

BÀI TOÁN 2. CỰC TRỊ

Câu 1. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3), B(6; -5; 8)$ và $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\vec{MA} - 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có: $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{k} \Rightarrow M(a; 0; b)$

$$\vec{MA} = (-1 - a; 2; 3 - b); \vec{MB} = (6 - a; -5; 8 - b) \Rightarrow -2\vec{MB} = (-12 + 2a; 10; -16 + 2b)$$

$$\Rightarrow \vec{MA} - 2\vec{MB} = (a - 13; 12; b - 13)$$

$$\Rightarrow |\vec{MA} - 2\vec{MB}| = \sqrt{(a - 13)^2 + 12^2 + (b - 13)^2} \geq 12$$

$$\text{Vậy } \left| \vec{MA} - 2\vec{MB} \right|_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 13 \end{cases}. \text{ Do đó } a - b = 0$$

Câu 2. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1); B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ là?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta thấy $M(a; b; 0) \in (Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có

$$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{IA} - \vec{IM})^2 + (\vec{IB} - \vec{IM})^2$$

$$= (\vec{IA}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IA} \cdot \vec{IM}) + (\vec{IB}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IB} \cdot \vec{IM})$$

$$= \vec{IM}^2 + 2\vec{IA}^2 - 2\vec{IM} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) = \vec{IM}^2 + \frac{\vec{AB}^2}{2} = \vec{IM}^2 + 7$$

Bởi vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt

phẳng (Oxy) . Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Như vậy $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

Câu 3. (THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 1; 3), B(1; -1; 2), C(3; -6; 1)$. Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(2; -2; 2)$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (Oyz)
 $\Leftrightarrow M(0; -2; 2)$.

Vậy $P = 0 - 2 + 2 = 0$.

Câu 4. (Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3; 2; 1)$, $B(-2; 3; 6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ khi đó:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} \\ y_H = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} \\ z_H = \frac{z_A + 3z_B}{1+3} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; \frac{19}{4}\right) \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Xét $T = \frac{z_H}{1} = \frac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là:

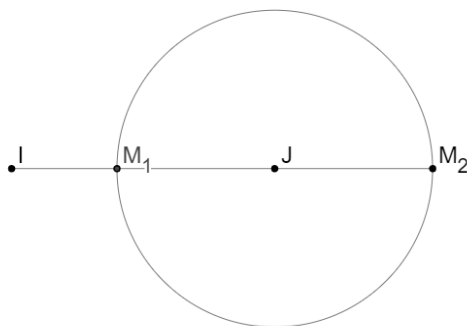
$$\begin{cases} x_M = x_H - aT \\ y_M = y_H - bT \\ z_M = z_H - cT \Rightarrow M\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; 0\right) \end{cases}$$

Vậy $T = x_M + y_M + z_M = -\frac{3}{4} + \frac{11}{4} + 0 = 2$.

Câu 5. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1)$, $B(3; 1; 3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m - n)$.

Lời giải

Trả lời: 60



Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(5; 5; -1)$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \text{ có tâm } J(1; 2; -1) \text{ và bán kính } R=3$$

$$\text{Suy ra } IJ = 5$$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$\min MI = IM_1 = IJ - R = 5 - 3 = 2$$

$$\max MI = IM_2 = IJ + R = 5 + 3 = 8$$

$$\text{Suy ra } m - n = 8^2 - 2^2 = 60$$

Câu 6. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải

Trả lời: 4

$$\text{Ta có } (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (S) \text{ có tâm } I(1; 1; 3) \text{ và bán kính } R=2.$$

$$\text{Bài ra } A, M, B \text{ nằm trên mặt cầu } (S) \text{ và } \angle AMB = 90^\circ \Rightarrow AB \text{ qua } I \Rightarrow AB = 2R = 4.$$

$$\text{Ta có } S_{AMB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4$$

$$\Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ và } AB = 4.$$

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 7. (Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$$

Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

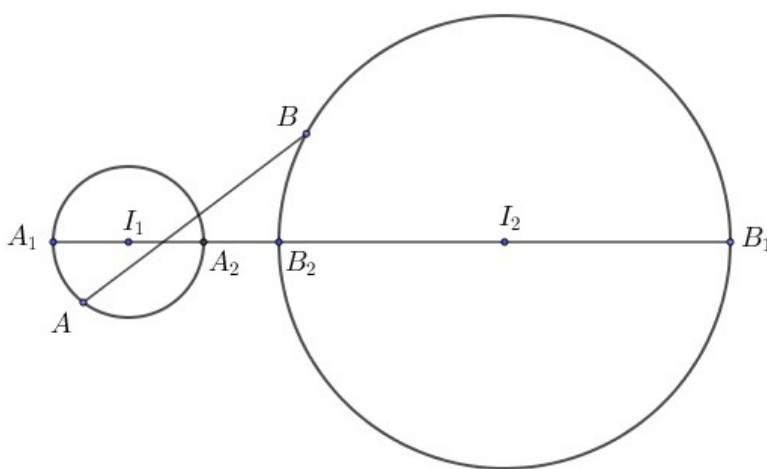
$$F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$$

lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 8

Gọi $A(d, e, f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1; 2; 3)$, bán kính $R_1 = 1$, $B(a, b, c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3; 2; 0)$, bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 3; 4)$ và $C(-2; 5; 1)$. Điểm $M(a; b; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 10

Ta có $G(-1; 3; 2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2MG(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2
\end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy) . Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1; 3; 0)$. Vậy $M(-1; 3; 0)$. Từ đó $T = (-1)^2 + 3^2 = 10$.

Câu 9. (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

Lời giải:

Trả lời: -1

$$\text{Xét } S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$$

$$= 6MI^2 + MI(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}$$

$$\begin{aligned}
&4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{4x_A + 3x_B + 5x_C}{12} \\ y_I = \frac{4y_A + 3y_B + 5y_C}{12} \\ z_I = \frac{4z_A + 3z_B + 5z_C}{12} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(-\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}\right)
\end{aligned}$$

Gọi I là điểm thỏa mãn

$$\text{Mà: } (4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) = \vec{0} \quad \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \text{const.} \quad \text{Nên } S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$$

$$\text{Suy ra } M \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên mặt } Oxy. \Rightarrow M\left(-\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, 0\right) \Rightarrow T = 12a + 12b + c = -1$$

Câu 10. (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 6

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16$$

$$M(a; b; c) \in (S) \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 16$$

Ta có: $|2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)| \leq \sqrt{(2^2+3^2+6^2) \cdot [(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2]}$

$\Leftrightarrow |2a+3b+6c-20| \leq 28 \Rightarrow 2a+3b+6c-20 \leq 28 \Rightarrow 2a+3b+6c \leq 48$

Dấu "=" xảy ra khi:
$$\begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ \frac{a-1}{2}=\frac{b-2}{3} \\ \frac{a-1}{2}=\frac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ 3a-2b=-1 \\ 3a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{15}{7} \\ b=\frac{26}{7} \\ c=\frac{38}{7} \end{cases}$$

$P=2a-b+c=2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6$

Vậy

Câu 11. (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$ (với $t > 0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$.

Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 11

Gọi $P(x; y; z)$, ta có: $\overrightarrow{OP} = (x; y; z)$, $\overrightarrow{AP} = (x-2t; y-2t; z)$, $\overrightarrow{BP} = (x; y; z-t)$,

Vì $P(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4tx - 4ty - 2tz - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}tx - \frac{4}{3}ty - \frac{2}{3}tz - 1 = 0$

Nên P thuộc mặt cầu tâm $I\left(\frac{2t}{3}; \frac{2t}{3}; \frac{t}{3}\right)$, $R = \sqrt{t^2 + 1}$

Ta có $OI = t < R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP = OI + R$.

Suy ra $OP_{\max} = OI + R \Leftrightarrow 3 = t + \sqrt{t^2 + 1}$. Từ đó tìm được $t = \frac{4}{3}$ Suy ra $a = 4, b = 3$

Vậy, $Q = 2a + b = 11$.

Câu 12. (HSG Nam Định-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(4; 1; 5)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 2; 0)$ và điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

Lời giải

Trả lời: 13

+ Đặt $Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

$$(\overline{MA} - \overline{MB})^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2\overline{MA}.\overline{MB} \Rightarrow \overline{MA}.\overline{MB} = \frac{1}{2}(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{AB}^2)$$

$$(\overline{MB} - \overline{MC})^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MB}.\overline{MC} \Rightarrow 2\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{BC}^2$$

$$(\overline{MC} - \overline{MA})^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MA}^2 - 2\overline{MC}.\overline{MA} \Rightarrow \overline{MC}.\overline{MA} = \frac{1}{2}(\overline{MC}^2 + \overline{MA}^2 - \overline{AC}^2)$$

$$\Rightarrow Q = \overline{MA}.\overline{MB} + 2\overline{MB}.\overline{MC} - 5\overline{MC}.\overline{MA}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{AB}^2) + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{BC}^2 - \frac{5}{2}(\overline{MC}^2 + \overline{MA}^2 - \overline{AC}^2)$$

$$= -2\overline{MA}^2 + \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{3}{2}\overline{MC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \frac{5}{2}\overline{AC}^2$$

$$- \frac{1}{2}\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \frac{5}{2}\overline{AC}^2 \quad \text{không đổi nên } Q \text{ lớn nhất khi } T = -2\overline{MA}^2 + \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{3}{2}\overline{MC}^2 \text{ đạt giá trị}$$

$$T = -2\overline{MA}^2 + \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{3}{2}\overline{MC}^2$$

$$\text{Gọi } E \text{ là điểm thỏa mãn } -2\overline{EA}^2 + \frac{3}{2}\overline{EB}^2 - \frac{3}{2}\overline{EC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\overline{EA}^2 + 3\overline{EB}^2 - 3\overline{EC}^2 = 0 \Leftrightarrow 4\overline{EA}^2 = 3\overline{CB}^2 \Leftrightarrow \overline{EA} = \frac{3}{4}\overline{CB}$$

$$\Rightarrow E\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right)$$

$$T = -2\overline{MA}^2 + \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{3}{2}\overline{MC}^2 = -2(\overline{ME} + \overline{EA})^2 + \frac{3}{2}(\overline{ME} + \overline{EB})^2 - \frac{3}{2}(\overline{ME} + \overline{EC})^2$$

$$= -2\overline{ME}^2 - 2\overline{EA}^2 + \frac{3}{2}\overline{EB}^2 - \frac{3}{2}\overline{EC}^2 \leq -2\overline{EA}^2 + \frac{3}{2}\overline{EB}^2 - \frac{3}{2}\overline{EC}^2$$

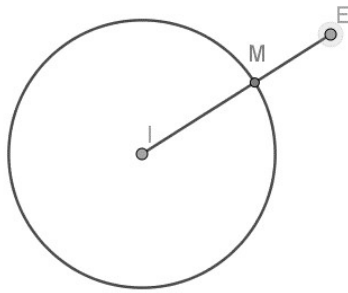
$$\text{Vì } -2\overline{EA}^2 + \frac{3}{2}\overline{EB}^2 - \frac{3}{2}\overline{EC}^2 \text{ không đổi nên } T \text{ đạt giá trị lớn nhất khi } \overline{ME} = 0 \Rightarrow M \equiv E.$$

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right)$$

$$P = a - 2b + 4c = 1 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{17}{4} = 13$$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2\overline{MA}^2 + 3\overline{MB}^2$ bằng?

Trả lời: 105



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$ bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overline{EA} + 3\overline{EB} = 0$. Suy ra $E(-1;1;1)$.

Xét
$$P = 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overline{ME} + \overline{EA})^2 + 3(\overline{ME} + \overline{EB})^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2$$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE = 2\sqrt{3} > R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$$IE - R = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Vậy $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 105$.

Câu 14. (Kim Liên - Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA = \sqrt{2} > R$ và $IB = \sqrt{82} > R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1;-2;-1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

Ta có:
$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{MB} &= (\overline{MK} + \overline{KA}) \cdot (\overline{MK} + \overline{KB}) \\ &= MK^2 + MK \cdot (\overline{KA} + \overline{KB}) + \overline{KA} \cdot \overline{KB} = MK^2 - KA^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

Đánh giá: $IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R$.

Suy ra $\overline{MK}$ nhỏ nhất bằng $\overline{IK} - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K . Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S) .

Có $\overline{IK} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM$.

$$\text{Suy ra } \overline{IK} = 4IM \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -1; 3)$, $B(-2; -8; -4)$, $C(2; -1; 1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

Lời giải

Trả lời: 6

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overline{JA} - 2\overline{JB} + \overline{JC} = 0 \Leftrightarrow 2\overline{JO} + 3\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC} = 0$
 $\Leftrightarrow 2\overline{OJ} = 3\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC} \Rightarrow J(3; 6; 9)$.

Mà $3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MJ} + (3\overline{JA} - 2\overline{JB} + \overline{JC})$ nên $|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}| = |2\overline{MJ}|$

Do đó $|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overline{MJ}|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{14}$ và $IJ = 2\sqrt{14} > R \Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2 .

$$(IJ): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 6t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $M_1(2; 4; 6), M_2(0; 0; 0)$, $M_1J = \sqrt{14}; M_2J = 3\sqrt{14}$.

Vậy $|3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overline{MJ}|_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

$$P = x_M + y_M = 2 + 4 = 6$$

Câu 16. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là?

Lời giải

Trả lời: 12

Mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ có tâm $I(0;0;1)$.

Vì A, B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA = IB$.

$$\begin{aligned} OA^2 - OB^2 &= (\vec{OI} + \vec{IA})^2 - (\vec{OI} + \vec{IB})^2 \\ &= 2\vec{OI} \cdot (\vec{IA} - \vec{IB}) = 2\vec{OI} \cdot \vec{BA} = 2OI \cdot BA \cdot \cos \varphi, \text{ với } \varphi = (\vec{OI}, \vec{BA}). \end{aligned}$$

Suy ra biểu thức $OA^2 - OB^2$ đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi = 0$.

Vậy $\max(OA^2 - OB^2) = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos 0 = 12$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} + \frac{3}{5}\vec{OC} = (2;1;1) \Leftrightarrow I(2;1;1)$.

Khi đó, $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2$

$$= 5MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC}) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

$$= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{vì } \vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0})$$

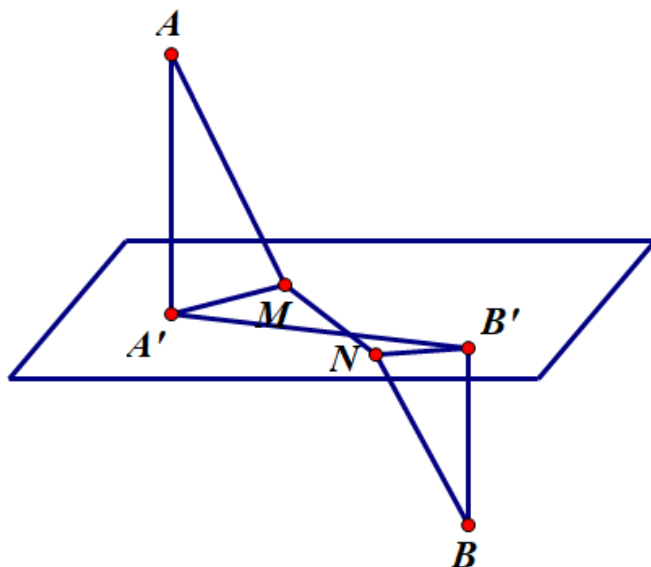
Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I(2;1;1) \Rightarrow a=2, b=c=1$.

Vậy $a+b+c=4$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\vec{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

Lời giải

Trả lời: 7



Gọi $A'(0; 0; 0)$ và $B'(2; -3; 0)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (P) .

Suy ra: $AA' = 3$, $BB' = 5$, $A'B' = \sqrt{13}$.

Lại có: $AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2}$

Mặt khác $A'M + MN + B'N \geq A'B' \Leftrightarrow A'M + B'N \geq A'B' - MN = \sqrt{13} - 1$.

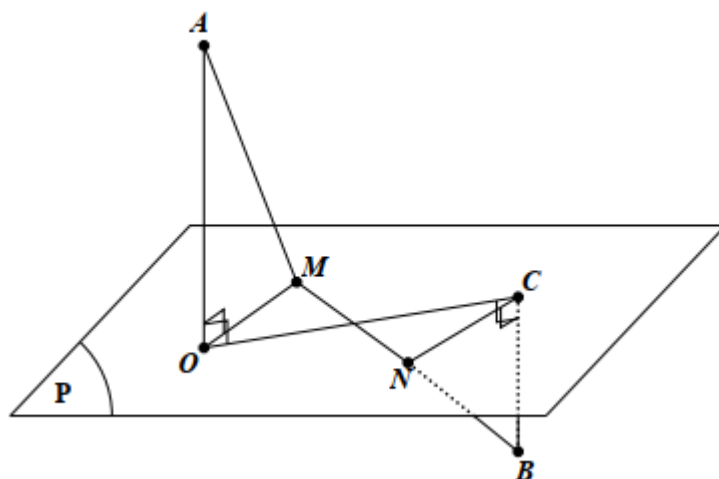
Suy ra $AM + BN \geq \sqrt{(3+5)^2 + (\sqrt{13} - 1)^2} = \sqrt{78 - 2\sqrt{13}}$.

Vậy $a = 78$, $b = 2$, $c = 13$. Vậy $a + b + c = 93$.

Câu 20. (THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(2; -1; 3)$ bán kính $R = 4$ và mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) là giao của hai mặt cầu (S) và (S_1) . Gọi M, N là hai điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $\sqrt{a - b\sqrt{2}}$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $A(0; 5; 0), B(3; -2; -4)$. Tính giá trị gần đúng của $\frac{b}{a}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,13



Ta có $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

Vi $(P) = (S) \cap (S_1) \Rightarrow (P): y=0 \Rightarrow (P) \equiv (Ozx)$

Ta có $O(0;0;0), C(3;0;-4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(0;5;0), B(3;-2;-4)$ xuống mặt phẳng (P) .

Mà $OA=5; OC=5; BC=2$

Do đó

$$AM + BN = \sqrt{OA^2 + OM^2} + \sqrt{BC^2 + CN^2} \geq \sqrt{(OA+BC)^2 + (OM+CN)^2} = \sqrt{49 + (OM+CN)^2}$$

Lại có $OM + MN + NC \geq OC \Rightarrow OM + NC \geq OC - MN = 5 - \sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi O, M, N, C thẳng hàng.

$$\text{Vậy } AM + BN \geq \sqrt{49 + (OM+CN)^2} \geq \sqrt{49 + (5 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{76 - 10\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } a = 76; b = 10 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{10}{76} \approx 0,13$$

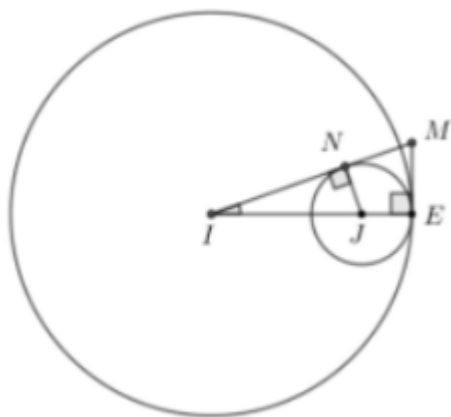
Câu 21. (Sở Hà Tĩnh 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16; (S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và I là tâm của (S_1) . Xét điểm $M(a; b; c)$ di động trên (P) sao cho IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) , khi AM ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 1

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2), R_1=4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $J(1;-1;0), R_2=1$.

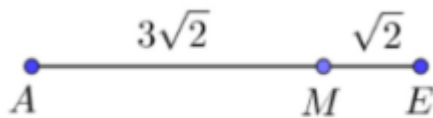
Do $IJ = R_1 - R_2 = 3 \Rightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong tại E như hình vẽ (vẽ đại diện là đường tròn).



Ta có $\overrightarrow{JE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}(1; -2; -2) \Rightarrow E\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và (P) là mặt phẳng qua E vuông góc với IJ có phương trình là $(P): x - 2y - 2z - 6 = 0 \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right) \in (P)$. Theo giả thiết thì IM tiếp xúc với (S_2) tại N .

Tính toán $\sin I = \frac{JN}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan I = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{EM}{EI} \Rightarrow EM = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$.

Khi đó $AM \geq AE - EM = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, M, E thẳng hàng như hình vẽ:



Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}(0; -4; 4) = (0; -3; 3) \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; -\frac{14}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow a + b + c = -1$.

Câu 22. (Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – 2022) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và hai điểm $A(3; 0; 0); B(-1; 1; 0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$.

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Ta có $M \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$$MA = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2}; MB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } MA + 3MB &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) - 8} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \\ &= 3\sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \\ &= 3(MC + MB) \geq 3BC \text{ với } C\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right). \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$ bằng 5 khi

$$\begin{cases} M \in BC \cap (S) \\ CM = k \cdot CB (k > 0) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3-8\sqrt{6}}{25}; \frac{4+6\sqrt{6}}{25}; 0\right).$$

Câu 23. (THPT Đô Lương – Nghệ An – 2022) Trong không gian $Oxyz$ cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng tọa độ (xOy) với mặt cầu $(S): (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 41$. Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $A(0;0;12), B(0;4;8)$. Với M, N là các điểm thay đổi thứ tự trên (C) và d . Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 2,35

Phương trình $(C): (x-6)^2 + (y-6)^2 = 32$ với tâm $I(6;6)$ và bán kính $R=4\sqrt{2}$.

Gọi $F = (d) \cap Oy, IK \perp Oy, D = IK \cap (C), G = IF \cap (C), ML \perp Oy$. Như vậy để MN đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải thuộc cung nhỏ DG .

$$\begin{cases} KH \perp (d): NL \perp (d) \\ LK = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{NL}{KH} = \frac{FL}{FK} \\ KH = d(K : (d)) = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow NL = KH \frac{6-x}{6} = \frac{6-x}{\sqrt{2}}$$

$$LM = 6 - \sqrt{R^2 - d^2(I; (ML))} = 6 - \sqrt{32 - KL^2} = 6 - \sqrt{32 - x^2}$$

$$MN = \sqrt{ML^2 + LN^2} = \sqrt{\left(\frac{6-x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2} + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2} = f(x)$$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2} + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2}, \forall x \in [-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - (x+6)\sqrt{32-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 3,5145 \in [-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(3,5145) \approx 2,35488$$

Câu 24. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và điểm $H(3;0;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

H và cắt mặt cầu theo dây cung $BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ không đổi. Khi khoảng cách từ O đến Δ lớn nhất thì Δ đi qua điểm $N(-20; m; n)$. Tính $m+n = ?$

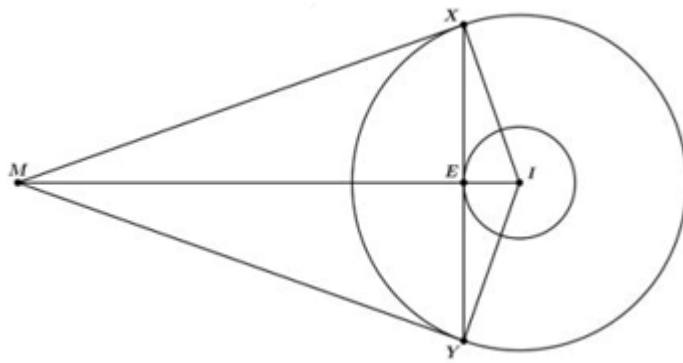
Lời giải

Trả lời: 3

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=2$. Khi đó ta có:

$$d(I; \Delta) = IE = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

. Dễ dàng đánh giá được khoảng cách từ O đến Δ lớn nhất khi Δ và hai điểm I, O đồng phẳng, từ đó ta có hình vẽ như sau:



Đặt $M(a; b; 0), (a, b \in \mathbb{Z})$ khi đó ta có: (áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$MI = \frac{IX^2}{IE} = \frac{R_1^2}{R_2} = 9 \Rightarrow MI^2 = (a - 6)^2 + (b - 7)^2 + 64 = 81 \Leftrightarrow (a - 6)^2 + (b - 7)^2 = 17$$

Từ đó ta suy ra điểm M thuộc đường tròn $(C): (x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 17$. Bài toán chuyển về tìm số nghiệm nguyên $(a; b)$ thỏa phương trình $(a - 6)^2 + (b - 7)^2 = 17$. Khi ấy ta suy ra: $a - 6, b - 7$ là các căn bậc hai củ số chính phương. Từ đó ta chia thành hai trường hợp như sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} (a - 6)^2 \leq 1 \\ (b - 7)^2 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq a - 6 \leq 1 \\ -4 \leq b - 7 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq a \leq 7 \\ 3 \leq b \leq 11 \end{cases} \Rightarrow (a; b) = (5; 3); (5; 11); (7; 3); (7; 11)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} (a - 6)^2 \leq 16 \\ (b - 7)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq a - 6 \leq 4 \\ -1 \leq b - 7 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a \leq 10 \\ 6 \leq b \leq 8 \end{cases} \Rightarrow (a; b) = (2; 6); (10; 6); (2; 8); (10; 8)$$

Như vậy tổng lại ta có 8 tọa độ nguyên M thỏa mãn.

Câu 26. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022) Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; -1; 2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 3$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho biểu thức $3MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $P = x + y + 2z$ là?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $(S): x^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 3 \Rightarrow$ tâm $K(0; 5; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $3IA^2 - IB^2 - IC^2 = 0 \Rightarrow I(-2; 7; 0)$.

$$\text{Ta có } 3MA^2 - MB^2 - MC^2 = 3(MI + IA)^2 - (MI + IB)^2 - (MI + IC)^2$$

$$= MI^2 + 2MI(3IA^2 - IB^2 - IC^2) + 3IA^2 - IB^2 - IC^2 = MI^2 + 3IA^2 - IB^2 - IC^2$$

Để $3MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I, M, K$ thẳng hàng.

Mà $IK = 2\sqrt{3} = 2R \Rightarrow M$ là trung điểm của $IK \Rightarrow M(-1; 6; 1) \Rightarrow P = x + y + 2z = 7$.

Câu 27. (Sở KonTum 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3), B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị lớn nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 84

Có $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1 \Rightarrow$ tâm $I(-1;0;3)$ và bán kính $R=1$.

Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Rightarrow J(1;-1;1)$.

Khi đó ta có:

$$MA^2 + 2MB^2 = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA})^2 + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 = 3MJ^2 + 2MJ(\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB}) + JA^2 + 2JB^2.$$

Do đó để $MA^2 + 2MB^2 \max \Leftrightarrow MJ_{\max}$. Do đó $MJ_{\max} = IJ + R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} + 1 = 4$.

Vậy Max của $MA^2 + 2MB^2$ là $3 \cdot 4^2 + (2^2 + 2^2 + 4^2) + 2 \cdot (1^2 + 1^2 + 2^2) = 84$.

Câu 28. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có
$$\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2c \\ b = 2 \end{cases}$$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - [d(I;(P))]^2} = \sqrt{25 - [d(I;(P))]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I;(P))$ lớn nhất

Ta có
$$d(I;(P)) = \frac{|a + 2b + 3c - 2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 - 2c + 4 + 3c - 2|}{\sqrt{(2 - 2c)^2 + 2^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}$$

Xét
$$f(c) = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2 - 8c + 8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2 - 144c + 192}{(5c^2 - 8c + 8)^2 \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$					
						$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(I;(P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 29. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 18

Từ giả thiết ta có $a > 0, b > 0, c > 0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27$.

Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq \frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Vậy $\min_{V_{OABC}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a=b=c=3$. Khi đó $a+2b+3c=18$.

Câu 30. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: -4

+ Vì (α) qua A ta có: $-(-4)+c=0 \Rightarrow c=-4$.

+ Vì (α) qua B ta có: $2a+c=0 \Rightarrow a=2$.

$$\Rightarrow (\alpha) : 2x + by - z - 4 = 0$$

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, $R = 3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón:

$$h = d_{(I, \alpha)} = \frac{|2 - 2b - 3 - 4|}{\sqrt{4 + b^2 + 1}} = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$$

+ Bán kính đường tròn:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{27 - \left(\frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}} \right)^2} = \sqrt{27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5}}$$

+ Thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5} \right) \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$$

+ Tới đây ta có thể Thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$ và xét hàm số $f(t) = (27 - t^2)t$ trên đoạn $[0; 3\sqrt{3}]$.

Ta có: $f'(t) = 27 - 3t^2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3(l) \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên:

t	0	3	$3\sqrt{3}$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			54	
	0			0

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi

$$t = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}} \right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 4b^2 + 20b + 25 = 9b^2 + 45$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

Vì vậy $a - b + c = -4$.

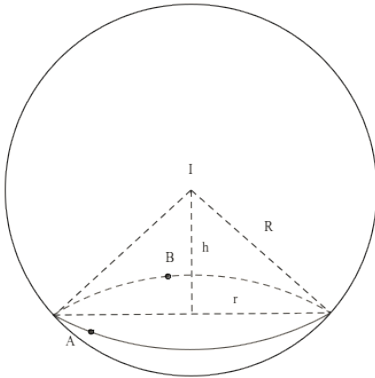
$$A \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}; \frac{7 - \sqrt{3}}{2}; 3 \right), B \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{7 + \sqrt{3}}{2}; 3 \right)$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}; \frac{7 - \sqrt{3}}{2}; 3 \right)$, $B \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{7 + \sqrt{3}}{2}; 3 \right)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}; d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có

đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a + b + c + d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 6



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Có $IA = IB = \sqrt{6}$ nên A, B thuộc mặt cầu (S) .

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0) = -\sqrt{3}(1; -1; 0) = -\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$ là trung điểm của AB .

Gọi $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $A, B \in (P)$ nên có
$$\begin{cases} I \notin (P) \\ \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}b + 3c + d = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -6a - 3c \\ a = b \end{cases}$$

Gọi $h = d(I, (P))$, $(C) = (P) \cap (S)$, r là bán kính đường tròn (C) .

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{6 - h^2}$$

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N) .

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2r = h \cdot \sqrt{6 - h^2} \leq \frac{h^2 + 6 - h^2}{2} = 3$$

$$\max S = 3 \text{ khi } h^2 = 6 - h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$h = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{|a + 2b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$$

Nếu $a = c$ thì $b = a; d = -9a$ và $(P): ax + ay + az - 9a = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$ (nhận).

Nếu $a = -c$ thì $b = a; d = -3a$ và $(P): ax + ay - az - 3a = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$ (loại).

$$\text{Vậy } T = |a + b + c + d| = 6$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4), B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-4=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$?

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có: (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

$A, B \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+4c-4=0 \\ c-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-12 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow (P): -2(b+6)x+by+4z-4=0$.

Do

Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (P) và $(S) \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}$, để r đạt

giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Mà $d(I, (P)) = \frac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}$.

$$f(x) = \frac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}}; f'(x) = \frac{32x+288}{(\sqrt{5x^2+48x+160})^3}; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-9.$$

Xét hàm số

Bảng xét biến thiên:

x	$-\infty$	-9	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-1,34	$f(-9) \approx -1,66$	1,34

suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	-9	$-\frac{8}{3}$	$+\infty$
$ f(x) $	1,34	$f(-9) \approx 1,66$	0	1,34

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $x=-9 \Rightarrow b=-9 \Rightarrow a=6 \Rightarrow T=1$.

Kết luận: $T=1$.

Câu 33. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3), B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2) \in (P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$

Lời giải

Trả lời: 0

$$C(a;b;-2) \in (P) \Rightarrow a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2 \Rightarrow C(a;a+2;-2)$$

$$\vec{AB} = (0; -2; -2) \quad \vec{AC} = (a-1; a; -5) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (10+2a; -2a+2; 2a-2)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{\sqrt{(2a+10)^2 + 2(2a-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{12a^2 + 24a + 108}}{2} = \sqrt{3(a^2 + 2a + 9)}$$

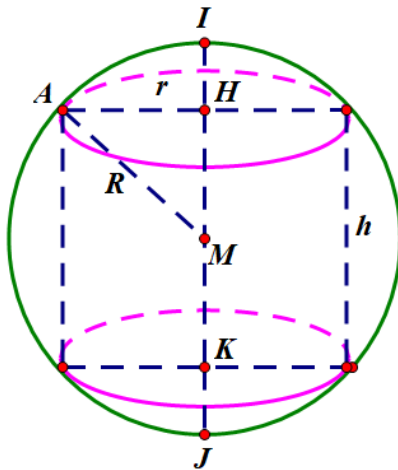
$$= \sqrt{3(a+1)^2 + 24} \geq 2\sqrt{6} \quad \text{với } \forall a$$

Do đó $\min S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{6}$ khi $a = -1$. Khi đó ta có $C(-1; 1; -2) \Rightarrow a+b=0$.

Câu 34. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021) Trong không gian cho hai điểm $I(2; 3; 3)$ và $J(4; -1; 1)$. Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính IJ và có hai tâm nằm trên đường thẳng IJ . Khi có thể tích (T) lớn nhất thì hai mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của (T) có phương trình dạng $x+by+cz+d_1=0$ và $x+by+cz+d_2=0$. Giá trị của $d_1^2 + d_2^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 26



Ta có: $\vec{IJ} = (2; -4; -2) = 2(1; -2; -1)$. Mặt cầu có bán kính $R = \frac{IJ}{2} = \sqrt{6}$, tâm $M(3; 1; 2)$ là trung điểm của IJ .

Gọi H, K lần lượt là tâm của hai đường tròn đáy của hình trụ.

$$r = AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{6 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{24 - h^2}{4}}$$

Thể tích khối trụ:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{24 - h^2}{4} \cdot h = \frac{\pi}{4} (24 - h^2) \cdot h$$

$$\text{Ta có: } \frac{24 - h^2}{2} + \frac{24 - h^2}{2} + h^2 \geq 3 \sqrt{\left(\frac{24 - h^2}{2} \cdot h \right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{24-h^2}{2}h\right)^2} \leq 8 \Leftrightarrow \left(\frac{24-h^2}{2}h\right)^2 \leq 512 \Leftrightarrow \frac{24-h^2}{2}h \leq 16\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V \leq 4\pi\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{24-h^2}{2} = h^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2} \Rightarrow MH = MK = \sqrt{2}$

Gọi (α) vuông góc với IJ và cách tâm M của mặt cầu một khoảng là $\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow (\alpha): x - 2y - z + d = 0$$

Có $d(M, (\alpha)) = \sqrt{2}$. Mà $d(M, (\alpha)) = \frac{|3 - 2 \cdot 1 - 2 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1 + d|}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow |-1 + d| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 + 2\sqrt{3} \\ d = 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Nhận xét mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy chính là mặt phẳng (α) .

Không mất tính tổng quát gọi $d_1 = 1 + 2\sqrt{3}; d_2 = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 26$

Câu 35. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$. Khi tổng $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt phẳng (α) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (OAB) có dạng $mx + ny + pz + q = 0$ (với $m, n, p, q \in \mathbf{Z}; \frac{q}{p}$ là phân số tối giản). Giá trị $T = m + n + p + q$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 5

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 90$.

Ta có

$$P = OA + OB + OC = a + b + c. \text{ Đặt } x = a - 4 \geq 0, y = b - 5 \geq 0, z = c - 6 \geq 0.$$

Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 77 = 90.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13.$$

$$T = (x + y + z)^2 + 12(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 2(xy + yz + zx + 2x + y).$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13$ và $x, y, z \geq 0$ nên $(x + y + z)^2 + 12(x + y + z) - 13 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x + y + z \geq 1 \Leftrightarrow a - 4 + b - 5 + c - 7 \geq 1 \Leftrightarrow a + b + c \geq 16 \Rightarrow \{OA + OB + OC\}_{\min} = 16.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 5, c = 7$.

Suy ra, $A(4; 0; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 7)$.

Gọi mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A(4; 0; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 7), O(0; 0; 0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 16 - 8a + d = 0 \\ 25 - 10b + d = 0 \\ 49 - 14c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{7}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Tâm của mặt cầu (S) là $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(OAB) \equiv (Oxy): z = 0 \Rightarrow (\alpha): z + e = 0$.

Vì $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ thuộc (α) nên $\frac{7}{2} + e = 0 \Leftrightarrow e = -\frac{7}{2}$

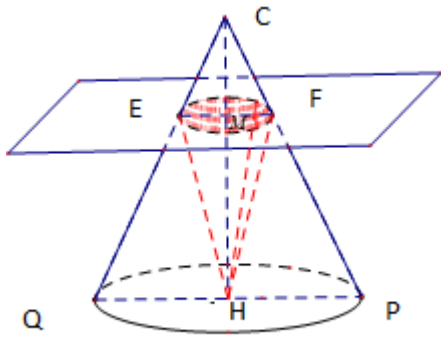
Suy ra, $2z - 7 = 0 \Rightarrow m = 0; n = 0; p = 2; q = -7$.

$$T = m + n + p + q = -5$$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $C(-1; 2; 11), H(-1; 2; -1)$, hình nón (N) có đường cao $CH = h$ và bán kính đáy là $R = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm trên đoạn CH , (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục CH tại M của hình nón (N) . Gọi (N') là khối nón có đỉnh H đáy là (C) . Khi thể tích khối nón (N') lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp nón (N') có tọa độ tâm $I(a; b; c)$, bán kính là d . Giá trị $a + b + c + d$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 6



Đặt $HM = x$, $0 < x < h$. Gọi l, R, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của nón (N) , bán kính đường tròn (C) . Khi đó ta có $CH = h = 12$ là chiều cao của (N) , $R = 3\sqrt{2}$.

Khi đó C, I, H thẳng hàng (I nằm giữa C, H).

Do tam giác $\triangle CEM \sim \triangle CQH$ nên $\frac{EM}{QH} = \frac{CM}{CH} \Leftrightarrow EM = \frac{QH \cdot CM}{CH}$

$$\Leftrightarrow r = EM = FM = \frac{R(h-x)}{h}$$

đỉnh O đáy là (C) là
Thể tích của khối nón

$$V = \frac{1}{3} \pi EM^2 \cdot HM = \frac{1}{3} \pi \left[\frac{R(h-x)}{h} \right]^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$$

Ta có Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$ ($0 < x < h$)

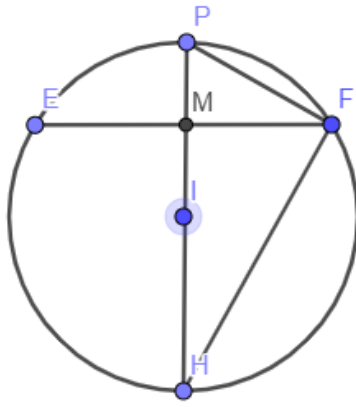
$$f'(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$		

thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x = \frac{h}{3}$
Từ bảng biến ta có

Chú ý: Có thể đánh giá dựa vào



$$(h-x)^2 x = (h-x)(h-x)x = \frac{1}{2}(h-x)(h-x)2x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h-x+h-x+2x}{3}\right)^3 \text{ với } 0 < x < h. \text{ Dấu "="}$$

xảy ra khi ba số $(h-x) = (h-x) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

$$\text{Khi đó } HM = x = \frac{h}{3} = 4, \quad r = \frac{R \cdot CM}{h} = \frac{R \cdot (h-x)}{h} = 2\sqrt{2} = MF$$

Gọi P là giao điểm của HM với mặt cầu ngoại tiếp nón (N') . Ta có ΔHFP vuông tại F
 $\Rightarrow HF^2 = HM \cdot HP$

$$\Leftrightarrow HM^2 + MF^2 = HM \cdot HP \Leftrightarrow 16 + (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot HP \Rightarrow HP = 6$$

$$\Rightarrow d = HI = 3 = \frac{1}{4} HC \Rightarrow HI = \frac{1}{4} HC \Rightarrow I(-1; 2; 2)$$

Vậy $a + b + c + d = 6$.

Câu 37. Trong hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ và $(S_2): (x-10)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 400$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y + mz + 22 = 0$. Có bao nhiêu số nguyên m để mp (P) cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn không có tiếp tuyến chung?

Lời giải

Trả lời: 6

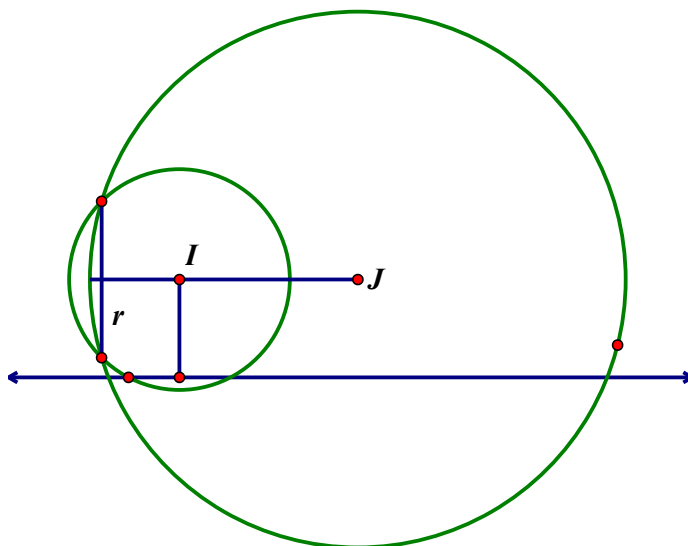
Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; -3; 2)$, bán kính $R_1 = 7$; mặt cầu (S_2) có tâm $J(10; 9; 2)$, bán kính $R_2 = 20$. Ta có $IJ(9; 12; 0)$, $IJ = 15$.

Mặt phẳng $(P): 4x - 3y + mz + 22 = 0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_P(4; -3; m)$

Do $IJ \cdot \vec{n}_P = 0$ nên IJ song song hoặc chứa trong (P) .

Bán kính đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ là

$$r = \frac{2\sqrt{p(p-7)(p-20)(p-15)}}{15} = \frac{28}{5} \text{ với } p = \frac{20+7+15}{2} = 21$$



Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến hai mặt cầu là (Q): $3x + 4y + 30 = 0$

Ta có $d(I; (Q)) = \frac{21}{5}$, $d(J; (Q)) = \frac{96}{5}$ nên $d(I; (Q)) + IJ = d(J; (Q))$

Ta có mp(P) cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn, trong đó đường tròn nhỏ

ở trong đường tròn lớn khi $\frac{28}{5} < d(I; (P)) < 7 \Leftrightarrow \frac{28}{5} < \frac{|2m + 35|}{\sqrt{m^2 + 25}} < 7$

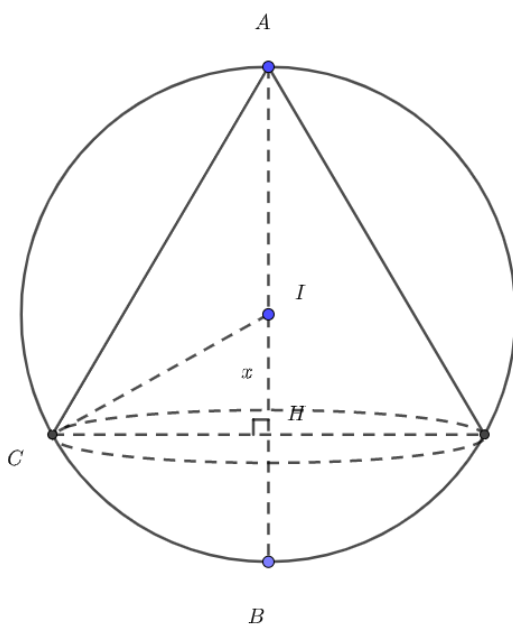
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45m^2 - 140m > 0 \\ \frac{684}{25}m^2 - 140m - 441 < 0 \end{cases}$$

Và có m nguyên, nên $m \in \{-2; -1; 4; 5; 6; 7\}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 1)$ và $B(2; 1; 1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của (N) cách điểm $E(1; 1; 1)$ một khoảng là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 0,5



Ta có: $\overline{AB} = (4; 0; 0)$ nên (P) có vtpt là $(1; 0; 0)$

$AB = 4 \Rightarrow R = 2$. Đặt x như hình vẽ

Khối nón (N) có $h = x + 2$ và $r^2 = HC^2 = 4 - x^2$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (4 - x^2)(x + 2) \text{ với } 0 \leq x \leq 2$$

Khảo sát hàm số $y = (4 - x^2)(x + 2)$ với $0 \leq x \leq 2$

Đạt max khi $x = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} \Rightarrow 3IH = IB$ với $I(0; 1; 1)$

$$\Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) \Rightarrow 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 0(y - 1) + 0(z - 1) = 0$$

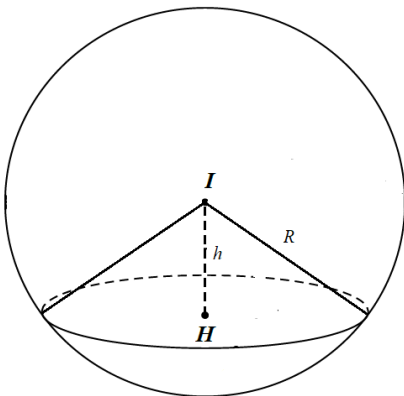
$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$. Khoảng cách từ điểm $E(1; 1; 1)$ tới mặt phẳng (P) là

$$d(E, (P)) = \frac{\left|1 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1); B(1; 3; -2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$. Xét khối nón (N) có đỉnh là tâm I của mặt cầu và đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) và đi qua hai điểm A, B có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$ và $y + mz + e = 0$. Giá trị của $b + c + d + e$ bằng?

Lời giải

Trả lời: - 13.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$

Xét khối nón (N) có đỉnh I , bán kính đáy r và chiều cao h (h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng chứa đường tròn đáy) có thể tích là

$$V_N = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (3 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (3h - h^3)$$

Khảo sát hàm $f(h) = 3h - h^3$ trên khoảng $(0; \sqrt{3})$ ta được V_N max khi $h = 1$

Bài toán quy về lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B và cách điểm I một khoảng $h = 1$

Gọi $n = (a; b; c) (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là vector pháp tuyến của mp (P)

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1; 0; 1)$; $n \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a$

Mp (P) đi qua A , với vector pháp tuyến $n = (a; b; -a)$ có phương trình là $a(x - 2) + b(y - 3) - a(z + 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - az - 3a - 3b = 0$

$$d(I, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|a + b|}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 2a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow mp(P): y - 3 = 0$

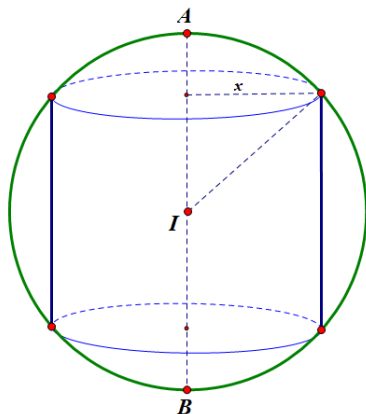
+ Với $a = 2b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2; c = -2 \Rightarrow mp(P): 2x + y - 2z - 9 = 0$

Vậy $b = 1; c = -2; d = -9; e = -3 \Rightarrow b + c + d + e = -13$.

Câu 40. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đường kính AB , với điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$. Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) và có trục nằm trên đường thẳng AB . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đáy của (T) có phương trình dạng $2x + by + cz + d_1 = 0$ và $2x + by + cz + d_2 = 0$ ($d_1 < d_2$). Có bao nhiêu số nguyên thuộc khoảng $(d_1; d_2)$?

Lời giải

Trả lời: 11



Gọi (S) có tâm $I(4; 3; 4)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}{2} = 3$.

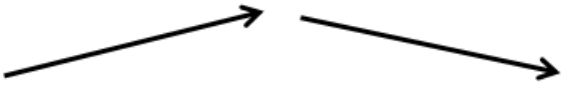
Xét (P) vuông góc với đường thẳng AB . Khi đó $(P): 2x + 2y + z + m = 0$ với $m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x > 0$ là bán kính của khối trụ (T) .

Khi đó thể tích khối trụ $V = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{9 - x^2}$ với $(0 < x < 3)$.

Đặt $t = \sqrt{9 - x^2}$, $0 < t < 3$. Khi đó $V(t) = \pi(9 - t^2) \cdot 2t = \pi(18t - 2t^3)$

$V'(t) = \pi(18 - 6t^2)$; $V'(t) = 0 \Leftrightarrow \pi(18 - 6t^2) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$.

t	0	$\sqrt{3}$	3
$V'(t)$	+	0	-
$V(t)$			

Khi (T) có thể tích lớn nhất $t = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.

Ta có khoảng cách từ tâm I của (S) đến đáy của khối trụ (T) là $\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$.

Xét $d(I, (P)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2.4 + 2.3 + 1.4 + m|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |m + 18| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 + 3\sqrt{3} \\ m = -18 - 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Khi đó hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đáy của (T) có là $2x + 2y + z - 18 + 3\sqrt{3} = 0$ và

$2x + 2y + z - 18 - 3\sqrt{3} = 0$. Suy ra $\begin{cases} d_2 = -18 + 3\sqrt{3} \\ d_1 = -18 - 3\sqrt{3} \end{cases}$.

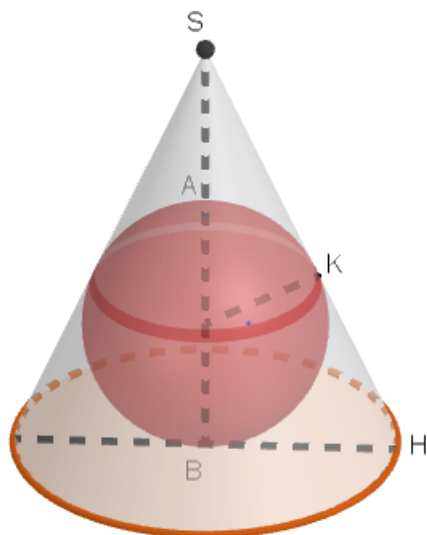
Vậy có 11 giá trị nguyên cần tìm.

Câu 41. (Chuyên Thái Bình - 2021) Trong không gian tọa độ Oxy , Cho hai điểm $A(2;1;3), B(6;5;5)$.

Xét khối nón (N) ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Gọi S là đỉnh khối nón (N) . Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$.
Tính $T = b + c + d$.

Lời giải

Trả lời: 12



Thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất khi chiều cao của khối nón gấp đôi đường kính mặt cầu.

(Chứng minh: Gọi tâm mặt cầu là I , khi đó có

$$S_{SBH} = S_{SIH} + S_{BIH} \Rightarrow \frac{1}{2} SB \cdot BH = \frac{1}{2} IK \cdot SH + \frac{1}{2} IB \cdot BH$$

$$\Rightarrow y \cdot x = r(\sqrt{y^2 + x^2} + x) \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2 y}{y - 2r}$$

Với chiều cao khối nón là y , bán kính đáy là x ; bán kính mặt cầu là r ($x > 0; y > 2r$) .

Thể tích khối nón là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{y^2}{y - 2r} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{y^2}{y - 2r} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \left(y - 2r + \frac{4r^2}{y - 2r} + 4r \right) \geq \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \left(2\sqrt{(y - 2r) \cdot \frac{4r^2}{y - 2r}} + 4r \right) = \frac{8}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Thể tích khối nón nhỏ nhất khi $y - 2r = \frac{4r^2}{y - 2r} \Leftrightarrow y = 4r \Rightarrow dpcm.$

Đường kính mặt cầu: $AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$.

Mặt phẳng (α) chứa đường tròn đáy của (N) đi qua B và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2)$ làm vectơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là

$$4(x - 6) + 4(y - 5) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 27 = 0$$

Do mặt phẳng (β) qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$ nên ta có:

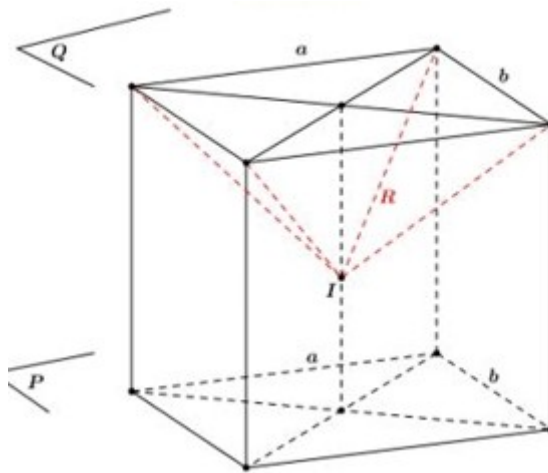
$$\begin{cases} b=2, c=1 \\ d(B;(\beta))=2AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2, c=1 \\ \frac{|2.6+b.5+c.5+d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2, c=1 \\ |27+d|=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2, c=1 \\ d=9 \\ d=-63 \end{cases}$$

Vậy $b=2, c=-1, d=19$ (do $d(B;(\beta)) > d(A;(\beta))$). Khi đó $b+c+d=12$.

Câu 42. (Chuyên Vinh – 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 16 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S) . Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q): 2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

Lời giải

Trả lời: - 13



Đầu tiên, ta có mặt cầu (S) tâm $I(2; -1; 3)$, bán kính $R = \sqrt{21}$

Tiếp đến ta nhận thấy: $d(I;(P)) = 9 > \sqrt{21}$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Gọi a, b là các kích thước mặt đáy hình hộp chữ nhật và $d = d(I;(Q))$. Khi đó ta có:

$$V = (d(I;(P)) + d(I;(Q)))ab = (9+d)ab \leq (9+d) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = (9+d)(21-d^2) = f(d)$$

Ta có:

Xét hàm số $y = f(d) = (9+d)(21-d^2)$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(d) = 0 \Leftrightarrow d = 1 \Rightarrow \max_{\mathbb{R}^+} f(d) = f(1)$

Suy ra thể tích khối hộp đạt max khi và chỉ khi $d = d(I;(Q)) = 1, (P) \parallel (Q)$

Suy

ra:

$$(Q): 2x - y + 2z + d = 0; d(I;(Q)) = \frac{|11+d|}{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -8 \\ d = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Q_1): 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ (Q_2): 2x - y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$$

Xét điểm $N(0; 0; -8)$ bất kì thuộc mặt phẳng (P) ta nhận ra để thể tích max thì chiều cao hộp phải max tức hai điểm I và N phải nằm cùng phía với mặt phẳng (Q)

Như vậy ta nhận mặt phẳng $(Q_2): 2x - y + 2z - 14 = 0$ do $(2x_I - y_I + 2z_I - 14)(2x_N - y_N + 2z_N - 14) > 0$. Với $(Q): 2x + by + cz + d = 0$, ta đồng nhất hệ số ra $b + c + d = -13$.

Câu 43. (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$, $(Q): x + y + z + 1 = 0$ và $(R): x + y + z + 2 = 0$. Ứng với mỗi cặp điểm A, B lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thì mặt cầu đường kính AB luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn. Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 1

Dễ thấy ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ song song với nhau và mặt phẳng (R) nằm giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Gọi $(\alpha): x + y + z + D = 0$ là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

$$\text{Ta có } \frac{|D - 5|}{\sqrt{3}} = \frac{|D - 1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow D = 3 \Rightarrow (\alpha): x + y + z + 3 = 0$$

Suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(R), (\alpha)$ là $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó mặt cầu đường kính AB có tâm I luôn thuộc mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Mặt cầu tâm I luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn có bán kính là $r = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - d^2}$. Để

$$r_{\min} \text{ thì } AB_{\min} = d[(P), (Q)] = \frac{4}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } r = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - d^2} = 1$$

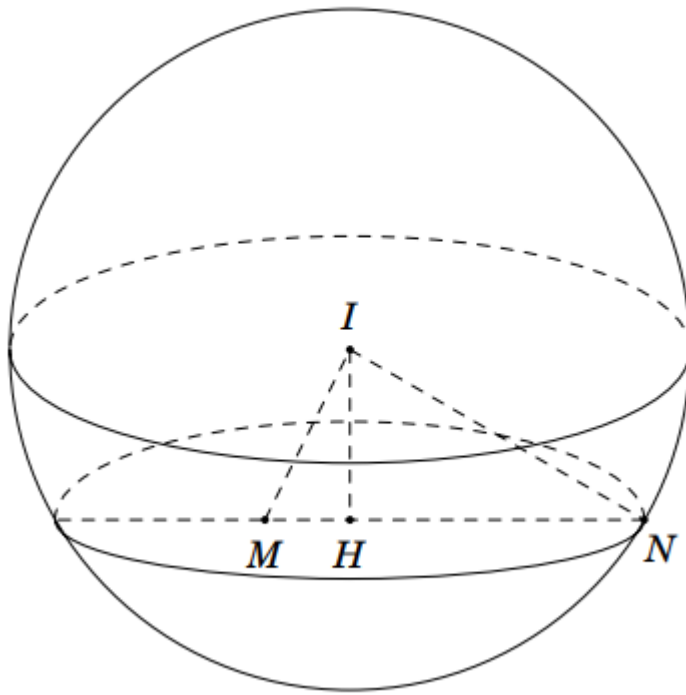
Câu 44. (Sở Hà Tĩnh 2022) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ và điểm $M(0; 1; 0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Tính y_0 .

Lời giải.

Trả lời: 2

Nhận thấy rằng, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{6}$ và điểm M là điểm nằm trong mặt cầu này. Gọi r là bán kính hình tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (P) . Dễ thấy rằng H là tâm đường tròn (C) . Khi đó, ta có $r = \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IM^2}$.

Vậy để (C) có chu vi nhỏ nhất thì r nhỏ nhất khi đó H trùng với M .



Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $M(0;1;0)$ và nhận vector $\vec{IM} = (1; -1; -1)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x - (y - 1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z = -1$.

Điểm N vừa thuộc mặt cầu (S) vừa thuộc mặt phẳng (P) và thỏa $ON = \sqrt{6}$ nên tọa độ của N

thỏa hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = -6 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases}$$

Lấy phương trình đầu trừ hai lần phương trình thứ ba ta được $-2y_0 = -4 \Leftrightarrow y_0 = 2$.

Câu 45. (Cụm trường Nam Định 2022) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 2; 4), B(-1; -2; 2)$ và mặt phẳng $(P): z - 1 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M và diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải

Trả lời: -1

Vì $M \in (P) \Rightarrow c = 1 \Rightarrow M(a; b; 1)$

$$\vec{AM} = (a+1; b-2; -3)$$

$$\vec{BM} = (a+1; b+2; -1)$$

Tam giác MAB vuông tại M nên $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$

Ta có $\left[\vec{AM}, \vec{BM} \right] = (2b+8; -2(a+1); 4(a+1))$

$$\Rightarrow S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \sqrt{4(b+4)^2 + 20(a+1)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + 8b + 16 + 5(1-b^2)} = \sqrt{-4b^2 + 8b + 21}$$

Đặt $f(b) = -4b^2 + 8b + 21 \Rightarrow f'(b) = -8b + 8 \geq 0, \forall b \in [-1; 1] \Rightarrow \min_{[-1; 1]} f(b) = f(-1) = 9$

$\Rightarrow S_{\Delta MAB}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $b = -1; a = -1 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -1$.

Câu 46. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 2022$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(a; b; c)$, $a + b + c > 0$ thuộc mặt cầu (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C có thể tích tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 4

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2022}$.

Vì $M(a; b; c) \in (S)$ nên $a^2 + b^2 + c^2 = 2022$.

Tiếp diện của (S) tại M là mặt phẳng đi qua $M(a; b; c)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{OM} = (a; b; c)$ nên phương trình tiếp diện là

$$(\alpha): ax + by + cz - a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 2022 = 0$$

Để mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $OABC$ là tứ diện thì a, b, c đều khác 0.

Ta có $A\left(\frac{2022}{a}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{2022}{b}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{2022}{c}\right)$.

Khi đó $V_{OABC} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6} = \frac{2022^3}{6 \cdot |abc|}$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \Rightarrow |abc| \leq \sqrt[3]{674^3} \Rightarrow V_{OABC} \geq 3033\sqrt{674}$.

$$a^2 = b^2 = c^2 = 674 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{674} \\ b = \pm\sqrt{674} \\ c = \pm\sqrt{674} \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\text{Mà } a+b+c > 0 \text{ nên } \begin{cases} a=b=c=\sqrt{674} \\ a=b=\sqrt{674}; c=-\sqrt{674} \\ c=a=\sqrt{674}; b=-\sqrt{674} \\ b=c=\sqrt{674}; a=-\sqrt{674} \end{cases}$$

Vậy có 4 điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 4), B(-1; -2; 2)$ và mặt phẳng $(P): z - 1 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $M(a;b;1)$

$$\overrightarrow{AM} = (a+1; b-2; -3); \overrightarrow{BM} = (a+1; b+2; -1)$$

$$AM \perp BM \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 1 - b^2$$

$$AM^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 + 9 = 14 - 4b$$

$$BM^2 = (a+1)^2 + (b+2)^2 + 1 = 4b + 6$$

$$S_{MAB}^2 = \frac{1}{4} AM^2 \cdot BM^2 = (7-2b)(2b+3) = -4b^2 + 8b + 21 \leq 25, \forall b$$

$$\Rightarrow \min S_{MAB} = 5, \text{ đạt được khi } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Câu 48. (THPT Đông Hà – Quảng Trị 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-2; -1; 2), B(2; -1; 4)$. Và mặt phẳng $(P): z - 1 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích lớn nhất. Tính $T = 2a - 3b + c$:

Lời giải:

Trả lời: 6

Ta có $M(a;b;c) \in (P) \Rightarrow c = 1 \Rightarrow M(a;b;1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+2; b+1; -1), \overrightarrow{BM} = (a-2; b+1; -3)$$

$$+) \Delta MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (b+1)^2 = 1 - a^2$$

$$+) S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a+2)^2 + (b+1)^2 + 1} \cdot \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2 + 9}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{[(a+2)^2 + 2 - a^2][(a-2)^2 + 10 - a^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(4a+6)(14-4a)} = \sqrt{(2a+3)(7-2a)}$$

$$= \sqrt{25 - 4(a-1)^2} \leq 5; \forall a. \text{ Dấu } "=" \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow \max(S_{\Delta ABC}) = 5 \Leftrightarrow M(1; -1; 1) \equiv M(a;b;c) \Rightarrow T = 2a - 3b + c = 6$$

Câu 49. (Sở Hà Nam 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0), B(3; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$. Gọi M là điểm nằm trên (P) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Hoành độ điểm M là?

Lời giải

Trả lời: 0,75

Ta thấy hai điểm A, B ở cùng phía so với (P) nên $|MA - MB| \leq AB$ và dấu "=" xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4)$ nên đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương $u = (1; -1; 2)$, mà AB qua

$$A(1; 1; 0) \text{ nên } AB \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}.$$

Tham số t ứng với M thỏa mãn $1 + t - (1 - t) + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$, suy ra hoành độ điểm M là $x = 1 + t = \frac{3}{4}$.

Câu 50. (Sở Cần Thơ 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 27$, Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; 0; -4), B(2; 0; 0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết phương trình của (α) có dạng $ax + by - z + c = 0, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị của $a - b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: -4

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Điểm $A(0; 0; -4) \in (\alpha) \Rightarrow 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$.

Điểm $B(2; 0; 0) \in (\alpha) \Rightarrow 2a + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{c}{2} = 2$.

Mặt phẳng (α) có dạng $2x + by - z - 4 = 0$.

Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) và r là bán kính của đường tròn (C) .

Khi đó khối nón có đỉnh I và đáy là đường tròn (C) có thể tích là:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 d = \frac{1}{3} \pi (R^2 - d^2) d = \frac{1}{3} \pi (27 - d^2) d$$

Đặt $f(d) = (27 - d^2) d = -d^3 + 27d, (0 < d < 3\sqrt{3})$.

Suy ra $f'(d) = -3d^2 + 27$ và $f'(d) = 0 \Leftrightarrow -3d^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ (vì $0 < d < 3\sqrt{3}$).

Bảng biến thiên:

d	0	3	$3\sqrt{3}$
$f'(d)$		+	-
$f(d)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(d)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d = 3$ hay thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất khi $d = 3 \Leftrightarrow d^2 = 9$.

$$\text{Mà } d = d(I, (\alpha)) = \frac{|-5 - 2b|}{\sqrt{5 + b^2}} \text{ nên } \frac{(-5 - 2b)^2}{5 + b^2} = 9 \Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

$$\text{Vậy } a - b + c = -4.$$

Câu 51. (Sở Cà Mau 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 27$. Gọi mặt phẳng $(P): ax + by + 2z + c = 0$ đi qua hai điểm $A(0; 0; -2), B(-4; 0; 0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Khi đó $a^2 + b^2 + c^2$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 21

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; 2; 2)$, bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Đặt $x = d_{(I, (P))}, (0 < x < 3\sqrt{3}) \Rightarrow r^2 = 27 - x^2$ với r là bán kính đường tròn giao tuyến.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(27 - x^2)x$. Từ đó suy ra $V_{\max}$ khi $x = 3$.

(xét hàm $f(x) = x(27 - x^2)$ trên khoảng $(0, 3\sqrt{3})$).

$$\text{Ta có: } A \in (P) \Rightarrow c = 4, B \in (P) \Rightarrow a = 1 \text{ và } d_{(I, (P))} = \frac{|-3 + 2b + 4 + 4|}{\sqrt{1^2 + b^2 + 2^2}} = 3 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 21.$$

Câu 52. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 4), B(-1; -2; 2)$ và mặt phẳng $(P): z - 1 = 0$. Điểm $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho tam giác MAB vuông tại M và diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải

Trả lời: -1

*Viết phương trình đường thẳng $B'D'$ và BC'

Đường thẳng $(B'D')$ đi qua điểm B' và có $\vec{u}_{B'D'} = \vec{B'D'} = (-3; 3; 0)$

$$\Rightarrow (B'D'): \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Đường thẳng (BC') đi qua điểm B và có $\vec{u}_{BC'} = \vec{BC'} = (0; 3; 3)$

$$\Rightarrow (BC'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t' \\ z = 3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

*Viết đoạn MN vuông góc chung của $(B'D')$ và (BC')

Gọi $M \in (B'D') \Rightarrow M = (3 - 3t; 3t; 3), N \in (BC') \Rightarrow N = (3; 3t'; 3t')$

$$\Rightarrow \vec{MN} = (3t; 3t' - 3t; 3t' - 3)$$

$$\begin{cases} MN \perp (B'D') \\ MN \perp (BC') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{B'D'} = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t + t' - t = 0 \\ t' - t + t' - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t' = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = (2; 1; 3), N = (3; 2; 1)$$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) thì I là trung điểm $MN \Rightarrow I = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và bán kính mặt cầu

$$R_s = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2 + (2-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ và } R_s = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - d}}{2} \Leftrightarrow d = 14.$$

Câu 54. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 1; 2), B(1; 4; 2), C(1; 1; 5)$ và đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Biết rằng có 3 điểm M thuộc (C) sao cho $MA + MB + MC$ lớn nhất. Tổng các hoành độ của 3 điểm M này bằng?

Lời giải

Trả lời: 6

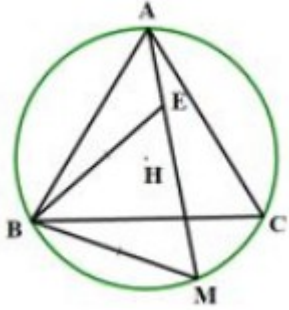
Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ có tâm $I(1; 1; 2)$, bán kính $R = 3$

Ta có: A, B, C thuộc cả mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) nên $A, B, C \in (C) = (P) \cap (S)$.

Bài toán trở thành: Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (C) .

Tìm M thuộc (C) sao cho $MA + MB + MC$ lớn nhất

Không giảm tổng quát, giả sử M thuộc cung nhỏ BC , lấy điểm E trên đoạn thẳng AM sao cho $BE = BM$.



Vì $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ \Rightarrow \triangle BME$ đều, suy ra $BM = ME(1)$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CBM$ có

$$\begin{cases} BE = BM \\ \angle BAM = \angle BCM \\ \angle ABE = \angle CBM \quad (+\angle EBC = 60^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BM \\ \angle BAM = \angle BCM \Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBM \\ \angle AEB = \angle CMB \end{cases}$$

Suy ra $CM = AE(2)$.

Do đó $MA + MB + MC \stackrel{(1),(2)}{=} MA + ME + EA = 2MA \leq 4R$. Vậy $MA + MB + MC$ lớn nhất khi $M \equiv M_1$ là điểm đối xứng với A qua tâm H của đường tròn (C) .

Tương tự M thuộc cung nhỏ CA thì $MA + MB + MC$ lớn nhất khi $M \equiv M_2$ là điểm đối xứng với B qua tâm H của đường tròn (C) . M thuộc cung nhỏ AB thì $MA + MB + MC$ lớn nhất khi $M \equiv M_3$ là điểm đối xứng với C qua tâm H của đường tròn (C) .

Khi đó $x_{M_1} + x_{M_2} + x_{M_3} = 3x_H = x_A + x_B + x_C = 6$.