**ĐỀ 67**

**HSG TOÁN 9 LẠNG SƠN NĂM 2023-2024**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho A = $\left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ : $\frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với x > 0, $\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

**Câu 2 (4,0 điểm)**. Cho phương trình ẩn x , tham số m :

$$x^{2}-2\left(m+1\right)x+m^{2}+4=0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},$ $x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}\leq 3m^{2}+16$

**Câu 3. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}+3\left(x-y\right)+2=0\\x^{2}+y^{2}+2xy-10x-10y+25=0\end{array}\right.$$

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại A và AB < AC. Đường tròn (B; BA) cắt đường tròn (C; CA) tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với E $\in $ (B; BA), F $\in $ (C; CA), biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\hat{EAF}+\hat{EDF}=180°$

b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại (B; BA), (C; CA) lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng BL // AC và $SD^{2}=SL.SK$

c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\hat{XAY}=90°$

**Câu 5 (2,0 điểm)**

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$

b) Cho số tự nhiên n $\geq 0$ và cho trước 7n + 1 đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có n + 1 đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

**--------- HẾT -----------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho A = $\left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ : $\frac{\sqrt{x}-1}{3x}$ với x > 0, $\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để A là số nguyên.

**Lời giải**

**a/** A = $\left(\frac{x-2}{x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ : $\frac{\sqrt{x}-1}{3x}$

= $\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^{3}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ : $\frac{\sqrt{x}-1}{3x}$

= $\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ . $\frac{3x}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ . $\frac{3x}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{3x\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ = $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$

b/ Chú ý rằng $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ < 3 $⇔3x<3x+3\sqrt{x}+3⇔0<3\sqrt{x}+3$ (luôn đúng).

Do đó, 0 < $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ < 3 với mọi x > 0

Vậy A = $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ là số nguyên thì chỉ có thể có các trường hợp sau đây

TH1: $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ = 1 $⇔3x=x+\sqrt{x}+1⇔2x-\sqrt{x}-1=0$

$⇔\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}=1\\\sqrt{x}=\frac{-1}{2} (L)\end{array}\right.$ $⇔x=1$

TH2: $\frac{3x}{x+\sqrt{x}+1}$ = 2$⇔3x=2x+2\sqrt{x}+2⇔x-2\sqrt{x}-2=0$

$⇔\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}=1+\sqrt{3}\\\sqrt{x}=1-\sqrt{3}<0 (L)\end{array}\right.$

$$⇔x=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}. Vậy các giá trị cần tìm là x=1 hoặc x=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}$$

**Câu 2 (4,0 điểm)**. Cho phương trình ẩn x , tham số m :

$$x^{2}-2\left(m+1\right)x+m^{2}+4=0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},$ $x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}\leq 3m^{2}+16$

**Lời giải**

$x^{2}-2\left(m+1\right)x+m^{2}+4=0 $(1)

$∆$' = $\left(m+1\right)^{2}-\left(m^{2}+4\right)=2m-3$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},$ $x\_{2}$ $⇔$ m > $\frac{3}{2}$

Theo hệ thức Vi-ét: $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=2(m+1)\\x\_{1}.x\_{2}=m^{2}+4\end{array}\right.$

Theo giả thiết: $x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}\leq 3m^{2}+16$

$⇔$ $x\_{1}^{2}$ + $x\_{2}^{2}$ + $x\_{1}.x\_{2}$ $\leq 3m^{2}+16$

$⇔$ $\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-x\_{1}.x\_{2}$ $\leq 3m^{2}+16$

$⇔$ 4$\left(m+1\right)^{2}-\left(m^{2}+4\right)\leq 3m^{2}+16$

$⇔8m\leq 16$ $⇔m$ $\leq 2$

Vậy $\frac{3}{2}$ < m $\leq 2$

**Câu 3. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}+3\left(x-y\right)+2=0\\x^{2}+y^{2}+2xy-10x-10y+25=0\end{array}\right.$$

**Lời giải**

$\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}+3\left(x-y\right)+2=0\\x^{2}+y^{2}+2xy-10x-10y+25=0\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}+3\left(x-y\right)+2=0 (1)\\\left(x+y-5\right)^{2}=0 (2)\end{array}\right.$

Từ (1) suy ra $x=y=-1$ hoặc $x-y=-2$

Từ (2) suy ra $x+y=5$

Với $\left\{\begin{array}{c}x-y=-1\\x+y=5\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=2\\y=3\end{array}\right.$

Với $\left\{\begin{array}{c}x-y=-2\\x+y=5\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{7}{2}\end{array}\right.$

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại A và AB < AC. Đường tròn (B; BA) cắt đường tròn (C; CA) tại điểm thứ hai là D. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên với E $\in $ (B; BA), F $\in $ (C; CA), biết rằng E và A cùng phía so với đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng AD đi qua trung điểm của EF và $\hat{EAF}+\hat{EDF}=180°$

b) Gọi EF cắt BC tại S và SA cắt lại (B; BA), (C; CA) lần lượt tại L, K khác A. Chứng minh rằng BL // AC và $SD^{2}=SL.SK$

c) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\hat{XAY}=90°$

**Lời giải**

****

**a/** Vì ME là tiếp tuyến của (B; BA) nên theo tính chất tiếp tuyến thì $ME^{2}=MA.MD$

Tương tự thì $MF^{2}=MA.MD$. Do $ME^{2}$ = $MF^{2}$ $⇒$ ME = MF

Ta có $\hat{EDA}=\hat{FEA}$ và $\hat{FDA}=\hat{EFA}$ (góc tiếp tuyến và dây cung)

Do đó, $\hat{EDF}=\hat{EDA}+\hat{FDA}=\hat{FEA}+\hat{EFA}=180°-\hat{EAF} $suy ra

$\hat{EAF}+\hat{EDF}=180°$

b/ Vì BE//CF nên theo Thales thì $\frac{SL}{SA}$ $=\frac{SB}{SC}$ $=\frac{SA}{SK}$ $⇒SA^{2}=SL.SK$

Dễ thấy BC là trung trực của AD nên SD = SA. Do đó, $SD^{2}=SL.SK$

c/ Theo hệ thức lượng tam giác SEB thì SX.SB = $SE^{2}$

Theo tính chất tiếp tuyến thì $SE^{2}$ = SL.SA

Do đó, SX.SB = SL.SA suy ra XBAL nội tiếp nên $\hat{XAB}=\hat{XLB}$ (2)

Vì EX//FY nên $\frac{SX}{SY}$ $=\frac{SE}{SF}$ (3), Vì BL//CA nên $\frac{SL}{SA}$ $=\frac{SB}{SC}$ (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra $\frac{SX}{SY}$ $=$ $\frac{SL}{SA}$ nên XL//AY. Do đó, từ BL//CA và XL//AY suy ra $\hat{XLB}=\hat{YAC}$ (góc có cạnh tương ứng song song) (5)

Từ (2) và (5) suy ra $\hat{XAB}=\hat{YAC}$ tức là $\hat{XAY}=\hat{BAC}$ $=90°$

**Câu 5 (2,0 điểm)**

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$

b) Cho số tự nhiên n $\geq 0$ và cho trước 7n + 1 đoạn thẳng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có n + 1 đoạn thẳng đôi một phân biệt hoặc 8 đoạn thẳng có điểm chung.

**Lời giải**

a/ P = $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$ = $\frac{1}{3}$ $\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z} \right)$

= $\frac{1}{3}$ $\left[\left(\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\right)+\left(\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\right)+\frac{21}{16}\right]$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

$\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}$ $\geq $ $\frac{1}{4}$ , có dấu bằng khi y = 2x

$\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}$ $\geq $ $\frac{1}{2}$ , có dấu bằng khi z = 4x

$\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}$ $\geq 1$ , có dấu bằng khi z = 2y

Vậy P $\geq $ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+\frac{21}{16} \right)$

Suy ra min P = $\frac{49}{48}$, khi x = $\frac{3}{7}$ ; y = $\frac{6}{7}$ ; z = $\frac{12}{7}$

b/ Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Bước 1: Với n = 0 thì đề bài cho 1 đoạn thẳng, hiển nhiên là đúng.

Bước 2: Giả sử bài toán đúng cho n = 1

Bước 3: Xét bài toán với n



Ta gọi $I\_{0}$ là đoạn thẳng có đầu mút bên trái $P\_{0}$ là điểm xa nhất về bên phải so với tất cả các đoạn thẳng còn lại (cụ thể với hai đoạn MN, $P\_{0}B$ thì hai điểm bên trái là M, $P\_{0}$thì $P\_{0}$ xa nhất phía bên phải).

Dễ thấy, mọi đoạn thẳng có giao với $I\_{0}$ đều phải chứa $P\_{0}$

TH1: Nếu ít nhất 7 đoạn có giao điểm với $I\_{0}$ thì 7 đoạn này cùng với I0 có điểm chung là$ P\_{0}$ .

TH2: Nếu không xảy ra TH 1, thì ít nhất có 7(n$-1)+1$đoạn thẳng không cắt $I\_{0}$ .

+ Nếu có 8 đoạn trong chúng có điểm chung thì bài toán được giải quyết.

+ Nếu ngược lại thì theo giả thiết quy nạp sẽ có ít nhất n đoạn trong chúng phân biệt từng đôi một, thêm vào đoạn $I\_{0}$ thì được n + 1 đoạn phân biệt từng đôi một.

Vậy trong cả hai trường hợp thì bài toán đều đúng, tức là quy nạp được thực hiện.

**--------- HẾT -----------**