CHỦ ĐỀ 7 – BẤT ĐẲNG THỨC

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI....2
DẠNG 1: DẠNG TỔNG SANG TÍCH....2
DẠNG 2: DẠNG TÍCH SANG TỔNG, NHÂN BẰNG SỐ THÍCH HỢP....3
DẠNG 3: QUA MỘT BƯỚC BIẾN ĐỔI RỒI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI....4
DẠNG 4: GHÉP CẶP ĐÔI....7
DẠNG 5: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP....7
DẠNG 6: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KÊT QUẢ....10
DẠNG 7: TÌM LẠI ĐIỀU KIỆN CỦA ẨN....14
II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA....16
III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG....20
DẠNG 1: ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG....20
DẠNG 2: TẠO RA BẬC HAI BẰNG CÁCH NHÂN HAI BẬC MỘT....21
DẠNG 3: TẠO RA ab+bc+ca....23
DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TRONG BA SỐ BẤT KÌ LUÔN TÒN TẠI HAI SỐ CÓ TÍCH KHÔNG ÂM....24
DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ BỊ CHẶN TỪ 0 ĐẾN 1....26
DẠNG 6 : DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI XÉT HIỆU....28
HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ....30
I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI....30
II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA....31
III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG....32

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Dạng hai số không âm x, y

- Dạng tổng sang tích: $x + y \ge 2\sqrt{xy}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ hay $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.
- Dạng lũy thừa: $x^2 + y^2 \ge 2xy$ hay $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.1 \le \dfrac{x^2+1}{2}$.

2. Dạng ba số không âm x, y, z

- Dạng tổng sang tích: $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x+y+z}{3}$ hay $xyz \le \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.
- Dạng lũy thừa: $x^3 + y^3 + z^3 \ge 3xyz$ hay $xyz \le \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}$.
  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.1.1 \le \dfrac{x^3+1+1}{3}$.

3. Dạng tổng quát với n **số không âm** $x_1, x_2, ..., x_n$

- Dạng tổng sang tích: $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ hay $x_1x_2...x_n \le \left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n$.
- Dạng lũy thừa: $x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n \ge x_1x_2...x_n$ hay $x_1x_2...x_n \le \dfrac{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}{n}$.
  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.\underbrace{1.1...1}_{n-1} \le \dfrac{x^n+n-1}{n}$.

4. Bất đẳng thức trung gian

- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}\ \forall x > 0, y > 0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.
- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}\ \forall x > 0, y > 0, z > 0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

DẠNG 1: DẠNG TỔNG SANG TÍCH

Ví dụ 1. Cho $x \ne 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8x^2 - 4x + \dfrac{1}{4x^2} + 15$.

Lời giải

Có $T=(4x^2-4x+1)+\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)+14$

$=(2x-1)^2+\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)+14\ge 0+2\sqrt{4x^2.\frac{1}{4x^2}}+14=16$

Vậy $MinT=16$ khi $x=\frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $x>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

Lời giải

Có $M=4x^2-4x+1+x+\frac{1}{4x}+2010$

$=(2x-1)^2+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2010\ge 0+2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}+2010=2011$.

Vậy $MinM=2011$ khi $x=\frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $x>y>0$ và $xy=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Lời giải

Có $H=\frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2+4}{x-y}$

$=(x-y)+\frac{4}{x-y}\ge 2\sqrt{(x-y).\frac{4}{x-y}}=4$.

Vậy $MinH=4$ khi $\begin{cases}x-y=\frac{4}{x-y}\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}+1\\ y=\sqrt{3}-1\end{cases}$.

DẠNG 2: DẠNG TÍCH SANG TỔNG, NHÂN BẰNG SỐ THÍCH HỢP.

Ví dụ 1: Cho a ≥ 1, b ≥ 1. Chứng minh : $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$

Lời giải

Có $\sqrt{b-1}=\sqrt{1.(b-1)}\le\frac{1+(b-1)}{2}=\frac{b}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}\le\frac{ab}{2}$;

Và tương tự: $b\sqrt{a-1}\le\frac{ab}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=ab\Rightarrow$ đpcm

Dấu '=" xảy ra khi a = b = 2

Ví dụ 2: Cho a ≥ 9, b≥ 4, c≥ 1. Chứng minh: $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}\le\frac{11abc}{12}$

Lời giải:

Có:

$$ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}=ab\sqrt{(c-1).1}+\frac{bc}{3}.\sqrt{(a-9).9}+\frac{ca}{2}.\sqrt{(b-4).4}$$

$$\le ab.\frac{(c-1)+1}{2}+\frac{bc}{3}.\frac{(a-9)+9}{2}+\frac{ca}{2}.\frac{(b-4)+4}{2}=\frac{11abc}{12}$$

Dấu “=” xảy ra khi a = 18, b = 8, c = 2

Ví dụ 3: Cho a ≥ 0, b ≥ 0, $a^2+b^2\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: M = $a\sqrt{b(a+2b)}+b\sqrt{a(b+2a)}$

Lời giải

Xét:

$$M.\sqrt{3}=a.\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}\le a.\frac{3b+(a+2b)}{2}+b.\frac{3a+(b+2a)}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}+5ab$$

$$\le\frac{a^2+b^2}{2}+5.\frac{a^2+b^2}{2}\le 6\Rightarrow M\le 2\sqrt{3}$$

Vậy MaxM = $2\sqrt{3}$ khi a = b = 1

Ví dụ 4. Cho $x\ge 0$, $y\ge 0$ và $x^2+y^2\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x(14x+10y)}+\sqrt{y(14y+10x)}$$

Lời giải

Xét: $P.\sqrt{24}=\sqrt{24x(14x+10y)}+\sqrt{24y(14y+10x)}$

$$\le\frac{24x+(14x+10y)}{2}+\frac{24y+(14y+10x)}{2}=24(x.1+y.1)$$

$$\le 24\left(\frac{x^2+1}{2}+\frac{y^2+1}{2}\right)=24\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)\le 48\Rightarrow P\le\frac{48}{\sqrt{24}}\Rightarrow P\le 4\sqrt{6}.$$

Vậy $\text{Max}P=4\sqrt{6}$ khi $x=y=1$.

Ví dụ 5. Cho $x>0$, $y>0$ và $\sqrt{xy}(x-y)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

Lời giải

Từ $\sqrt{xy}(x-y)=x+y\Rightarrow x>y$

và $x+y=\sqrt{xy(x-y)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4xy(x-y)^2}\le\frac{1}{2}\frac{(4xy)+(x-y)^2}{2}=\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow(x+y)^2-4(x+y)\ge 0\Rightarrow x+y\ge 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(x-y)^2=4xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=8xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=2\\x+y=4\end{cases}$

$\Rightarrow x$, y là hai nghiệm phương trình $t^2-4t+2=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{2}$.

Do $x>y\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

Vậy $MinP=4$ khi $x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

DẠNG 3: QUA MỘT BƯỚC BIẾN ĐỔI RỒI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Ví dụ 1. Cho a, b, $c>0$ và $ab+bc+ac=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Lời giải

Thay $1=ab+bc+ac$, ta được:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ac}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ac}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}.\frac{c}{c+b}}$$

$$\le\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2}+\frac{\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}}{2}+\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy $MaxP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{ab}{c.1+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a.1+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b.1+ca}}$

$$=\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)+ca}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ac}{(b+c)(b+a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+c}.\frac{b}{c+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+b}.\frac{c}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}.\frac{a}{b+a}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\right)\right]=\frac{3}{2}$$ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $ab+bc+ac=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(b^2+c^2\right)}.$$

Lời giải

Có $P=\frac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(b^2+c^2\right)}$

$$=\frac{a^2+c^2-c^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\frac{b^2+a^2-a^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2+b^2-b^2}{b\left(b^2+c^2\right)}$$

$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{b^2+c^2}\right)$$

$$\geq\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{2\sqrt{c^2a^2}}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{2\sqrt{a^2b^2}}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{2\sqrt{b^2c^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2a}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ac}{2abc}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $MinP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}.$$

Lời giải

Có $T=\frac{a\left(1+9b^2\right)-9ab^2}{1+9b^2}+\frac{b\left(1+9c^2\right)-9bc^2}{1+9c^2}+\frac{c\left(1+9a^2\right)-9ca^2}{1+9a^2}$

$$=\left(a-\frac{9ab^2}{1+9b^2}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{1+9c^2}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{1+9a^2}\right)$$

$$\geq\left(a-\frac{9ab^2}{2\sqrt{1.9b^2}}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{2\sqrt{1.9c^2}}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{2\sqrt{1.9a^2}}\right)$$

$$=a+b+c-\frac{3}{2}(ab+bc+ac)\geq a+b+c-\frac{1}{2}(a+b+c)^2=\frac{1}{2}\ \ (\text{do } a+b+c=1).$$

Vậy $MinT=\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 5. Cho a, b, $c>0$ và $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh: $abc\leq\frac{1}{8}$.

Lời giải

Có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+a}=\left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\overset{casi}{\geq}2\sqrt{\frac{b}{1+b}.\frac{c}{1+c}}=2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}.$$

Tương tự: $\frac{1}{1+b}\geq2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\frac{1}{1+c}\geq2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$.

Nhân các bất đẳng thức dương, cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq\frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$ hay $abc\leq\frac{1}{8}$ (đpcm).

DẠNG 4: GHÉP CẶP ĐÔI

Tách $x+y+z=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(y+z)+\frac{1}{2}(z+x)$.

$xyz=\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}\quad \forall x,y,z\ge 0$.

Ví dụ 1. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$; b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$

$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c$ (đpcm).

b) Xét $\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+2$

$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}.\frac{c^2a^2}{b^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2}.\frac{a^2b^2}{c^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}.\frac{b^2c^2}{a^2}}$

$=a^2+b^2+c^2+2=3$, do đó $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{2}\ge\sqrt{3}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC. Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$.

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC nên $a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0$.

Có $0<\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\le\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b$;

$0<\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\le\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c$;

$0<\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\le\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a$;

Nhân ba đẳng thức dương cùng chiều ta được

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ (điều phải chứng minh).

DẠNG 5: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP

<u>Bước 1:</u> Kẻ bảng dự đoán giái trị lớn nhất,nhỏ nhất và đạt tại giá trị nào của biến.

<u>Bước 2:</u> Kẻ bảng xác định số nào sẽ đi với nhau.

<u>Bước 3:</u> Tách ghép thích hợp số hạng và sử dụng bất đẳng thức Cô-si.

Ví dụ 1. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\frac{5}{a}$.

Lời giải

<u>Phân tích bài toán</u>

a	2	3	4	$\cdots$
P	$\frac{13}{2}\approx 6,5$	$\frac{23}{3}\approx 7,7$	$\frac{37}{4}\approx 9,25$	$\cdots$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\min P=\frac{13}{2}\Leftrightarrow a=2$.

	a	$\frac{1}{a}$
$a=2$	2	$\frac{1}{2}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{a}$ sẽ đi với $\frac{a}{4}$ nên $\frac{5}{a}$ sẽ đi với $\frac{5a}{4}$.

Trình bày lời giải

Có $P=\left(\frac{5}{a}+\frac{5a}{4}\right)+\frac{3a}{4}\ge 2\sqrt{\frac{5}{a}\cdot\frac{5a}{4}}+\frac{3a}{4}=5+\frac{3a}{4}\ge 5+\frac{3.2}{4}=\frac{13}{2}(\text{ do } a\ge 2)$.

Vậy $\min P=\frac{13}{2}$ khi $\begin{cases}\frac{5}{a}=\frac{5a}{4}\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}$.

Lời giải

Phân tích bài toán

$(x\ ;\ y)$	$(1\ ;\ 5)$	$(2\ ;\ 4)$	$(3\ ;\ 3)$	$(4\ ;\ 2)$	$(5\ ;\ 1)$
F	$\frac{84}{5}=16,8$	15	16	$\frac{39}{2}=19,5$	$\frac{156}{5}=31,2$

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min F=15$ khi $x=2, y=4$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2, y=4$	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{6}{x}$ sẽ đi với $\frac{6x}{4}=\frac{3x}{2}$; $\frac{1}{y}$ sẽ đi với $\frac{y}{16}$ nên $\frac{24}{y}$ sẽ đi với $\frac{24y}{16}=\frac{3y}{4}$.

Trình bày lời giải

Có

$$F=\left(\frac{6}{x}+\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{24}{y}+\frac{3y}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{6}{x}\cdot\frac{3x}{2}}+2\sqrt{\frac{24}{y}\cdot\frac{3y}{2}}-\frac{1}{2}(x+y)=18-\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\geq 18-\frac{1}{2}\cdot 6=15 \text{ (do } x+y\leq 6).$$

Vậy $\min F=15$ khi $\frac{6}{x}=\frac{3x}{2};\frac{24}{y}=\frac{3y}{2};x+y=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+\frac{28}{x}+\frac{1}{y}$.

Lời giải

Phân tích bài toán

$(x;y)$	$(1;2)$	$(2;1)$
P	$\frac{69}{2}=34,5$	24

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min P=24$ khi $x=2,y=1$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2,y=1$	2	$\frac{1}{2}$	1	1

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{28}{x}$ sẽ đi với $\frac{28x}{4}=7x$; $\frac{1}{y}$ se đi với y.

Trình bày lời giải

Có

$$P=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2x^2+y^2-7x-y$$

$$=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2(x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)-9$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{28}{x}\cdot 7x}+2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot y}+0+0+3-9=24.$$

Vậy $\min P=24$ khi $\frac{28}{x}=7x;\frac{1}{y}=y;x-2=0;y-1=0;x+y=3\Leftrightarrow x=2,y=1$.

Ví dụ 4. Cho $2\leq x\leq 3, 4\leq y\leq 6, 4\leq z\leq 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Lời giải

Nhận xét: Do y và z vai trò như nhau nên sử dụng bất đẳng thức Cô-si đối với tích yz, ta được

$$P=x(yz)\leq x\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{1}{4}x(12-x)(12-x).$$

Đến đây ta kẻ bảng để dự đoán giá trị lớn nhất của P

x	2	3
P	50	$\frac{243}{4}=60,75$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\max P=\frac{243}{4}$ khi $x=3$.

	x	$12-x$
$x=3$	3	9

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $3x$ sẽ đi với $12-x$ nên ta biến đổi

$$P\le\frac{1}{12}[(3x)(12-x)(12-x)]\le\frac{1}{12}\left(\frac{x+24}{3}\right)^3\le\frac{1}{12}\left(\frac{3+24}{3}\right)^3\le\frac{243}{4}.$$

Vậy $\max P=\frac{243}{4}$ khi $x=3,\ y=z=\frac{9}{2}$.

DẠNG 6: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KÊT QUẢ

- Khi đặt ẩn phụ ta cần tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Một số bất đẳng thức trung gian thường dùng:
  - Với mọi a,b thì $2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2\ge 4ab$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - Với mọi a,b,c thì $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.
  - Với mọi a,b thì $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ \forall a,b;\ \frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\ \forall a+b\ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\ \forall a>0,b>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\ \forall a>0,b>0,c>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho $x>0,\ y>0$ và $\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}$.

Lời giải

Đặt $a=\frac{x}{y}$, do $2\ge\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{y}}=4\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow\frac{x}{y}\le\frac{1}{4}\Rightarrow 0<a\le\frac{1}{4}$

$K=a+\frac{2}{a}=\left(\frac{2}{a}+32a\right)-31a\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}.32a}-31a$

Có $=16-31a\ge 16-31.\frac{1}{4}=\frac{33}{4}\left(do\ 0<a\le\frac{1}{4}\right)$

Vậy $MinK=\frac{33}{4}\ khi\ a=\frac{1}{4}\ hay\ x=2,y=8.$

Ví dụ 2. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$

Đặt $a=\dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} \Rightarrow \dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}=\dfrac{1}{a}$

Do $(m+n+p)^2 \geq 3(mn+np+pm) \Rightarrow (x+y+1)^2 \geq 3(xy+x+y) \Rightarrow a \geq 3$

Vậy $MinA=\dfrac{10}{3} khi\, a=3 \Rightarrow x=y=1$.

Ví dụ 3. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$

Lời giải

Có $A=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$

Đặt $t=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}, do\, x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$

Ta được $A=t^2+\dfrac{1}{t}-2=\left(\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{7}{8}t^2-2 \overset{Casi}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{t^2}{8}.\dfrac{1}{t}}+\dfrac{7}{8}t^2-2$

$=\sqrt{\dfrac{t}{2}}+\dfrac{7}{8}t^2-2 \geq \sqrt{\dfrac{2}{2}}+\dfrac{7}{8}.2^2-2=\dfrac{5}{2}$ (do $t \geq 2$).

Vậy $MinA=\dfrac{5}{2}$ khi $t=2 \Rightarrow x=y$.

Ví dụ 4. Cho $a>0, b>0, c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2 \leq a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2}(b^2+c^2)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

Lời giải

Có $P=\dfrac{1}{a^2}(b^2+c^2)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \geq \dfrac{2bc}{a^2}+\dfrac{2a^2}{bc}=2\left(\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{a^2}{bc}\right)$

Đặt $t=\dfrac{a^2}{bc} \geq \dfrac{b^2+c^2}{bc} \geq \dfrac{2bc}{bc}=2$ ta được

$P=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=2\left[\left(\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{3t}{4}\right] \geq 2\left[2\sqrt{\dfrac{t}{4}.\dfrac{1}{t}}+\dfrac{3t}{4}\right]=2\left(1+\dfrac{3t}{4}\right) \geq 2\left(1+\dfrac{3.2}{4}\right)=5$ (do $t \geq 2$).

Vậy $MinP=5$ khi $\begin{cases} b=c \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow b=c=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 5. Cho $x>0, y>0$ và $x+y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Có $P \ge \left(2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}\right)\sqrt{1+x^2y^2} = 2\sqrt{\frac{1}{x.y}+xy}$

Đặt $a = xy$, do $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0<a\le \frac{1}{4}$, ta được

$$P \ge 2\sqrt{\frac{1}{a}+a} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+16a\right)-15a} \ge 2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{a}.16a}-15a} = 2\sqrt{8-15a} \ge 2.\sqrt{8-15.\frac{1}{4}} = \sqrt{17}\left(do\, 0<a\le \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow MinP=\sqrt{17}\; khi\; a=\frac{1}{4}\; hay\; x=y=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 6: Cho $x>0, y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy$.

Lời giải

Có $P=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$ Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}\ \forall a,b>0$, ta được

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge \frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge \frac{4}{1^2}=4\,(do\, 0<x+y\le 1)$. Suy ra $P\ge 4+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$

Đặt a = xy, $do\; xy\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le \frac{1}{4}\Rightarrow 0<a\le \frac{1}{4}$ ta được

$$P\ge 4+\left(\frac{1}{2a}+4a\right)=4+\left(\frac{1}{2a}+8a\right)-4a\ge 4+2\sqrt{\frac{1}{2a}.8a}-4a=8-4a\ge 8-4.\frac{1}{4}=7\,(do\, 0<a\le \frac{1}{4})$$

$$MinP=7\; khi\; x=y=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 7: Cho x,y >0 và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng $\frac{a^2+b^2}{2}\ge \left(\frac{a+b}{c}\right)^2\ \forall a,b$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}\ \forall a,b>0.$

$$K=2.\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}{2}\ge 2.\left(\frac{x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}}{2}\right)^2\ge \frac{1}{2}\left(x+y+\frac{4}{x+y}\right)^2$$

ta được

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được:

$$K\ge \frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^2\ge \frac{1}{2}\left[\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^2$$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{a}\right) \ge \frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{1}\right)=\frac{25}{2}$ (do $0<a\le 1$). Vậy, $MinK=\frac{25}{2}$ khi $x=y=\frac{1}{2}.$

Cách 2: $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=\left(x^2+y^2\right)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+4 \ge 2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+4.$

Đặt $a=xy,$ do $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow 0<a\le\frac{1}{4}.$ Ta được:

$K \ge 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4a}\right)+4 \ge 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4.\frac{1}{4}}\right)+4=\frac{25}{2}$ $\left(do\ 0<a\le\frac{1}{4}\right)$ Vậy, $MinK=\frac{25}{2}$ khi $x=y=\frac{1}{2}.$

Ví dụ 8: Cho $x>0, y>0$ và $x+y\le 1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3$

Lời giải

Sử dụng $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad \forall a+b\ge 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b} \quad \forall a+b>0$, ta được

$$S=2.\frac{\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3}{2}\ge 2\left(\frac{1+x+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{y}}{2}\right)^3$$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được

$$S\ge\frac{1}{4}\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3=\frac{1}{4}\left[2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^3 \ge\frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^3=\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{a}\right)^3\ge\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{1}\right)^3=\frac{343}{4}$$

Vậy $\mathrm{MinS}=\frac{343}{4}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

DẠNG 7: TÌM LẠI ĐIỀU KIỆN CỦA ẨN

Ví dụ 1. Cho $x, y > 0$ và $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.

Lời giải

Có $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \le 8 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \le 9$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 \le 9$, mà $(x+y)^2 \le (x+y)^2 + (x-1)^2 \Rightarrow (x+y)^2 \le 9 \Rightarrow 0 < x + y \le 3$

Có $P = \left(\frac{2}{x} + 2x\right) + \left(\frac{4}{y} + y\right) - 4x - 4y \ge 2\sqrt{\frac{2}{x}.2x} + 2\sqrt{\frac{4}{y}.y} - 4(x+y)$

$= 8 - 4(x+y) \ge 8 - 4.3 = -4$ (do $0 < x + y \le 3$). Vậy $\text{MinP} = -4$ khi $x = 1, y = 2$.

Ví dụ 2: Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ thỏa mãn $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$

Lời giải

Có $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right) \Leftrightarrow 3a^2 + 2b^2 + 2bc + 2c^2 = 9$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 2b^2 + 2bc + +2ab + 2ac + 2c^2 - 2ab - 2ac = 9$

$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\right) + \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(a^2 + c^2 - 2ac\right) = 9$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 = 9 \Rightarrow (a+b+c)^2 \le 9 \Rightarrow 0 < a + b + c \le 3$

Sử dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ ta được $T \ge a + b + c + \frac{18}{a+b+c}$

Đặt $x = a + b + c, 0 < x \le 3$, ta được

$T \ge x + \frac{18}{x} = \left(\frac{18}{x} + 2x\right) - x \ge 2\sqrt{\frac{18}{x}.2x} - x = 12 - x \ge 12 - 3 = 9$ (do $0 < x \le 3$)

Vậy $MinT = 9$ khi $x = 3$ hay $a = b = c = 1$

Ví dụ 3: Cho $a > 0, b > 0$ và $a^3 + b^3 + 6ab \le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{3}{ab} + ab$

Lời giải

Có $a^3 + b^3 + 6ab \le 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 + 6ab \le 8$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b-2) \le 8 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 2^3 - 3ab(a+b-2) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a+b)^2 + 2(a+b) + 4\right] - 3ab(a+b-2) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left(a^2 + b^2 - ab + 2a + 2b + 4\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left(2a^2 + 2b^2 - 2ab + 4a + 4b + 8\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a-b)^2 + (a+2)^2 + (b+2)^2\right] \le 0$

$\Leftrightarrow 0 < a + b \le 2$

Có $P=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\left(\frac{5}{2ab}+ab\right)$

Sử dụng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\ \forall x,y>0$, ta được:

$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\ge\frac{1}{a^2+2ab+b^2}=\frac{4}{(a+b)^2}\ge\frac{4}{2^2}=1$ (do $0<a+b\le 2$)

Suy ra $P\ge 1+\left(\frac{5}{2ab}+ab\right)$

Đặt $x=ab$, do $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{2^2}{2}=1\Rightarrow 0<x\le 1$, ta được:

$P\ge 1+\left(\frac{5}{2x}+x\right)=1+\left(\frac{5}{2x}+\frac{5x}{2}\right)-\frac{3x}{2}$

$\ge 1+2\sqrt{\frac{5}{2x}.\frac{5x}{2}}-\frac{3x}{2}=6-\frac{3x}{2}\ge 6-\frac{3.1}{2}=\frac{9}{2}$ (do $0<x\le 1$)

Vậy $MinP=\frac{9}{2}$ khi $a=b=1$

Ví dụ 4: Cho $a>0,b>0$ và $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+\frac{2020}{(a+b)^2}$

Lời giải

Sử dụng $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta được

* $a+b=a^2+b^2=2.\frac{a^2+b^2}{2}\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow 1\ge\frac{a+b}{2}\Rightarrow 0<a+b\le 2$

* $P=2.\frac{(a^2)^2+(b^2)^2}{2}+\frac{2020}{(a+b)^2}\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2+\frac{2020}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{2020}{(a+b)^2}$

Đặt $x=(a+b)^2\ ,\ ),0<x\le 4$, ta được:

$P=\frac{x}{2}+\frac{2020}{x}=\left(\frac{x}{2}+\frac{8}{x}\right)+\frac{2012}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{x}}+\frac{2012}{x}$

$=4+\frac{2012}{x}\ge 4+\frac{2012}{4}=50$ (do $0<x\le 4$)

Vậy $MinP=507$ khi $x=4$ hay $a=b=1$

Ví dụ 5: Cho $x>0,y>0$ và $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$

Lời giải

Có $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 3\Leftrightarrow 3\le\sqrt{xy}+\sqrt{x.1}+\sqrt{y.1}$

Mà $\sqrt{xy}+\sqrt{x.1}+\sqrt{y.1}\le\frac{x+y}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}=x+y+1$, suy ra $x+y\ge 2$

Có $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\left(\frac{x^2}{y}+y\right)+\left(\frac{y^2}{x}+x\right)-(x+y)$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y}.y}+2\sqrt{\frac{y^2}{x}.x}-(x+y)=x+y\geq 2$$

Vậy $MinP=2$ khi $x=y=1$

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

1. Dạng bộ hai số $(a;b)$ và $(x;y)$ bất kỳ

- $(ax+by)^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

- Đặc biệt $(x+y)^2=(1.x+1.y)^2\leq(1^2+1^2)(x^2+y^2)$

2. Dạng bộ ba số $(a;b;c)$ và $(x;y;z)$ bất kì

- $(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

- Đặc biệt $(x+y+z)^2=(1.x+1.y+1.z)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$

3. Dạng tổng quát bộ n số $(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ và $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$

- $(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$

  Quy ước trong dấu $"="$ xảy ra, nếu mẫu nào bằng 0 thì tử tương ứng bằng 0.

Ví dụ 1. Cho 4x + 9y = 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $4x^2+9y^2$

Lời giải

Có $13^2=(4x+9y)^2=(2.2x+3.3y)^2\overset{\text{Bunhia}}{\leq}(2^2+3^2)(4x^2+9y^2)=13A\Rightarrow A\geq 13$

Ví dụ 2. Cho 4x + 3y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $4x^2+3y^2$

Lời giải

Có $1^2=(4x+3y)^2=(2.2x+\sqrt{3}.\sqrt{3}y)^2\overset{\text{Bunhia}}{\leq}(4+3)(4x^2+3y^2)=7A\Rightarrow A\geq\frac{1}{7}$

Vậy MinA = $\frac{1}{7}$ khi $\begin{cases} \frac{2x}{3y} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{7}$

Ví dụ 3. Cho $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$ và $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Có $2^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3A \Rightarrow A \geq \frac{4}{3}$

Vậy MinA = $\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$

Ví dụ 4. Cho $3x^2 + 2y^2 = \frac{6}{35}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = 2x + 3y

Lời giải

Có $S^2 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}x + \frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right)(3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6}(3x^2 + 2y^2) \leq \frac{35}{6}.\frac{6}{35} = 1 \Rightarrow S \leq 1$

Vậy MaxS = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}y}{3}}{\sqrt{2}} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y}{9} \\ \frac{8y}{9} + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{35} \\ y = \frac{9}{35} \end{cases}$

Ví dụ 5. Cho $4a^2 + 25b^2 \leq \frac{1}{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức H = 6a – 5b

Lời giải

Có $H^2 = (6a - 5b)^2 = (3.2a + (-1).5b)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (9 + 1)(4a^2 + 25b^2) = 10(4a^2 + 25b^2) \leq 10.\frac{1}{10} = 1 \Rightarrow H \leq 1$

Vậy MaxH = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a}{3} = \frac{5b}{-1} \\ 6a - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 15b = 0 \\ 18a - 15b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{20} \\ b = -\frac{1}{50} \end{cases}$

Ví dụ 6. Cho $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = x + y + z

Lời giải

Có $P^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3.\frac{3}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow P \le \frac{3}{2}$

Vậy MaxP = $\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$ khi $1 \le x \le 3$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{x - 1} + 1.\sqrt{3 - x}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} \left(1^2 + 1^2\right)\left(\sqrt{x - 1}^2 + \sqrt{3 - x}^2\right) = 4 \Rightarrow P \le 2$

Vậy MaxP = 2 khi $\frac{\sqrt{x - 1}}{1} = \frac{\sqrt{3 - x}}{1} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 8. Cho $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$K = \sqrt{4a + 5} + \sqrt{4b + 5} + \sqrt{4c + 5}$

Lời giải

Có $K^2 = \left(1.\sqrt{4a + 5} + 1.\sqrt{4b + 5} + 1.\sqrt{4c + 5}\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\le} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)(4a + 5 + 4b + 5 + 4c + 5)$

$= 3[4(a + b + c) + 15] = 3(4.3 + 15) = 81 \Rightarrow K \le 9$

Vậy MaxK = 9 khi $\begin{cases} \frac{\sqrt{4a + 5}}{1} = \frac{\sqrt{4b + 5}}{1} = \frac{\sqrt{4c + 5}}{1} \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 9. Cho $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{b + c} + 1.\sqrt{c + a} + 1.\sqrt{a + b}\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\le} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)\left(\sqrt{b + c}^2 + \sqrt{c + a}^2 + \sqrt{a + b}^2\right)$

$= 6(a + b + c) = 6 \Rightarrow P \le \sqrt{6}$

Vậy MaxP = $\sqrt{6}$ khi $\begin{cases} \frac{\sqrt{a + b}}{1} = \frac{\sqrt{b + c}}{1} = \frac{\sqrt{c + a}}{1} \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Ví dụ 10. Cho $a, b, c \ge 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}$$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(1.\sqrt{a}+1.\sqrt{b}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(a+b) = 2(a+b) \\ \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = \left(1.\sqrt{b}+1.\sqrt{c}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(b+c) = 2(b+c) \\ \left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^2 = \left(1.\sqrt{c}+1.\sqrt{a}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(c+a) = 2(c+a) \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}, \sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{2(b+c)}, \sqrt{c}+\sqrt{a} \leq \sqrt{2(c+a)}$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{c+a}{2}}$$ hay $M \geq 3$

Vậy MinM = 3 khi a = b = c = 1

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

DẠNG 1: ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG

- $A^2 \pm m \geq 0 \pm m$; $-A^2 \pm m \leq 0 \pm m$
  Dấu "=" xảy ra khi A = 0.
- $A^2 + B^2 \pm m \geq 0 + 0 \pm m$; $-A^2 - B^2 \pm m \leq 0 + 0 \pm m$
  Dấu "=" xảy ra khi A = 0, B = 0.

Ví dụ 1. Cho $x \geq -2$; $y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x + y - 2\sqrt{x+2} - 4\sqrt{y-1} + 24.$$

Lời giải

Có $A = \left(x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1\right) + \left(y - 1 - 4\sqrt{y-1} + 4\right) + 18$

$= \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + 18 \geq 0 + 0 + 18 = 18$

Vậy MinA = 18 khi $\begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Ví dụ 2. Cho $x \geq -\frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 5x - 6\sqrt{2x+7} - 4\sqrt{3x+1} + 2$.

Lời giải

Có $E = \left(2x + 7 - 6\sqrt{2x+7} + 9\right) + \left(3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4\right) - 19$

$= \left(\sqrt{2x+7} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{3x+1} - 2\right)^2 - 19 \geq 0 + 0 - 19 = -19$

Vậy MinA = - 19 khi $\begin{cases} \sqrt{2x+7} = 3 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7 = 9 \\ 3x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Ví dụ 3. Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x - \sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+7} + 28.$$

Lời giải

Xét 2T $= 2x - 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x+7} + 56$

$= \left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right) + \left(x + 7 - 6\sqrt{x+7} + 9\right) + 40$

$= \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x+7} - 3\right)^2 + 40 \geq 0 + 0 + 40 = 40 \Rightarrow T \geq 20$

Vậy Min $T = 20$ khi $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 7 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 4. Cho $x \geq \sqrt{15}.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = x^2 + x - \sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)} - \sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3} - 38.$$

Lời giải

Xét $2F=2x^2+2x-2\sqrt{(x^2-15)(x-3)}-2\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}-76$

$=\left(x^2-15+x-3-2\sqrt{(x^2-15)(x-3)}\right)+\left(x^2-15-2\sqrt{x^2-15}+1\right)+\left(x-3-2\sqrt{x-3}+1\right)$

$=\left(\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-15}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2-42\geq 0+0-42=-42$

$\Rightarrow F\geq -21$

Vậy Min $F=-21$ khi $\sqrt{x^2-15}=\sqrt{x-3}=1\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Ví dụ 5. Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=6.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

T= $\sqrt{a^2+4ab+b^2}+\sqrt{b^2+4ab+c^2}+\sqrt{c^2+4ca+a^2}.$

Lời giải

Chú ý: Với $x>0,y>0,$ ta có

$$x^2+4xy+y^2=\frac{6(x+y)^2-2(x-y)^2}{4}\leq\frac{6(x+y)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+4xy+y^2}\leq\frac{(x+y)\sqrt{6}}{2}.$$

Vận dụng vào bài toán, ta có

T $\leq\frac{(a+b)\sqrt{6}}{2}+\frac{(b+c)\sqrt{6}}{2}+\frac{(c+a)\sqrt{6}}{2}=(a+b+c)\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

Vậy MaxT $=6\sqrt{6}$ khi a = b = c =2.

Ví dụ 6. Cho $a>0,b>0,c>0$, $x+y+z=1.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

S = $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+z^2}.$

Lời giải

Chú ý: Với $x>0,y>0,$ ta có

$$a^2-ab+b^2=\frac{(a+b)^2+3(a+b)^2}{4}\geq\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-ab+b^2}\geq\frac{a+b}{2}$$

Vận dụng vào bài toán, ta có $S\geq\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}=x+y+z=1.$

Vậy MinS $=1$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}.$

DẠNG 2: TẠO RA BẬC HAI BẰNG CÁCH NHÂN HAI BẬC MỘT

- $m\leq x\leq n\Rightarrow (x-m)(x-n)\leq 0.$
- $m\leq\sqrt{x}\leq n\Rightarrow \left(\sqrt{x}-m\right)\left(\sqrt{x}-n\right)\leq 0.$

Ví dụ 1. Cho $-2\leq a,b,c\leq 3$ và $a^2+b^2+c^2=22.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a+b+c.$

Lời giải

Vì $-2\le a\le 3$ nên $a+2\ge 0, a-3\le 0.$

Suy ra $(a+2)(a-3)\le 0\Leftrightarrow a^2-a-6\le 0\Leftrightarrow a\ge a^2-6.$

Tương tự, ta cũng tìm được $b\ge b^2-6, c\ge c^2-6$

Do đó $M=a+b+c\ge a^2+b^2+c^2-18=22-18=4.$

Vậy MinM =4 khi $\begin{cases} a=-2, a=3\\ b=-2, b=3\\ c=-2, c=3\\ a+b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=3, c=-2\\ a=c=3, b=-2\\ b=c=3, a=-2\end{array}\right.$

Ví dụ 2. Cho $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=6.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

❖ **Tìm MinA**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Có $6^2=(1.x+1.y+1.z)^2\overset{Bunhia}{\le}(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)=3A\Rightarrow A\ge 12.$

Vậy MinA = 12 khi $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}\\ x+y+z=6\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại x=y=z=2)

Có $A=x^2+y^2+z^2=(x^2+4)+(y^2+4)+(z^2+4)-12$

$\ge 2\sqrt{x^2.4}+2\sqrt{y^2.4}+2\sqrt{z^2.4}-12=4(x+y+z)-12=4.6-12=12.$

Vậy MinA $=12$ Khi $x=y=z=2.$

❖ **Tìm MaxA**

Có $x, y, z\ge 0$ và $x+y+z=6$ nên $0\le x, y, z\le 6.$

$\Rightarrow x(x-6)+y(y-6)+z(z-6)\le 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 6(x+y+z)=6.6=36\Rightarrow A\le 36.$

Vậy MaxA $=36$ khi $\begin{cases} x=0, x=6\\ y=0, y=6\\ z=0, z=6\\ x+y+z=6\end{cases}$ hay $(x;y;z)$ là hoán vị của $(0;0;6).$

Ví dụ 3. Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}.$

Lời giải

❖ **Tìm MaxK**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $K^2 = \left(1.\sqrt{3a+1} + 1.\sqrt{3b+1} + 1.\sqrt{3c+1}\right)^2$

$$\overset{Bunhia}{\le} \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)(3a+1+3b+1+3c+1) = 9(a+b+c+1) = 36 \Rightarrow K \le 6.$$

Vậy MaxK $=6$ khi $a=b=c=1.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại a=b=c=1)

$$K = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(3a+1).4} + \sqrt{(3b+1).4} + \sqrt{(3c+1).4}\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{(3a+1)+4}{2} + \frac{(3b+1)+4}{2} + \frac{(3c+1)+4}{2}\right] = \frac{3(a+b+c)+15}{4} = \frac{3.3+15}{4} = 6.$$

Vậy Max $K=6$ khi $a=b=c=1.$

❖ **Tìm MinA**

Có $a+b+c=3 \Leftrightarrow 3a+3b+3c=9 \Leftrightarrow (3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=12.$

Đặt $x=3a+1, y=3b+1, z=3c+1 \Rightarrow x,y,z \ge 1$ và $x+y+z=12.$

Từ $x,y,z \ge 1$ và $x+y+z=12 \Rightarrow 1 \le x,y,z \le 10$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{10}\right) \le 0 \Rightarrow x - \left(\sqrt{10}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{10} \le 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \frac{x+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}.$$

Tương tự $\sqrt{y} \ge \dfrac{y+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}, \sqrt{z} \ge \dfrac{z+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}$, suy ra

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge \frac{x+y+z+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1} \Rightarrow K \ge \frac{12+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1} = \sqrt{10}+2.$$

Vậy MinK $=\sqrt{10}+2$ khi (x,y,z) là hoán vị của $(1;1;10)$ nên $(a;b;c)$ hoán vị của $(0;0;3).$

DẠNG 3: TẠO RA ab+bc+ca

- $0 \le a,b,c \le m \Rightarrow (m-a)(m-b)(m-c) \ge 0$
- $0 \le a,b,c \le m \Rightarrow (m-a)(m-b)+(m-a)(m-c)+(m-b)(m-c) \ge 0$

Ví dụ 1. Cho $0 \le a,b,c \le 2$ và $a+b+c=3.$ Chứng minh $ab+bc+ca \ge 2.$

Lời giải

Do $0 \le a,b,c \le 2$ nên $(2-a)(2-b)(2-c) \ge 0$

$$\Rightarrow 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc \ge 0$$

$\Rightarrow 8 - 4.3 + 2(ab+bc+ca) - abc \ge 0$ (do $a+b+c=3$)

$\Rightarrow ab+bc+ca \geq 2+\frac{abc}{2}$, mà $2+\frac{abc}{2} \geq 2$ nên $ab+bc+ca \geq 2$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho a $\geq$1, b $\geq$1, c $\geq$ 1 và ab+bc+ca =9.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P =a^2 + b^2 + c^2

Lời giải:

* Tìm Min P
Có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow P \geq 9$.
Vậy MinP =9 khi a = b= c = $\sqrt{3}$
* Tìm MãP
Do a $\geq$1, b $\geq$1, c $\geq$1 => (a-1)(b-1) +(b-1)(c-1) +(c-1)(a-1) $\geq$0
<=> (ab+ bc +ca) -2(a+b+c) +3 $\geq$ 0 <=> a+ b+ c $\leq$ 6
<=> $a^2+b^2+c^2$ +2(ab+bc+ca) $\leq$ 36 <=> P $\leq$ 18
Vậy MaxP=18 khi (a,b,c) là hoán vị của (1;1;4)

DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TRONG BA SỐ BẤT KÌ LUÔN TÒN TẠI HAI SỐ CÓ TÍCH KHÔNG ÂM

Tính chất 1: Nếu -1 $\leq$ a $\leq$1 thì $a^n \leq |a| \quad \forall n \in N^*$
Dấu "=" xảy ra khi a=0 hoặc a=1 nếu n lẻ, khi a=0 hoặc a= $\pm$ 1 nếu n chẵn
Tính chất 2: Nếu hai số a và b có tích ab $\geq$ 0 thì $|a|+|b|=|a+b|$
Tính chất 3: Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Bài toán cơ bản: Cho -1 $\leq$ x, y, z $\leq$ 1, x+ y+ z =0
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: T = $|x|+|y|+|z|$

Lời giải:

Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.
Giả sử xy $\geq$ 0 => $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$
Nên $T=2|z|\leq 2$ (do -1 $\leq$z $\leq$ 1).
Vậy MaxT =2 khi (x;y;z) là hoán vị (-1;0;1).

Ví dụ 1. Cho -2 $\leq$ x, y, z $\leq$ 2, x+ y+ z =0. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4 \leq 32$

Lời giải:

Có -2 $\leq$ x, y, z $\leq$ 2 => $-1 \leq \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \leq 1$
Đặt $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{2} \Rightarrow -1 \leq x, y, z \leq 1$ và x+y+z=0.
Khi đó $a^4+b^4+c^4=16(x^4+y^4+z^4) \leq 16(|x|+|y|+|z|)$.
Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.
Giả sử: xy $\geq$ 0 => $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$ nên
$|x|+|y|+|z|=2|z|\leq 2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4 \leq 32$ (đpcm)

Ví dụ 2. Cho 0 $\leq$ x, y, z $\leq$ 1 và x+ y+ z = $\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+y^2+z^2$

Lời giải:

Tìm Min P

Cách 1(Sử dụng bất đẳng thúc Bunhia)

Có $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (1.x+1.y+1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)=3P \Rightarrow P \geq \frac{3}{4}$

Vậy MinP = $\frac{3}{4}$ Khi $\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \\ x+y+z=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$

Cách 2(Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại x=y=z= $\frac{1}{2}$)

Cã $P=x^2+y^2+z^2=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+\frac{1}{4}\right)+\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\geq 2\sqrt{x^2.\frac{1}{4}}+2\sqrt{y^2.\frac{1}{4}}+2\sqrt{z^2.\frac{1}{4}}-\frac{3}{4}=x+y+z-\frac{3}{4}.$

Vậy MinP = $\frac{3}{4}$ Khi x = y = z = $\frac{1}{2}$

Tìm MaxP

Có x + y + z = $\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ (2x – 1) + (2y – 1) + (2z – 1) = 0

Đặt a = 2x – 1, b = 2y – 1, c = 2z – 1.

Do (2x – 1) + (2y – 1) + (2z – 1) = 0 nên a + b + c = 0

Vì $0 \leq x, y, z \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x-1, 2y-1, 2z-1 \leq 1$ nên $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Có P = $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)+3}{4}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2+3}{4}\leq\frac{|a|+|b|+|c|+3}{4}\ (do\ -1\leq a,b,c\leq 1)$

Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử $a.b \geq 0$ thì $|a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$ nên

$P\leq\frac{2|c|+3}{4}\leq\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}\ (do\ |c|\leq 1)$.

Vậy MaxP = $\frac{5}{4}$ khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x; y; z) là hoán vị của $\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho $0 \leq x, y, z \leq 2$ và x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1-x)(1-y)(1-z)$.

Lời giải

Có x + y + z = 3 $\Leftrightarrow$ (x – 1) + (y – 1) + (z – 1) = 0

Đặt a = x – 1, b = y – 1, c = z – 1 $\Rightarrow -1 \leq a, b, c \leq 1$ và a + b + c = 0

Với a + b + c = 0 thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Có $M = (a+1)^4 + (b+1)^4 + (c+1)^4 - 12abc$

$= (a^4+b^4+c^4) + 4(a^3+b^3+c^3) + 6(a^2+b^2+c^2) + 4(a+b+c) - 12abc$

$= (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2)$.

* Có $M = (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$
Vậy Min M = 0 khi $a = b = c = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$
* Có $M = (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \leq \left(|a|+|b|+|c|\right)+6\left(|a|+|b|+|c|\right)=7\left(|a|+|b|+|c|\right)$.
Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.
Giả sử $ab \geq 0 \Rightarrow |a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$

$\Rightarrow |a|+|b|+|c|=2|c|\leq 2 \Rightarrow M \leq 14$.

Vậy MaxM = 14 khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x, y, z) là hoán vị của (0; 1; 2).

Ví dụ 4: Cho $0 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + b + c = 6$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Lời giải

Có $P = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+\dfrac{(a+b+c)^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+18.$

Do $a + b + c = 6 \Rightarrow (a - 2) + (b - 2) + (c - 2) = 0 \Rightarrow \dfrac{a-2}{2}+\dfrac{b-2}{2}+\dfrac{c-2}{2}=0$

Đặt $x=\dfrac{a-2}{2}, y=\dfrac{b-2}{2}, z=\dfrac{c-2}{2} \Rightarrow x + y + z = 0$.

Vì $0 \leq a, b, c \leq 4 \Rightarrow -2 \leq a - 2, b - 2, c - 2 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{a-2}{2}, \dfrac{b-2}{2}, \dfrac{c-2}{2} \leq 1.$
$\Rightarrow -1 \leq x, y, z \leq 1$.

Có $P = \dfrac{(2x+2)^2+(2y+2)^2+(2z+2)^2}{2}+18 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x + y + z) + 24$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 24 \leq 2\left(|x|+|y|+|z|\right)+24$
Với ba số x, y, z bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.
Giả sử $xy \geq 0 \Rightarrow |x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$ nên $P=4|z|+24\leq 4+24=28\ (do\ -1\leq z\leq 1)$.
Vậy MaxP = 28 khi (x, y, z) là hoán vị của (- 1; 0; 1) nên (a, b, c) là hoán vị của
(0; 2; 4).

DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ BỊ CHẶN TỪ 0 ĐẾN 1

* Nếu $0\leq x\leq 1$ thì $\sqrt{x}\geq x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$
* Nếu $0\leq x\leq 1$ thì $x^n\leq x\ \forall n\in \mathbb{N}^*$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 1: Cho $a\geq 0; b\geq 0; c\geq 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức
$P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Lời giải

**** Tìm*** $MaxP$

Cách 1: (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $P^2 = (1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a} + 1.\sqrt{a+b})^2$

$$\overset{Bunhia}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\sqrt{b+c}^2 + \sqrt{c+a}^2 + \sqrt{a+b}^2\right)$$

$$= 6(a+b+c) = 6(do\, a+b+c=1) \Rightarrow P \leq \sqrt{6}$$

Vậy $Max\,P = \sqrt{6}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Cách 2: (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a = b = c = \dfrac{1}{3}$)

Xét $P.\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}(b+c)} + \sqrt{\dfrac{2}{3}(c+a)} + \sqrt{\dfrac{2}{3}(a+b)}$

$$\leq \frac{\frac{2}{3} + (b+c)}{2} + \frac{\frac{2}{3} + (c+a)}{2} + \frac{\frac{2}{3} + (a+b)}{2}$$

$$= 1 + a + b + c = 2\,(do\, a+b+c=1) \Rightarrow P \leq 2 : \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$$

Vậy $Max\,P = \sqrt{6}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

**** Tìm*** $MinP$

Sử dụng tính chất: $0 \leq x \leq 1$ thì $\sqrt{x} \geq x$

Do $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 \leq a+b, b+c, c+a \leq 1$

Có $P = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b} \geq (b+c) + (c+a) + (a+b) \leq 1$

$= 2(a+b+c) = 2\,(do\, a+b+c=1).$

Vậy $MinP = 2$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(1;0;0)$.

Ví dụ 2: Cho $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$.

Lời giải

**** Tìm*** $MaxP$

Cách 1: (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $T^2 = (1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a} + 1.\sqrt{a+b})^2$

$$\overset{Bunhia}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\sqrt{b+c}^2 + \sqrt{c+a}^2 + \sqrt{a+b}^2\right)$$

$$= 6(a+b+c) = 18\,(do\, a+b+c=3) \Rightarrow P \leq 3\sqrt{2}$$

Vậy $MaxT = 3\sqrt{2}$ khi $a = b = c = 1$

Cách 2: (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a = b = c = 1$)

Xét $\mathrm{T}.\sqrt{2} = \sqrt{2(b+c)} + \sqrt{2(c+a)} + \sqrt{2(a+b)}$

$$\le \frac{2+(b+c)}{2}+\frac{2+(c+a)}{2}+\frac{2+(a+b)}{2}$$

$$=3+a+b+c=6\,(do\, a+b+c=3) \Rightarrow P \le 6:\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Vậy $MaxT=3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$

**** Tìm** $MinP$*

Sử dụng tính chất: $0\le x\le 1$ thì $\sqrt{x}\ge x$

Do $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=3\Rightarrow \frac{a+b+c}{3}=1$ nên $0\le \frac{a+b}{3};\frac{b+c}{3};\frac{c+a}{3}\le 1$

Có $T=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{b+c}{3}}+\sqrt{\frac{c+a}{3}}+\sqrt{\frac{a+b}{3}}\right)\ge\sqrt{3}\left(\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}+\frac{a+b}{3}\right)$

$$=\sqrt{3}\,\frac{2(a+b+c)}{3}=2\sqrt{3}\,(do\, a+b+c=3).$$

Vậy $MinT=2\sqrt{3}$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(3;0;0)$.

Ví dụ 3: Cho $a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$.

Lời giải:

<u>Cách 1:</u> Có $a\ge 0;\ b\ge 0;\ c\ge 0;\ a+b+c=1$

$\Rightarrow\ 0\le a,b,c\le 1\Rightarrow\ a\ge a^2, b\ge b^2, c\ge c^2.$

Do đó :

$$F=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}=\sqrt{a+2a+1}+\sqrt{b+2b+1}+\sqrt{c+2c+1}$$

$$\ge\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{b^2+2b+1}+\sqrt{c^2+2c+1}=a+b+c+3=4$$.

Vậy $MinF=4$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(0;0;1)$

<u>Cách 2</u>: Có $a+b+c=1\Leftrightarrow 3a+3b+3c=3\Leftrightarrow (3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=6$

Đặt $x=3a+1;\ y=3b=1;\ z=3c+1.$

$\Rightarrow\ x,y,z\ge 1$ và $x+y+z=6$ và $F=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Từ $x,y,z\ge 1$ và $x+y+z=6\Rightarrow 1\le x,y,z\le 4$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{4})\le 0\Rightarrow\ x-3\sqrt{x}+2\le 0\Rightarrow\ \sqrt{x}\ge\frac{x+2}{3}$$

Tương tự: $\sqrt{y}\ge\frac{y+2}{3};\sqrt{z}\ge\frac{z+2}{3}$, suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge\frac{x+y+z+6}{3}\Rightarrow\ F\ge 4$

Vậy $MinF=4$ khi $(x;y;z)$ là hoán vị $(1;1;4)$ nên (a,b,c) là hoán vị $(0;0;1)$.

Ví dụ 4: Cho $a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\sqrt{2a^2+3a+4}+\sqrt{2b^2+3b+4}+\sqrt{2c^2+3c+4}$.

Lời giải:

Có $a \ge 0;\ b \ge 0;\ c \ge 0;\ a+b+c=1$

$\Rightarrow\ 0 \le a,b,c \le 1 \Rightarrow\ a^2 \le a, b^2 \le b, c^2 \le c.$

Do đó :

$$M=\sqrt{a^2+\left(a^2+3a+4\right)}+\sqrt{b^2+\left(b^2+3b+4\right)}+\sqrt{c^2+\left(c^2+3c+4\right)}$$

$$\le\sqrt{a^2+\left(a+3a+4\right)}+\sqrt{b^2+\left(b+3b+4\right)}+\sqrt{c^2+\left(c+3c+4\right)}$$

$$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+2)^2}+\sqrt{(c+2)^2}=a+b+c+6=7$$

.

Vậy $MinM=7$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(0;0;1)$.

DẠNG 6 : DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI XÉT HIỆU

Ví dụ 1: Cho $x;y\ge 0$ thỏa mãn $x+y=\sqrt{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)$.

Lời giải

Có $P=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)=x^4y^4+\left(x^4+y^4\right)+1=x^4y^4+\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+1$

$=x^4y^4+(10-2xy)^2-2x^2y^2+1=x^4y^4+2x^2y^2-40xy+101.$

Đặt $t=xy>0$ thì $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 0\le t\le\dfrac{5}{2}$

Ta được $P=t^4+2t^2-40t+101;\ 0\le t\le\dfrac{5}{2}$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MinP$

t	0	1	2	2,5
P	101	64	45	52,5625

Từ bảng trên ta dự đoán $MinP=45$ khi $t=2$ nên ta xét hiệu :

$P-45=t^4+2t^2-40t+56=\left(t^4-8t^2+16\right)+\left(10t^2-40t+40\right)$

$=\left(t^2-4\right)^2+4(t-2)^2\ge 0\Rightarrow\ P\ge 45$

Vậy $MinP=45$ khi $t=2$ $\Rightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt{10}\\ xy=2\end{cases}\Rightarrow\ x,y$ là hai nghiệm của phương trình :

$t^2-\sqrt{10}.t+2=0\Leftrightarrow\ t=\dfrac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\ x=\dfrac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2};y=\dfrac{\sqrt{10}\mp\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho $a+b+4ab=4a^2+4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=20\left(a^3+b^3\right)-6\left(a^2+b^2\right)+2013$.

Lời giải

Có : $a+b+4ab=4a^2+4b^2\Leftrightarrow\ a+b+4ab=4\left[(a+b)^2-2ab\right]$

$\Leftrightarrow 12ab=4(a+b)^2-(a+b)$, mà $4ab\le(a+b)^2$ hay $12ab\le 3(a+b)^2$.

Nên $4(a+b)^2-(a+b)\le 3(a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2-(a+b)\le 0 \Leftrightarrow 0\le a+b\le 1$.

Đặt $x=a+b$ thì $0\le x\le 1$ và $12ab=4x^2-x$

Ta có $A=20\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]-6\left[(a+b)^2-2ab\right]+2013$

$=20(a+b)^3-60ab(a+b)-6(a+b)^2+12ab+2013$

$=20x^3-5(4x^2-x)x-6x^2+4x^2-x+2013=3x^2-x+2013$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MaxA$

t	0	1
A	2013	2015

Từ bảng trên ta dự đoán $MaxA=2015$ khi $x=1$ nên ta xét hiệu

$A-2015=3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$. Do $0\le x\le 1$ nên $(x-1)(3x+2)\le 0$, suy ra $A\le 2015$

Vậy $MaxA=2015$ khi $x=1$ hay $a=b=\frac{1}{2}$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Bài 1. Cho $x \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8x^2 - 4x + \frac{1}{4x^2} + 15$.

Bài 2. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$.

Bài 3. Cho $x > y > 0$ và $xy = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Bài 4. Cho $a \geq 1;\ b \geq 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Bài 5. Cho $a \geq 9;\ b \geq 4;\ c \geq 1$. Chứng minh $ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-9} + ca\sqrt{b-4} \leq \frac{11abc}{12}$.

Bài 6. Cho $a \geq 0;\ b \geq 0;\ a^2 + b^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a\sqrt{b(a+2b)} + b\sqrt{a(b+2a)}$.

Bài 7. Cho $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x^2 + y^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x(14x+10y)} + \sqrt{y(14y+10x)}$.

Bài 8. Cho $x > 0;\ y > 0$ và $\sqrt{xy}(x-y) = x + y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$.

Bài 10. Cho các số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a + b + c = 1$

chứng minh $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{3}{2}$

Bài 11. Cho $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ và $ab + bc + ca = 3abc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2}{c(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2+c^2)}$

Bài 12. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ và $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{a}{1+9b^2}+\dfrac{b}{1+9c^2}+\dfrac{c}{1+9a^2}$

Bài 13. Cho $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng $abc\le\dfrac{1}{8}$.

Bài 14. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

a) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$ b) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge\sqrt{3}$

Bài 15. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của ΔABC.

Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$

Bài 16. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\dfrac{5}{a}$.

Bài 17. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{24}{y}$.

Bài 18. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+\dfrac{28}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Bài 19. Cho $2\le x\le 3,\ 4\le y\le 6,\ 4\le z\le 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Bài 20. Cho $x>0,\ y>0$ và $\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{y}\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}$.

Bài 21. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

Bài 22. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$.

Bài 23. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2\le a^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2}(b^2+c^2)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

Bài 24. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$.

Bài 25. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}+4xy$.

Bài 26. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

Bài 27. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3$.

Bài 28. Cho $x>0,\ y>0$ và $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-2x-3y$.

Bài 29. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$.

Bài 30. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^3+b^3+6ab\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{3}{ab}+ab$.

Bài 31. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^2+b^2=a+b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+\dfrac{2020}{(a+b)^2}$.

Bài 32. Cho $x>0,\ y>0$ và $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

Bài 1. Cho $4x+9y=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+9y^2$.

Bài 2. Cho $4x+3y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+3y^2$.

Bài 3. Cho $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 4. Cho $3x^2+2y^2\le\dfrac{6}{35}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=2x+3y$.

Bài 5. Cho $4a^2+25b^2 \le \frac{1}{10}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=6a-5b$.

Bài 6. Cho $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ khi $1\le x\le 3$.

Bài 8. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\sqrt{4a+5}+\sqrt{4b+5}+\sqrt{4c+5}$.

Bài 9. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{c+a}{2}}$.

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1. Cho $x\ge -2$, $y\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+y-2\sqrt{x+2}-4\sqrt{y-1}+24$.

Bài 2. Cho $x\ge -\frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E=5x-6\sqrt{2x+7}-4\sqrt{3x-1}+2$

Bài 3. Cho $x\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=x-\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+7}+28$.

Bài 4. Cho $x\ge\sqrt{15}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=x^2+x-\sqrt{(x^2-15)(x-3)}-\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}-38$.

Bài 5. Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\sqrt{a^2+4ab+b^2}+\sqrt{b^2+4bc+c^2}+\sqrt{c^2+4ca+a^2}.$$

Bài 6. Cho $x>0,y>0,z>0,x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}.$$

Bài 7. Cho $-2\le a,b,c\le 3$ và $a^2+b^2+c^2=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=a+b+c$.

Bài 8. Cho $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$.

Bài 10. Cho $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh: $ab+bc+ca\ge 2$.

Bài 11. Cho $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2$.

Bài 12. Cho $-1 \le x, y, z \le 1$, $x + y + z = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = |x| + |y| + |z|$.
Bài 13. Cho $-2 \le a, b, c \le 2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \le 32$.

Bài 14. Cho $0 \le x, y, z \le 1$ và $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$.
Bài 15. Cho $0 \le x, y, z \le 2$ và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1 - x)(1 - y)(1 - z)$.
Bài 16. Cho $0 \le a, b, c \le 4$ và $a + b + c = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.
Bài 17. Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$.
Bài 18. Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$ và $a + b + c = 3$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$.
Bài 19. Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$ và $a + b + c = 1$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $F = \sqrt{3a + 1} + \sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1}$.
Bài 20. Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\sqrt{2a^2 + 3a + 4} + \sqrt{2b^2 + 3b + 4} + \sqrt{2c^2 + 3c + 4}$.
Bài 21. Cho $x, y \ge 0$ thỏa mãn: $x + y = \sqrt{10}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x^4 + 1)(y^4 + 1)$.
Bài 22. Cho $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 20(a^3 + b^3) - 6(a^2 + b^2) + 2013$.