

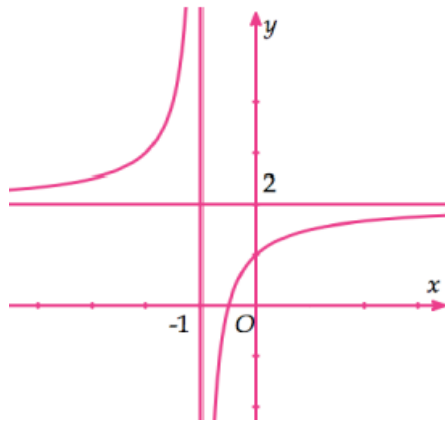
CHỦ ĐỀ 2

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1

BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{nx + 1}{x + m}$; ($mn \neq 1$) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m + n$?

A. $m + n = 1$.

B. $m + n = -1$.

C. $m + n = 3$.

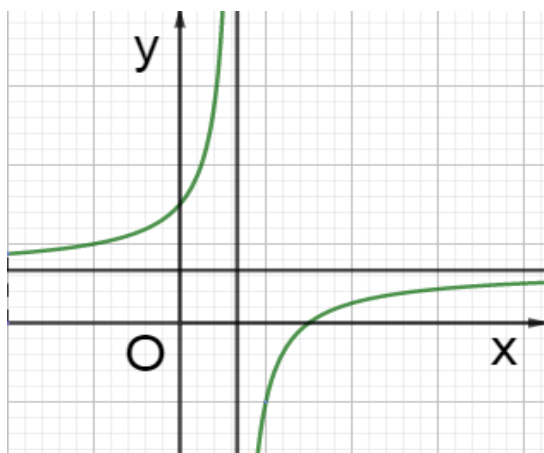
D. $m + n = -3$.

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{nx + 1}{x + m}$; ($mn \neq 1$) có hai đường tiệm cận $x = -m = -1$; $y = n = 2 \Rightarrow m = 1$; $n = 2 \Rightarrow m + n = 3$

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{(2m - 1)x - 3}{x - m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

- A. 40. B. 0. C. 1. D. 38.

Lời giải

Chọn C.

$$y' = \frac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m(2m-1)+3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}$$

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x=m$, $y=2m-1$.

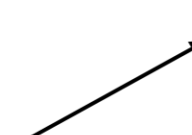
Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m; 2m-1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y=2m-1 > 0 \\ x=m > 0 \\ |OI| < \sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \\ -19 \leq m \leq 20 \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m=1$.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0 y_0 = 16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ 	1	$-\infty$ 

- A. $m=8$. B. $m=-16$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow m^+} y = -\infty$ nên $x=m$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 8$ nên $y_0 = 8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m = 16 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 4. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ ↘ 5		$-\infty$ ↗ $m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.

- A. $m < 1$. B. $m < 10$. C. $m < 8$. D. $m > 8$.

Lời giải

Chọn C.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m+2$. Ta có $y_o = m+2$.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$. Ta có $x_o = 3$.

$$x_o y_o < 30 \Leftrightarrow 3(m+2) < 30 \Leftrightarrow m < 8$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	4 ↘ 1	$+\infty$ ↘ 2	$-\infty$ ↗ m^2	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4; 4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -2$ là một tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là một tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m^2$ nên $y = m^2$ là một tiệm cận ngang.

+ Để hàm số có 4 tiệm cận thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ mà $m \in [-4; 4]$ nên $m \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 1; 0\}$

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$		$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -3 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $(m-1)(2-m)$	

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m \in (-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

A. 42.

B. 45.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (m-1)(2-m)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $y = 0$ và $y = (m-1)(2-m)$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $x = -2$.

Và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $x = 2$.

Để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4 khi và chỉ khi

$$(m-1)(2-m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vì $m \in (-10; 10)$ và m là số nguyên dương nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1; 1)$.

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	m ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ m	

A. Không có m .

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Từ BBT suy ra TĐĐ là $x = -m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TĐĐ và TCN là $I(-m; m)$.

YCBT $I(-m; m) \equiv I(-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$, $y = 2$ lần lượt là TĐĐ và TCN thì biểu thức $9m^2 + 6mn + 36n^2$ có giá trị là

		$\frac{2-2m}{n}$	
x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	$\frac{m}{n}$		$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$
 $-\infty$ $\frac{m}{n}$

A. $\frac{28}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ BBT suy ra TĐĐ là $x = \frac{2-2m}{n}$, TCN là $y = \frac{m}{n}$;

YCBT: đường thẳng $x = 2, y = 2$ lần lượt là TĐĐ và TCN nên

$$\begin{cases} \frac{2-2m}{n} = 2 \\ \frac{m}{n} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2m = 2n \\ m = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2n = 2 \\ m-2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

KL: vậy $9m^2 + 6mn + 36n^2 = \frac{28}{3}$.

DẠNG 2

BIẾT ĐỒ ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A. $a = -1; b = 2$. B. $a = 4; b = 4$. C. $a = 1; b = 2$. D. $a = -1; b = -2$.

Lời giải

Chọn C.

+ $b=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{b} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}} y = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}} \frac{ax+1}{bx-2} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

- A. 14. B. 8. C. 15. D. 16.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$$x^2 - 8x + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ m - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

Chọn D.

$$y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 12. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

A. 0

B. -3

C. 3

D. 6

Lời giải

Chọn A.

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

$$\text{Đồ thị hàm số nhận } x = -\frac{d}{c} = -m - 3 = 0 \text{ làm TCD} \Rightarrow m = -3$$

$$\text{Đồ thị hàm số nhận } y = \frac{a}{c} = n - 3 = 0 \text{ làm TCN} \Rightarrow n = 3.$$

Vậy $m + n = 0$.

Câu 13. Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. Không có m

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$
 $m \geq 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x - 3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x^1 \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ (*) ta có

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có

$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4 > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

hai nghiệm phân biệt $x \neq 3$

Do m nguyên và $m \in [-6; 6]$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m > 1$

D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 (*) \end{cases}$$

Xét phương trình

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) - m^2 > 0 \\ 2m+1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m - m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m < 0$

B. $m = 0$

C. $m > 0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Lời giải

Chọn C.

Xét các trường hợp sau:

Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x + 1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$:

hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}} \right)$ suy ra không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

và

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là: $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12.

B. 11.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn A.

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x| - 1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \notin D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m = 1, m = 2, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \notin D$ hay $m^3 - 2 \neq 0$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{0} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 18. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 4044.

B. 2022.

C. 2009.

D. 2011.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+x \neq m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0, \forall m$$

$\Rightarrow y = 0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x) = 2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$-\frac{1}{4}$ 12

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m \in [12; 2022]$.

Vậy có 2011 giá trị nguyên của m .

$$y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$$

Câu 19. Hàm số không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a - b$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b = (x-1)^2 g(x)$.

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\rightarrow$ đáp án A.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Định m để hàm số có tiệm cận đứng đi qua $A(-1; \sqrt{2})$ với $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$

Câu 21. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{4x^2 + 2(2m+3)x + m^2 - 1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

$$m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$$

Đáp án:

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

kép hoặc nhận $x = 1$ làm nghiệm

+ KL: $m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2}$$
 bằng 3?

Lời giải

Đáp án: có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1; m=2$

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y$$

* Xét điều kiện tồn tại

Trường hợp 1: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của $g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

* Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

Khi đó

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

$\Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì

$$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1, m = 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: $-1 \leq m < 0$.

Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

$$D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}} \right] \setminus \{-1\}$$

Nếu $m < 0$ thì tập xác định của hàm số là

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $-1 \leq m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Câu 26. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (3m+2)x + 2m-1}{x+5}$ có tiệm cận xiên.

Câu 27. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + (2m+1)x + m+3}{x+2}$ có tiệm cận xiên.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + m-1}{x-1}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị

hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x + m^2 - 4m + 3}{mx + 1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất?

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x^2 + (m+1)x - 2m + 3}{x - 2m}$ (C_m), $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho $\triangle AOB$ có diện tích bằng 4?