

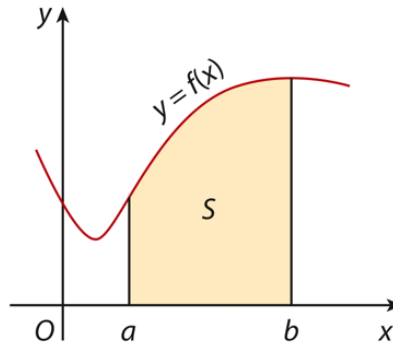
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

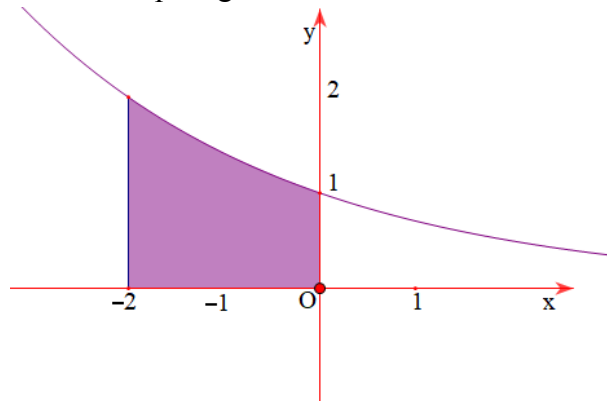
Phương pháp:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

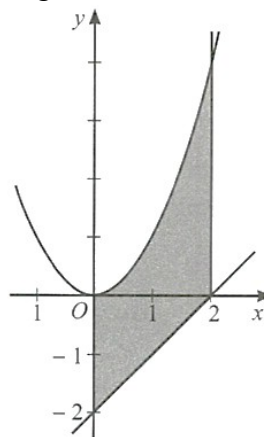


Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = 2^{-\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như Hình.



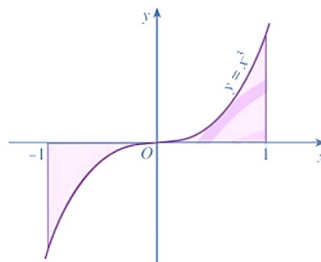
Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y = x^2$ và hình phẳng được tô màu như Hình.



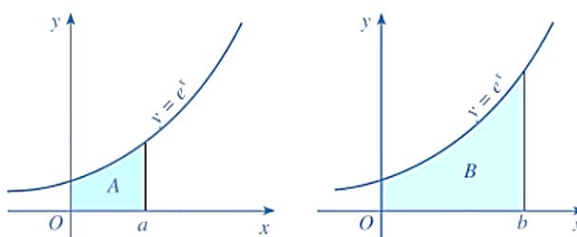
Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị như Hình.



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

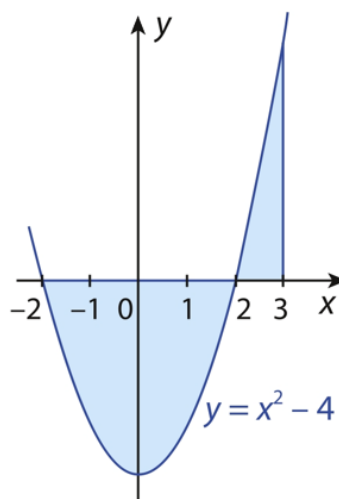
Câu 4. Giả sử A, B lần lượt là diện tích các hình được tô màu ở Hình.



a) Tính các diện tích A, B .

b) Biết $B = 3A$. Biểu diễn b theo a .

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4$, trục hoành và các đường thẳng $x = -2, x = 3$ (Hình).



Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Câu 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đồ thị của hàm số $y = 3x(2 - x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

b) Đồ thị của hàm số $y = \frac{4 - x}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

c) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Câu 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3\pi$.

Câu 10. Tìm giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

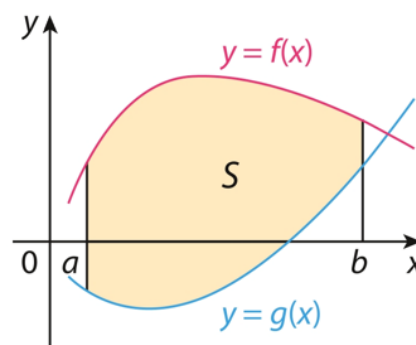
Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Phương pháp:

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công

thức
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

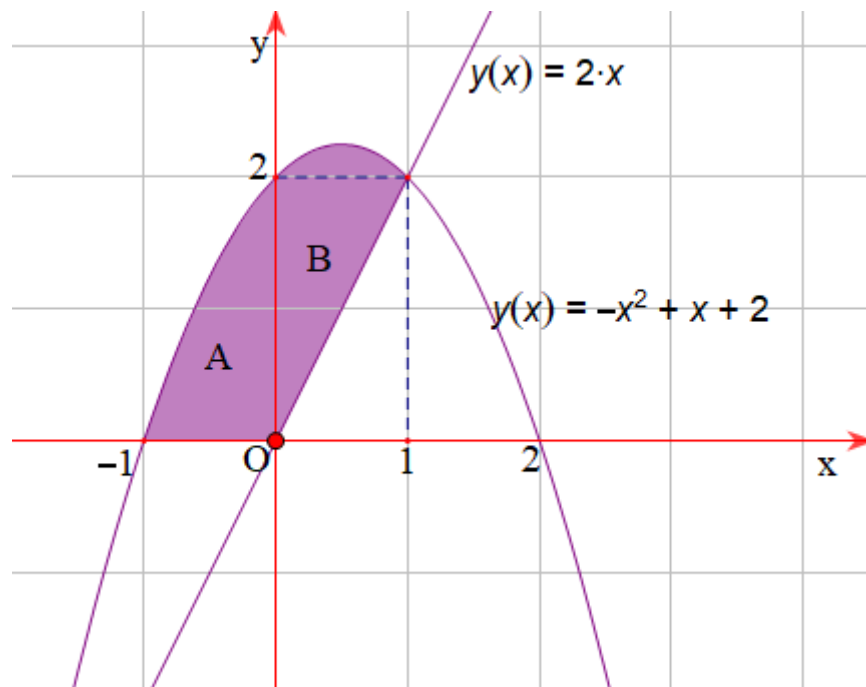


Ghi chú: Nếu hàm số $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì:

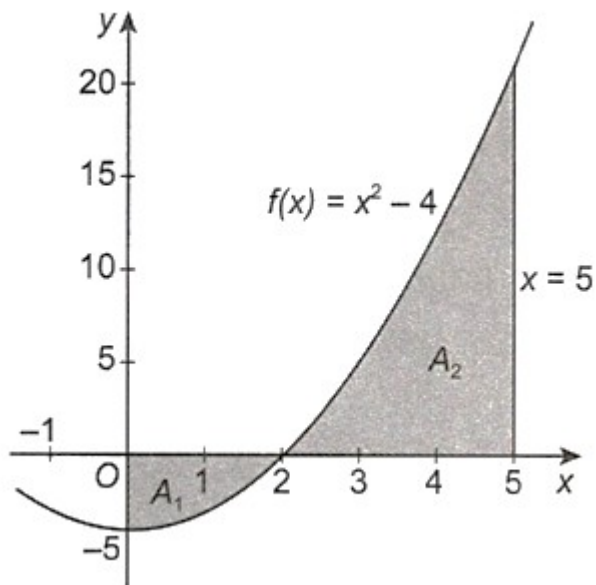
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Trường hợp: Để không cho các đường thẳng $x = a, x = b$ thì chúng ta tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$

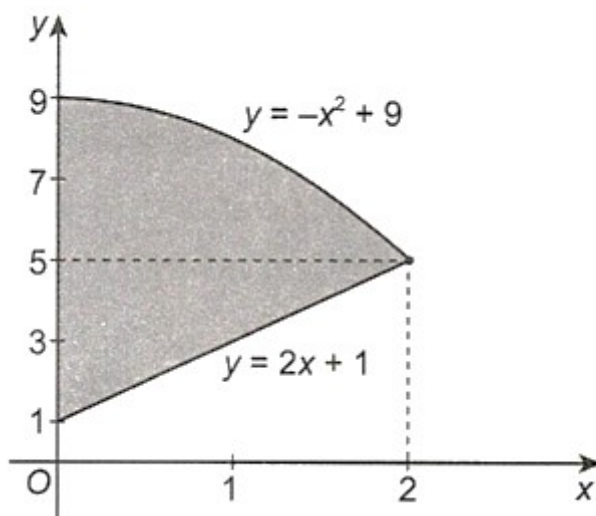
Câu 13. Tính diện tích S của hình phẳng được gạch chéo ở trong Hình.



Câu 14. Tính diện tích của các hình phẳng được tô màu dưới đây:

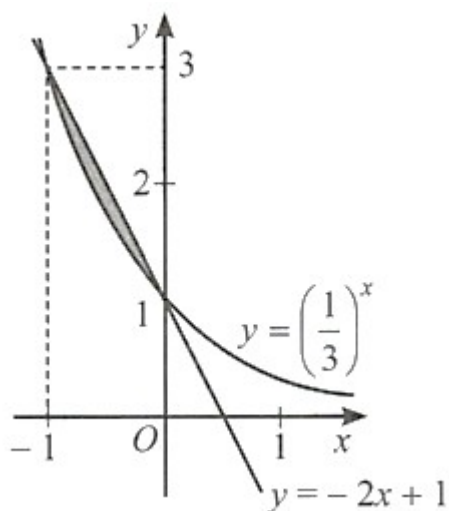


a)



b)

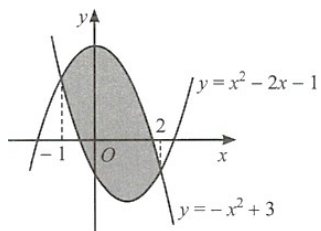
Câu 15. Cho hình phẳng được tô màu như Hình.



a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

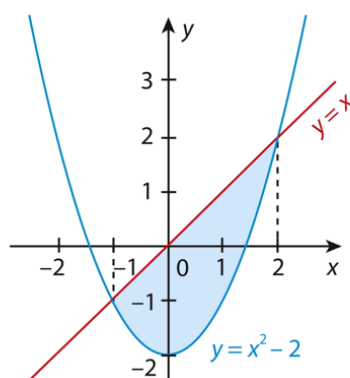
Câu 16. Cho hình phẳng được tô màu như Hình.



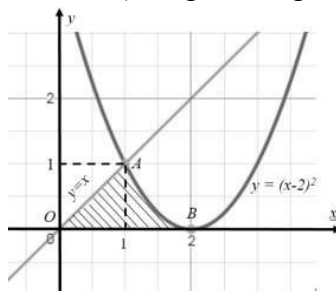
a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

Câu 17. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2$, $y = x$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ như Hình.



Câu 18. Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x, y = 8x$ và $y = \frac{1}{x^2}$.

Câu 20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số

a) $y = x^2 + 2x + 1, y = 1 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$.

b) $y = x - 4x^3, y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = (x - 1)^3, y = x - 1, x = 0, x = 1$

b) $y = x^3 + 2x^2 - 3x, y = x^2 + 3x, x = -3, x = 0$.

Câu 22. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = e^x, y = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$.

b) $y = \cos x, y = \frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{3}$.

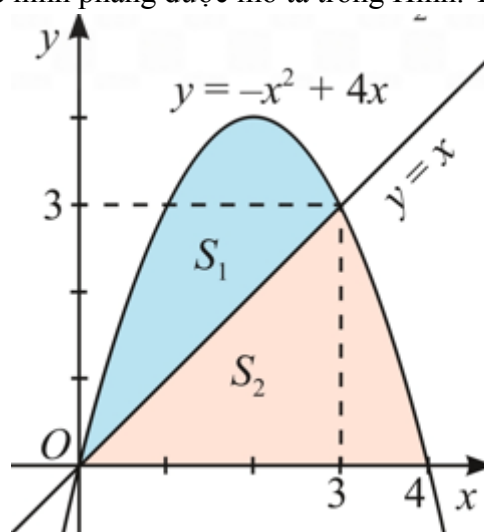
Câu 23. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 + 2x + 1, y = x^3 + x + 3$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Câu 24. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

Câu 25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2, y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Câu 26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x, y = x$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 3$.

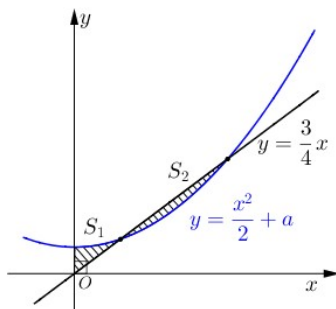
Câu 27. Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong Hình. Tính $\frac{S_1}{S_2}$.



Câu 28. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 2x$, $y = 2x - 1$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$

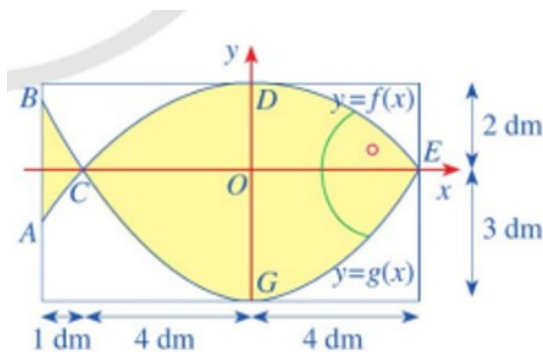
Câu 30. (Mã 102 - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ tìm a ?



Câu 31. (Mã 101-2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a$ ($a > 0$). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng bao nhiêu?

Dạng 3. Giải quyết một số bài toán thực tế liên quan

Câu 32. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong Hình (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét).



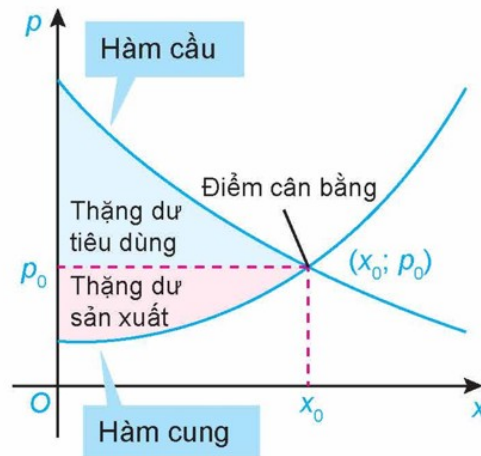
a) Lập phương trình các parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Câu 33. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá P của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá P của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $P = D(x)$ và đồ thị hàm cung $P = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong Hình.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Câu 34. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh hoạ sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hoá bởi hàm số

$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1723)^2$, $0 \leq x \leq 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

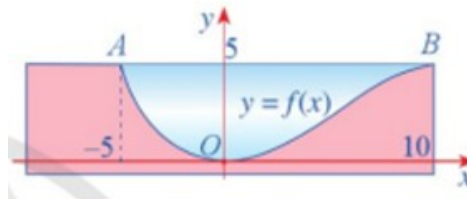
Tìm sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005.

Câu 35. Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao $21m$ và rộng $70m$ (Hình).



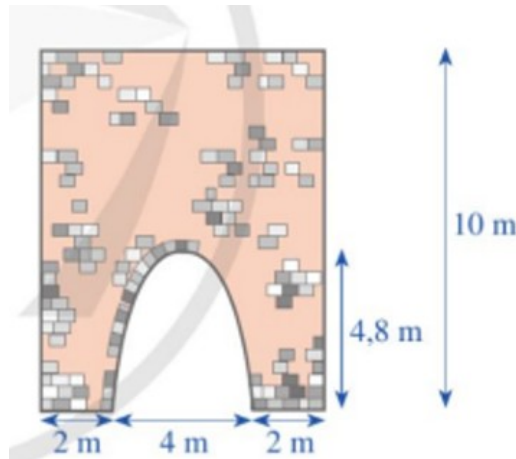
Câu 36. Hình minh hoạ mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục toạ độ Oxy . Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình

$$y = f(x) = \frac{3}{100} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 \right).$$

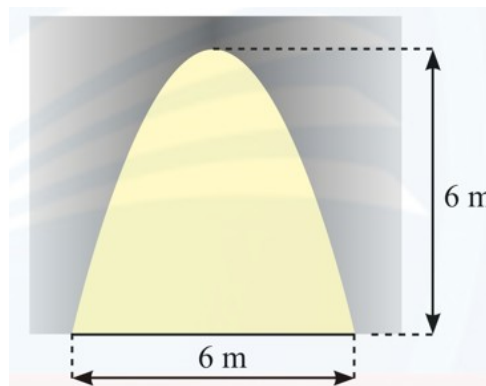


Hãy tính diện tích hình phẳng tô màu xanh trong Hình, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.

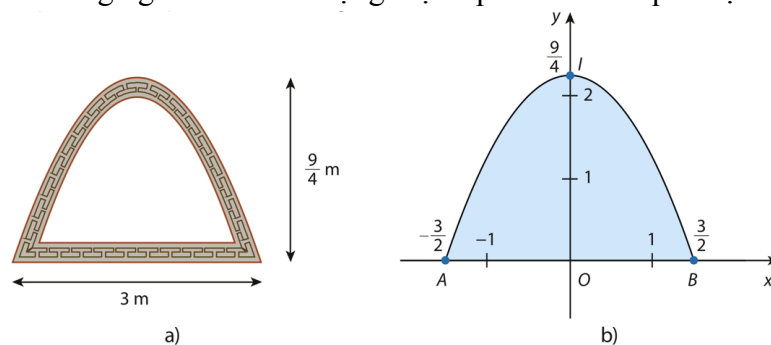
Câu 37. Hình minh họa mặt cắt đứng của một bức tường cũ có dạng hình chữ nhật với một cổng ra vào có dạng hình parabol với các kích thước được cho như trong hình đó. Người ta dự định sơn lại mặt ngoài của bức tường đó. Chi phí để sơn bức tường là 15000 đồng/ $1m^2$. Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó sẽ là bao nhiêu?



Câu 38. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình. Tính diện tích của cửa hầm.

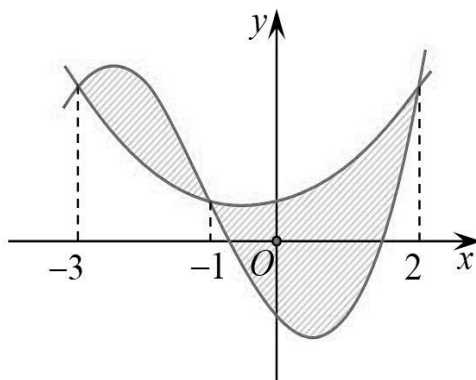


Câu 39. Cửa vòm lấy ánh sáng của một toà nhà được thiết kế với kích thước như Hình#a. Cửa có hình dạng một parabol có đỉnh I và đi qua hai điểm A, B như Hình b. Người ta dự định lắp kính cho cửa này. Tính diện tích kính cần lắp, biết rằng người ta chỉ sử dụng một lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa.



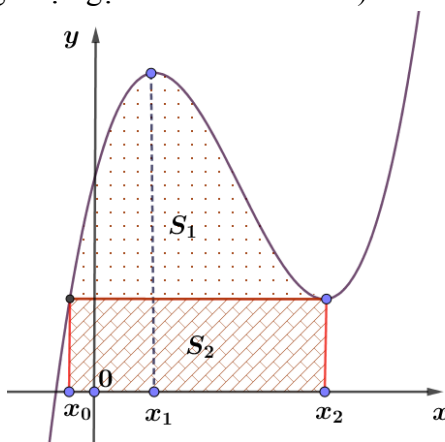
Dạng 4. Giải quyết một số bài toán liên quan đến hàm ẩn

Câu 40. (Mã 103 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ).



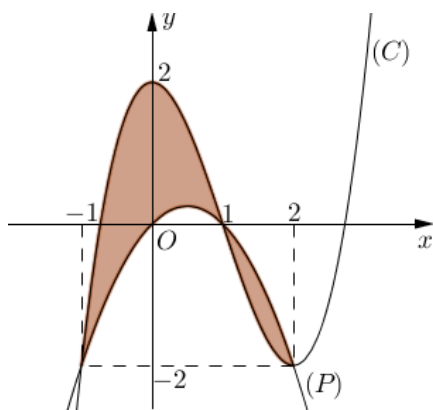
Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



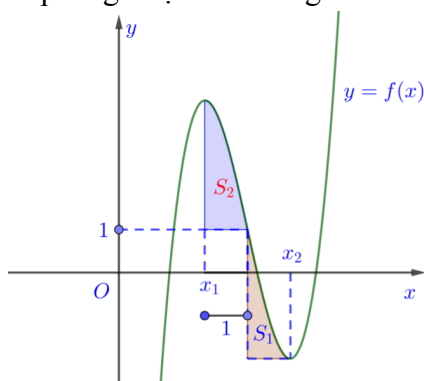
Câu 42. (Chuyên Vinh – 2022) Cho hàm số $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($b, c, d, e \in \mathbb{R}$) có các giá trị cực trị là 1, 4 và 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ với trục hoành

Câu 43. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba với đồ thị (P) của hàm số bậc hai (phần tô đậm) như hình vẽ bên. Tính diện tích của hình phẳng (H)

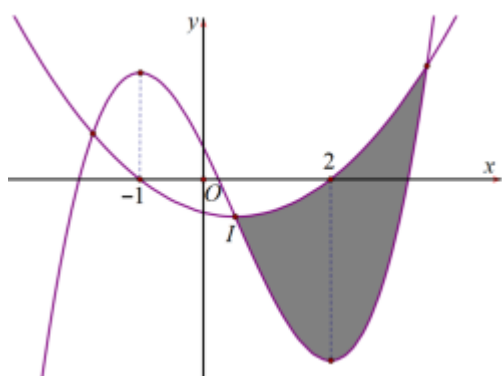


Câu 44. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, c, b, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$

Câu 45. (Chuyên Thái Bình 2022) Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Câu 46. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $f(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và hàm số bậc ba $g(x)$. Đồ thị hai hàm số đó cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $18x_1x_2x_3 = -55$ (hình vẽ).



Tính diện tích miền tô đậm? (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Câu 47. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai 2022) Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1 (a, b \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = \frac{10}{3}$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc nhất có đồ thị đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Câu 48. (Sở Quảng Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 3$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y = g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$

Câu 49. (Sở Cần Thơ 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = f(x)$ và $y = f'(x)$

Câu 50. (THPT Phan Huy Chú - Hà Nội 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(2) = 6, \int_{-1}^2 f(x) dx = 0$ và $\int_{-1}^2 [f'(x)]^2 dx = 36$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$

Câu 51. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba thỏa mãn: $f(1) = 0$ và $2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.