

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT ĐÔNG SƠN 2**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

TÊN ĐỀ TÀI:

**PHƯƠNG PHÁP “NHÂN LIÊN HỢP” NHẪM GIÚP HỌC
SINH GIẢI NHANH MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ PHỨC
TẬP Ở LỚP 10**

**Người thực hiện: Nguyễn Thị Hà
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực môn : Toán**

THANH HOÁ NĂM 2017

MỤC LỤC

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.....	18
a) Đánh giá định tính.....	18
b) Đánh giá định lượng.....	19

A. MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán trung học phổ thông, phương trình vô tỷ là một nội dung quan trọng, thường có trong các đề thi chuyên đề, các kỳ thi khảo sát, thi học sinh giỏi do các sở tổ chức và đặc biệt hơn là trong kỳ thi THPT Quốc Gia hàng năm để xét công nhận tốt nghiệp và lấy kết quả để tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng. Phương trình vô tỷ có nhiều dạng khác nhau với số lượng bài tập phong phú và nhiều cách giải cũng như kỹ thuật giải khác nhau nên có gây khó khăn rất nhiều cho giáo viên và học sinh. Chính vì lý do đó đây là một nội dung đòi hỏi giáo viên và học sinh phải có tư duy, biến đổi, lựa chọn phương pháp hợp lý để tìm lời giải tốt nhất.

Trong thời đại ngày nay với sự phát triển như vũ bão của công nghệ thông tin các nhà sản xuất máy tính cầm tay luôn không ngừng nâng cấp và cho ra đời các thế hệ máy tính với tốc độ tính toán cực nhanh và nhiều chức năng trong đó có chức năng tìm nghiệm. Kết hợp với chức năng đó tôi đưa ra **“PHƯƠNG PHÁP “ NHÂN LIÊN HỢP” NHẪM GIÚP HỌC SINH GIẢI NHANH MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ PHỨC TẠP ”**. Hy vọng với đề tài này sẽ giúp cho độc giả có cách nhìn tổng quát hơn về cách nhân liên hợp giải phương trình vô tỷ và đặc biệt hơn là các em học sinh sẽ có kỹ năng giải phương trình vô tỷ để bước vào các kì thi đạt được kết quả tốt hơn.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Tôi nghiên cứu đề tài này nhằm giúp học sinh giải được một số phương trình vô tỷ với sự hỗ trợ của máy tính cầm tay và phương pháp nhân liên hợp

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Học sinh lớp 10A5, 10A6 khóa học 2015-2016, lớp 10A4, 10A3, 10A5 khóa học 2016-2017 của trường THPT Đông Sơn 2

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết
- Kiểm tra, khảo sát để đánh giá hiệu quả của đề tài

B. NỘI DUNG

PHƯƠNG PHÁP “NHÂN LIÊN HỢP”

1. CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

a. Phương trình một ẩn.

Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g . Mệnh đề chứa biến “ $f(x) = g(x)$ ” được gọi là phương trình một ẩn (x là ẩn). Tập $D = D_f \cap D_g$ gọi là điều kiện xác định của phương trình, Số $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một nghiệm của phương trình.

Tập $T = \{x_0 \in D : f(x_0) = g(x_0) \text{ đúng} \}$ gọi là tập nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình là đi tìm tập nghiệm T của nó. Nếu tập nghiệm $T = \emptyset$ ta nói phương trình vô nghiệm.

b. Hai phương trình tương đương.

Hai phương trình cùng ẩn được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm (có thể rỗng).

Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ ta viết $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Hai phương trình có cùng điều kiện xác định D và tương đương với nhau ta nói hai phương trình đó tương đương với nhau trên D hoặc với điều kiện D hai phương trình tương đương với nhau.

c. Phép biến đổi tương đương.

Phép biến đổi một phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của nó được gọi là phép biến đổi tương đương.

Định lý: Cho phương trình $f(x) = g(x)$ xác định trên D ; $h(x)$ là hàm số xác định trên D . Khi đó trên D phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau:

$$\begin{aligned} &+ f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \\ &+ f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \text{ nếu } h(x) \neq 0 \forall x \in D. \end{aligned}$$

d. Phương trình hệ quả.

Phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Khi đó ta viết $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Định lý: Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho $f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

e. Phương trình vô tỷ là phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

f. Phương trình vô tỷ dạng cơ bản

$$\text{Dạng 1. } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2. } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

g. Các biểu thức liên hợp của nhau

Biểu thức	Biểu thức liên hợp	Tích
$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

2. GIẢI PHÁP ĐÃ SỬ DỤNG ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

Sau đây tôi đưa ra một số ví dụ giải phương trình vô tỷ bằng cách nhân liên hợp, có phân tích và giải thích chi tiết lời giải của từng ví dụ và sau một số ví dụ tôi có đánh giá ưu nhược điểm của phương pháp nhằm giúp độc giả hiểu sâu sắc hơn kỹ thuật nhân liên hợp để giải phương trình vô tỷ.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} = 4x^2 + 8x + 3 + \sqrt{3x+3}$ (1).

Lời giải: Điều kiện: $x \geq -1$.

Chú ý: Dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Tại } x = -\frac{1}{2} \text{ ta có } \sqrt{-\frac{1}{2}+2} - \sqrt{3\left(-\frac{1}{2}\right)+3} + 3 = 0 \text{ nên}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 3 + (\sqrt{3x+3} - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+1) + \frac{(\sqrt{3x+3} - \sqrt{x+2})(\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1) \left(2x+3 + \frac{1}{\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ 2x+3+\frac{1}{\sqrt{3x+3}+\sqrt{x+2}}=0 \quad (1.1) \end{cases}$$

Vì $x \geq -1$ nên $2x+3+\frac{1}{\sqrt{3x+3}+\sqrt{x+2}} > 0$. Do đó (1.1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2x^2 - 9x + 6 \quad (2)$.

Lời giải: Điều kiện: $3 \leq x \leq 5$.

Chú ý: Dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x=4$.

Tại $x=4$ ta có $\sqrt{4-3} = \sqrt{5-4} = 1$ nên

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x-3} - 1) + (\sqrt{5-x} - 1) = 2x^2 - 9x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} - \frac{x-4}{\sqrt{5-x}+1} = (x-4)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} - 2x-1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} = \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} + 2x-1 \quad (2.1) \end{cases}$$

$$\text{Vì } 3 \leq x \leq 5 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x-3}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \leq 1 \quad (2.1.1) \\ 2x-1 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} + 2x-1 > 5 \quad (2.1.2) \end{cases}$$

Từ (2.1.1) và (2.1.2) suy ra (2.1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x=4$.

Nhận xét: Trong ví dụ 1 ta thấy tại $x = -\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{-\frac{1}{2}+2} = \sqrt{3\left(-\frac{1}{2}\right)+3}$

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+2} - \sqrt{3\left(-\frac{1}{2}\right)+3} = 0. \text{ Do đó, ta không phải thêm bớt mà nhân liên hợp}$$

được luôn. Nhưng trong ví dụ 2 tại $x=4$ ta có $\sqrt{4-3} = \sqrt{5-4} = 1$, theo bài ra $\sqrt{4-3} + \sqrt{5-4} = 2$ nên ta phải thêm bớt như cách làm trên rồi nhân liên hợp.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{6x+1} - \sqrt{6-2x} + 12x^2 - 28x - 8 = 0 \quad (3)$.

Lời giải: Điều kiện: $-\frac{1}{6} \leq x \leq 3$.

Tương tự như hai ví dụ trên dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm của phương trình là $x = \frac{5}{2}$. Tại $x = \frac{5}{2}$ ta có $\sqrt{6 \cdot \frac{5}{2} + 1} = 4$, $\sqrt{6 - 2 \cdot \frac{5}{2}} = 1$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{6x+1} - 4 - (\sqrt{6-2x} - 1) + 12x^2 - 28x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2x-5)}{\sqrt{6x+1}+4} + \frac{2x-5}{\sqrt{6-2x}+1} + (2x-5)(6x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{6x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-2x}+1} + 6x+1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{6x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-2x}+1} + 6x+1 = 0 \quad (3.1) \end{cases}$$

Vì $-\frac{1}{6} \leq x \leq 3$ nên $\frac{3}{\sqrt{6x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-2x}+1} + 6x+1 > 0 \Rightarrow (3.1)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $(2x-6)\sqrt{x+4} - (x-5)\sqrt{2x+3} = 3(x-1)$ (4).

Lời giải: Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Chú ý: Dùng máy tính ta tìm được phương trình có ba nghiệm $x=1$, $x=3$, $x=5$.

Tại $x=3$ ta có $\sqrt{2x+3}=3$, $(2x-6)\sqrt{x+4}=0$; tại $x=5$ ta có $(x-5)\sqrt{2x+3}=0$, $\sqrt{x+4}=3$ và tại $x=1$ ta có $x+4$ và $2x+3$ không chính phương. Do đó ta có

$$(4) \Leftrightarrow (2x-6)(\sqrt{x+4}-3) - (x-5)\sqrt{2x+3} + 3(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-6) \frac{(x-5)}{(\sqrt{x+4}+3)} - (x-5)\sqrt{2x+3} + 3(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{(2x-6)}{\sqrt{x+4}+3} - \sqrt{2x+3} + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{(2x-6)}{\sqrt{x+4}+3} - (\sqrt{2x+3}-3) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{(2x-6)}{\sqrt{x+4}+3} - \frac{2x-6}{(\sqrt{2x+3}+3)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x-6) \left[\frac{1}{\sqrt{x+4}+3} - \frac{1}{(\sqrt{2x+3}+3)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x-6) \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{2x+3}+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(2x-6)=0 \\ \sqrt{2x+3}=\sqrt{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5. \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm $x=1, x=3, x=5$.

Nhận xét: Trong ví dụ 4 dùng máy tính cầm tay ta tìm được ba nghiệm. Nhưng khi xác định biểu thức nhân liên hợp ta nhận ra những nghiệm mà khi thay vào căn ta được một số hữu tỷ trước (tìm ra nghiệm $x=3$ hoặc $x=5$ trước). Nếu tìm ra nghiệm mà khi thay vào căn ta được một số vô tỷ trước (tìm ra nghiệm $x=1$ trong ví dụ trên) bài toán trở nên rất phức tạp.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $3\sqrt{3-x} + 6\sqrt{x+2} = 3x^2 - 2x + 7$ (5).

Lời giải: Điều kiện: $-2 \leq x \leq 3$.

* **Cách 1**

Chú ý: Dùng máy tính ta tìm được phương trình có nghiệm $x=-1$.

Tại $x=-1$ ta có $\sqrt{3-x}=2, \sqrt{x+2}=1$, tại $x=2$ ta có $\sqrt{3-x}=1, \sqrt{x+2}=2$.

Do đó ta có:

$$(5) \Leftrightarrow 3(\sqrt{3-x}-2) + 6(\sqrt{x+2}-1) = 3x^2 - 2x - 5.$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{(-x-1)}{\sqrt{3-x}+2} + 6 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} = (x+1)(3x-5).$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left[\frac{-3}{\sqrt{3-x}+2} + \frac{6}{\sqrt{x+2}+1} - (3x-5) \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{-3}{\sqrt{3-x}+2} + \frac{6}{\sqrt{x+2}+1} - (3x-5) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ta coi (5.1) như là một phương trình bình thường và tiếp tục dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x=2$. Tại $x=2$ ta có $\frac{-3}{\sqrt{3-x}+2} = -1; \frac{6}{\sqrt{x+2}+1} = 2$.

$$\text{Do đó ta có } (5.1) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{\sqrt{3-x}+2} \right) + \left(\frac{6}{\sqrt{x+2}+1} - 2 \right) - (3x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{3-x}+2} \right) + 2 \left(\frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1} \right) - (3x-6) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2-x}{(\sqrt{3-x}+1)\sqrt{3-x}+2} + 2 \left(\frac{2-x}{(\sqrt{x+2}+2)\sqrt{x+2}+1} \right) + (2-x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-x) \left(\frac{1}{(\sqrt{3-x}+1)\sqrt{3-x}+2} + \frac{2}{(\sqrt{x+2}+2)\sqrt{x+2}+1} + 1 \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2. \\
&\forall \frac{1}{(\sqrt{3-x}+1)\sqrt{3-x}+2} + \frac{2}{(\sqrt{x+2}+2)\sqrt{x+2}+1} + 1 = 0 \text{ vô nghiệm.}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1; x = 2$.

*** Cách 2:** Dùng máy tính ta tìm được phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 2$. Bây giờ ta đi tìm đại lượng cần “thêm bớt” vào mỗi biểu thức chứa căn để sau khi nhân liên hợp một lần ta được cả hai nghiệm trên.

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $3\sqrt{3-x}$ ta đặt $y = 3\sqrt{3-x}$. Ta có đồ thị hàm số $y = 3\sqrt{3-x}$ đi qua $A(-1;6)$ và $B(2;3)$. Ta có $AB: y = 5-x$.

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{x+2}$ ta đặt $y = \sqrt{x+2}$. Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+2}$ đi qua $C(-1;1)$ và $D(2;2)$. Ta có $CD: y = x+4$.

$$+ \text{Ta có (5)} \Leftrightarrow [3\sqrt{3-x} - (-x+5)] + 2[3\sqrt{x+2} - (x+4)] = 3(x^2 - x - 2) \quad (5.2)$$

+ Vì $-2 \leq x \leq 3$ nên $3\sqrt{3-x} - x + 5 > 0, 3\sqrt{x+2} + x + 4 > 0$. Do đó:

$$\begin{aligned}
(5.2) &\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{3\sqrt{3-x}-x+5} + \frac{2(-x^2+x+2)}{3\sqrt{x+2}+x+4} = 3(-x^2+x+2) \\
&\Leftrightarrow (-x^2+x+2) \left(\frac{1}{3\sqrt{3-x}-x+5} + \frac{2}{3\sqrt{x+2}+x+4} - 3 \right) = 0 \quad (5.3)
\end{aligned}$$

+ Vì $2 \leq x \leq 4$ nên $3\sqrt{3-x} - x + 5 \geq 2, 3\sqrt{x+2} + x + 4 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{3-x}-x+5} + \frac{1}{3\sqrt{x+2}+x+4} - 3 < 0$$

$$+ \text{Do đó (5.3)} \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 2$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{12x-8} = x^2 + 3 \quad (6)$.

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 2/3$.

*** Cách 1:** Chú ý: Dùng máy tính ta tìm được phương trình có nghiệm $x = 1$.

Tại $x=1$ ta có $\sqrt{5x-1}=2, \sqrt{12x-8}=2$. Do đó,

$$(6) \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1}-2) + (\sqrt{12x-8}-2) = x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{12(x-1)}{\sqrt{12x-8}-2} - (x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{12}{\sqrt{12x-8}-2} - (x+1) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{12}{\sqrt{12x-8}+2} - (x+1) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Ta coi (6.1) như là một phương trình bình thường và tiếp tục dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x=2$. Tại $x=2$ ta có $\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=1; \frac{12}{\sqrt{12x-8}+2}=2$. Do đó,

$$(6.1) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - 1 \right) + \left(\frac{12}{\sqrt{12x-8}+2} - 2 \right) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{4(2-\sqrt{3x-2})}{\sqrt{12x-8}+2} - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2-x)}{(\sqrt{5x-1}+2)(3+\sqrt{5x-1})} + \frac{4(6-3x)}{(\sqrt{12x-8}+2)(2+\sqrt{3x-2})} - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x) \left(\frac{5}{(\sqrt{5x-1}+2)(3+\sqrt{5x-1})} + \frac{8}{(\sqrt{12x-8}+2)(2+\sqrt{3x-2})} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5}{(\sqrt{5x-1}+2)(3+\sqrt{5x-1})} + \frac{8}{(\sqrt{12x-8}+2)(2+\sqrt{3x-2})} + 1 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy $\frac{5}{(\sqrt{5x-1}+2)(3+\sqrt{5x-1})} + \frac{8}{(\sqrt{12x-8}+2)(2+\sqrt{3x-2})} + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1; x=2$.

*** Cách 2:** Dùng máy tính ta tìm được phương trình có hai nghiệm $x=1, x=2$. Bây giờ ta đi tìm đại lượng cần “thêm bớt” vào mỗi biểu thức chứa căn để sau khi nhân liên hợp một lần ta được cả hai nghiệm trên:

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{5x-1}$ ta đặt $y=\sqrt{5x-1}$. Ta có đồ thị hàm số $y=\sqrt{5x-1}$ đi qua $A(1;2)$ và $B(2;3)$. Ta có $AB: y=x+1$.

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{12x-8}$ ta đặt $y = \sqrt{12x-8}$. Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{12x-8}$ đi qua $C(1;2)$ và $D(2;4)$. Ta có $CD: y = 2x$.

+ Do đó (6) $\Leftrightarrow [\sqrt{5x-1} - (x+1)] + [\sqrt{12x-8} - 2x] = x^2 - 3x + 2$

Vì $x \geq 2/3$ nên $\sqrt{5x-1} + x + 1 > 0, \sqrt{12x-8} + 2x > 0$. Do đó:

$$\begin{aligned} (6) &\Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{5x-1}+x+1} + \frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{12x-8}+x+1} = x^2-3x+2 \\ &\Leftrightarrow (-x^2+3x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{12x-8}+x+1} + 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2=0 \\ \frac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{12x-8}+x+1} + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{12x-8}+x+1} + 1 = 0 \end{cases} \quad (6.2) \end{aligned}$$

Vì $x \geq 2/3$ nên $\frac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{12x-8}+x+1} + 1 > 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1, x=2$.

- **Chú ý:** Trong ví dụ 5 và ví dụ 6 ta thấy cách 2 đơn giản hơn cách 1. Nhưng cũng có nhiều ví dụ mà khi thực hiện cách 2 sẽ rất phức tạp. Khi đó ta buộc phải dùng cách 1 chẳng hạn như ví dụ 7 và ví dụ 8 sau:

Ví dụ 7: Giải phương trình: $2x-1+\sqrt{2x+1}+\sqrt{2-2x}=4x^2+\sqrt{2}$ (7).

Lời giải: Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Tương tự như các ví dụ trên dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$. Nên ta có

$$(7) \Leftrightarrow (4x^2-2x) - (\sqrt{2x+1}-1) - (\sqrt{2-2x}-\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2-2x) - \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{-2x}{\sqrt{2-2x}+\sqrt{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \left((2x-1) - \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2-2x}+\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \left((2x-1) + \frac{\sqrt{2x+1}+1-\sqrt{2-2x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2x \left((2x-1) + \frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2-2x})}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x \left((2x-1) + \frac{\frac{2x-1}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2})} + \frac{2x-1}{(1+\sqrt{2-2x})}}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x(2x-1) \left(1 + \frac{\frac{1}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2})} + \frac{1}{(1+\sqrt{2-2x})}}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2x-1) = 0 \\ 1 + \frac{\frac{1}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2})} + \frac{1}{(1+\sqrt{2-2x})}}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta thấy: $1 + \frac{\frac{1}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2})} + \frac{1}{(1+\sqrt{2-2x})}}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2-2x}+\sqrt{2})} = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0$; $x=\frac{1}{2}$.

- **Nhận xét:** Trong ví dụ trên nếu ta dùng được cách 2 thì bài toán tính toán sẽ phức tạp hơn do khi thêm bớt để nhân liên hợp tìm ra nhân tử chung thì ta phải tính đến các số vô tỷ.

Ví dụ 8: Giải phương trình $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$ (8).

Lời giải: Điều kiện $-5 < x < 5$.

Tương tự như các ví dụ trên dùng máy tính cầm tay ta tìm được nghiệm $x=-4$ và $x=4$. Nên ta có

$$\begin{aligned}
(8) &\Leftrightarrow 2\sqrt{5-x} + 2\sqrt{5+x} - \frac{4}{\sqrt{5-x}} - \frac{4}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3} \\
&\Leftrightarrow 2(\sqrt{5-x}-3) + 2(\sqrt{5+x}-1) - \left(\frac{4}{\sqrt{5-x}} - \frac{4}{3} \right) - \left(\frac{4}{\sqrt{5+x}} - 4 \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2(-4-x)}{(\sqrt{5-x}+3)} + \frac{2(x+4)}{(\sqrt{5+x}+1)} - \frac{4}{3} \left(\frac{3-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}} \right) - 4 \left(\frac{1-\sqrt{x+5}}{\sqrt{5+x}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(-4-x)}{(\sqrt{5-x}+3)} + \frac{2(x+4)}{(\sqrt{5+x}+1)} - \frac{4}{3} \left(\frac{x+4}{(3+\sqrt{5-x})\sqrt{5-x}} \right) - 4 \left(\frac{-x-4}{(1+\sqrt{x+5})\sqrt{5+x}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(-4-x)}{(\sqrt{5-x}+3)} + \frac{2(x+4)}{(\sqrt{5+x}+1)} - \frac{4}{3} \left(\frac{x+4}{(3+\sqrt{5-x})\sqrt{5-x}} \right) - 4 \left(\frac{-x-4}{(1+\sqrt{x+5})\sqrt{5+x}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x+4) \left(\frac{-1}{(\sqrt{5-x}+3)} + \frac{1}{(\sqrt{5+x}+1)} - \frac{2}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{5-x}} + \frac{2}{(1+\sqrt{x+5})\sqrt{5+x}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x+4) \left(\frac{(\sqrt{5-x}-1)+(3-\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}+3)(\sqrt{5+x}+1)} + 2 \frac{16-4x+9(\sqrt{5-x}-1)-(\sqrt{x+5}-3)}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{25-x^2}(1+\sqrt{x+5})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x+4) \left(\frac{\frac{4-x}{(\sqrt{5-x}+1)} + \frac{4-x}{(3-\sqrt{5+x})}}{(\sqrt{5-x}+3)(\sqrt{5+x}+1)} + 2 \frac{16-4x+9 \frac{4-x}{(\sqrt{5-x}-1)} + \frac{4-x}{(\sqrt{x+5}-3)}}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{25-x^2}(1+\sqrt{x+5})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x+4)(4-x) \left(\frac{\frac{1}{(\sqrt{5-x}+1)} + \frac{1}{(3-\sqrt{5+x})}}{(\sqrt{5-x}+3)(\sqrt{5+x}+1)} + 2 \frac{4 + \frac{9}{(\sqrt{5-x}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{x+5}-3)}}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{25-x^2}(1+\sqrt{x+5})} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2(x+4)(4-x) = 0 \\ &\frac{\frac{1}{(\sqrt{5-x}+1)} + \frac{1}{(3-\sqrt{5+x})}}{(\sqrt{5-x}+3)(\sqrt{5+x}+1)} + 2 \frac{4 + \frac{9}{(\sqrt{5-x}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{x+5}-3)}}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{25-x^2}(1+\sqrt{x+5})} = 0 \end{aligned} \right] \\
&\text{Phương trình } \frac{\frac{1}{\sqrt{5-x}+1} + \frac{1}{3-\sqrt{5+x}}}{(\sqrt{5-x}+3)(\sqrt{5+x}+1)} + \frac{8 + \frac{18}{\sqrt{5-x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x+5}-3}}{3(3+\sqrt{5-x})\sqrt{25-x^2}(1+\sqrt{x+5})} = 0 \text{ vô}
\end{aligned}$$

nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -4; x = 4$.

- **Nhận xét:** Trong ví dụ trên nếu ta dùng được cách 2 thì bài toán tính toán sẽ phức tạp hơn do khi thêm bớt để nhân liên hợp tìm ra nhân tử chung thì ta phải tính đến các biểu thức phức tạp.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\sqrt{79+4x-2x^2} - 2 = \sqrt{50-x^2}$ (9).

Lời giải: Điều kiện $\begin{cases} 79+4x-2x^2 \geq 0 \\ 50-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2-9\sqrt{2}}{2}; 5\sqrt{2} \right]$.

* **Chú ý:** Dùng máy tính ta tìm được phương trình có hai nghiệm $x=1, x=5$ và $x=7$. Bây giờ ta đi tìm đại lượng cần “thêm bớt” vào mỗi biểu thức chứa căn để sau khi nhân liên hợp một lần ta được luôn cả ba nghiệm trên:

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{79+4x-2x^2}$ ta đặt $y = \sqrt{79+4x-2x^2}$. Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{79+4x-2x^2}$ đi qua $A(1;9), B(5;7)$ và $C(7;3)$. Ta có Parabol đi qua ba điểm A, B, C : $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}$.

+ Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{50-x^2}$ ta đặt $y = \sqrt{50-x^2}$. Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{50-x^2}$ đi qua $D(1;7), E(5;5)$ và $F(7;1)$. Ta có Parabol đi qua ba điểm D, E và F có phương trình: $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}$.

+ Nếu $\sqrt{79+4x-2x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{79+4x-2x^2} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{33}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{33}{4} \geq 0 \\ 79+4x-2x^2 = \left(\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{33}{4} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{33}{4} \geq 0 \\ x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 200x - 175 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2 - \sqrt{37}] \cup [2 + \sqrt{37}; +\infty) \\ (x+5)(x-1)(x-5)(x-7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5$$

$$\text{Nếu } \sqrt{50-x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{25}{4} \geq 0 \\ 16(50-x^2) = (x^2 - 4x - 25)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2 - \sqrt{29}] \cup [2 + \sqrt{29}; +\infty) \\ (x+5)(x-1)(x-5)(x-7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$$

+ Thay $x = -5$ vào (9) không thỏa mãn.

$$\begin{aligned}
& + \text{ Với } x \neq -5 \text{ ta có } \begin{cases} \sqrt{79+4x-2x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}\right) \neq 0 \\ \sqrt{50-x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \text{ do đó ta có} \\
(9) & \Leftrightarrow \left(\sqrt{79+4x-2x^2} - \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}\right) \right) = \left(\sqrt{50-x^2} - \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}\right) \right) \\
& \Leftrightarrow \frac{79+4x-2x^2 - \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}\right)^2}{\left(\sqrt{79+4x-2x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}\right) \right)} = \frac{50-x^2 - \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}\right)^2}{\left(\sqrt{50-x^2} - \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}\right) \right)} \\
& \Leftrightarrow \frac{(x+5)(x-1)(x-5)(x-7)}{\left(\sqrt{79+4x-2x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{33}{4}\right) \right)} = \frac{(x+5)(x-1)(x-5)(x-7)}{\left(\sqrt{50-x^2} + \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{25}{4}\right) \right)} \\
& \Leftrightarrow (x+5)(x-1)(x-5)(x-7) \left[\sqrt{79+4x-2x^2} + 2 - \sqrt{50-x^2} \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-1)(x-5)(x-7) = 0 \\ \sqrt{79+4x-2x^2} + 2 - \sqrt{50-x^2} = 0 \end{cases} \quad (9.1)
\end{aligned}$$

+ Dùng máy tính cầm tay và nhân liên hợp ta được phương trình (9.1) có nghiệm $x = -5$. Nghiệm này loại.

Vậy phương trình (9) có tập nghiệm là $S = \{1; 5; 7\}$.

* **Nhận xét:** Phương trình (9) ta cũng có thể giải bằng cách bình phương đưa về phương trình bậc cao rồi dùng máy tính cầm tay đưa về tích các phương trình bậc hai. Tuy nhiên ở đây tác giả muốn đưa ra kỹ thuật nhân liên hợp, nhân một lần ra ba nghiệm luôn và ở ví dụ 10 sau thì việc bình phương đưa về phương trình bậc cao sẽ rất rất phức tạp.

Ví dụ 10: Giải phương trình

$$\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + \sqrt{6x^2 - 18x + 16} = x^3 - 4x^2 + 3x + 6 \quad (10).$$

Lời giải: Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

* **Chú ý:** Dùng máy tính ta tìm được phương trình có hai nghiệm $x=1, x=2$ và $x=3$. Bây giờ ta đi tìm đại lượng cần “thêm bớt” vào mỗi biểu thức chứa căn để sau khi nhân liên hợp một lần ta được luôn cả ba nghiệm trên:

* Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{6x^2 - 30x + 40}$ ta đặt $y = \sqrt{6x^2 - 30x + 40}$.
Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{6x^2 - 30x + 40}$ đi qua $A(1;4), B(2;2)$ và $C(3;2)$. Ta có Parabol đi qua ba điểm A, B, C có phương trình $y = x^2 - 5x + 8$.

* Để tìm đại lượng cần thêm bớt vào $\sqrt{6x^2 - 18x + 16}$ ta đặt $y = \sqrt{6x^2 - 18x + 16}$.
Ta có đồ thị hàm số $y = \sqrt{6x^2 - 18x + 16}$ đi qua $D(1;2), E(2;2)$ và $F(3;4)$. Ta có Parabol đi qua ba điểm D, E và F có phương trình: $y = x^2 - 3x + 4$.

+ Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8 \neq 0$ và

$$\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4 \neq 0.$$

Do đó

$$(10) \Leftrightarrow \sqrt{6x^2 - 30x + 40} - (x^2 - 5x + 8) + \sqrt{6x^2 - 18x + 16} - (x^2 - 3x + 4) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 - 30x + 40 - (x^2 - 5x + 8)^2}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + (x^2 - 5x + 8)} + \frac{6x^2 - 18x + 16 - (x^2 - 3x + 4)^2}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + (x^2 - 3x + 4)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + (x^2 - 5x + 8)} + \frac{-x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + (x^2 - 3x + 4)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \left[1 + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 & (10.1) \\ 1 + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} = 0 & (10.2) \end{cases}$$

$$(10.1) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(10.2) \Leftrightarrow 1 + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } x \geq 0 \text{ ta có } & 1 + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} = \\ & = \frac{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + (x - 2)^2}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} > 0 \Rightarrow \forall x \geq 0 \text{ đều} \end{aligned}$$

không là nghiệm của (10.2).

$$\text{Nếu } x < 0 \text{ ta có } 1 + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{x - 4}{\sqrt{6x^2 - 30x + 40} + x^2 - 5x + 8} + \frac{1}{6} + \frac{x}{\sqrt{6x^2 - 18x + 16} + x^2 - 3x + 4} >$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{5}{6} + \frac{x-4}{x^2-5x+9} + \frac{1}{6} + \frac{x}{\sqrt{6x^2-18x+16} + x^2-3x+4} = \\
&= \frac{5x^2-19x+21}{6(x^2-5x+9)} + \frac{\sqrt{6x^2-18x+16} + x^2+3x+4}{6(\sqrt{6x^2-18x+16} + x^2-3x+4)} > 0 \Rightarrow \forall x < 0 \text{ đều}
\end{aligned}$$

không là nghiệm của (10.2). Do đó (10.2) vô nghiệm.

Vậy phương trình (10) có ba nghiệm phân biệt

- **Nhận xét:** trong ví dụ trên việc tìm biểu thức nhân liên hợp để tìm ra ba nghiệm là một vấn đề khó đòi hỏi học sinh phải khá giỏi thực sự mới làm được nhưng còn việc chứng minh phương trình còn lại vô nghiệm còn khó hơn đòi hỏi học sinh phải có khả năng tư duy tốt mới có thể làm được làm được.

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

- 1) $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4}$.
- 2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = x$.
- 3) $9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x+3$.
- 4) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 2x^2 + 7x + 2 = 0$.
- 5) $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$.
- 6) $2x^2 - \sqrt{4x+1} - \sqrt{6x+4} = 2x-3$.
- 7) $6x^2 + 2x + \sqrt[3]{3x^2+x+4} - 18 = 0$.
- 8) $2\sqrt[3]{x^2+5x+2} = x(x+5)+2$.
- 9) $3x^2 - 12x - 5\sqrt{10+4x-x^2+12} = 0$.
- 10) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.
- 11) $2(\sqrt{x+3} + \sqrt{10-x}) - \sqrt{30+7x-x^2} = 4$
- 12) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 3x + 6\sqrt{-2x^2+5x+12} - 23$.

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

a) Đánh giá định tính

Việc xử sáng kiến đã có tác dụng lớn trong việc bồi dưỡng tư duy cho học sinh, đặc biệt là kỹ năng tổng hợp kiến thức giúp học sinh nâng cao hiệu quả học tập.

Phương pháp giải toán tổng quát, nên đúng cho mọi trường hợp. Học sinh và giáo viên có thêm phương pháp làm nhanh các câu hỏi khó.

b) Đánh giá định lượng

Qua nhiều năm giảng dạy tôi thấy bài toán giải phương trình vô tỉ là bài toán khó đối với học sinh kể cả những em học tốt. Bởi vậy tôi đã hướng dẫn cho các em thực hiện giải bài toán như tôi đã trình bày trên đây, cụ thể là lớp 10A1, 10A5, 10A6 khóa học 2015-2016, lớp 10A4, 10A3, 10A5 khóa học 2016-2017. Qua các bài kiểm tra, khảo sát ở các lớp tôi đã thu được kết quả sau đây:

Năm học 2015-2016

Lớp	Số học sinh được khảo sát	Số học sinh giải được bài toán trước khi áp dụng đề tài	Số học sinh giải được bài toán sau khi áp dụng đề tài
10A1	40 học sinh	6 hs = 15%	30 hs = 75%
10A5	41 học sinh	10 hs = 26%	25 hs = 90%
10A6	41 học sinh	8 hs = 20%	32 hs = 78%

Năm học 2016-2017

Lớp	Số học sinh được khảo sát	Số học sinh giải được bài toán trước khi áp dụng đề tài	Số học sinh giải được bài toán sau khi áp dụng đề tài
10A4	37 học sinh	7 hs = 16%	29 hs = 64 %
10A3	43 học sinh	5 hs = 12%	36 hs = 84%
10A5	42 học sinh	11 hs = 24%	30 hs = 89%

Qua kết quả so sánh trên ta thấy học sinh có tiến bộ, với cách giải này học sinh trung bình cũng tiếp thu và làm được các câu tương tự. Từ năm học 2016-2017 học sinh sẽ thi trắc nghiệm môn toán nên đề tài này của tôi cũng rất phù hợp cho các em vì có hỗ trợ của máy tính cầm tay. Như vậy, tôi giảng dạy dạng toán này cũng đỡ vất vả hơn, các em hứng thú học hơn.

C. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

1. KẾT LUẬN

Trên đây tôi đã đưa ra một phương pháp để giải phương trình vô tỉ. Đối với giáo viên, việc áp dụng sáng kiến này giúp giáo viên có một phương pháp hiệu quả để giải phương trình vô tỷ.

Đối với học sinh, được sự hướng dẫn của giáo viên, cùng với máy tính cầm tay các em sẽ có một phương pháp hiệu quả để giải phương trình vô tỷ.

2. KIẾN NGHỊ

Đề nghị nhà trường bổ sung một số đầu sách (ở phần “tài liệu tham khảo”) để học sinh tham khảo và thực hành giải toán theo đề tài này của tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Xác nhận của thủ trưởng đơn vị

Thanh Hóa, ngày 25/3/2017

Cam kết không copy.

Tác giả

NGUYỄN THỊ THU THỦY

NGUYỄN THỊ HÀ

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách bài tập Đại số lớp 10. NXB Giáo dục
2. Đề thi tuyển sinh Đại học các khối, các năm.
3. Phương pháp giải toán Đại số. Tác giả: Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí, NXB Hà Nội
4. Các dạng toán luyện thi Đại học. Tác giả: Phan Huy Khải, NXB Hà Nội