# **CHƯƠNG 3 : GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC**

# **BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

## **A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ**

**1. Định nghĩa**

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn 0 như sau:  
Dãy số  có giới hạn 0 khi  dần tới dương vô cực nếu  có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu .  
*Chú ý:* Ngoài kí hiệu , ta cũng sử dụng các kí hiệu sau:  hay  khi 

Ta có: .  
*Nhận xét:* Nếu  ngày càng gần tới 0 khi  ngày càng lớn thì .

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn như sau:  
Dãy số  có giới hạn hữu hạn là  khi  dần tới dương vô cực nếu , kí hiệu   
*Chú ý:* Ngoài kí hiệu , ta cũng sử dụng các kí hiệu sau:  hay  khi 

Chú ý:

-Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

-Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số  với .

**2. Một số giới hạn cơ bản**

Ta có thể chứng tỏ được các giới hạn sau:  
a)  với  là số nguyên dương cho trước;  
b)  với  là hằng số,  là số nguyên dương cho trước;  
c) Nếu  thì ;  
d) Dãy số  với  có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là ,   
Một giá trị gần đúng của  là 2,718281828459045.

**II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN**

Ta có định lí về giới hạn hữu hạn của một tổng, của một hiệu, của một tích, của một thương và của một căn thức như sau:  
a) Nếu  thì:



b) Nếu  với mọi  và  thì  và .

**III. TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN**

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cấp số nhân vô hạn  có công bội  thoả mãn  được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là: .

**IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC**

-Ta có định nghĩa về dãy số có giới hạn vô cực như sau:

Ta nói dãy số  có giới hạn  khi , nếu  có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.  
*Kí hiệu :*  hay  hay  khi .

-Ta nói dãy số  có giới hạn  khi  nếu .  
Kí hiệu  hay  hay  khi .

*Nhận xét*

 với  là số nguyên dương cho trước.

 với  là số thực cho trước.

Nếu  và  (hoặc  thì .

Nếu  và  với mọi  thì .

.

## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1. Giới hạn hữu tỉ**

### **1. Phương pháp**

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cà tử thức và mẫu thức cho luỹ thửa cao nhất của , với  là bậc cao nhất ở mẫu, rồi áp dụng các quy tắc tinh giới hạn.

|  |
| --- |
| **Chú ý :** Cho  lần lượt là các đa thức bậc  theo biến |
|  |
| Khi đó , viết tắt , ta có các trường hợp sau : |
| Nếu « bậc tử »  « bậc mẫu () thì |
| Nếu « bậc tử »  « bậc mẫu () thì |
| Nếu « bậc tử »  « bậc mẫu () thì |
| Để ý rằng nếu  có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể  tì có bậc là  Ví dụ  có bậc là  có bậc là |
| Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng ! |

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1.** Tính .

**Ví dụ 2:** Tính 

**Ví dụ 3:** Tính 

**Ví dụ 4:** Cho dãy số  với  trong đó  là tham số thực. Để dãy số  có giới hạn hữu hạn, giá trị của  bằng bào nhiêu

**Ví dụ 5:** Cho dãy số  với  Để dãy số đã cho có giới hạn bằng , giá trị của  bằng bao nhiêu

**Ví dụ 6:** Tính giới hạn 

## **Dạng 2. Dãy số chứa căn thức**

### **1. Phương pháp**

* Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1.** Tính 

**Ví dụ 2.** Tính 

**Ví dụ 3.** Tính 

**Ví dụ 4.** Tính 

## **Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số chứa hàm mũ**

### **1. Phương pháp**

Trong tính giới hạn  mà  là hàm số mũ thì chia cả tử và mẫu cho  với *a* là cơ số lớn nhất. Sau đó sử dụng công thức:  với 

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:** Tính 

**Ví dụ 2:** Tính 

**Ví dụ 3:**  Tính 

**Ví dụ 4:** Tính 

**Ví dụ 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  thuộc  sao cho  là một số nguyên.

## **Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn**

### **1. Phương pháp**

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là 

* Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (un)



* Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10



### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:**  Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn 

**Ví dụ 2:**  Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn  (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

**Ví dụ 3:** Tổng  có kết quả bằng bao nhiêu?

**Ví dụ 4:**  Cho 



Biểu thị biểu thức theo 

**Ví dụ 5:**  Tìm số hạng  của cấp số nhân lùi vô hạn, biết 

**Ví dụ 6:**  Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết 

**Dạng 5: Phương pháp sai phân và quy nạp tính giới hạn**

**1. Phương pháp**

**1) Dạng tồng các phân số.**

Ví Dụ: 

Ta phân tích : .(1)

Để tính  ta thay  từ  vào biểu thức (1) ta tính dễ dàng

**2) Dạng tích các phân số:**

Ví dụ: 

Ta phân tích: 

Để tính  ta thay  từ  vào biểu thức  ta tính dễ dàng

**3) Dang đa thức:**

**a) Mỗi đơn thức ở dạng tích:**

**Ví dụ:** 

Ta tách:

Để tính  ta thay  từ : 1,2,3,…, 99 vào biểu thức (3) ta tính được dễ dàng

**Ví dụ:** 

Ta tách: 



Đề tính  ta thay  từ :  vào biều thức (4) ta tính dễ dàng

**4 ) Đơn thức dạng lũy thừa**

**Ví Dụ:** Tính ****

Ta dùng hẳng đẳng thức **: .**

****

****

**…**

****

**Cộng vế theo vế**

****

****

****

****

***Ngoài ra ta có thể dự đoán được số hạng tổng quát, có thể kết hợp quy nạp để khẳng đinh.***

***Có thể ùng vòng lặp MTCT để giải quyết các bài toán này.***

**2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:** Cho . Tính 

**Ví dụ 2:**  Cho  Tính 

**Ví dụ 3:**  bằng bao nhiêu?

**Ví dụ 4:** Tính **g**iới hạn: 

**Ví dụ 5:** Tìm giới hạn của dãy: 

**Ví dụ 6:**  Tìm giới hạn của dãy: 

**Ví dụ 7:**  Tìm giới hạn của dãy: 

## **C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 1.** Cho hai dãy số  với . Tính các giới hạn sau:  
a) .  
b) 

**Bài 2.** Tính các giới hạn sau:

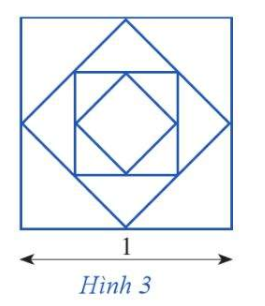
a) ; b) ;

c) ; d) ;

e) ; g) .

**Bài 3.** a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn , với .  
b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số.

**Bài 4.** Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 , người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như *Hình 3*.

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.   
a) Tính diện tích  của hình vuông được tạo thành ở bước thứ ;  
b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

**Bài 5.** Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian  năm thì một nửa số chất

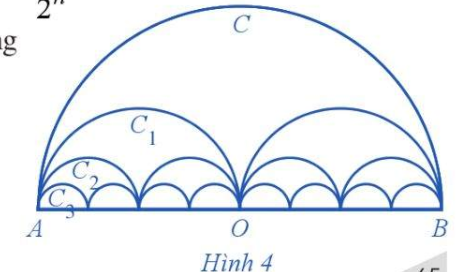
phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (  được gọi là chu kì

bán rã).

*(Nguồn: Đại số và Giải tich 11, NXB GD Việt Nam, 2021)*

Gọi  là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ .  
a) Tìm số hạng tổng quát  của dãy số .  
b) Chứng minh rằng  có giối hạn là 0 .  
c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn .

**Bài 6.** Gọi  là nửa đường tròn đường kính ,  là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính  là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính   là đường gồm  nửa đường tròn đường kính  (Hình 4).



Gọi  là độ dài của  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  và đoạn thẳng .  
a) Tính .  
b) Tìm giối hạn của các dãy số  và .



## **D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A. ** **B. ** **C.** 0. **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A. ** **B.** 0. **C. ** **D. **

1. Cho hai dãy số  và  có  và  Khi đó  có giá trị bằng:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

1. Cho dãy số  với  trong đó  là tham số thực. Để dãy số  có giới hạn bằng , giá trị của  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính giới hạn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính giới hạn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính giới hạn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D. **

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A. ** **B. ** **C.** 0 **D. **

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D. **

1. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Dãy số nào sau đây có giới hạn là 

**A.  B. ** **C. ** **D. **

1. Tính giới hạn 

**A.**  **B. ** **C.**  **D. **

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  thuộc khoảng  để .

**A.** 17. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

1. Tính giới hạn 

**A.**  **B. ** **C.**  **D. **

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Có bao nhiêu giá trị của  để 

**A. ** **B.** 2. **C. ** **D.** 3.

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  thỏa .

**A. ** **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho dãy số  với , trong đó  là tham số thực. Tìm  để 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Giá trị của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Biết rằng  với  Tính giá trị của biểu thức 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tìm tất cả giá trị nguyên của  thuộc  để 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Kết quả của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Kết quả của giới hạn  là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng , tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng . Số hạng đầu  của cấp số nhân đó là:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính tổng 

**A. ** **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính tổng .

**A. ** **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tính tổng .

**A. ** **B.**  **C.**  **D.** 

1. Tổng của cấp số nhân vô hạn  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Tính tổng .

**A.**  **B. ** **C. ** **D. **

1. Giá trị của giới hạn  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D.** Không tồn tại.

1. Rút gọn  với 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Rút gọn  với 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Thu gọn  với 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho  là các số thực thuộc  và các biểu thức:







Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn bởi phân số tối giản . Tính tổng 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn bởi phân số tối giản . Tính 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn bởi phân số tối giản . Tính 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Số thập phân vô hạn tuần hoàn  được biểu diễn bởi phân số tối giản . Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

1. Tính giới hạn: 

**A.** 0. **B.**  **C.**  **D.** 1.

1. Tính giới hạn: 

**A.** 0. **B.** 1. **C.**  **D.** Không có giới hạn.

1. Tính giới hạn: 

**A.** 1. **B.** 0. **C.**  **D.** 2.

1. Tính giới hạn: 

**A. ** **B.** 1. **C.** 0. **D. **

1. Tính giới hạn: 

**A. ** **B.** 2. **C.** 1. **D. **

1. Cho dãy  với  Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

**A. ** **B.**  **C.**  **D. ** không tồn tại.

1. Tìm giới hạn của dãy: 

**A.** 2. **B.** 1. **C.**  **D.** Không có giới hạn.

1. Tìm giới hạn của dãy: 

**A.** 1. **B.**  **C.**  **D.** Không có giới hạn.

1. Tìm giới hạn của dãy: 

**A.** 2. **B.**  **C.**  **D.** Không có giới hạn.