PHÒNG GD & ĐT VIỆT YÊN	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
	NĂM HỌC 2012-2013
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN LỚP 8**
Đề thi có 01 trang	**Ngày thi: 3/4/2013**

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \dfrac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3}\right).\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:
$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
2. Chứng minh rằng:
$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD,$ trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC = 2EF$
3) Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$x^4+2013x^2+2012x+2013$$

$$=(x^4-x)+2013x^2+2013x+2013$$

$$=x(x-1)(x^2+x+1)+2013.(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+2013)$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 2\end{cases}$

Ta có:

$$A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{(x^2+4)(2-x)}\right).\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$

$$=\frac{x.(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)(x^2+4)}.\frac{(x+1).(x+2)}{x^2}=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)}.\frac{x+1}{x^2}$$

$$=\frac{x(x^2+4)(x+1)}{2x^2(x^2+4)}=\frac{x+1}{2x}$$

Vậy $A=\frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 2\end{cases}$

Câu 2.

2.1 Đặt $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

2.2 Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x;y) = (-1;0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó : $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

Do đó : $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2)+c(a-b)(a+b-c^2)-b(a-c)(a+c-b^2)=0 \quad (1)$

Đặt $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+z}{2} \\ b=\dfrac{x+y}{2} \\ c=\dfrac{y+z}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có:

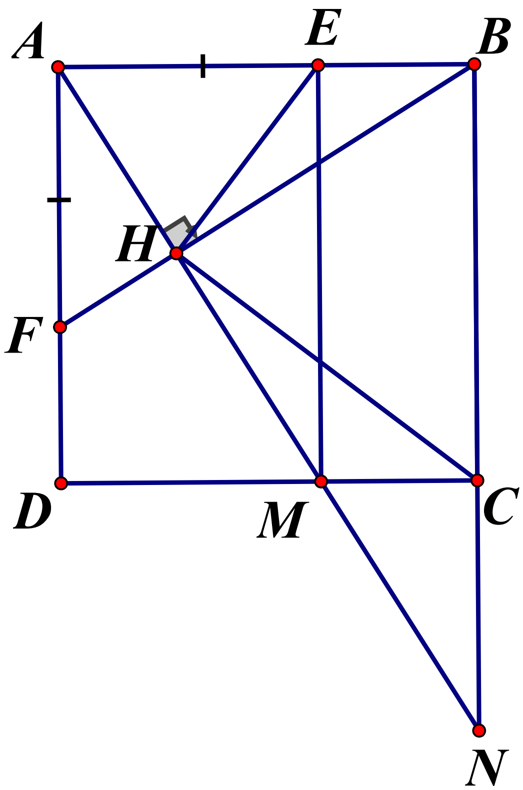
$$VT=\frac{x+z}{2}.\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y+z}{2}\right).y^2+\frac{y+z}{2}.\left(\frac{x+z}{2}-\frac{x+y}{2}\right)x^2-\frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2$$

$$=\frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2+\frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2-\frac{1}{4}.(x^2-y^2)z^2$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-z^2)y^2+\frac{1}{4}(z^2-y^2)x^2-\frac{1}{4}.(x^2-y^2).z^2$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2-\frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2=0=VP \qquad (dfcm)$$

Câu 4.



1) Ta có: $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$)

   $AB = AD \quad (gt); \widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^0$ (ABCD là hình vuông)

   $\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BAF\,(g.c.g)$

   $\Rightarrow DM = AF,$ mà $AF = AE(gt)$ nên $AE = DM$

   Lại có: $AE\,//\,DM$ (vì $AB\,//\,DC$)

   Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành . Mặt khác $\widehat{DAE} = 90^0(gt)$

   Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\Delta ABH \sim \Delta FAH(g.g)$

   $\Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{BH}{AH}$ hay $\dfrac{BC}{AE} = \dfrac{BH}{AH}(AB = BC; AE = AF)$

   Lại có: $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$)

   $\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta AEH\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \dfrac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\dfrac{BC}{AE}\right)^2$, mà $\dfrac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\dfrac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD

Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF(dfcm)$

3) Do $AD//CN(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC//AB(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$\dfrac{MN}{AN} = \dfrac{MC}{AB} \Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{MC}{MN}$ hay $\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{MC}{MN}$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

$(Pytago)$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \qquad (dfcm)$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Vơi mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $x,y,z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (*)$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$

Thật vậy, với $a,b \in \mathbb{R}$ và $x,y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$ (Vì $abc=1$)

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\ge\frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$ (đpcm)