**ĐỀ 67**

**HSG TOÁN 9 LẠNG SƠN NĂM 2023-2024**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho A = : với x > 0,

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

**Câu 2 (4,0 điểm)**. Cho phương trình ẩn x , tham số m :

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

**Câu 3. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại A và AB < AC. Đường tròn (B; BA) cắt đường tròn (C; CA) tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với E (B; BA), F (C; CA), biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và

b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại (B; BA), (C; CA) lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng BL // AC và

c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng

**Câu 5 (2,0 điểm)**

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P =

b) Cho số tự nhiên n và cho trước 7n + 1 đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có n + 1 đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

**--------- HẾT -----------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho A = : với x > 0,

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

**Lời giải**

**a/** A = :

= :

= .

= .

= =

b/ Chú ý rằng < 3 (luôn đúng).

Do đó, 0 < < 3 với mọi x > 0

Vậy A = là số nguyên thì chỉ có thể có các trường hợp sau đây

TH1: = 1

TH2: = 2

**Câu 2 (4,0 điểm)**. Cho phương trình ẩn x , tham số m :

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

**Lời giải**

(1)

' =

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt m >

Theo hệ thức Vi-ét:

Theo giả thiết:

+ +

4

Vậy < m

**Câu 3. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình

**Lời giải**

Từ (1) suy ra hoặc

Từ (2) suy ra

Với

Với

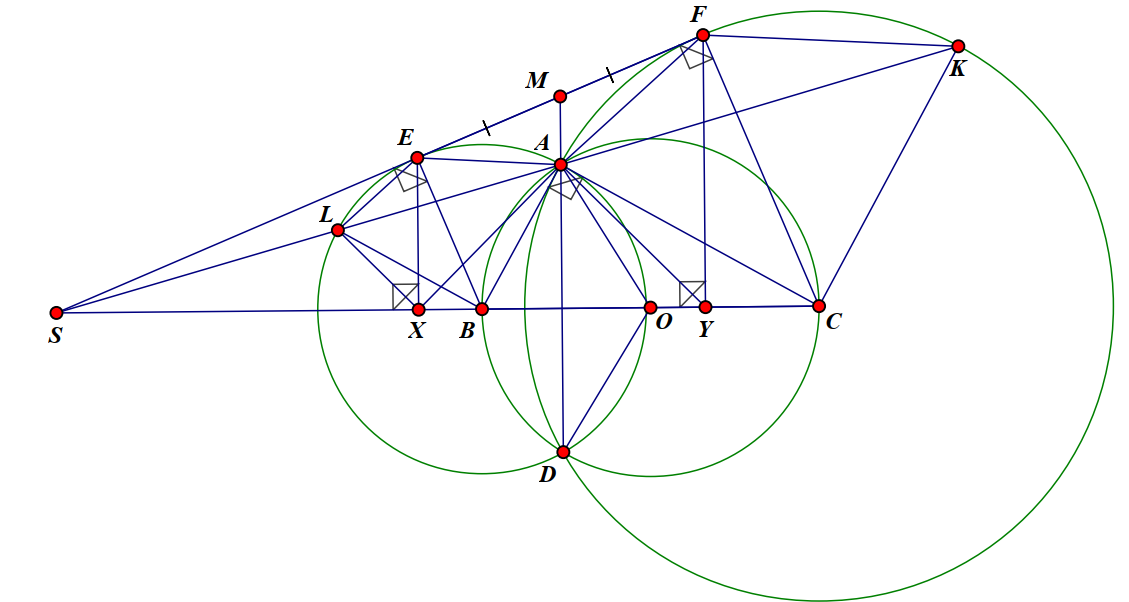
**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại A và AB < AC. Đường tròn (B; BA) cắt đường tròn (C; CA) tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với E (B; BA), F (C; CA), biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và

b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại (B; BA), (C; CA) lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng BL // AC và

c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng

**Lời giải**

****

**a/** Vì ME là tiếp tuyến của (B; BA) nên theo tính chất tiếp tuyến thì

Tương tự thì . Do = ME = MF

Ta có và (góc tiếp tuyến và dây cung)

Do đó, suy ra

b/ Vì BE//CF nên theo Thales thì

Dễ thấy BC là trung trực của AD nên SD = SA. Do đó,

c/ Theo hệ thức lượng tam giác SEB thì SX.SB =

Theo tính chất tiếp tuyến thì = SL.SA

Do đó, SX.SB = SL.SA suy ra XBAL nội tiếp nên (2)

Vì EX//FY nên (3), Vì BL//CA nên (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra nên XL//AY. Do đó, từ BL//CA và XL//AY suy ra (góc có cạnh tương ứng song song) (5)

Từ (2) và (5) suy ra tức là

**Câu 5 (2,0 điểm)**

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P =

b) Cho số tự nhiên n và cho trước 7n + 1 đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có n + 1 đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

**Lời giải**

a/ P = =

=

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

, có dấu bằng khi y = 2x

, có dấu bằng khi z = 4x

, có dấu bằng khi z = 2y

Vậy P

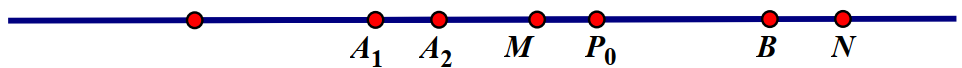
Suy ra min P = , khi x = ; y = ; z =

b/ Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Bước 1: Với n = 0 thì đề bài cho 1 đoạn thẳng, hiển nhiên là đúng.

Bước 2: Giả sử bài toán đúng cho n = 1

Bước 3: Xét bài toán với n



Ta gọi là đoạn thẳng có đầu mút bên trái là điểm xa nhất về bên phải so với tất cả các đoạn thẳng còn lại (cụ thể với hai đoạn MN, thì hai điểm bên trái là M, thì xa nhất phía bên phải).

Dễ thấy, mọi đoạn thẳng có giao với đều phải chứa

TH1: Nếu ít nhất 7 đoạn có giao điểm với thì 7 đoạn này cùng với I0 có điểm chung là .

TH2: Nếu không xảy ra TH 1, thì ít nhất có 7(nđoạn thẳng không cắt .

+ Nếu có 8 đoạn trong chúng có điểm chung thì bài toán được giải quyết.

+ Nếu ngược lại thì theo giả thiết quy nạp sẽ có ít nhất n đoạn trong chúng phân biệt từng đôi một, thêm vào đoạn thì được n + 1 đoạn phân biệt từng đôi một.

Vậy trong cả hai trường hợp thì bài toán đều đúng, tức là quy nạp được thực hiện.

**--------- HẾT -----------**