  và dây treo con lắc nghiêng góc  $\alpha = 15^\circ$  so với phương thẳng đứng. Tính  $a$ .

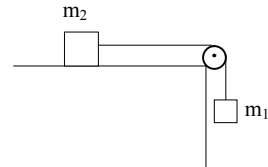
$$\text{ĐS: } a = g \tan \alpha \approx 2,6 m/s^2.$$

47. Cho hệ như hình vẽ:

$m_1 = 1,2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ , dây và ròng rọc nhẹ. Bỏ qua ma sát. Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Bàn đi nhanh dần đều với gia tốc  $a_0 = 5 \text{ m/s}^2$ . Tính gia tốc của  $m_1$  và  $m_2$  đối với đất.

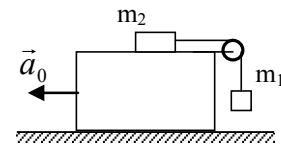
$$\text{ĐS: } 13 m/s^2 ; 7 m/s^2.$$

48. Cho hệ như hình vẽ, hệ số ma sát giữa  $m_2$  và bàn là  $\mu$  và hai vật chuyển động đều. Tìm gia tốc của  $m_2$  đối với đất khi bàn chuyển động với gia tốc  $\vec{a}_0$  sang trái.



$$\text{ĐS: } a = \frac{\mu(\sqrt{g^2 + a_0^2} - g - a_0)}{\mu + 1}$$

49. Một dây nhẹ không co giãn vắt qua một ròng rọc nhẹ gắn ở cạnh bàn ngang, hai đầu dây buộc hai vật có khối lượng  $m_1$ ,  $m_2$  (hình vẽ) hệ số ma sát giữa  $m_1$  và mặt bàn là  $\mu$ . Bỏ qua ma sát ở trục ròng rọc. Tìm

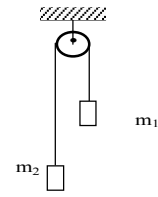


gia tốc của  $m_1$  đối với đất khi bàn chuyển động với gia tốc  $\vec{a}_0$  hướng sang trái, cho  $g$  là gia tốc trọng trường.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\text{ĐS: } a = \frac{m_2(\sqrt{g^2 + a_0^2} - a_0) - \mu m_1 g}{m_1 + m_2}$$

**50.** Cho hệ như hình vẽ, thang máy đi lên với gia tốc  $\vec{a}_0$  hướng lên. Tính gia tốc của  $m_1$  và  $m_2$  đối với đất và lực căng của dây treo ròng rọc.

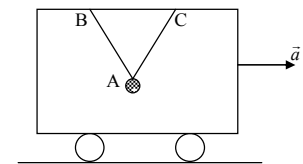


$$a_1' = \frac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ĐS: } a_2' = \frac{2m_1 a_0 - (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g + a_0)g}{m_1 + m_2}$$

**51.** Quả cầu khối lượng  $m$  được treo bởi hai dây nhẹ trên trần một toa xe như hình vẽ,  $AB = BC = CA$ . Toa xe chuyển động nhanh dần đều với gia tốc  $\vec{a}$ . Tính  $a$ .



a. Cho biết lực căng dây AC gấp 3 lần dây AB.

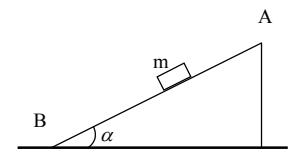
b. để dây AB chùng (không bị căng).

$$\text{ĐS: a. } a = \frac{g}{2\sqrt{3}}; \text{ b. } a > \frac{g}{\sqrt{3}}$$

**52.** Trong một thang máy đang đi lên nhanh dần đều với gia tốc  $a_0 = 2\text{ m/s}^2$ , người ta ném ngang một vật với vận tốc  $v_0 = 2\text{ m/s}$  (đối với thang). Khoảng cách từ điểm ném đến sàn là  $OH = 1,5\text{ m}$ . Hỏi sau bao lâu vật chạm sàn. Tìm khoảng cách từ điểm ném đến điểm vật chạm sàn. Bỏ qua sức cản không khí,  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

$$\text{ĐS: } OM = 1,8\text{ m.}$$

**53.** Nêm có khối lượng  $M$ , mặt AB dài  $l$  nghiêng một góc  $\alpha$  so với phương ngang. Từ A thả vật khối lượng  $m$  không vận tốc đầu. Bỏ qua ma sát giữa  $m$  với sàn và giữa  $m$  với  $M$ .



a. Tính gia tốc của  $M$ .

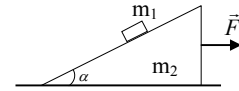
b. Tìm thời gian  $m$  đi từ A đến B.

$$\text{ĐS: a. } a = \frac{mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}; \text{ b. } t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l(M + m \sin^2 \alpha)}{g \sin \alpha (M + m)}}$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**54.** Trên mặt phẳng nằm ngang có một nêm khối lượng  $m_2 = 4kg$ , chiều dài mặt phẳng nghiêng  $L = 12\text{ cm}$ , và  $\alpha = 30^\circ$ . Trên nêm đặt khúc gỗ  $m_1 = 1kg$ . Biết hệ số ma sát



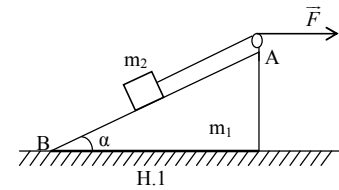
giữa gỗ và nêm  $\mu = 0,1$ . Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt phẳng ngang. Tìm lực  $\vec{F}$  đặt vào nêm để khúc gỗ trượt hết chiều dài mặt phẳng nghiêng trong thời gian  $t = 2\text{ s}$  từ trạng thái đứng yên. Lấy  $g = 10m/s^2$ .

ĐS:  $F = 4,9N$ .

**55.** Một nêm khối lượng  $M = 1\text{ kg}$  có mặt AB dài  $1\text{ m}$ , góc nghiêng  $\alpha = 30^\circ$  có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Từ A thả vật  $m = 1kg$  trượt xuống dốc AB. Hệ số ma sát trượt giữa  $m$  và mặt AB là  $0,2$ . Bỏ qua kích thước vật  $m$ . Tìm thời gian để  $m$  đến B. Trong thời gian đó nêm đi được đoạn đường bao nhiêu?. Cho  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

ĐS:  $t = 0,6\text{ s}$ ;  $s = 0,43\text{ m}$ .

**56.** Chiếc nêm A có khối lượng  $m_1 = 5\text{ kg}$ , có góc nghiêng  $\alpha = 30^\circ$  có thể chuyển động tịnh tiến không ma sát trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Một vật khối lượng  $m_2 = 1\text{ kg}$ , đặt trên nêm được kéo bằng một sợi dây vắt qua ròng rọc cố định gắn chặt với nêm.

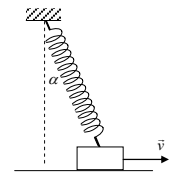


Lực kéo  $F$  phải có độ lớn bằng bao nhiêu để vật  $m_2$  chuyển động lên trên theo mặt nêm. Khi  $F = 10\text{ N}$ , gia tốc của vật và nêm bằng bao nhiêu? Bỏ qua ma sát, khối lượng dây và khối lượng ròng rọc.

Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

ĐS:  $5,84 < F < 64,6\text{ N}$ ;  $a_1 = 1,08\text{ m/s}^2$ ;  $a_2 = 4,99\text{ m/s}^2$ .

**57.** Một vật có khối lượng  $m$  nằm trên mặt bàn nằm ngang, gắn vào đầu một lò xo thẳng đứng có độ cứng  $K$ . Ban đầu lò xo không biến dạng và chiều dài  $l_0$ . Bàn chuyển động đều theo phương ngang, lò xo nghiêng góc  $\alpha$  so với phương thẳng đứng. Tìm hệ số ma sát  $\mu$  giữa vật và bàn.



Áp dụng:  $K = 10\text{ N/m}$ ,  $l_0 = 0,1\text{ m}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $m = 0,5\text{ kg}$ .

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

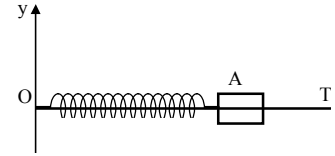
$$\text{ĐS: } \mu = \frac{Kl_0(1 - \cos \alpha) \cdot \tan \alpha}{P - Kl_0(1 - \cos \alpha)}, \quad \mu \approx 0,2.$$

**58.** Một lò xo có chiều dài tự nhiên  $l_0 = 24,3\text{m}$  và độ

cứng  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ; có đầu O gắn với một thanh cứng,

nằm ngang T như hình vẽ. Đầu kia có gắn với một vật

nhỏ A, khối lượng  $m = 100\text{g}$ . Thanh T xuyên qua tâm vật A và A có thể trượt không ma sát theo T. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .



Cho thanh T quay đều quanh trục thẳng đứng Oy, với vận tốc góc  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

Tính độ dài của lò xo. Xác định phương, chiều và cường độ của lực do R tác dụng vào điểm O. Bỏ qua khối lượng của lò xo.

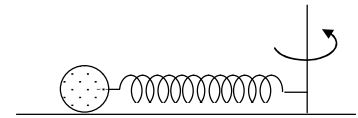
$$\text{ĐS: } l = 27 \text{ cm}, F = 2,7 \text{ N}.$$

**59.** Vật có khối lượng  $m = 50 \text{ g}$  gắn vào đầu một lò xo

nhẹ. Lò xo có chiều dài ban đầu  $l_0 = 30 \text{ cm}$  và độ

cứng  $k = 3 \text{ N/cm}$ . Người ta cho vật và lò xo quay

tròn đều trên một mặt sàn nhẵn nằm ngang, trục quay đi qua đầu lò xo. Tính số vòng quay trong một phút để lò xo dãn ra một đoạn  $x = 5 \text{ cm}$ .



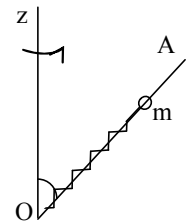
$$\text{ĐS: } n = 280 \text{ vòng/ phút}.$$

**60.** Lò xo  $k = 50 \text{ N/m}$ ,  $l_0 = 36 \text{ cm}$  treo vật  $m = 0,2 \text{ kg}$  có đầu trên cố định. Quay lò xo quanh một trục thẳng đứng qua đầu trên lò xo, m vạch một đường tròn nằm ngang hợp với trục lò xo góc  $45^\circ$ . Tính chiều dài lò xo và số vòng quay trong một phút.

$$\text{ĐS: } l = 41,6 \text{ cm}; 55,8 \text{ vòng/phút}.$$

**61.** Thanh OA quay quanh một trục thẳng đứng OZ với vận tốc

góc  $\omega$ . Góc  $\widehat{ZOA} = \alpha$  không đổi. Một hòn bi nhỏ khối lượng  $m$ , có thể trượt không ma sát trên OA và được nối với điểm O bằng một lò xo có độ cứng  $k$  và có chiều dài tự nhiên  $l_0$ .



a. Tìm vị trí cân bằng của hòn bi và điều kiện để có cân bằng.

b. Cân bằng này là bền hay không bền.

$$\text{ĐS: a. } l = \frac{kl_0 - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}; \quad \omega < \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \text{b. Cân bằng bền}.$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**62.** Đặt một vật nhỏ ở cách trục quay của một cái mâm 10 cm. Cho mâm quay từ trạng thái nghỉ với gia tốc góc không đổi, sau thời gian 0,5 giây có vận tốc 30 vòng/phút. Tính hệ số ma sát nhỏ nhất giữa vật và mâm để vật không bị trượt trong thời kỳ tăng tốc. Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\pi^2 = 10$ .

$$\text{ĐS: } \mu \geq 0,187 .$$

**63.** Một người muốn đổ một đống cát hình nón trên một diện tích hình tròn trong sân nhà anh ta. Ngoài diện tích hình nón này, không có cát tràn xuống. Bán kính hình tròn là  $R$ , hệ số ma sát giữa các lớp cát dốc là  $\mu$ . Tìm thể tích lớn nhất của đống cát.

$$\text{ĐS: } V = \frac{1}{3} \pi \mu R^3 .$$

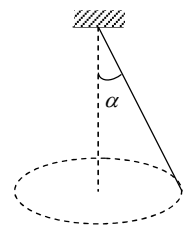
**64.** Một đĩa phẳng tròn có bán kính  $R = 10 \text{ cm}$ , nằm ngang quay đều quanh trục thẳng đứng đi qua tâm của đĩa.

a. Nếu mỗi giây đĩa quay được 1,5 vòng thì vận tốc dài của một điểm ở mép đĩa là bao nhiêu?

b. Trên mặt đĩa có đặt một vật có kích thước nhỏ, hệ số ma sát giữa vật và đĩa là  $\mu = 0,1$ . Hỏi với những giá trị nào của vận tốc góc  $\omega$  của đĩa thì vật đặt trên đĩa dù ở vị trí nào cũng không bị trượt ra phía ngoài đĩa. Cho  $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$\text{ĐS: } \omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = 3,16 \text{ rad / s} .$$

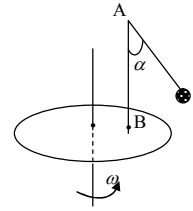
**65.** Một quả cầu khối lượng  $m$ , treo trên một sợi dây dài  $l$ . Quả cầu quay đều trong một vòng tròn nằm ngang như hình vẽ. Dây tạo một góc  $\alpha$  với phương thẳng đứng. Hãy tính thời gian để quả cầu quay được một vòng. Biết gia tốc trọng lực tại nơi quả cầu chuyển động là  $g$ .



$$\text{ĐS: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} .$$

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**66.** Có đĩa phẳng treo một con lắc đơn (gồm vật nặng  $M$  treo vào đầu một sợi dây nhẹ) vào đầu thanh  $AB$  cắm thẳng đứng trên mặt đĩa, đầu  $B$  cắm vào đĩa tại điểm cách tâm quay  $\frac{R}{2}$ . Cho  $AB = 2R$ .

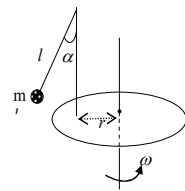


a. Chứng minh rằng khi đĩa quay đều thì phương dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$  nằm trong mặt phẳng chứa  $AB$  và trục quay.

b. Biết chiều dài con lắc là  $l = R$ , tìm vận tốc góc  $\omega$  của đĩa quay để  $\alpha = 30^\circ$ .

ĐS: a. Do các lực đồng phẳng; b.  $\omega \approx 7,6 \text{ rad/s}$ .

**67.** Một quả khối lượng  $m$  được gắn vào một sợi dây mà đầu kia của được buộc vào đầu một thanh thẳng đứng đặt cố định trên một mặt bàn quay nằm ngang như hình vẽ. Bàn sẽ quay với vận tốc góc  $\omega$  bằng bao nhiêu, nếu dây tạo với phương vuông góc của bàn một góc  $\alpha = 45^\circ$ ? Biết dây dài  $l = 6 \text{ cm}$  và khoảng cách của h thẳng đứng quay là  $r = 10 \text{ cm}$ .



ĐS:  $\omega \approx 8,3 \text{ rad/s}$ .

**68.** Một người nằm trong một căn phòng hình trụ, trong không gian, cách xa các thiên thể. Tính số vòng quay của phòng quanh trục trong một phút để phòng tạo cho người một trọng lượng bằng với trọng lượng của người trên mặt đất. Biết bán kính của phòng  $R = 1,44 \text{ m}$ .

ĐS:  $n = 25$  vòng/phút.

**69.** Tìm vận tốc nhỏ nhất của một người đi mô tô chuyển động tròn đều theo một đường tròn nằm ngang ở mặt trong một hình trụ thẳng đứng bán kính  $3 \text{ m}$ , hệ số ma trợt là  $\mu = 0,3$ .

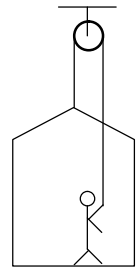
ĐS:  $36 \text{ Km/h}$ .

**70.** Vận tốc tối đa của người đi xe đạp trên một đường vòng có mặt đường nghiêng về phía tâm một góc  $\alpha$  gấp mấy lần vận tốc tối đa của xe đi trên đường vòng đó nhưng mặt đường nằm ngang? Coi các bánh xe đều là bánh phát động.

**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

$$\text{ĐS: } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\mu(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}}.$$

71. Cho hệ như hình vẽ, khối lượng của người 72 kg, của ghế treo 12 kg. Khi người kéo dây chuyên động đi lên, lực nén của người lên ghế là 400 N. Tính gia tốc chuyển động của ghế và người.



$$\text{ĐS: } a_0 = 3,3 \text{ m/s}^2.$$

72. Một chiếc phễu có mặt phễu nghiêng góc  $\alpha$  với phương thẳng đứng, quay quanh trục (như hình vẽ) với vận tốc góc  $\omega$ . Một viên bi nhỏ đặt trên mặt phễu quay cùng với phễu. Khi chuyển động đã ổn định, bi quay cùng vận tốc với phễu và ở vị trí cách trục phễu một đoạn  $R$ . Coi ma sát là nhỏ, hãy tính  $R$ .

$$\text{ĐS: } R = \frac{g \cot \alpha}{\omega^2}.$$

73. Một chiếc phễu có góc ở đỉnh quay đều xung quanh một trục thẳng đứng với tần số vòng là  $n$  vòng/s. Người ta đặt một vật nhỏ trong lòng phễu. Hệ số ma sát giữa vật và phễu là  $\mu$ . Hỏi phải đặt cách đáy phễu một khoảng cách  $L$  bằng bao nhiêu để vật cùng quay với phễu mà không trượt.

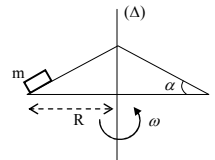
$$\text{ĐS: } \frac{g(\cot \alpha - \mu)}{4\pi n^2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \leq L \leq \frac{g(\cot \alpha + \mu)}{4\pi n^2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

74. Đĩa nằm ngang quay quanh trục thẳng đứng với tần số  $n = 30$  vòng/phút. Vật đặt trên đĩa cách trục 20 cm. Hệ số ma sát giữa đĩa và vật là bao nhiêu để vật không trượt trên đĩa?

$$\text{ĐS: } \mu \geq 0,2.$$

75. Ở mép dưới của một mặt nón đặt vật nhỏ khối lượng  $m$ .

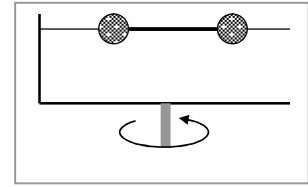
Góc nghiêng của mặt nón là  $\alpha$  (hình vẽ). Mặt nón quay xung quanh trục thẳng đứng đối xứng ( $\Delta$ ) với vận tốc góc  $\omega$  không đổi. Khoảng cách từ trục đến vật là  $R$ . Tìm hệ số ma sát giữa vật và mặt nón để vật đứng yên trên mặt nón và biện luận kết quả.



$$\text{ĐS: } k \geq \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha}; \quad k_{\min} = \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha}; \quad \omega < \sqrt{\frac{g \cot \alpha}{R}}.$$

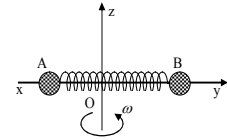
**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

Hai quả cầu  $m_1 = 2 m_2$  nối với nhau bằng sợi dây dài  $l = 12 \text{ cm}$  và có thể chuyển động không ma sát trên một trục nằm ngang qua tâm hai quả cầu. Cho hệ quay quanh một trục thẳng đứng. Biết hai quả cầu đứng yên không trượt trên trục ngang. Tính khoảng cách từ hai quả cầu đến trục quay.



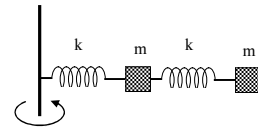
ĐS:  $l_1 = 4 \text{ cm}, l_2 = 8 \text{ cm}.$

**76.** Hai viên bi A và B có khối lượng M và m nối với nhau bằng một lò xo có độ cứng k và chiều dài tự nhiên  $l_0$ . Luồn hệ thống M, m vào trục ngang xy như hình vẽ và quay xung quanh trục Oz với vận tốc góc  $\omega$ . Hai bi M, m trượt không ma sát trên thanh xy. Tìm vị trí cân bằng của hai viên bi và khoảng cách giữa chúng.



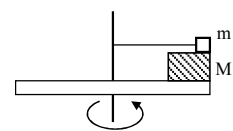
ĐS:  $l_1 = \frac{kml_0}{k(m+M) - 2mM\omega^2}, l_2 = \frac{kMl_0}{k(m+M) - 2mM\omega^2}; l = \frac{kl_0(m+M)}{k(m+M) - 2mM\omega^2}.$

**77.** Hai lò xo có độ cứng  $k = 250 \text{ N/m}, l_0 = 36 \text{ cm}$  bố trí như hình vẽ. Hai vật có khối lượng m kích thước nhỏ có thể trượt không ma sát trên trục nằm ngang. Quay hệ quay trục thẳng đứng với tần số  $n = 2$  vòng/s. Cho  $m = 200 \text{ g}$ . Tính chiều dài mỗi lò xo.



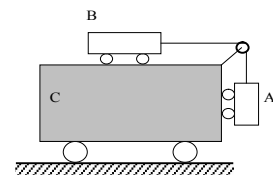
ĐS: 57 cm; 50 cm.

**78.** Đĩa tròn nhẵn cso thể xoay quanh trục thẳng đứng vuông góc với mặt đĩa. Vật M đặt trên đĩa, cách trục khoảng R. Vật m đặt trên M, nối với trục bằng một thanh nhẹ. Vận tốc quay của đĩa tăng chậm. Hệ số ma sát giữa M và m là  $\mu$ . Tìm vận tốc góc  $\omega$  của đĩa để M bắt đầu trượt khỏi m.



ĐS:  $\omega = \sqrt{\frac{\mu mg}{MR}}.$

**79.** Cho hệ như hình vẽ,  $m_A = 300 \text{ g}, m_B = 200 \text{ g}, m_C = 1500 \text{ g}$ . Tác dụng lên C lực  $\vec{F}$  nằm ngang sao cho A và B đứng yên đối với C. Tìm chiều và độ lớn của  $\vec{F}$  và lực

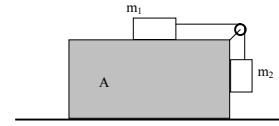


**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

căng của dây nối A, B.

ĐS:  $\vec{F}$  hướng sang phải,  $F = 300 \text{ N}$ ;  $T = 30 \text{ N}$ .

**80.** Cho hệ như hình vẽ. Cần phải cho vật A chuyển động về phía phải với một gia tốc là bao nhiêu để hệ các vật  $m_1$  và  $m_2$  có thể:

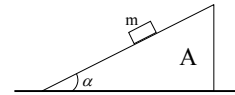


- Chuyển động theo chiều  $m_2$  đi lên so với A.
- Tiếp tục theo chiều  $m_2$  đi xuống.
- Đứng yên so với A.

Biết hệ số ma sát giữa các vật  $m_1$  và  $m_2$  đối với A là  $\mu$ .

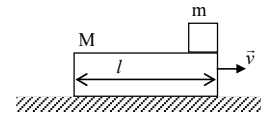
ĐS: a.  $a > \frac{g(\mu m_1 + m_2)}{m_1 - \mu m_2}$ , b.  $a < \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + \mu m_2}$ , c.  $\frac{g(\mu m_1 + m_2)}{m_1 - \mu m_2} < a < \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + \mu m_2}$ .

**81.** Nêm A phải chuyển động ngang với gia tốc bao nhiêu để m trên A chuyển động lên trên? Biết hệ số ma sát giữa m và A là  $\mu < \cot \alpha$ .



ĐS:  $a > \frac{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$ .

**82.** Cho hệ như hình vẽ, mặt sàn nhẵn, hệ số ma sát giữa m và M là  $\mu$ . Hỏi phải truyền cho M một vận tốc ban đầu  $\vec{v}_0$  bao nhiêu để m có thể rời khỏi M?

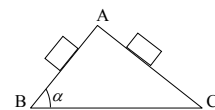


$$v_0 > \sqrt{2\mu gl \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

**83.** Trong một toa tàu khối lượng  $M = 2000 \text{ kg}$  đứng yên, có một hòn bi nằm yên trên mặt bàn nằm ngang gắn với toa tàu và cao hơn sàn toa 1,25 m. Toa tàu bắt đầu chạy thì hòn bi lăn không ma sát trên mặt bàn được 50 cm rồi rơi xuống sàn toa cách mép bàn theo phương ngang 78 cm. Tính lực kéo toa tàu. Bỏ qua ma sát cản chuyển động của tàu.

ĐS: 2880 N

**84.** Nêm có tiết diện là tam giác ABC vuông tại A. Nêm chuyển động trên mặt phẳng ngang với gia tốc  $\vec{a}_0$  không đổi. Hai vật nhỏ cùng khối lượng, cùng trượt xuống từ đỉnh A dọc

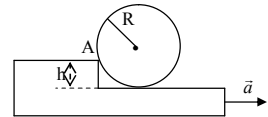


**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

theo hai sườn AB và AC của nêm. Cho  $\widehat{ABC} = \alpha$  ; ( $\alpha > 45^\circ$ ). Tìm độ lớn và hướng gia tốc  $\vec{a}_0$  của nêm theo  $\alpha$  để hai vật cùng xuất phát từ đỉnh với vận tốc ban đầu bằng không (đối với nêm) và trượt đến chân các sườn trong các khoảng thời gian bằng nhau (bỏ qua mọi ma sát).

$$\text{ĐS: } a = \frac{g(\tan^2 \alpha - 1)}{2 \tan \alpha}; \text{ nêm chuyển động sang trái.}$$

**85.** Ván nằm ngang có một bậc có độ cao  $h$ . Một quả cầu đồng chất có bán kính  $R$  đặt trên ván sát vào mép A của bậc. Ván chuyển động sang phải với gia tốc  $\vec{a}$ . Tính giá trị cực đại của gia tốc  $\vec{a}$  để quả cầu không nhảy lên trên bậc trong hai trường hợp:



- Không có ma sát ở mép A.
- Ở A có ma sát ngăn không cho quả cầu trượt mà chỉ có thể quay quanh A.

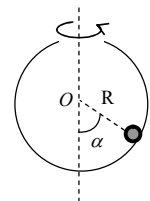
$$\text{ĐS: a. } a = \frac{g\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}; \text{ b. } a \leq \frac{g\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

**86.** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ trên một đoạn đường nằm ngang có cung tròn bán kính 100 m, góc ở tâm  $\alpha = 30^\circ$ . Ô tô có thể vận tốc tối đa nào ở cuối đoạn đường mà không bị trượt? Biết hệ số ma sát trượt  $\mu = 0,3$ . Bỏ qua ma sát cản chuyển động và coi các bánh xe đều là phát động.

$$\text{ĐS: } v \leq \frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2}} \approx 14,6 \text{ m/s}^2.$$

**87.** Một bình cầu rỗng bán kính  $R$  quay đều quanh trục thẳng đứng.

Trong bình có chứa một vật nhỏ cùng quay với bình; khi đó góc hợp bởi bán kính nối vật với tâm bình cầu và trục thẳng đứng là  $\alpha$  (hình vẽ). Cho biết hệ số ma sát giữa vật và bình là  $\mu$ . Tính giá trị tối



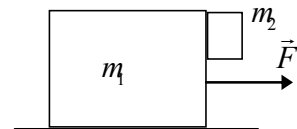
thiểu của vận tốc góc  $\omega$  của bình để vật không trượt xuống trong quá trình quay theo bình.

$$\text{ĐS: } \omega = \sqrt{\frac{g(\tan \alpha - \mu)}{R \sin \alpha (\tan \alpha + 1)}}.$$



**Chuyên đề: Cơ học chất điểm.**

**88.** Cho hệ như hình vẽ  $m_1 = 8 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 2 \text{ kg}$ . Hệ số ma sát giữa  $m_1$  và mặt sàn nằm ngang là  $\mu_1 = 0,3$  còn hệ số ma sát giữa hai vật là  $\mu_2 = 0,5$ .



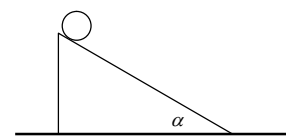
a. Cần tác dụng lực  $\vec{F}$  theo phương ngang vào  $m_1$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu để  $m_2$  đứng yên đối với  $m_1$ .

b. Với  $F$  bằng một nửa giá trị câu a. Tìm gia tốc của mỗi vật khi đó.

Cho  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

ĐS: a.  $F_{\min} = 230 \text{ N}$ ; b.  $a_1 \approx 8,83 \text{ m/s}^2$ ,  $a_2 \approx 10,45 \text{ m/s}^2$

**89.** Một cái nêm khối lượng  $M$  đang đứng yên trên mặt bàn nằm ngang. Trên mặt nghiêng của nêm hợp với mặt bàn một góc  $\alpha$ , người ta đặt một quả cầu đồng chất khối lượng  $m$ . Quả cầu bắt đầu lăn không trượt dọc theo đường dốc chính của mặt nghiêng của nêm. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt bàn; ma sát lăn giữa quả cầu và nêm. Xác định gia tốc của nêm.



$$\text{ĐS: } a_0 = \frac{\frac{5}{7}mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m(\sin^2 \alpha + \frac{2}{7} \cos^2 \alpha)}$$

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

## **KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC (Thống kê theo năm học 2015 – 2016, 2016 – 2017, 2017-2018)**

Học sinh lớp 10 Chuyên Lí của năm học 2015-2016, 2016 – 2017, 2017-2018 đã tiếp thu kiến thức tốt, điều này góp phần đáng kể vào thành công bước đầu của Chuyên đề.

Trên cơ sở đó, có thể kết luận rằng: Việc sử dụng hệ thống các bài tập và hướng dẫn giải các bài tập vật lí trong quá trình bồi dưỡng HSG cho HS đã mang lại hiệu quả cao, HS thu nhận kiến thức chắc chắn và sâu hơn, khả năng vận dụng lý thuyết vào bài tập tốt hơn và cũng khẳng định được HS đã phát triển được năng lực nhận thức và tư duy Vật lí. Chuyên đề đã giúp họ có một hệ thống bài tập đảm bảo tính logic khoa học về nội dung kiến thức, rất thuận lợi cho GV trong công tác bồi dưỡng HSG vật lí.

## **ĐIỀU KIỆN ĐỀ CHUYÊN ĐỀ ĐƯỢC NHÂN RỘNG**

- Về phía các GV:

Đòi hỏi GV mất nhiều thời gian, công sức trong việc chuẩn bị và giao nhiệm vụ cho HS...

- Về phía HS:

Phải có kiến thức toán vững chắc, có nền tảng Vật lí tốt . Vì vậy, muốn áp dụng Chuyên đề trên thì phải đòi hỏi ở GV và HS phải có quyết tâm và nỗ lực trong quá trình dạy và học tại các trường THPT

*Chuyên đề: Cơ học chất điểm.*

## **KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ**

### **KẾT LUẬN**

Đối chiếu với các mục đích nghiên cứu và các nhiệm vụ cần giải quyết của Chuyên đề tôi đã đạt được một số kết quả sau:

- Tôi đã hệ thống được toàn bộ kiến thức cần thiết sâu, rộng về phân toán, lí thuyết vật lí nhằm mục đích giải quyết các bài tập về Cơ học chất điểm.

- Quá trình áp dụng Chuyên đề đã cho phép rút ra những đánh giá sơ bộ về hiệu quả của tiến trình dạy học trong việc phát triển năng lực giải quyết vấn đề của HS.

Tuy nhiên, tôi chỉ tiến hành áp dụng ở một lớp và trong một trường. Vì vậy, việc đánh giá hiệu quả của Chuyên đề chưa mang tính khái quát.

### **KHUYẾN NGHỊ**

Qua quá trình thực hiện sáng kiến, tôi có một số đề xuất sau

- Tiếp tục bồi dưỡng thường xuyên cho GV chuyên trong mỗi năm
- Bồi dưỡng và cung cấp cho GV các tài liệu dạy lớp chuyên

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Vật lí đại cương - Lương Duyên Bình - NXB Giáo dục.
2. Vật lý đại cương, tập 1 – cơ học, Nguyễn Hữu Xý – Nguyễn Văn Thò – Trương Quang Nghĩa, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà Nội, 1985.
3. Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi vật lý trung học phổ thông, tập 7, PGS.TS Vũ Thanh Khiết – PGS. TS Nguyễn Đình Noãn – Vũ Đình Túy, NXB Giáo dục, 2006.
4. Tài liệu bồi dưỡng giáo viên dạy chuyên lý, Nguyễn Công Toàn, THPT chuyên, ĐHKHTN, Hà Nội.
5. Các bài toán vật lý chọn lọc THPT - Vũ Thanh Khiết - NXB Giáo dục.
6. Tài liệu tập huấn phát triển chuyên môn giáo viên trường THPT Chuyên môn Vật lý- Bộ Giáo dục và đào tạo
7. Đề thi học sinh giỏi quốc gia và các đề thi chọn đội tuyển IphO môn vật lý các năm.
8. Tuyển tập đề thi Olympic Vật lý các nước- Vũ Thanh Khiết; Nguyễn Đức Hiệp- Vũ Đình Túy- Nguyễn Xuân Quang- NXB Giáo dục.
9. Các đề thi học sinh giỏi Vật lý từ năm 2001 đến 2010); Vũ Thanh Khiết-Vũ Đình Túy; ( 2011), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.