

Bài 1 (4,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

2) Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Bài 2 (4,0 điểm). Giải phương trình

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Bài 3 (3,0 điểm).

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 25 = y(y+6)$

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh $\angle CIJ = \angle CBH$

b) Chứng minh D, C, J, H đồng dạng với D, H, I, B

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5 (2,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Họ, tên chữ ký GT1:.....

Số báo danh:..... Họ, tên chữ ký GT2:.....

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4 đ)	Câu 1 (1,75đ)	1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$	
		$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$	0,75
		$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$	0,5
		$A = 2\sqrt{2}$	0,5
	Câu 2 (2,25)	2. $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$	
		a) ĐKXĐ: $x \geq 0$	0,25
		$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$	0,5
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$	0,5
		b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$	0,5
		Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXĐ)	0,25
		Vậy GTNN của biểu thức B=-2 khi x=1	0,25
Bài 2 (4 đ)		1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$	
	Câu 1 (2đ)	ĐKXĐ : $x \geq 1$	0,25
		$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$	0,5
		$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$	
		$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$	0,25
		$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2}$ (*)	0,25
Nếu $x \geq 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x+3$	0,25		

		$\Leftrightarrow 16(x-1) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (TM)	
		Nếu $1 \leq x < 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1$ (TM)	0,25
		Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=5$	0,25
	Câu 2 (2đ)	2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$.	
		Đặt $u = \sqrt{2x^2 + 5x + 12}, v = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$ ($u > 0, v > 0$)	0,25
		$\Rightarrow u^2 = 2x^2 + 5x + 12, v^2 = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 10 = 2(x+5)$	0,25
		Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v) = (u^2 - v^2) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0$ (2)	0,25
		Vì $u > 0, v > 0$, từ (2) suy ra: $u - v - 2 = 0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} + 2$ (3)	0,25
		Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình 2 $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 3$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (7x^2 - 7) + (6x + 6) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)(7x-1) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1, x = \frac{1}{7} \end{cases} (tm)$	0,5
		Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = \frac{1}{7}$	0,25
Bài 3 (3 đ)	Câu 1 (1,5đ)	1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.	
		Giả sử $2016k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên. Suy ra: $2016k = a^3 - 3$ Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7.	0,5
		Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.	0,25
		Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7	0,5
		Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2016k$. ĐPCM	0,25
	Câu 2 (1,5đ)	2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 25 = y(y+6)$	
		Từ $x^2 - 25 = y(y+6)$ Ta có: $(y+3+x)(y+3-x) = -16$	0,25

	<p>Để ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2, do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên.</p> <p>Khi đó: $y+3+x \geq y+3-x$.</p> <p>Ta có $(y+3+x)+(y+3-x) = 2(y+3)$ là số chẵn</p> <p>Suy ra 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có tích của chúng là số chẵn, vậy 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ là 2 số chẵn.</p>	0,5
	<p>Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây: $-16 = 8(-2) = 4(-4) = 2(-8)$ trong \mathbb{Z} thỏa sẽ \mathbb{Z} \Rightarrow $y+3+x = 8$, $y+3-x = -2$</p>	0,25
	<p>Khi $y+3+x = 8$, $y+3-x = -2$ ta có $x = 5$, $y = 0$.</p> <p>Khi $y+3+x = 4$, $y+3-x = -4$ ta có $x = 4$, $y = -3$.</p> <p>Khi $y+3+x = 2$, $y+3-x = -8$ ta có $x = 5$, $y = -6$.</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là: $(x, y) \in \{(5, 0); (4, -3); (5, -6)\}$.</p>	0,5

Bài 4 (7 đ)		
Câu a (1,5 đ)	+ Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$ Suy ra $BC \perp CD$ (1)	0,5
	+ Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel AC$ (2)	0,5
	+ Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$ + Suy ra $\angle CIJ = \angle CBH$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (3)	0,5
Câu b (2 đ)	+ Trong Δ vuông CBH ta có: $\tan \angle CBH = \frac{CH}{BH}$ (4)	0,5
	+ Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$ + Mà $CH \perp AB$ (gt) + Suy ra $CJ \perp CH$	0,5
	+ Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan \angle CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ ($CI = HI$) (5) + Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$	0,5

		<ul style="list-style-type: none"> + Xét $\triangle CJH$ và $\triangle HIB$ có $\angle H CJ = \angle BHI = 90^\circ$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt) + Nên $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$ 	0,5
Câu c (1,5 đ)		+ Lập luận để chứng minh được $\angle HEI = 90^\circ$	0,5
		+ Chứng minh được $\triangle HEI$ đồng dạng với $\triangle H CJ$	0,5
		+ Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$	
		+ Suy ra $HE \cdot HJ = HI \cdot HC$	0,5
	+ Mà $HJ = \frac{1}{2}HD$; $HI = \frac{1}{2}HC$		
	+ Suy ra $HE \cdot HD = HC^2$		
Câu d (2 đ)			
		<ul style="list-style-type: none"> + Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $\angle BOM = 45^\circ$ + Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định. 	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> + Kẻ $MK \perp AB$ tại K + Chứng minh được $\triangle DMON$ vuông cân tại M và $KM = KN$ Suy ra $\angle ANC = 45^\circ$ Xét $\hat{C} \hat{O} M$ Ta có $\hat{C} \hat{O} M$ nên $H \hat{O} K$ Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi) 	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> + Xét C khác M. Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM Do đó $\angle ANC < \angle ANM = 45^\circ$ + $\triangle HNC$ có $\angle NHC = 90^\circ$ nên $\angle HNC + \angle HCN = 90^\circ$ Mà $\angle HNC < 45^\circ$ nên $\angle HCN > 45^\circ$ Suy ra $\angle HNC < \angle HCN$ Suy ra $HC < HN$ 	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> + Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$ + Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $\angle BOC = 45^\circ$ thì 	0,5

	AH + CH đạt giá trị lớn nhất	
Bài 5 (2 đ)	Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.	
	Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$	0,5
	Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$	0,5
	Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$	0,5
	Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (Trái với giả thiết) Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.	0,5