CĐ12: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức chứng minh chia hết
Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư
Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết
Dạng 4: Sử dụng đồng dư tìm chữ số tận cùng
Dạng 5: Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương
Dạng 6: Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố, hợp số
Dạng 7: Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

Dạng 1. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC CHỨNG MINH CHIA HẾT

Câu 1. **(HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2022 - 2023; Cẩm Thụy 2022 - 2023)**

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $(a+b+c+d) \vdots 3$.

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$.

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $(3c^3 - 15d^3) \vdots 3$ nên $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \vdots 3$. (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $0; 1; -1$.

Suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng lần lượt là $0; 1; -1$.

Như vậy: $a \equiv a^3 \pmod 3$.

Tương tự ta có: $b \equiv b^3 \pmod 3$, $c \equiv c^3 \pmod 3$, $d \equiv d^3 \pmod 3$.

Suy ra: $a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng: $(4^{2n+2} - 1) \vdots 15$ với mọi số tự nhiên n.

Lời giải

Ta có: $4 \equiv -1 \pmod 5$

$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod 5$

$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow \left(4^{2(n+1)}-1\right) \vdots 5$. (1)

Lại có: $4 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod 3$

$\Rightarrow \left(4^{2(n+1)}-1\right) \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow \left(4^{2(n+1)}-1\right) \vdots 3$. (2)

Lại có: 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau. (3)

Từ (1) và (2) và (3) $\Rightarrow \left(4^{2n+2}-1\right) \vdots 15$.

Câu 3. **(HSG T7 TP Bắc Giang năm học 2022 - 2023)**

Cho $m;n;t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m-n=n-t=a$ ($a \in N^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có: $m-n=n-t=a \ \left(a \in N^*\right)$

Suy ra $n=t+a;\ m=n+a=t+2a$

Do đó ta có $t;t+a;t+2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3.

Xét số dư của ba số nguyên tố $t;\ t+a;\ t+2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2

Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác $(t+a)-\mathrm{t}=\mathrm{a};\ (t+2\mathrm{a})-t=2a;\ (t+2\mathrm{a})-(t+a)=a$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2,3)=1$ nên $a \vdots 3$ (1)

Vì $m,\ n$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $m,\ n$ là các số lẻ

$\Rightarrow m-n \vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $(2,3)=1$ ta có $a \vdots 6$

Câu 4. **(HSG 7 huyện Cẩm Thụy, tỉnh Thanh Hóa, trường 2022 - 2023)**

Cho $a,\ b,c,\ d \in \mathbb{Z}$. thỏa mãn $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$. Chứng minh $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Lời giải

Ta có $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$ khi và chỉ khi $a^3+b^3+c^3+d^3=3c^3-15d^3$

Mà $\left(3c^3-15d^3\right) \vdots 3$ nên $\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \vdots 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{-1;0;1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{-1;0;1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod 3$

Tương tự ta có:

$b \equiv b^3 \pmod 3$; $c \equiv c^3 \pmod 3$; $d \equiv d^3 \pmod 3$

Suy ra $a+b+c+d \equiv a^3+b^3+c^3+d^3 \pmod 3\ (2)$

Vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3

Câu 5. **(HSG T7 Huyện Nghi Lộc, năm học 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng số $A = \dfrac{\left(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}\right)}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $2014^{2016} = \left(2014^2\right)^{1008} \vdots 4$ nên $2014^{2016} = 4k\ \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ suy ra $17^{2014^{2016}} = 17^{4k}$

Mà $17^{4k} = \left(17^2\right)^{2k} = 289^{2k}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1 nên $17^{2014^{2016}}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1

$96^{97} \vdots 4$ nên $96^{97} = 4m\ \left(m \in \mathbb{N}^*\right)$ suy ra $3^{96^{97}} = 3^{4m}$

$3^{4m} = 81^m$ luôn có tận cùng là chữ số 1 nên $3^{96^{97}}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1

Suy ra $\left(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}\right)$ có chữ số tận cùng là chữ số 0

Do vậy $\left(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}\right)$ chia hết cho 2 nên A là số tự nhiên.

$\left(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}\right)$ có chữ số tận cùng là 0 nên A chia hết cho 5

Câu 6. **(HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023**

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q. Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p.q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lí Fermat ta có: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow \left(p^{q-1} - 1\right) \vdots q$ và $\left(q^{p-1} - 1\right) \vdots p$

mặt khác $p^{q-1} \vdots p$ và $q^{p-1} \vdots q$

nên ta có: $\left(p^{q-1} + q^{p-1} - 1\right) \vdots q$; $\left(p^{q-1} + q^{p-1} - 1\right) \vdots p$

mà $(p,\ q)=1$

nên: $\left(p^{q-1}+q^{p-1}-1\right)\vdots(p.q)$.

Câu 7. **(HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)**

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên mặt đó chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi các số trên mặt là $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5$.

Xét 5 tổng:

$S_1=a_1$;

$S_2=a_1+a_2$;

$S_3=a_1+a_2+a_3$;

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4$;

$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

+ Nếu một trong 5 tổng đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong.

+ Nếu không có tổng nào chia hết cho 5 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 5 (vì có 5 tổng mà có 4 số dư khác 0 là $1;\ 2;\ 3;\ 4$). Nên hiệu của hai tổng đó chia hết cho 5

+ Gọi 2 tổng đó là S_m và S_n ($1\le m<n\le 5$) thì $S_m-S_n\vdots 5$

Hay $\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+\ a_m\ \vdots 5$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 8. **(HSG 7 huyện Cửa Lò, tỉnh Nghệ An, 2022 - 2023)**

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $\left(p^2-1\right)\vdots 24$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

+ Ta chứng minh $\left(p^2-1\right)\vdots 3$. Thật vậy, vì p không chia hết cho 3 nên có hai trường hợp:

- Nếu $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ thì $p^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$
  $\Rightarrow\left(p^2-1\right)\vdots 3$.
- Nếu $p\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ thì $p^2\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 3)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$
  $\Rightarrow\left(p^2-1\right)\vdots 3$.

+ Ta chứng minh $(p^2-1)\vdots 8$. Thật vậy, vì p là số lẻ nên có các trường hợp:

- Nếu $p\equiv 1 \pmod 8$ thì $p^2\equiv 1 \pmod 8$
  $\Rightarrow (p^2-1)\vdots 8$.
- Nếu $p\equiv 3 \pmod 8$ thì $p^2\equiv 9 \pmod 8\equiv 1 \pmod 8$
  $\Rightarrow (p^2-1)\vdots 8$.
- Nếu $p\equiv 5 \pmod 8$ thì $p^2\equiv 25 \pmod 8\equiv 1 \pmod 8$
  $\Rightarrow (p^2-1)\vdots 8$.
- Nếu $p\equiv 7 \pmod 8$ thì $p^2\equiv 49 \pmod 8\equiv 1 \pmod 8$
  $\Rightarrow (p^2-1)\vdots 8$.

Như vậy: vì 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $(p^2-1)\vdots (3.8)$ hay $(p^2-1)\vdots 24$.

Câu 9. **(HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)**

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}$.

Chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 40.

Lời giải

Vì x^2 chia cho 8 dư $0;1;4$ nên $3x^2$ chia cho 8 dư $0;3;4$.

Vì y^2 chia cho 8 dư $0;1;4$ nên $2y^2$ chia cho 8 dư $0;2;4$.

Từ giả thiết $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}$

$\Rightarrow 3x^2-2y^2=1$

$\Rightarrow 3x^2-2y^2$ chia cho 8 dư 1.

Do đó x^2 chia cho 8 dư 1 và y^2 chia cho 8 dư 1. Nên x^2-y^2 chia hết cho 8 ; (1)

Vì x^2 chia hết cho 5 dư $0;1;4$ nên $3x^2$ chia cho 5 dư $0;3;2$.

Vì y^2 chia hết cho 5 dư $0;1;4$ nên $2y^2$ chia cho 5 dư $0;2;3$.

Mặt khác từ $3x^2-2y^2=1$ nên $3x^2-2y^2$ chia cho 5 dư 1.

Do đó x^2 chia cho 5 dư 1 và y^2 chia cho 5 dư 1. Nên x^2-y^2 chia hết cho 5 ; (2)

Vì 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên x^2-y^2 chia hết cho 40.

Câu 10. **(HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ 2018-2019).**

Chứng tỏ rằng $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4+1\right)+25$ chia hết cho 10^2

Lời giải.

Ta có: $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1\right)+25$

$=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4\right)+\left(75+25\right)$

$=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)+100$

Ta có: $75\equiv -25\left(\mathrm{mod}\ 100\right)$

$\Rightarrow$ $75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\equiv -25\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\left(\mathrm{mod}\ 100\right)$

Lại có: $-25.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)=-25.4.\left(4^{2017}+4^{2016}+...+4+1\right)$

$=-100\left(4^{2017}+4^{2016}+...+4+1\right)\vdots 100$

$\Rightarrow 75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ 100\right)$

Hay $75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)\vdots 100$

Do đó $\left[75.\left(4^{2018}+4^{2017}+...+4^2+4\right)+100\right]\vdots 100$

Vậy $M=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1\right)+25$ chia hết cho 10^2.

Câu 11. **(HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018-2019).**

Chứng minh rằng $7^6+7^5-7^4$ chia hết cho 55.

Lời giải.

Ta có: $7^2=49$

Mà $49\equiv -1\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

$\Rightarrow 7^2\equiv -1\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

$\Rightarrow 7^4=\left(7^2\right)^2\equiv\left(-1\right)^2\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

$\Rightarrow 7^4\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

Lại có $7^5=7^4.7\equiv 1.7\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

$\Rightarrow 7^5\equiv 7\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

Và $7^6=7^4.7^2\equiv 1.49\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

$\Rightarrow 7^6\equiv -1\left(\mathrm{mod}\ 5\right)$

Nên $7^6+7^5-7^4\equiv(-1+7-1)(\bmod 5)$

$\Rightarrow\left(7^6+7^5-7^4\right)\equiv 0(\bmod 5)$

$\Rightarrow\left(7^6+7^5-7^4\right)\vdots 5$

Vì $49\equiv 5(\bmod 11)\Rightarrow 7^2\equiv 5(\bmod 11)$

$\Rightarrow 7^4=\left(7^2\right)^2\equiv 5^2(\bmod 11)$

$\Rightarrow 7^4\equiv 3(\bmod 11)$

Lại có $7^5=7^4.7\equiv 3.7(\bmod 11)$

$\Rightarrow 7^5\equiv -1(\bmod 11)$

Và $7^6=\left(7^2\right)^3\equiv 5^3(\bmod 11)$

$\Rightarrow 7^6\equiv 4(\bmod 11)$

Nên $\left(7^6+7^5-7^4\right)\equiv(4-1-3)(\bmod 11)$

$\Rightarrow\left(7^6+7^5-7^4\right)\equiv 0(\bmod 11)$

$\Rightarrow\left(7^6+7^5-7^4\right)\vdots 11$

Do 5 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $7^6+7^5-7^4$ chia hết cho 55.

Câu 12. **(HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019).**

Chứng minh rằng: $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải.

Đặt $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100}=A$

$\Rightarrow 2A=2\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{99}+2^{100}\right)=2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{100}+2^{101}$

$\Rightarrow 2A-A=\left(2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{100}+2^{101}\right)-\left(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{99}+2^{100}\right)$

$\Rightarrow A=2^{101}-2$

Vì $2^5=32\equiv 1(\bmod 31)$

$\Rightarrow 2^{100}=\left(2^5\right)^{20}\equiv 1^{20}(\bmod 31)$

$\Rightarrow 2^{100}\equiv 1(\bmod 31)$

Nên $2^{101}=2^{100}.2\equiv 1.2(\bmod 31)$

$\Rightarrow 2^{101} \equiv 2 \pmod{31}$

Do đó $\left(2^{101} - 2\right) \equiv (2 - 2) \pmod{31}$

$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{31}$

Vậy $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Câu 13. **(HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019).**

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307.

Lời giải.

Ta có $S = 17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{18}$

$\Rightarrow 17S = 17.\left(17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{18}\right) = 17^2 + 17^3 + 17^4 + ... + 17^{19}$

$\Rightarrow 17S - S = \left(17^2 + 17^3 + 17^4 + ... + 17^{19}\right) - \left(17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{18}\right)$

$\Rightarrow 16S = 17^{19} - 17$

Vì $17^3 = 17.289 \equiv 17.(-18) \pmod{307}$

$\Rightarrow 17^3 \equiv 1 \pmod{307}$

$\Rightarrow 17^{19} = 17.\left(17^3\right)^6 \equiv 17 \pmod{307}$

$\Rightarrow \left(17^{19} - 17\right) \equiv 0 \pmod{307}$

Hay $16S = \left(17^{19} - 17\right) \vdots 307$

Mà 16 và 307 là hai số nguyên tố cùng nhau nên S chia hết cho 307.

Câu 14. **(HSG 7 huyện Vĩnh Yên năm 2018 - 2019).**

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$).

Lời giải.

Ta có: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100} = 3^x.\left(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}\right)$

Đặt $E = 3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$

$\Rightarrow 3E = 3.\left(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}\right) = 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{101}$

$\Rightarrow 3E - E = \left(3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{101}\right) - \left(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}\right) = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2E = 3^{101} - 3$

Lại có: $3^5 = 243 \equiv 3 \pmod{240}$

$\Rightarrow 3^{101} = \left(3^5\right)^{20}.3 \equiv 3^{20}.3 \pmod{240}$

$\Rightarrow 3^{101} \equiv 3^{21} \pmod{240}$

Vì $3^{21} = \left(3^5\right)^4 .3 \equiv 3^4.3 \pmod{240}$

$\Rightarrow 3^{21} \equiv 3^5 \pmod{240}$

$\Rightarrow 3^{21} \equiv 3 \pmod{240}$

Do đó $3^{101} \equiv 3 \pmod{240}$

$\Rightarrow \left(3^{101} - 3\right) \vdots 240$

$\Rightarrow 3^{101} - 3 = 240k$ (với $k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2E = 3^{101} - 3 = 240k$

$\Rightarrow E = 120k \vdots 120$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Vậy $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100} = 3^x.\left(3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}\right) \vdots 120$

Câu 15. **(HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)**

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$.

Chứng minh rằng: $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chia bốn số phân biệt a,b,c,d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư.

Suy ra hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3

$\Rightarrow$ tồn tại hiệu hai số trong bốn số a,b,c,d chia hết cho 3.

Do vậy P chia hết cho 3; (1)

Trong bốn số a,b,c,d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4; trái lại, khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là $0;1;2;3$.

Suy ra trong bốn số a,b,c,d có hai số chẵn, hai số lẻ, giả sử a,c chẵn và b,d lẻ

$\Rightarrow (a-c) \vdots 2$ và $(b-d) \vdots 2$

Do vậy P chia hết cho 4 ; (2)

Từ (1), (2) và $(3,4) = 1$ $\Rightarrow P \vdots 12$.

Dạng 2. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC TÌM SỐ DƯ

Câu 1. **(HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm số dư khi chia 2^{2011} cho 31.

Lời giải

Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow \left(2^5\right)^{402} \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2011} \equiv 2 \pmod{31}.$

Vậy số dư khi chia 2^{2011} cho 31 là 2.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Tìm số dư khi chia 3^{41} cho 11.

Lời giải

Ta có: $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 3^{41} = 3.\left(3^{10}\right)^4 \equiv 3.1^4 = 3 \pmod{11}$

Vậy số dư khi chia 3^{41} cho 11 là 3.

Câu 3.

a) Tìm số dư trong phép chia của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11.

b) Tìm số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5.

Lời giải

a) Ta có: $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow \left(3^5\right)^{401} = 3^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ (1)

Mặt khác: $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow \left(4^5\right)^{401} = 4^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ (2)

Từ (1) và (2): $\left(3^{2005} + 4^{2005}\right) \equiv (1+1) \pmod{11}$

Vậy số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

b) Ta có: $2016 \equiv 1 \pmod{5}$ do đó $2016^{2018} \equiv 1 \pmod{5}$

$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 1 + 2 \pmod{5}$

$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod{5}$

Vậy số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5 là 3.

Dạng 3. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA BIẾN ĐỂ CHIA HẾT

Câu 1. **(HSG 7 huyện Trực Ninh, 2018-2019)**

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)\left(2008^a + 2008a + b\right) = 225$

Lời giải

Ta có: $(2008a + 3b + 1)\left(2008^a + 2008a + b\right) = 225$

$\Rightarrow 2008a+3b+1$ và $2008^a+2008a+b$ là hai số lẻ.

Nếu $a\neq 0\Rightarrow 2008^a+2008a$ là số chẵn.

Để $2008^a+2008a+b$ lẻ thì b lẻ

Nếu b lẻ $\Rightarrow 3b+1$ chẵn,

$\Rightarrow 2008a+3b+1$ chẵn (không thỏa mãn).

Do đó $a=0$

Với $a=0\Rightarrow (3b+1)(b+1)=225$

Vì $b\in\mathbb{N}\Rightarrow (3b+1)(b+1)=3.75=5.45=9.25$

$3b+1$ không chia hết cho 3 và $3b+1>b+1$

$\Rightarrow \begin{cases}3b+1=25\\ b+1=9\end{cases}\Rightarrow b=8$

Vậy $a=0,b=8$.

Câu 2. Tìm số tự nhiên n sao cho: $\left(2^{3n+4}+3^{2n+1}\right)\vdots 19$

Lời giải

Ta có: $2^{3n+4}+3^{2n+1}=16.8^n+3.9^n$

Vì $16\equiv -3 \pmod{19}$

$\Rightarrow 16.8^n\equiv -3.8^n \pmod{19}$

Mà $\left(2^{3n+4}+3^{2n+1}\right)\vdots 19$

$\Rightarrow \left(-3.8^n+3.9^n\right)\equiv 0 \pmod{19}$

$\Rightarrow \left(9^n-8^n\right)\equiv 0 \pmod{19}$

$\Rightarrow 9^n\equiv 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow n=0$ do $8\equiv 9 \pmod{19}$ là vô lý.

Vậy $n=0$.

Câu 3.

Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98

Lời giải

Ta có: $n\equiv 98 \pmod{132}$

$\Rightarrow n = 132k + 98$ với $k \in \mathbb{N}$ (1)

$\Rightarrow 132k + 98 \equiv 112 \pmod{131}$

$\Rightarrow k + 98 + 33 \equiv 112 + 33 \pmod{131}$

$\Rightarrow k + 131 \equiv 145 \pmod{131}$

$\Rightarrow k \equiv 14 \pmod{131}$

$\Rightarrow k = 131m + 14$ với $m \in \mathbb{N}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n = 132(131m + 14) + 98 = 131.132m + 1946$

$\Rightarrow n = 1946$.

Dạng 4. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TÌM CHỮ SỐ TẬN DÙNG

Câu 1. **(HSG 7 TP bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)**

Tìm chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Với $n = 0$, khi đó $C = 3^2 - 2^2 + 1 - 1 = 5$, C có chữ số tận cùng là 5.

Với $n \geq 1$. Ta có:

$C = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10.3^n - 10.2^{n-1} = 10.(3^n - 2^{n-1}) \vdots 10$

nên C có chữ số tận cùng là 0.

Vậy $n = 0$, C có chữ số tận cùng là 5.

$n \geq 1$, C có chữ số tận cùng là 0.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).**

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải.

Ta có: $2007 \equiv 7 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2007^{2009} \equiv 7^{2009} \pmod{10}$

Mà $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 7^{2009} = (7^2)^{1004}.7 \equiv 1.7 \pmod{10}$

$\Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$

Nên $2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$

Lại có: $2013 \equiv 3 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2013^{1999} \equiv 3^{1999} \pmod{10}$

Mà $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{1999} = \left(3^4\right)^{499}.3^3 \equiv 27 \pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$

Nên $2013^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$

Do đó $\left(2007^{2009} - 2013^{1999}\right) \equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy $N = 0,7.\left(2007^{2009} - 2013^{1999}\right)$ là số nguyên.

Câu 3. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}.

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của 2^{512}.

Lời giải

a) Ta có $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$

mà 9^{10} là số lẻ

Nên $9^{9^{10}} \equiv 9 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$ là 9.

b) Ta có: $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^8 \equiv 61 \pmod{100}$

Do đó $3^{10} = 3^8.9 \equiv 61.9 = 549 \equiv 49 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ do $49^2 = 2401$

$\Rightarrow 3^{1000} = \left(3^{20}\right)^{50} \equiv 01 \pmod{100}$

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01.

c) + Ta có: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nếu $a \vdots 25$ thì $(a+b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$

+ Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$ với $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^{50} = (2^{10})^5 = (25k-1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$

$\Rightarrow 2^{512} = (2^{50})^{10}.2^{12} \equiv (-1)^{10}.2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$

Do $2^{12} = 2^{10}.2^2 = 1024.4 \equiv 96 \pmod{25}$

$\Rightarrow 2^{512} \equiv 96 \pmod{125}$ hay $2^{512} = 125m + 96$ với $m \in \mathbb{N}$

Lại có: $2^{512} = (2^4)^{123} = 16^{123} \vdots 8$; $96 \vdots 8$

$\Rightarrow m \vdots 8$ nên $m = 8n$ với $n \in \mathbb{N}$

Khi đó $2^{512} = 125.8n + 96 = 1000n + 96$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{512} là 096.

Dạng 5. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Câu 1. **(HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023**

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thoả mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng:

$f(x) = 2 + x(x-1).g(x)$ trong đó $g(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Ta có $f(7) = 2 + 42.g(7) \equiv 2 \pmod{3}$ nên $f(7)$ không thể là số chính phương.

Câu 2. **(HSG 7 Huyện Hiệp Hòa, năm học 2022 - 2023)**

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên . Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1

+) Từ giả thiết, suy ra p chia hết cho $2; 3$ nhưng không chia hết cho 4

Như vậy, vì $p \vdots 3$ suy ra $p-1$ chia cho 3 dư 2 (mâu thuẫn)

$\Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

+) Vì $p \vdots 2$ và p không chia hết cho 4

$\Rightarrow p$ chia cho 4 dư 2

$\Rightarrow p+1$ chia cho 4 dư 3 (mâu thuẫn)

nên $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1$, $p+1$ không là số chính phương.

Câu 3. **(HSG T7 Huyện Quảng Xương, năm học 2022 - 2023)**

Cho $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111.a+111b+111c=3.37.(a+b+c)$

Vì số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

Do đó $a+b+c=3.37.k^2\ (k\in\mathbb{N})$.

Điều này vô lí vì: $3\le a+b+c\le 27$

Vậy A không là số chính phương.

Câu 4. **(HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết rằng $2\overline{ab}+1$ và $3\overline{ab}+1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2\overline{ab}+1=m^2$ và $3\overline{ab}+1=n^2$ ($m,n\in\mathbb{N}^*$)

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 1 thì $2\overline{ab}+1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 2 thì $3\overline{ab}+1$ chia cho 5 dư 2. Điều này cũng vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 3 thì $2\overline{ab}+1$ chia cho 5 dư 2. Đây là điều vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 4 thì $3\overline{ab}+1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab}\,\vdots\,5$

Mặt khác do m lẻ nên m^2 chia cho 8 dư 1 suy ra $\overline{ab}\,\vdots\,4$

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 8 dư 4 thì $3\overline{ab}+1$ chia cho 8 dư 5. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab}\,\vdots\,8$

Mà $(5;\ 8)=1$ nên $\overline{ab}\,\vdots\,40$

Suy ra $\overline{ab}=40$ hoặc $\overline{ab}=80$

Thử lại trực tiếp ta có $\overline{ab}=40$ thỏa mãn.

Câu 5. Chứng minh rằng: $A=19^k+5^k+1995^k+1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Lời giải

Với k chẵn ta có:

$19^k\equiv(-1)^k\ (\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow 19^k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$

$5^k \equiv 1^k \pmod 4 \Rightarrow 5^k \equiv 1 \pmod 4$

$1995^k \equiv (-1)^k \pmod 4 \Rightarrow 1995^k \equiv 1 \pmod 4$

$1996^k \equiv 0 \pmod 4$

$\Rightarrow A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k \equiv 3 \pmod 4$ hay A chia 3 dư 4.

Vậy $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Câu 6. Tìm tất cả các số tự nhiên $x,\ y$ để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $(k \in \mathbb{N})$

Nếu $x = 0$ thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn

$\Rightarrow k^2 \vdots 4$; $1 + 5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy $x \neq 0$

Ta có $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow k$ lẻ và k không chia hết cho 5.

+ TH1: với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2^x = 4n(n+1) \Rightarrow n = 1$.

Khi đó $x = 3; y = 0$ (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+ TH2: với $y \neq 0$ và k không chia hết cho 5

$\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$

Mà $2^x + 5^y = k^2$

$\Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 \pmod 5$

$\Rightarrow x$ chẵn.

Đặt $x = 2x_1$ $(x_1 \in \mathbb{N})$, ta có: $5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$

$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases}$ với $y_1 + y_2 = y$; $y_1 > y_2$; $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_1} - 5^{y_2} = 5^{y_2}(5^{y_1 - y_2} - 1)$

$\Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y$

Khi đó: $2^{x_1+1} = 5^y - 1$

Nếu $y = 2t$ $(t \in \mathbb{N})$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1$ chia hết cho 3 (vô lý).

Do đó y lẻ.

$\Rightarrow 2^{x_1+1}=5^y-1=4\left(5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1\right)$

Nếu $y>1$ thì $5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1$ lẻ (vô lý)

Nếu $y=1\Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2;y=1$

Thử lại: $2^x+5^y=2^2+5^1=9$ là số chính phương.

Vậy $x=2;y=1$ hoặc $x=3;y=0$

Dạng 6. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ HỢP SỐ

Câu 1. **(HSG 7 Quận Hà Đông 2022 - 2023)**

Cho $A=2^{2^{10n+1}}+19$. Chứng minh rằng A là hợp số.

Lời giải

Theo định lí Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có $2^{10}\equiv 1\ (\text{mod } 11)$

$\Rightarrow 2^{10n}\equiv 1\ (\text{mod } 11)$

$\Rightarrow 2^{10n+1}=2.2^{10n}\equiv 2\ (\text{mod } 22)$

$\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2\ (k\in\mathbb{N})$

Do 23 là số nguyên tố nên $2^{22}\equiv 1\ (\text{mod } 23)$

$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}=4.2^{22k}\equiv 4\ (\text{mod } 23)$

$\Rightarrow \left(2^{2^{10n+1}}+19\right)\equiv(4+19)\equiv 0\ (\text{mod } 23)$

Nên $A\,\vdots\,23$.

Mà $A>23$ với $\forall n\geq 1$

nên A là hợp số.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để số $2^{2023}+23n$ là một bội số của 31.

Lời giải

Ta có: $2^5=32\equiv 1\ (\text{mod } 31)$ và $2023=5.404+3$.

Do đó: $2^{2022}=\left(2^5\right)^{404}.8\equiv 8\ (\text{mod } 31)$.

Suy ra $\left(2^{2022}+23.n\right)\equiv(8+23.n)\ (\text{mod } 31)$.

Vì n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $\left(2^{2023}+23n\right)\,\vdots\,31$

$\Rightarrow 8+23n=31$.

$\Rightarrow n=1$.

Vậy $n=1$ là số tự nhiên cần tìm.

Câu 3. **(HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)**

Cho số nguyên n $(n>1)$ thỏa mãn n^2+4 *và* n^2+16 là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2=5k+1$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^2+4=5k+1+4=(5k+5)\,\vdots\,5$.

Do đó nên n^2+4 không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2=5k+4$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^2+16=(5k+20)\,\vdots\,5$.

Do đó n^2+16 không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2\,\vdots\,5$, suy ra $n\,\vdots\,5$.

Câu 4. **(HSG 7 huyện Hoằng Hóa năm 2018 - 2019).**

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p=q+2$. Chứng minh: $(p+q)\,\vdots\,12$.

Lời giải.

Cách 1.

Vì $q>3$, q là số nguyên tố nên q không chia hết cho 3

$\Rightarrow q\equiv 1 \pmod 3$ hoặc $q\equiv -1 \pmod 3$

Nếu $q\equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow p\equiv 2+1 \pmod 3$

$\Rightarrow p\equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow p\,\vdots\,3$

Mà $p>3$

$\Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

Nên $q\equiv -1 \pmod 3$

$\Rightarrow p\equiv 2+(-1) \pmod 3$

$\Rightarrow p\equiv 1 \pmod 3$

Khi đó $p+q\equiv 1-1\pmod 3$

$\Rightarrow p+q\equiv 0\pmod 3$

Hay $(p+q)\vdots 3$

Vì $q>3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ

$\Rightarrow q$ là số chia 4 dư 1 hoặc dư 3

$\Rightarrow q\equiv 1\pmod 4$ hoặc $q\equiv -1\pmod 4$

+ Nếu $q\equiv 1\pmod 4$

$\Rightarrow p\equiv 2+1\pmod 4$

$\Rightarrow p\equiv 3\pmod 4$

Khi đó $p+q\equiv 3+1\pmod 4$

$\Rightarrow p+q\equiv 0\pmod 4$

+ Nếu $q\equiv -1\pmod 4$

$\Rightarrow p\equiv 2+(-1)\pmod 4$

$\Rightarrow p\equiv 1\pmod 4$

Khi đó $p+q\equiv 1-1\pmod 4$

$\Rightarrow p+q\equiv 0\pmod 4$

Do vậy $(p+q)\vdots 4$

Vì 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(p+q)\vdots 12$

Cách 2.

Vì $q>3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ và không chia hết cho 3

$\Rightarrow q$ chia cho 12 dư 1; dư 5; dư 7 hoặc dư 11

$\Rightarrow q\equiv 1\pmod{12}$ hoặc $q\equiv 5\pmod{12}$ hoặc $q\equiv -5\pmod{12}$ hoặc $q\equiv -1\pmod{12}$

+- Nếu $q\equiv 1\pmod{12}$

$\Rightarrow p\equiv 2+1\pmod{12}$

$\Rightarrow p\equiv 3\pmod{12}$

$\Rightarrow p = 12k + 3 = 3(4k+1) \vdots 3$ với k là số tự nhiên

Mà $p > 3$

$\Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

+ Nếu $q \equiv -1 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + (-1) \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 1 \pmod{12}$

Khi đó $p + q \equiv 1 - 1 \pmod{12}$

$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{12}$

Hay $(p+q) \vdots 12$

- Nếu $q \equiv 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv -5 \pmod{12}$

Khi đó $p + q \equiv -5 + 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{12}$ hay $(p+q) \vdots 12$

- Nếu $q \equiv -5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + (-5) \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv -3 \pmod{12}$

$\Rightarrow p = 12m - 3 = 3(4m-1) \vdots 3$ với m là số tự nhiên, $m > 0$

Mà $p > 3 \Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

Vậy $(p+q) \vdots 12$

Câu 5. **(HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)**

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p=3$ thì $2^p+p^2=8+9=17$ là số nguyên tố

Vơi $p>3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p=2^{2k+1}\equiv 2(\text{mod } 3)$

Và $p^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ nên $(2^p+p^2)\vdots 3$

Mà $2^p+p^2>3$ nên 2^p+p^2 là hợp số

Vậy với $p=3$ thì 2^p+p^2 là hợp số

Vậy với $p=3$ thì 2^p+p^2 là số nguyên tố.

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+14 là số nguyên tố.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

+ TH1: Với $p=3\Rightarrow p^2+14=3^2+14=23$ là số nguyên tố.

+ TH2: Với $p\neq 3\Rightarrow p^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ mà $14\equiv 2(\text{mod } 3)$

$\Rightarrow (p^2+14)\vdots 3$ và có $p^2+14>3$

$\Rightarrow p^2+14$ không là số nguyên tố.

Vậy $p=3$.

Câu 7. Cho $n\in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng: 19.8^n+17 là hợp số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $n=2k$

$\Rightarrow 19.8^n+17\equiv 1.(-1)^{2k}+2=3\equiv 0(\text{mod } 3)$

$\Rightarrow (19.8^n+17)\vdots 3$

Mà $19.8^n+17>3$ nên 19.8^n+17 là hợp số

+ TH2: $n=4k+1$

Khi đó: $19.8^n+17=19.8^{4k+1}+17=19.8.64^{2k}+17$

Mà $19\equiv 6(\text{mod } 13)$; $64^{2k}=4096^k\equiv 1^k(\text{mod } 13)$; $17\equiv 4(\text{mod } 13)$

$\Rightarrow 19.8^n+17\equiv 6.8.1+4\equiv 52\equiv 0(\text{mod } 13)$

Mà $19.8^n+17>13$ nên 19.8^n+17 là hợp số

+ TH3: $n=4k+3$

Khi đó: $19.8^n+17=19.8^{4k+3}+17=19.8.64^{2k+1}+17$

Mà $19\equiv -1\pmod 5$; $64^{2k+1}=(-1)^{2k+1}\equiv -1\pmod 5$; $17\equiv 2\pmod 5$; $8\equiv 3\pmod 5$

$\Rightarrow 19.8^n+17\equiv(-1).3.(-1)+2\equiv 5\equiv 0\pmod 5$

Mà $19.8^n+17>5$ nên 19.8^n+17 là hợp số

Vậy với $n\in\mathbb{N}^*$, 19.8^n+17 là hợp số.

Dạng 7. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN TÌM NGHIỆM NGUYÊN

Câu 1. **(HSG 7 huyện Thường Xuân, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $x^2+x=3^{2020.y}+1$

Lời giải

+) Trường hợp $y<0$, ta có:

$VP=x^2+x=x(x+1)$ là số nguyên

$VT=3^{2020.y}+1$ không là số nguyên (vì $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ với $a\neq 0$, n $\in$ N*)

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y=0$, ta có: $x^2+x=3^{2020.0}+1$

$\Rightarrow x(x+1)=2=1.2=(-2)(-1)$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x<x+1$

$\Rightarrow x=1$ hoặc $x=-2$

Với $x=1$ thì $y=0$

Với $x=-2$ thì $y=0$

+) Trường hợp $y>0$, ta có:

$VP=x^2+x=x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp

nên x^2+x chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT=3^{2020.y}+1$ chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là: $(1;0)$; $(-2;0)$.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Phú Ninh 2018-2019)**

Tìm x,y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25-y^2=8(x-2015)^2$.

Lời giải.

Ta có: $25-y^2\le 25$

$\Rightarrow 8(x-2015)^2\le 25$

$\Rightarrow 0 \le (x-2015)^2 < 4$

Vì với số nguyên a bất kì thì $a \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a \equiv 1 \pmod 3$ hoặc $a \equiv -1 \pmod 3$

$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2 \equiv 1^2 \pmod 3$ hoặc $a^2 \equiv (-1)^2 \pmod 3$

$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod 3$

Nên số chính phương chỉ có thể chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow (x-2015)^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $(x-2015)^2 \equiv 1 \pmod 3$ với $x \in \mathbb{Z}$

+ Nếu $(x-2015)^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow 8.(x-2015)^2 \equiv 8.1 \pmod 3$

$\Rightarrow 8.(x-2015)^2 \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow y^2 = 25 - 8.(x-2015)^2 \equiv 25 - 2 \pmod 3$

$\Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod 3$ với $y \in \mathbb{Z}$

(vô lí vì y^2 là số chính phương không chia hết cho 3 thì chia cho 3 dư 1)

+ Nếu $(x-2015)^2 \equiv 0 \pmod 3$

Mà $0 \le (x-2015)^2 < 4$; $(x-2015)^2$ là số chính phương với $x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x-2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$

khi đó $y = 5$ hoặc $y = -5$.

Vậy $x = 2015$; $y = 5$ hoặc $y = -5$

Câu 3. **(HSG 7 trường Tôn Đức Thắng 2018-2019).**

Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 8y^2 + 41$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 4(2y^2 + 10) + 1$

Vì $4(2y^2 + 10) + 1 \equiv 1 \pmod 4$ với $y \in \mathbb{Z}$

Nên $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + 2x$ là số lẻ mà $2x \vdots 2$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow x^2$ là số lẻ $\Rightarrow x$ là số lẻ

$\Rightarrow x \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $x \equiv -1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1^2 \pmod 4$ hoặc $x^2 \equiv (-1)^2 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 4$

+ Nếu $x \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2x \equiv -2 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + (-2) \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv -1 \pmod 4$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod 4$)

+ Nếu $x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + 2 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 3 \pmod 4$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod 4$)

Vậy không có giá trị nguyên nào của x, y thỏa mãn đề bài.

Câu 4. **(HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)**

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$

Lời giải

Ta có: $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

Do đó, từ $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$

$\Rightarrow n(n+1) = 2.3.37a$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\dfrac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \le 999$

$\Rightarrow n(n+1) \le 1998 \Rightarrow n < 45 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n = 37$ hoặc $n + 1 = 37$

+ Với $n = 37 \Rightarrow \overline{aaa} = \dfrac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa mãn)

+ Với $n + 1 = 37 \Rightarrow \overline{aaa} = \dfrac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn)

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 5. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$

b) $x^2 + y^2 = 1999$

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1.

a) Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 4$

$y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $y^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $x^2 - y^2 \equiv 3 \pmod 4$

Mà $1998 \equiv 2 \pmod 4$

Nên phương trình $x^2 - y^2 = 1998$ không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 4$

$y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $y^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$

Mà $1999 \equiv 3 \pmod 4$

Nên phương trình $x^2 + y^2 = 1998$ không có nghiệm nguyên.

Câu 6. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$.

Lời giải

$x^2 = 2y^2 - 8y + 3 \Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$

Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $x^2 \equiv 4 \pmod 8$

$(y-2)^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $(y-2)^2 \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $(y-2)^2 \equiv 4 \pmod 8$

$\Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $2(y-2)^2 \equiv 2 \pmod 8$

$\Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3 \pmod 8$ hoặc $2(y-2)^2 - 5 \equiv 5 \pmod 8$

Do đó phương trình $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ không có nghiệm nguyên.

Hết.