

Trả lời ngắn

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(a; b)$ thì $a + b = ?$

Lời giải

$$y = x^3 - 3x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow I(0; 1) \Rightarrow a + b = 0 + 1 = 1.$$

Đáp án: 1

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = ax + b$ thì $a + b = ?$

Lời giải

$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0; 1) \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(2; -3) \end{cases}$$

$$AB: y = -2x + 1 \Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

Đáp án: -1

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B , $I(a; b)$ là trung điểm AB thì $a + b = ?$

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Tiệm cận đứng: $x = 1$

Tiệm cận xiên: $y = x + 2$

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận: $I(1; 3)$.

Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua $I(1; 3)$ nên $I(1; 3)$ cũng là trung điểm AB .

Vậy $a + b = 1 + 3 = 4$.

Đáp án: 4

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0; -1) \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(2; 5) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; 6) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10} \approx 6.32$$

Đáp án: 6,32

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \neq 0$ thuộc đoạn $[-5; 5]$, để đường thẳng $d: y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Điều kiện $x \neq 1$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$\frac{-2x+1}{x-1} = mx + 1 \Leftrightarrow (mx+1)(x-1) = -2x+1$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + (3-m)x - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } g(x) = mx^2 + (3-m)x - 2 = 0$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (3-m)^2 + 8m > 0 \\ m+3-m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases} \text{ nên } m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Vậy có 10 giá trị.

Đáp án: 10

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

$$y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$$

$$y' = -3x^2 - 2mx + (4m+9)$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 12m + 27 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$$

$$\text{Vì } m \text{ nguyên nên } m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$$

Vậy có 7 giá trị.

Đáp án: 7

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

Xét hàm số $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$; $y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = m - 16 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 38 \\ x = 1 \Rightarrow y = m + 38 \\ x = 2 \Rightarrow y = m + 16 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$m - 16$	$m - 38$	$m + 38$	$m + 16$	$+\infty$

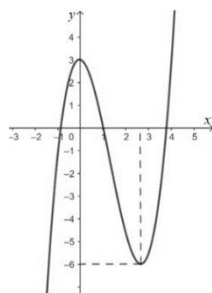
Từ bảng biến thiên để hàm số đã cho có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 38 < 0 < m - 16 \\ m + 16 < 0 < m + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 < m < 38 \\ -38 < m < -16 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 42 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án: 42

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0, x = a \in (2; 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiên nhôn)} \\ x = a \text{ (nghiên nhôn)} \end{cases}$$

Suy ra

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiên nhôn)} \\ x = a \text{ (nghiên nhôn)} \end{cases}$$

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = a \text{ (2)} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (1) có ba nghiệm.

⊛ Phương trình (2) có ba nghiệm.
 Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm.

Đáp án: 6

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$, để đường thẳng $d: y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung?

Lời giải

Điều kiện $x \neq -1$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$\frac{x-3}{x+1} = x+m \Leftrightarrow (x+m)(x+1) = x-3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0$$

d cắt (C) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ khác -1 và $x_1 x_2 < 0$.

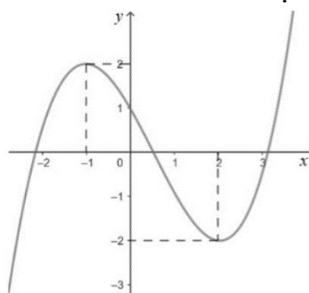
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 - 2m + 2m - 3 \neq 0 \\ 2m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{-3}{2} \Leftrightarrow m < \frac{-3}{2} \\ \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2024; 2024] \end{cases} \text{ nên } m \in \{-2024; -2023; \dots; -2\}$$

Vậy có 2023 giá trị.

Đáp án: 2023

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

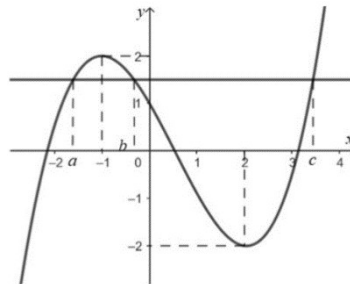


Hỏi hàm số $g(x) = \left| \left[f(x) \right]^2 - 3f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

Lời giải

$$g'(x) = f'(x) \cdot [2f(x) - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c > 3 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	-1	b	2	c	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(a) < 0$	-1	$g(b) < 0$	11	$g(c) > 0$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

Đáp án: 9

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của hai đồ thị

hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có hệ số góc lần lượt là 12 và -3. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{f(x^2)} \right)' = \frac{f(x^2) \cdot f'(x) - f(x) \cdot 2x \cdot f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

Ta có

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 12$ và $g'(1) = -3$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(1) \cdot f'(1) - 2f(1) \cdot f'(1)}{f^2(1)} = -3 \Leftrightarrow -\frac{f'(1)}{f(1)} = -3 \Leftrightarrow f(1) = 4.$$

Đáp án: 4

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị

hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B . Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

Lời giải

Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ suy ra $t > 0$ (vì $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$ với mọi x và $|x| + x \geq 0$ với mọi x).

$$(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -1 \quad \text{suy ra} \quad x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{t}.$$

Vậy $f(t) = \frac{-1}{t}$ với $t > 0$ hay $f(x) = \frac{-1}{x}$ với $x > 0$.

Có $f'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$ là đường

thẳng Δ có phương trình: $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 4x - 4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A(1; 0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0; -4)$ nên diện tích của ΔOAB là $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} |1| \cdot |-4| = 2$.

Đáp án: 2

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C) . M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A, B . Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a + \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi $a - b + 4$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C), (x_0 \neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình $y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C) .

Mà $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C) , suy ra $I(1; 2)$.

Điểm $A\left(1; \frac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B(2x_0-1; 2)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA + IB + AB = \frac{2}{|x_0-1|} + 2|x_0-1| + \sqrt{4(x_0-1)^2 + \frac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA + IB + AB \geq 2\sqrt{4} + \sqrt{4 \cdot 2} = 4 + \sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=2 \end{cases}$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4 + \sqrt{8}$ khi $M(0; 1)$ hoặc $M(2; 3)$.

Suy ra $a=4, b=8$ nên $a - b + 4 = 0$.

Đáp án: 0

Câu 14. Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

Lời giải

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(\text{con})$
 Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:
 $1500 : 1000 = 1,5(\text{kg})$

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(\text{con}), (x > 0)$

Theo đề Câu, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5\text{kg} / \text{con}$

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x \text{ kg} / \text{con}$

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$$

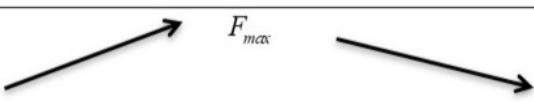
Câu toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có:

$$F'(x) = -0,125x + 61$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$$

BBT

X	0	488	1000
F'(x)	+	0	-
F(x)			

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là:

$$1000 - 488 = 512\text{con}$$

Đáp án: 512

Câu 15. Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

Lời giải

Đáp án: $\frac{2}{27}$

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

$$x(\text{dm}), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$$

Khi đó chiều cao của hình hộp là

Và cạnh đáy của hộp là $(1 - 2x)\text{dm}$

Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1 - 2x)^2 \text{ dm}^3$

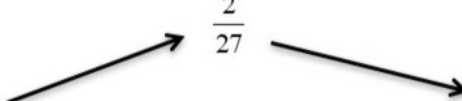
Ta có:

$$V' = 1 - 8x + 12x^2$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Phương trình

BBT

X	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
V'	+	0	-
V			

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27} dm^3$.

Đáp án: [!m:\$\mathtt{type_194}\$]

Câu 16. Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km B. 6,5km C. 5km D. 4km.

Lời giải

Đáp án: 6,5

Ta đặt: $B'C = x(km), (0 \leq x \leq 9)$

Ta có:

$$BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$$

Gọi F(x) là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

Ta có: $F(x) = 130.000 \cdot \sqrt{36 + x^2} + 50.000(9 - x)(USD)$

Câu toán trở thành tìm x sao cho F(x) đạt GTNN.

$$F'(x) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vì F(x) là hàm liên tục trên đoạn $[0; 9]$ nên ta có:

$$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng 9km-2,5km=6,5km.

Đáp án: 6,5

Câu 17. Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: 0,8

Giả sử tấm gỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$ Cạnh góc vuông còn lại là:

$$AC = \sqrt{(1,2 - x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1,44 - 2,4x}$$

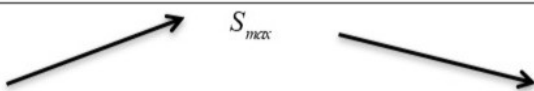
Ta có diện tích tam giác ABC:

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1,44 - 2,4x} - \frac{1}{2} \frac{1,2x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1,44 - 3,6x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} \right)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0	0,4	0,6
S'(x)	+	0	-
S(x)			

Đáp án: 0,8

Câu 18. Anh Tuấn muốn xây dựng một hồ ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chữ được 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Lời giải

Đáp án: 160

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hồ ga, $(x > 0, y > 0, h > 0, \text{cm})$

$$\frac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$$

Ta có:

$$V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{1600}{x^2}$$

Thể tích hồ ga:

Diện tích cần xây dựng hồ ga là:

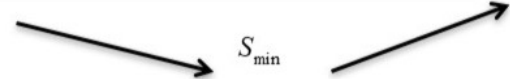
$$\begin{aligned} S(x) &= xy + 2xh + 2yh = x \cdot \frac{1600}{x^2} + 2x \cdot 2x + x \cdot \frac{1600}{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} \end{aligned}$$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất.

$$S'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

BBT

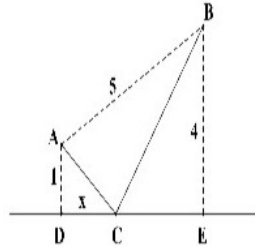
X	0	10	$+\infty$
S'(x)	-	0	+
S(x)			

Vậy chiều rộng của hồ ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hồ ga nhỏ nhất là: $S = 10 \cdot 16 = 160\text{cm}^2$.

Đáp án: 160

Câu 19.



Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

Lời giải

Đáp án: $\sqrt{41}$

Đặt $CD = x, x > 0$. Ta tính được $DE = \sqrt{5^2 - (4 - 1)^2} = 4$

Ta có $AC + BC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4 - x)^2 + 16} = f(x)$

Khi đó: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$

Lời giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \frac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{14}$,

Đáp án: [!m:\$mathtype_227\$]

Câu 20. Bác nông dân muốn làm hàng rào trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:

*Bờ tường*Hàng rào

Lời giải

Đề Câu cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r , đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có:

$$x + 2r = 200 \Leftrightarrow r = 100 - \frac{x}{2}. \text{ Từ đây ta có } r > 0 \Rightarrow x < 200.$$

$$f(x) = x \left(100 - \frac{x}{2} \right) = -\frac{x^2}{2} + 100x$$

Diện tích đất rào được tính bởi:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 100x \text{ trên khoảng } (0; 200)$$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn. ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Từ đó ta có $f(100) = 5000$ là GTLN của diện tích đất rào được.

Đáp án: 5000

Câu 21. Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh



họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1000π

Gọi $x(cm)$; $y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ ($x, y > 0; x < 30$)

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x + y) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2 (30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2 (30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt GTLN

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là:

$V = 1000\pi (cm^3)$

Đáp án: 1000π

Câu 22. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

Lời giải

Đáp án: 0,68

Ta có $S_p = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r l + 2\pi r^2$ (1)

$V = \pi r^2 l = 2 \Rightarrow l = \frac{2}{\pi r^2}$ thay vào (1) ta được:

$S_p = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = f(r)$

$f'(r) = -\frac{4}{r^2} + 4\pi r$

$f'(r) = 0$ khi r gần bằng 0,68.

Đáp án: 0,68

Câu 23. Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h , có thể tích là $1m^3$. Với a như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

Lời giải

Đáp án: 1

$$V = a^2 h = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

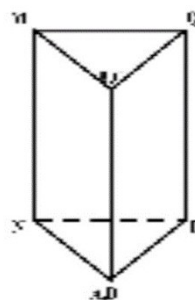
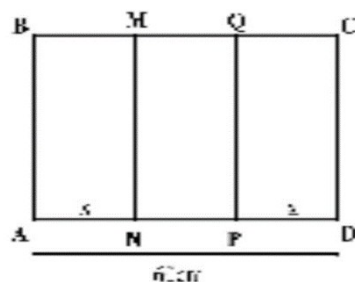
$$S = 4ah + 2a^2 = \frac{4}{a} + 2a^2 = f(a)$$

$$f'(a) = -\frac{4}{a^2} + 4a$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = 1$.

Đáp án: 1

Câu 24. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



- A. $x = 20$ B. $x = 30$ C. $x = 45$ D. $x = 40$

Lời giải

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

$$m_a = \sqrt{\frac{4x^2 - (60 - 2x)^2}{4}} = \sqrt{-900 + 60x}$$

Ta có:

$$V = h \cdot m_a \cdot NP$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{60x - 900} (60 - 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{60(60 - 2x)}{2\sqrt{60x - 900}} - 2\sqrt{60x - 900}$$

Xét hàm

$$f'(x) = 0, f(x) \rightarrow \max \text{ khi } x = 20.$$

Đáp án: 20

----HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>